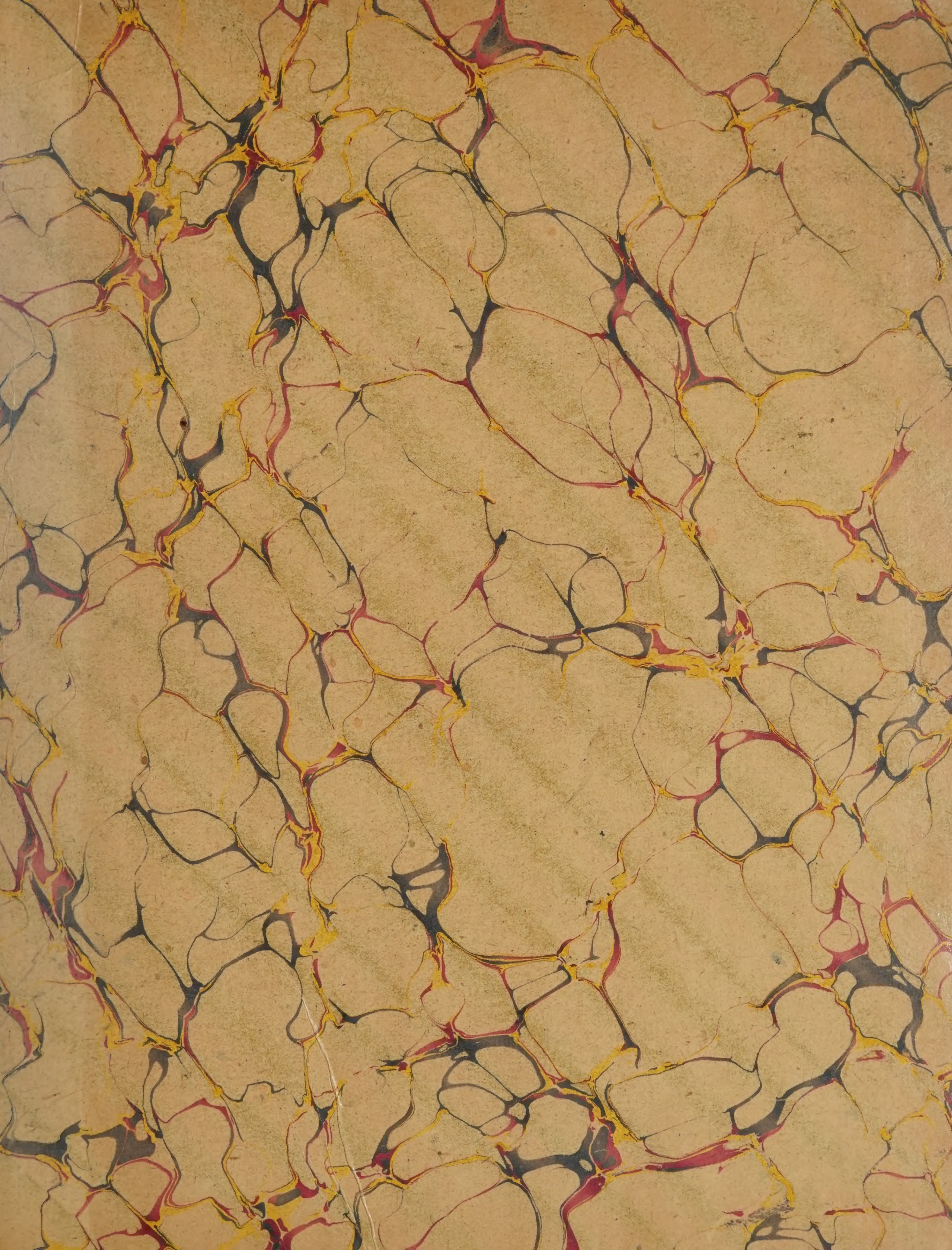




L'ÉDUCATION MATHÉMATIQUE

L'ÉDUCATION
MATHÉMATIQUE

JOURNAL PUBLIÉ PAR

J. GRIESS & **H. VUIBERT**

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
PROFESSEUR AGRÉGÉ AU LYCÉE CHARLEMAGNE

RÉDACTEUR DU
Journal de Mathématiques élémentaires

Entre esprits égaux et toutes choses pareilles, celui qui a de la géométrie l'emporte et acquiert une vigueur toute nouvelle.

PASCAL.

1RE ANNÉE

1898-99

PARIS
LIBRAIRIE NONY ET Cie
63, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

22e Année. — N° 1. JOURNAL PARIS, le 1er Octobre 1897.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO....................	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL..............	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

ARITHMÉTIQUE

4162. — *L'expression* $9^{2n+1}+8^{n+2}$ *est divisible par* 73.

On a $9^{2n+1}=9.(9^2)^n=9.81^n=9(73+8)^n=m.73+9.8^n$,

$$8^{n+2}=8^2.8^n=64.8^n=(73-9)8^n=m'.73-9.8^n.$$

En ajoutant membre à membre, il vient

$$9^{2n+1}+8^{n+2}=m''.73.$$

C. Q. F. D.

(M. BERTIN-CONRADS, collège Chaptal.)

[Ont résolu la même question : MM. G. Blondin, lycée de Sens ; O. Bouquey, à Saint-Emilion ; A. Bouzy, instituteur à Vervins ; M. Cryé ; J. Dejonc ; A. Desplat; C. Faivre ; E. Foucart ; R. Henry, à Maizières ; G. Hiernaux, école normale de Châlons-sur-Marne ; H. Janois ; X. Lacreuse ; E. Le Maigre ; A. Maître : J. Méchal ; A. Mirc, lycée de Dijon ; M. Oger, à Ste-Paterne ; P. Plisson, instituteur à Sens ; F. Pégorier ; F. Reisz, à Györ (Hongrie) ; A. Smântanescu, lycée Internat, à Jassy, Roumanie ; L. Vignes ; P. Vincent.]

ALGÈBRE

4098. — *On a trois lingots différents formés d'un alliage d'or, d'argent et de cuivre. Ces lingots contiennent :*

Le 1er, 25gr d'or, 30gr d'argent, 40gr de cuivre ;
Le 2e, 15 — 25 — 35 — ;
Le 3e, 17 — 32 — 45 — .

Quel poids faut-il prendre sur chacun d'eux pour former un 4e lingot contenant 39gr d'or, 59gr d'argent, 81gr de cuivre?

(*Diplôme d'élève de 2e classe de la marine marchande, 1897.*)

Les poids des trois lingots sont respectivement

$$25+30+40=95^{gr},$$
$$15+25+35=75^{gr},$$
$$17+32+45=94^{gr}.$$

Soient x, y, z les quantités respectives de ces trois lingots qu'il faut prélever pour former le quatrième lingot. Comme chaque partie d'un lingot contient la même proportion d'or, d'argent et de cuivre que le lingot entier, en faisant successivement la somme des quantités d'or, d'argent et de cuivre fournies par les parties x, y, z de chaque lingot, on doit avoir

$$\frac{25}{95}x+\frac{15}{75}y+\frac{17}{94}z=39, \qquad (1)$$
$$\frac{30}{95}x+\frac{25}{75}y+\frac{32}{94}z=59, \qquad (2)$$
$$\frac{40}{95}x+\frac{35}{75}y+\frac{45}{94}z=81. \qquad (3)$$

Retranchons (1) de (2), puis (2) de (3) ; il vient

$$\frac{5}{95}x+\frac{10}{75}y+\frac{15}{94}z=20, \qquad (4)$$
$$\frac{10}{95}x+\frac{10}{75}y+\frac{13}{94}z=22. \qquad (5)$$

En retranchant (4) de (5), y se trouve éliminé, et il reste

$$\frac{5}{95}x-\frac{2}{94}z=2. \qquad (6)$$

En portant dans (1) et (4) la valeur de x tirée de (6), on a

$$\frac{15}{75}y+\frac{27}{94}z=29, \qquad (7)$$
$$\frac{10}{75}y+\frac{17}{94}z=18. \qquad (8)$$

Multiplions (7) par 2 et (8) par 3, puis retranchons membre à membre ; nous aurons

$$\frac{54}{94}z-\frac{51}{94}z=58-54,$$

d'où
$$z=\frac{94\times 4}{3}=125^{gr},33.$$

En tenant compte de cette valeur de z, les équations (6) et (7) deviennent

$$\frac{5}{95}x-\frac{8}{3}=2, \qquad \text{d'où} \qquad x=\frac{19\times 14}{3}=88^{gr},66\,;$$
$$\frac{15}{75}y+36=29, \qquad \text{d'où} \qquad y=-35^{gr}.$$

La valeur négative de y montre que le problème est impossible avec les données numériques fournies.

(E. MÉNISSIER, instituteur-adjoint, à Troyes.)

[Ont résolu la même question : MM. L. Bessoles ; R. Henry, à Maizières ; M. Oger, à Saint-Paterne.]

4164. — *Si a, b, c sont des nombres en progression arithmétique et x, y, z des nombres en progression géométrique, on a*

$$x^by^cz^a=x^cy^az^b.$$

Les nombres a, b, c étant en progression arithmétique, on peut poser

$$a=b-r, \qquad c=b+r.$$

Par suite, la relation à démontrer devient

$$x^by^{b+r}z^{b-r}=x^{b+r}y^{b-r}z^b$$

ou
$$(xyz)^b\left(\frac{y}{z}\right)^r=(xyz)^b\left(\frac{x}{y}\right)^r.$$

Comme les rapports $\frac{y}{z}$ et $\frac{x}{y}$ représentent la raison de la progression géométrique formée par x, y, z, ou l'inverse de cette raison, la dernière égalité devient évidente, ce qui entraîne en même temps la vérification de la relation énoncée.

(G. HIERNAUX, école normale de Châlons-sur-Marne.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Ardin-Delteil, à Montpellier ; P. Barroué, lycée de Brest ; A. Bastet ; O. Bouquey, à Saint-Emilion ; A. Bouzy, instituteur à Vervins ; M. Cryé, lycée de Laval ; E. Foucart ; R. Henry, instituteur à Maizières ; H. Janois, école normale du Mans ; A. Maître ; F. Pégorier ; C. Pellion ; L. Perret ; P. Plisson, instituteur à Sens ; L. Vignes, à Boussan ; P. Vincent, école pratique d'industrie de Saint-Etienne ; M. Oger ; J. Petit.]

4166. —*On donne une circonférence de centre* O *et de rayon* R. *Soit* AB *une tangente en un point* A *de la circonférence. On demande de déterminer sur la circonférence un point* M *tel que le*

rapport de la surface du tronc de cône engendré par le segment de tangente MB *en tournant autour de* OA *à la surface du cercle de rayon* AB *soit égal à un nombre donné, k.*

(*Bacc. lettres-math., Bordeaux, mars 1897*).

Menons MC perpendiculaire à OA et posons $AB = BM = x$. On doit avoir

$$\frac{\pi MB(CM + AB)}{\pi \overline{AB}^2} = k,$$

ou $\quad CM + x = kx. \quad (1)$

Pour calculer CM, égalons deux expressions de l'aire du triangle OAM; il vient

$$CM.R = AM.OD.$$

Or $\quad OD = \dfrac{\overline{OA}^2}{OB} = \dfrac{R^2}{\sqrt{R^2+x^2}}$

et $\quad AM = 2AD = 2\sqrt{R^2 - \overline{OD}^2} = \dfrac{2Rx}{\sqrt{R^2+x^2}}.$

Donc $\quad CM = \dfrac{2R^2x}{R^2+x^2}.$

En portant cette valeur dans (1) et supprimant le facteur commun x, qui n'est pas nul, on obtient

$$\frac{2R^2}{R^2+x^2} = k - 1,$$

d'où l'on tire

$$x^2 = \frac{R^2(3-k)}{k-1}$$

et $\quad x = R\sqrt{\dfrac{3-k}{k-1}}.$

La seule condition de possibilité est que x soit réel, c'est-à-dire que l'on ait

$$1 < k < 3.$$

On construit facilement la valeur de x en la regardant comme une moyenne proportionnelle entre R et la longueur $\dfrac{R(3-k)}{k-1}$.

(A. BOUZY, instituteur, école primaire supérieure de Vervins.)

Solution trigonométrique. — Désignons par α l'angle MOC qui détermine le point M. On a, en observant que $\widehat{MOC} = \widehat{ABM}$ (côtés perpendiculaires),

$$AB = CM + MB\cos\alpha,$$

ou $\quad CM = AB(1-\cos\alpha).$

La relation (1) de la solution précédente devient alors

$$AB(1-\cos\alpha) = (k-1)AB,$$

d'où $\quad \cos\alpha = 2 - k.$

Cette valeur du cosinus ne correspond à un angle réel qu'autant qu'on a

$$-1 < 2 - k < 1$$

ou $\quad 1 < k < 3.$

Lorsque $k = 2$, on a $\cos\alpha = 0$ et $\alpha = 90°$; le point M coïncide alors avec l'une des extrémités du diamètre du cercle O parallèle à AB.

(M. BERTIN-CONRADS, collège Chaptal.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Bastet; L. Curt; R. Henry; A. Maître; F. Pégorier; L. Vignes; Ardin-Delteil.]

GÉOMÉTRIE

4034. — *Dans un cercle de rayon* R *et de centre* O, *on donne un point fixe* P *par lequel on fait passer deux cordes rectangulaires* AC *et* BD. *En projetant le point* P *sur les quatre côtés du quadrilatère* ABCD, *on sait qu'on obtient un nouveau quadrilatère* EFGH *à la fois inscriptible dans un cercle de rayon r et circonscriptible à un autre cercle de rayon r'. On propose de démontrer que :*

1° *Les cercles de rayon r et r' restent fixes lorsque les cordes rectangulaires* AC *et* BD *pivotent autour du point fixe* P.

2° *Les trois rayons* R, *r et r' sont liés par la relation*

$$4r^2 = R(R + 2r').$$

1° Joignons O et P au milieu M de AB. On a

$$\overline{OE}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ME}^2$$

$$\overline{EP}^2 = \overline{PM}^2 - \overline{ME}^2$$

ou, en ajoutant et observant que $PM = MA$,

$$\overline{OE}^2 + \overline{EP}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MA}^2 = R^2.$$

Le point E appartient donc au lieu des points dont la somme des carrés des distances à O et P est constante et égale à R^2. On sait que ce lieu est un cercle ayant son centre au milieu I de OP. Son rayon, déduit de la relation

$$2\overline{IE}^2 + 2\overline{IO}^2 = R^2$$

est $\quad IE = \dfrac{1}{2}\sqrt{2R^2 - a^2},$

en posant $OP = a$.

Ce que nous venons de dire par rapport au point E s'applique aussi bien aux points analogues F, G, H, de sorte que le quadrilatère EFGH est inscrit dans le cercle I, dont le rayon

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - a^2}, \qquad (1)$$

est constant.

Ce quadrilatère est d'ailleurs circonscrit à un cercle de centre P. En effet, en considérant successivement les quadrilatères inscriptibles PEBF, BCDA et PHAE, on a

$$\widehat{PEF} = \widehat{PBF} = \widehat{PAH} = \widehat{PEH},$$

ce qui montre que P est situé sur la bissectrice de l'angle FEH. On verrait de même que ce point appartient aux bissectrices des trois autres angles F, G, H du quadrilatère.

Par suite P est le centre d'un cercle inscrit dans le quadrilatère EFGH. En considérant le rayon r' de ce cercle comme égal à la hauteur du triangle PEH par exemple, on peut écrire

$$r'.PA = PE.PH,$$

puisque PA représente le diamètre du cercle PEH.

On en déduit

$$r' = \frac{PE.PH}{PA}.$$

Or, en considérant respectivement PE, PH, PA comme les hauteurs des triangles PAB, PAD, ABD, on a

$$PE.AB = PA.PB, \qquad PH.AD = PA.PD,$$

$$PA.2R = AB.AD.$$

En multipliant entre elles les deux premières égalités, il vient, en tenant compte de la troisième,

$$PE.PH.PA.2R = \overline{PA}^2.PB.PD,$$

d'où $\quad \dfrac{PE.PH}{PA} \quad$ ou $\quad r' = \dfrac{PB.PD}{2R} = \dfrac{R^2 - a^2}{2R}. \qquad (2)$

Cette dernière expression montre que le rayon r' est constant.

2° En éliminant a entre les formules (1) et (2), on obtient la relation énoncée :

$$4r^2 = R^2 + 2Rr'.$$

(M. REBEIX, lycée du Puy.)

[Ont résolu la même question : MM. P. Alcan ; J. d'Avillez ; Bayor, à Castel-

naudary ; E. Bon, école normale de Lons-le-Saunier ; G. Delahaye, à Roye ; P. Duchesne-Fournet, lycée Janson-de-Sailly ; A. Lochard ; R. Manen, à Massals ; Marcenet, collège de Cosne ; M. Oger, à Saint-Paterne.]

4168. — *Dans un triangle rectangle isocèle* ABC (AB=AC), *on mène la médiane* BD, *qui coupe en* E *le cercle circonscrit, et l'on abaisse la perpendiculaire* EF *à* AC. *Démontrer que*

$$AF = 3EF.$$

Généraliser.

Première solution. — On a

$$AF = AD + DF.$$

Or, le triangle ABD ayant pour côtés AD et $AB = 2AD$, son hypoténuse est

$$BD = \sqrt{\overline{AD}^2 + 4\overline{AD}^2} = AD\sqrt{5};$$

de même, dans le triangle semblable DEF,

$$DE = DF\sqrt{5};$$

égalons le produit BD.DE à AD.DC ou $\overline{AD}^2$; il vient

$$5AD.DF = \overline{AD}^2,$$

ou

$$AD = 5DF.$$

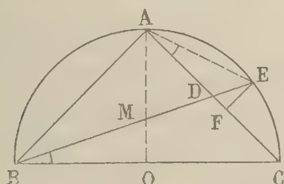
Donc $AF = 5DF + DF = 6DF$;

mais, de même que dans le triangle ABD AD est la moitié de AB, de même dans le triangle semblable FED DF est la moitié de EF ; donc

$$AF = 3EF. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(Ed. Ardin-Delteil, à Montpellier.)

Seconde solution. — Tirons la droite AE et la médiane AO ; celle-ci rencontre la médiane BD au centre de gravité M du triangle.



Les angles inscrits EAC, EBC ayant même mesure, sont égaux ; par suite, les triangles rectangles AEF, BMO sont semblables, et l'on a

$$\frac{AF}{FE} = \frac{BO}{OM}.$$

Mais M étant le centre de gravité du triangle ABC est au tiers de OA ; donc

$$BO = OA = 3OM,$$

et l'égalité précédente devient

$$\frac{AF}{FE} = 3. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(P. Barroué, lycée de Brest.)

Généralisation. — Supposons que la droite BD divise AC dans un rapport quelconque tel que

$$\frac{AD}{AC} = \frac{p}{q}.$$

En tirant AE, on a

$$\frac{AF}{FE} = \operatorname{tg} AEF = \operatorname{tg}(AEB + DEF);$$

d'ailleurs

$$\operatorname{tg} AEB = \operatorname{tg} ACB = 1,$$

et

$$\operatorname{tg} DEF = \operatorname{tg} ABD = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{p}{q}.$$

En portant ces valeurs dans la relation connue

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b},$$

il vient

$$\frac{AF}{FE} = \frac{q+p}{q-p}.$$

(Frédéric Riesz, Gyor, Hongrie.)

[Ont résolu la même question : MM. R. Henry, instituteur à Maizières ; G. Hiernaux, école normale de Châlons-sur-Marne ; M. Legras ; E. Le Maigre, A. Maître ; A. Mire, élève au lycée de Dijon ; A. Nayel, à Thouars ; C. Pellion ; L. Perret ; P. Plisson, instituteur à Sens ; E. Vaicle ; L. Vignes ; P. Vincent, école pratique d'industrie à Saint-Etienne ; G. Blondin, à Sens ; X. Lacreuze, à Belfort ; N. Plakhowo.]

4171. — *Construire un triangle connaissant une médiane, l'angle qu'elle fait avec la bissectrice issue du même sommet et le produit des deux côtés issus de ce sommet.*

Supposons le problème résolu : soit ABC un triangle dans lequel on connaît la longueur l de la médiane AM, l'angle α formé par cette médiane avec la bissectrice AD et le produit

$$AB.AC = k^2.$$

Traçons le cercle O circonscrit au triangle ; ce cercle coupe la bissectrice AD en un second point, E, situé sur la droite OM.

Si l'on tire la droite BE, les triangles ABE, ADC sont semblables, car ils ont les angles en A égaux, ainsi que les angles en E, C. On a donc

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC},$$

ou

$$AD.AE = AB.AC = k^2.$$

Le problème revient à déterminer le triangle MDE. Or le cercle I circonscrit à ce triangle coupe AM en un second point M′ tel que

$$AM'.AM = AD.AE = k^2,$$

d'où

$$AM' = \frac{k^2}{l}.$$

Le point M′ étant connu, le centre I du cercle est déterminé par l'intersection de la perpendiculaire élevée au milieu de MM′ avec la droite AD qui fait avec AM l'angle connu α. En décrivant le cercle I, on a les points D et E, puis le point O en prenant l'intersection de la droite ME avec la perpendiculaire élevée au milieu de AE ; le cercle O est alors déterminé par son centre et le point A, et son intersection avec la droite MD fournit les deux autres sommets B et C du triangle cherché.

La construction est toujours possible et ne fournit qu'une solution.

(Ernest Foucart, caporal au 103e d'infanterie.)

[M. A. Maître a résolu la même question.]

PHYSIQUE

3882. — *Sur la poulie d'une machine d'Atwood est enroulée une longue cordelette parfaitement flexible, qui porte un poids moteur à son extrémité libre. Sur l'axe de la poulie, tournant sans frottement, est calé un disque, qui est percé de n trous équidistants et rangés sur une même circonférence. Un tube porte-vent, par où arrive un courant d'air continu, est disposé de façon à souffler normalement au disque et sur la circonférence des trous. On laisse tomber le poids moteur à l'instant zéro. On demande :*

1° *D'expliquer le phénomène acoustique qui va se produire pendant le mouvement du système ;*

2° *De calculer la hauteur de la note qui serait émise à partir de l'instant t, si l'on supprimait le poids moteur ;*

3° *De calculer la suite des instants t auxquels cette hauteur correspondrait à la suite des notes de la 3e gamme ;*

4° *De calculer l'accélération de la pesanteur dans un autre lieu du globe, étant donné que, la même expérience étant répétée dans*

ce lieu, on obtient, aux mêmes instants t, les mêmes notes que précédemment, mais diézées.

DONNÉES NUMÉRIQUES. — *Longueur de la circonférence de la poulie,* $L = 0^m,20$; *nombre des trous du disque,* $n = 10$; *accélération de la pesanteur (dans le premier lieu du globe),* $g = 9^m,81$; *la de la 3e gamme,* $la_3 = 435$ *V. d.*

(*Concours général de Philosophie, départements, 1896.*)

1° Le phénomène acoustique qui se produit en laissant tomber le poids moteur est celui de la sirène. Dans sa chute, le poids fait tourner la poulie, et les trous du disque calé sur son axe passent successivement devant le tube porte-vent.

A chaque coïncidence des deux ouvertures, l'air est comprimé ; à chaque interruption il revient sur lui-même, d'où une vibration complète. La hauteur du son produit sera donc mesurée par le nombre de coïncidences du tube porte-vent avec les trous du disque.

2° Au temps t, si l'on supprimait le poids moteur, le système prendrait un mouvement uniforme avec la vitesse $v = gt$. La cordelette de la machine parcourt donc en une seconde gt et fait accomplir à la poulie $\frac{gt}{L}$ tours par seconde, L étant la longueur de sa circonférence. Or, à un tour du disque, percé de n trous, correspondent n coïncidences de ces trous avec le porte-vent et par conséquent n vibrations.

La hauteur N du son émis à l'instant t sera donc

$$N = \frac{gnt}{L}. \qquad (1)$$

3° On sait que l'intervalle du *la* au *do* d'une même gamme est $\frac{5}{3}$; le la_3 correspondant à 435^{vib}, le do_3 correspond à $435 \times \frac{3}{5} = 261^{vib}$.

En tenant compte des données numériques, la formule (1) devient

$$N = \frac{9,81 \times 10 \times t}{0,20} = 490,5 \times t,$$

d'où l'on tire

$$t = \frac{N}{490,5}.$$

Le do_3 correspondant à $N = 261^{vib}$ sera donc émis au bout du temps

$$t = \frac{260}{490,5} = 0^{sec},53.$$

D'autre part, la formule (1) montre que la hauteur de la note émise est proportionnelle au temps t. Par conséquent, le temps correspondant à une note quelconque de la 3e gamme est égal au temps correspondant au do_3 multiplié par l'intervalle musical de la note considérée au do_3. — Le tableau suivant donne les instants t correspondant à la suite des notes de la 3e gamme :

Notes de la 3e gamme	do_3	$ré_3$	mi_3	fa_3	sol_3	la_3	si_3
Intervalles musicaux	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$
Instants t (en secondes)	0,53	0,59	0,66	0,71	0,79	0,88	0,99

4° Soit g' l'accélération de la pesanteur dans l'autre lieu considéré du globe ; dans ce lieu, la hauteur du son correspondant au même instant t est

$$N' = \frac{g'nt}{L}. \qquad (2)$$

Des relations (1) et (2) on déduit la proportion

$$\frac{N}{N'} = \frac{g}{g'}.$$

Dans ce second lieu les notes étant diézées, on a

$$\frac{N}{N'} = \frac{24}{25};$$

donc

$$\frac{g}{g'} = \frac{24}{25}.$$

On tire de là $g' = 9^m,81 \times \frac{25}{24} = 10^m,2187.$

Telle est l'accélération due à la pesanteur dans ce second lieu du globe.

(T. BOIS, collège Chaptal.)

[M. P. Cornélis a résolu la question.]

4147. — *Dans une cuve renfermant un liquide de densité 1,5 on plonge de 80 centimètres un tube de longueur totale 1 mètre, effilé à son extrémité inférieure. On ferme alors hermétiquement l'extrémité supérieure du tube et on le retire. La pression atmosphérique est 75 centimètres, la température 20°. On demande à quelle hauteur le liquide se maintiendra dans le tube, en supposant le liquide sans tension de vapeur appréciable à la température de l'expérience. — Mise en équation du même problème en supposant qu'à 20° le liquide a une force élastique maximum de 3cm.*

(*Bacc. lettres-math., Caen, novembre 1896.*)

1° Il faut d'abord chercher la colonne x du liquide équivalente à la pression atmosphérique à la température de l'expérience.

La densité du mercure à 0° étant 13,6, sa valeur à 20° est $\frac{13,6}{1+\frac{20}{5550}}$ ou $\frac{13,6 \times 5550}{5570}$. En écrivant que la masse du liquide et la masse du mercure qui font équilibre à la pression atmosphérique sur une même surface sont égales, on a

$$\frac{75 \times 13,6 \times 5550}{5570} = x \times 1,5,$$

d'où

$$x = 677^{cm},5.$$

Quand on retire le tube, une certaine quantité de liquide s'écoule, la force élastique de l'air qui y est enfermé diminue et l'écoulement cesse au moment où la force élastique de l'air, augmentée de la pression de la colonne liquide qui reste, fait équilibre à la pression extérieure. En représentant par h la dénivellation produite et par f la force élastique de l'air intérieur, on a

$$20 \times 677,5 = (20+h)f,$$

d'où l'on tire

$$f = \frac{20 \times 677,5}{20+h}.$$

On a aussi

$$(80-h) + \frac{20 \times 677,5}{20+h} = 677,5,$$

ce qui donne

$$h^2 + 617,5\,h - 1\,600 = 0,$$

équation dont la racine positive seule est admissible. Cette racine a pour valeur $2^{cm},5$.

Le liquide se maintiendra donc dans le tube à une hauteur égale à

$$80 - 2,5 = 77^{cm},5.$$

2° Supposons maintenant que le liquide a une force élastique maxima de 3cm à 20°. Cette force élastique équivaut à une colonne de liquide égale à

$$\frac{3 \times 13,6 \times 5550}{5570 \times 1,5} \quad \text{ou} \quad 27^{cm},1,$$

et la force élastique de l'air, au moment où l'on ferme le tube, est $677,5 - 27,1 = 650^{cm},4$.

Une dénivellation se produit quand on retire le tube ; la hauteur du mélange d'air et de vapeur devient $20 + h'$, la colonne de liquide qui reste n'est plus que $80 - h'$, et l'on a

$$(80-h') + \frac{20 \times 650,4}{20+h'} + 27,1 = 677,5,$$

ou $h'^2 + 590,4h' - 1600 = 0.$

Telle est la mise en équation demandée.

(ARDIN-DELTEIL.)

[Ont résolu la même question : MM. L. Debrun ; A. Mirc ; L. Tarrin.]

CONCOURS DE 1897 (*Suite*)

ÉCOLE NORMALE PRIMAIRE SUPÉRIEURE DE FONTENAY-AUX-ROSES

Mathématiques.

I. — **4176**. Par un point P pris sur la circonférence du cercle circonscrit à un triangle ABC, on mène des parallèles aux côtés BC, CA, AB de ce triangle. Ces droites rencontrent la circonférence aux points A', B', C'. Comparer le triangle A'B'C' au triangle ABC.

Les triangles ABC et A'B'C' étant supposés connus, peut-on retrouver le point P?

Peut-on supposer le triangle ABC déduit du triangle A'B'C' par le même procédé, à l'aide d'un point P'? Quelle relation y a-t-il entre P et P'?

Peut-il arriver que les triangles ABC et A'B'C' aient un ou deux sommets communs? Dans ce cas, où doivent se trouver les points P et P'?

II. — **4177**. Prouver que tout nombre entier ou décimal est compris entre $10^n u$ et $10^{n-1}u$, en désignant par u une unité de l'ordre du chiffre qui occupe le n^e rang, en comptant de gauche à droite, à partir du premier chiffre significatif. Par exemple, si le chiffre de rang n représente des millièmes, le nombre considéré est compris entre $\frac{10^n}{1000}$ et $\frac{10^{n-1}}{1000}$.

III. — **4178**. Trouver le plus grand commun diviseur des nombres

2520 et $119 \times 1816 \times 549$

sans effectuer le produit indiqué et sans faire aucune décomposition en facteurs premiers.

(*5 juillet, de 8 h. à midi.*)

Physique, Chimie et Sciences naturelles.

I. — De la loupe. — Construction géométrique de l'image. — Grossissement. — Usages.

II. — De la soude artificielle.

III. — Étude comparée du squelette des vertébrés; insister sur les traits de structure connexes aux principaux types d'habitat.

(*7 juillet, de 8 h. à midi.*)

ÉCOLE NORMALE PRIMAIRE SUPERIEURE DE SAINT-CLOUD

Mathématiques.

I. — **4179**. Démontrer que si a et b sont deux nombres entiers quelconques, le plus grand commun diviseur de a et de b est le même que le plus grand commun diviseur des nombres $5a+3b$ et $13a+8b$.

II. — **4180**. Dans un triangle ABC, on donne l'angle $B = 30°$, le rapport $\frac{AC}{AB} = m$, m étant un nombre positif donné, et la distance α qui sépare, sur le côté BC, le pied D de la bissectrice de l'angle A et le pied D' de la bissectrice de l'angle extérieur adjacent en A : 1° Construire géométriquement le triangle ; 2° Calculer les trois côtés du triangle ; discuter et chercher si l'angle en C du triangle est aigu ou obtus, si l'angle en A du triangle est aigu ou obtus. — Même problème en supposant l'angle $B = 150°$.

(*30 juin, de 8 h. à midi.*)

Physique, Chimie et Histoire naturelle.

I. — Description et usage de l'électroscope à feuilles d'or.

II. — **4181**. Un objet est placé à 16 décimètres d'un tableau sur lequel on veut projeter son image avec une lentille convergente, dont la distance focale est égale à 30^{cm}. Quelle position faut-il donner à la lentille et quel est le rapport de la grandeur de l'image à celle de l'objet ?

III. — Éthers. — Éther ordinaire.

IV. — Sang : constitution ; propriétés. — Transformations qu'il subit dans les diverses régions du corps.

(*2 juillet, de 8 h. à midi*)

CERTIFICAT D'APTITUDE AU PROFESSORAT

DES ÉCOLES NORMALES ET DES ÉCOLES PRIMAIRES SUPÉRIEURES

Aspirantes.

Mathématiques.

I. — Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction soit irréductible. — Réduction d'une fraction à sa plus simple expression.

II. — **4182**. 1° Réduire à leur plus simple expression les fractions $\frac{56272}{263775}$ et $\frac{9764}{36615}$;

2° Déterminer le plus petit nombre fractionnaire irréductible qui, divisé par chacune de ces fractions, donne des quotients entiers;

3° Déterminer le plus petit nombre décimal, puis le plus petit nombre entier remplissant les mêmes conditions.

III. — Inscrire un hexagone régulier dans un cercle donné.

IV. — Les milieux des côtés d'un hexagone régulier ABCDEF sont les sommets d'un second hexagone convexe A'B'C'D'E'F'.

1° Démontrer que ce second hexagone est régulier ;

2° Connaissant la surface du second hexagone, égale à 4 décimètres carrés, calculer à un millimètre près le côté du premier.

(*28 juin, de 8 h. à midi.*)

Physique, Chimie et Histoire naturelle.

I. — **4183**. On veut gonfler à l'hydrogène un ballon à parois souples et de masse négligeable, jusqu'à ce qu'il atteigne une force ascensionnelle F dans l'air ambiant. Le gaz est préparé par l'électrolyse d'eau acidulée, contenue dans un voltamètre de résistance électrique connue. Le courant électrolyseur vient d'une batterie d'accumulateurs, formée de q séries de p éléments associées en quantité, et il est amené au voltamètre par un circuit métallique de résistance électrique connue. On demande :

1° Quel volume devra prendre le ballon pour atteindre la force ascensionnelle donnée ;

2° Combien de temps il faudra faire passer le courant dans le voltamètre pour opérer le gonflement nécessaire ;

3° Quelle quantité d'énergie sera enlevée à la source d'électricité et quelle quantité sera dépensée dans le voltamètre pendant l'opération.

On donne :

1° La température t, la pression atmosphérique H et la tension actuelle f de la vapeur d'eau ;

2° La quantité d'électricité Q nécessaire pour dégager 1^{gr} d'hydrogène dans un voltamètre ;

3° La résistance spécifique ρ de l'eau acidulée, la surface s de chaque électrode et leur écartement l, ainsi que la force électromotrice de polarisation e, engendrée dans le voltamètre par le passage du courant ;

4° La force électromotrice E et la résistance intérieure r de chaque accumulateur ;

5° La résistance spécifique ρ', la section s' et la longueur l' du circuit métallique.

Application numérique (*facultative*) : $F = 100$ grammes-poids ; $Q = 96600$ coulombs ; $t = 10°$ centigr. ; $H = 76^{cm}$; $f = 5^{mm}$; $\rho = 1$ ohm ; $l = 20^{cm}$; $s = 4$ cm² ; $e = 1,5$ volt ; $p = 10$, $q = 5$, $E = 2$ volts, $r = 10^{-2}$ ohm ; $\rho' = 1,6 \times 10^{-6}$ ohm, $l' = 100^m$, $s' = 8$ mm².

II. — Actions des acides chlorhydrique et azotique sur les métaux, les différents genres d'oxydes métalliques et sur les principales matières organiques.

(*On se bornera* aux réactions qui conduisent à des préparations importantes ou à des applications.)

III. — Distribution générale des terrains secondaires en France. — Caractères prédominants de la faune et de la flore à l'époque secondaire.

(*29 juin, de 7 h. à midi.*)

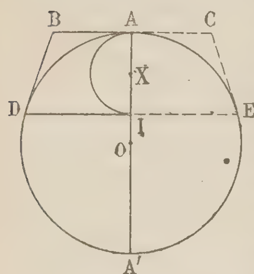
Aspirants.

Mathématiques.

I. — **4184**. Démontrer que le quotient entier d'un nombre entier N par un produit de facteurs entiers a, b, c peut s'obtenir en divisant N par a, puis le quotient par b et ce dernier quotient par c.

Application. — Les trois divisions successives ayant toutes donné un même reste r, et celui-ci étant le plus grand possible, on suppose que la division de N par le produit abc donne pour reste $R = 19r$ et pour quotient 7, on suppose en outre que $c = a + b$; déterminer le nombre N.

II. — **4185**. On donne une circonférence O de rayon R, on trace une tangente BAC, une corde DE parallèle à BC, la droite DB tangente en D et la demi-circonférence qui a pour diamètre AI ; on fait tourner la figure autour du diamètre AA'. Déterminer la distance AI pour que le volume engendré par le quadrilatère ABDI soit au volume de la sphère de diamètre AI dans un rapport donné m. — Entre quelles limites peut varier le nombre m ? Dans le cas particulier où $m = 6$, quel est le rapport des deux volumes B'C'D'E', B''C''D''E'' ainsi trouvés ? — A quels nombres entiers sont proportionnelles : 1° les trois parties de la surface de la sphère O ; 2° les trois parties du volume de cette sphère, séparées par les deux plans D'E' et D''E''.



(*23 juin, de 8 h. à midi.*)

Physique, Chimie et Histoire naturelle.

I. — Principes sur lesquels repose le fonctionnement des appareils utilisés dans le laboratoire et dans l'industrie pour faire le vide.

II. — Quels sont les procédés employés pour oxyder et hydrogéner les corps ? Les préciser par des exemples choisis parmi les opérations pratiquées sur les corps inorganiques et organiques.

III. — Les mollusques ; caractères généraux et classification. Citer pour chaque terrain les principaux mollusques fossiles.

(*24 juin, de 7 h. à midi.*)

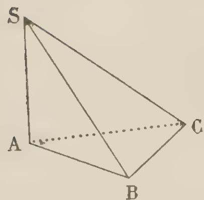
ÉCOLES NATIONALES D'AGRICULTURE

Mathématiques.

Arithmétique ou Algèbre. — Un spéculateur achète un pré à raison de 5 000fr l'hectare. Après l'acquisition, il s'aperçoit que son pré contient 8 décamètres carrés de moins que ce qu'il a payé. Néanmoins, il ne fait aucune réclamation, car il trouve l'occasion de le céder de suite au prix de 60fr l'are (contenance exacte). En faisant cette vente, il gagne 12 % sur ce qu'il a déboursé.

1° Calculer la contenance réelle du pré ;

2° Calculer ses dimensions, sachant qu'il est rectangulaire et que sa diagonale vaut 170m.



Géométrie. — Une pyramide a pour base un triangle ABC, dont les côtés AB, AC, BC valent respectivement 26 décimètres, 3m et 2m,80. Son sommet S est sur la perpendiculaire menée par A au plan ABC et AS égale 1m,80.

1° Calculer le volume de cette pyramide en décimètres cubes ;

2° Calculer sa surface totale en mètres carrés.

Physique et Chimie.

I. — Poids spécifique des gaz (procédé de Regnault).

II. — Hydrogène sulfuré. — Sulfures.

Sciences naturelles.

I. — Appareils de la respiration chez les Vertébrés.

II. — Fleur. — Constitution, rôle. — On décrira la fleur en prenant comme exemple une crucifère, une papilionacée.

ÉCOLE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES DE PARIS

Mathématiques.

I. — Exposer comment on reconnaît qu'un nombre est divisible par 11, et comment on peut, si le nombre n'est pas divisible, déterminer *a priori* le reste de la division. On prendra comme exemple les nombres 72435 et 604853.

II. — La durée de la rotation de la planète Jupiter est de $9^h\,55^m\,37^s$; quelle est la valeur en degrés, minutes et secondes de l'arc décrit en une heure par un méridien de la planète ?

III. — **4186**. 1° Résoudre le système

$$3x + 2y - z = a + 1,$$
$$5x + 3y - 2z = 2a - 1,$$
$$2x - y + 3z = -a.$$

2° Calculer à un centième près la valeur de a pour que les solutions x, y, z satisfassent à la condition $z^2 + xy = 0$.

IV. — **4187**. Soient R_1 et R_2 les points de rencontre des médianes relatives à chacune des bases d'un tronc de prisme triangulaire quelconque :

1° Démontrer que la distance R_1R_2 est la moyenne arithmétique des trois arêtes du tronc de prisme ;

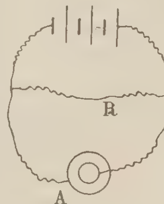
2° Un plan parallèle à l'une des bases décomposant le tronc de prisme en deux parties, on demande d'exprimer aussi simplement que possible le rapport des volumes de celles-ci ;

3° Un tronc de prisme triangulaire étant coupé par un plan passant par une des trois arêtes parallèles, on considère toutes les positions que peut prendre ce plan et on demande les lieux : 1° du point de rencontre des côtés non parallèles de la section ; 2° de la ligne qui joint les milieux des mêmes côtés.

(*16 juillet, de 8 h. à midi.*)

Physique.

I. — **4188**. Trois piles Daniell, de force électromotrice $1^v,07$, chargent un accumulateur A.



On réunit les pôles de la pile par une résistance $R = 12^{ohms},9$ telle que l'intensité du courant qui passe par l'accumulateur devient nulle. A ce moment la résistance R est parcourue par un courant I de 0,18 ampères.

Quelle est la force électromotrice de l'accumulateur et la résistance intérieure de la batterie de charge ?

II. — Qu'est-ce que la dilatation ? — Lois du phénomène. — Citer quelques applications de la dilatation des gaz, liquides et solides.

(*17 juillet, de 8 h. à 11 h.*)

Chimie.

I. — Acides : chlorhydrique, sulfurique, azotique ordinaires ; décrire brièvement leur préparation en formulant les équations rendant compte de leur formation, indiquer leurs propriétés physiques, leurs caractères chimiques et leurs applications.

II. — **4189**. On attaque 10^{gr} de plomb pur par de l'acide azotique ordinaire jusqu'à dissolution complète ; formuler la réaction.

On évapore ensuite à la température de 100° jusqu'à poids constant ; donner le poids du résidu sec.

Ce résidu est soumis enfin à l'action de la chaleur à une température voisine du rouge. On demande :

1° L'équation rendant compte de la décomposition qui a pu se produire à cette température du rouge ;

2° La composition qualitative et la composition quantitative en poids du produit gazeux qui a pu se former ;

3° La nature et le poids du résidu après l'action de la chaleur au rouge.

Poids atomiques : $Pb = 206,4$; $H = 1$; $O = 16$; $Az = 14$.

(*17 juillet, de 2 h. à 5 h.*)

CONCOURS GÉNÉRAL

Classe de Mathématiques élémentaires.

Physique et Chimie (Paris).

I. — Propriétés des vapeurs.

II. — **4190**. Un tube de verre cylindrique, ouvert aux deux bouts, plonge verticalement dans un vase cylindrique complètement fermé contenant de l'eau et de l'air. La température étant 0° et la pression extérieure 76^{cm}, l'eau s'élève dans le tube à une hauteur h. On demande :

1° Quelle sera la variation x de niveau dans le tube si la colonne barométrique extérieure varie de 1^{cm}, la température restant constante ;

2° Quelle serait la variation de température qui donnerait la même variation de niveau, la pression restant constante et égale à 76^{cm}.

On ne tiendra compte ni de la dilatation du verre, ni de celle de l'eau.

On fera le calcul avec les données suivantes :

Section du tube.	$\sigma = 4^{cmq}$;
Section du vase.	$S = 100^{cmq}$;
Hauteur de l'air	$a = 10^{cm}$;
Hauteur de la colonne d'eau	$h = 100^{cm}$;
Poids spécifique de l'eau	$= 1$;
Poids spécifique du mercure	$= 13,6$.

III. — Oxyde de carbone et gaz carbonique.

(*7 juillet, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.*)

Classe de Première-Lettres.

Histoire naturelle (Paris et Départements).

Botanique. — Croissance de la tige et de la racine ; causes qui interviennent dans leur orientation et dans celle de leurs ramifications.

Zoologie. — L'oreille, l'audition. — Comparer l'appareil sensitif de l'oreille à celui de l'œil.

(*6 juillet, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.*)

Classe de Rhétorique.

Mathématiques (Paris).

4191. — On donne un carré ABCD, dont le côté est égal à $2a$, et on considère un point M situé dans le plan de ce carré.

1° Calculer la somme S des volumes engendrés par les triangles MAB, MBC, MCD, MDA tournant respectivement, le premier autour de AB, le second autour de BC, le troisième autour de CD, et le quatrième autour de DA.

2° Démontrer que la somme S ne dépend que des quantités a et d en désignant par d la distance du point M au centre du carré, et trouver le lieu géométrique du point M, lorsque ce point se déplace de manière que la somme S reste équivalente au volume d'un cône de hauteur a et de rayon donné r.

3° Déterminer sur le lieu précédent les positions de M pour lesquelles le rapport des volumes engendrés par le triangle MAB, tournant successivement autour de MA et de MB, est égal à un nombre donné m.

Discuter, en supposant $r^2 = 12a^2$.

(*25 juin, de 8 h. 1/2 à 1 h. 1/2.*)

Classe de Seconde moderne.

Physique et Chimie (Paris).

I. — Action des courants sur les courants.

II. — **4192**. L'œil est placé à une distance invariable d d'un objet dont la grandeur est o. Entre l'œil et l'objet, et à une distance x de l'objet, on place une lentille convergente dont la distance focale est $2d$. On demande : 1° de construire l'image de l'objet; 2° de trouver la grandeur de cette image; 3° de calculer la tangente de l'angle sous lequel l'œil voit l'image; 4° de discuter la valeur de cette tangente lorsque x varie de 0 à d.

III. — Principaux composés de l'argent.

IV. — **4193**. On fait passer un courant de chlore :

1° Dans une dissolution étendue et froide de potasse caustique;

2° Dans une dissolution concentrée et chaude de la même base.

Quel est le rapport des volumes de chlore qui, dans ces deux expériences, produiraient un même poids de chlorure de potassium?

La solution chaude et concentrée ayant été saturée par 10^{lit} de chlore, mesurés à 0° et sous la pression de 76^{cm}, on l'évapore jusqu'à siccité et on calcine la masse solide ainsi obtenue. Quel sera le volume du gaz qui se dégagera et quel sera le poids du résidu solide?

Poids atomique du potassium . . .	39
Densité du chlore	2,44
Densité de l'hydrogène.	0,0695

(*12 juillet, de 8 h. 1/2 à 1 h. 1/2.*)

Classe de Troisième moderne.

Mathématiques (Paris).

I. — **4194**. On donne un cercle (C) de centre (O) et de rayon R et un point M. On fait passer un cercle (C') par les deux points O et M. La corde commune aux cercles (C) et (C') coupe OM en un point M'. Prouver que M' est déterminé, quel que soit le cercle variable (C').

Trouver le lieu de M' quand le point M se meut sur une droite donnée ou sur un cercle donné.

II. — **4195**. On donne un cercle (C) de centre O et de rayon R et un cercle (C') de centre O' et de rayon R'. On prend sur le cercle (C) un point M. Peut-on trouver sur le cercle (C') un point M' tel que la distance MM' soit égale à l, l étant une longueur donnée?

Entre quelles limites doit se trouver le pied P de la perpendiculaire MP abaissée du point M sur la ligne des centres OO'? Dans quel cas le problème est-il possible, quelle que soit la position du point M sur le cercle (C)? — On posera $OO' = d$.

(*12 juillet, de 8 h. 1/2 à 1 h. 1/2.*)

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques élémentaires.

4196. — 1° Les droites Δ qui sont coupées harmoniquement par deux cercles donnés C et C' enveloppent une conique; montrer que cette conique reste la même lorsqu'on remplace les deux cercles C et C' par deux autres respectivement concentriques aux précédents et tels que la somme des carrés des rayons des deux nouveaux cercles soit égale à la somme des carrés des rayons des deux premiers.

2° Trouver le lieu des centres des cercles S qui sont coupés harmoniquement par deux cercles donnés C et C' et qui sont orthogonaux à un troisième cercle donné Γ. Ce lieu est une conique Σ dont on déterminera les directions asymptotiques et dont on discutera le genre en admettant que le centre de Γ se déplace d'une façon quelconque dans le plan, tandis que les cercles C et C' restent fixes.

On montrera que la direction des axes de Σ ne dépend que des positions des centres des trois cercles donnés et nullement de leurs rayons.

3° Trouver le lieu du centre de la conique Σ dans les deux hypothèses suivantes : 1° on fait varier le rayon du cercle Γ en laissant fixes le centre de ce cercle et les deux cercles C et C'; 2° on laisse fixe le cercle Γ, ainsi que les centres de C et de C', et on fait varier les rayons de ces deux derniers cercles de telle sorte que la somme de leurs carrés reste constante.

4° Démontrer que les cercles S orthogonaux au cercle Γ et coupés harmoniquement par deux cercles C et C' sont aussi coupés harmoniquement par une infinité de couples de cercles que l'on cherchera à caractériser géométriquement.

Nota. — On dit qu'un cercle S est coupé harmoniquement par deux cercles C et C', lorsque le rapport anharmonique des deux points de rencontre de S avec C et des deux points de rencontre de S avec C' est, sur le cercle S, égal à -1.

(*1er juillet, de 7 h. à 2 h.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4197. — Établir les deux propriétés suivantes :

1° Les nombres 1331, 1 030 301, 1 003 003 001, et en général tous ceux qu'on obtient en intercalant un même nombre de zéros entre les chiffres de 1331, sont des cubes parfaits.

2° Les nombres 14641, 104 060 401, 1 004 006 004 001, et en général tous ceux qu'on obtient en intercalant un même nombre de zéros entre les chiffres de 14641 sont des bicarrés parfaits. (G. Bricchi.)

4198. — Trouver un nombre de trois chiffres égal à 34 fois la somme de ses chiffres. (H. Liéger, à Jussey.)

4199. — Si $a+b+c+d+e+f=0$

et $a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3=0$,

on a $(a+c)(a+d)(a+e)(a+f)=(b+c)(b+d)(b+e)(b+f)$.

(*Examens de Cambridge.*)

4200. — Vérifier l'égalité

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}.$$

(M. Fourmon, collège de Carpentras.)

4201. — Résoudre le système des quatre équations

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{1}{c}, \qquad \frac{u}{a}+\frac{v}{b}=\frac{1}{c},$$

$$ux+vy+1=0, \qquad a(y+v)+b(x+u)=c(uy+vx),$$

x, y, u, v désignant les inconnues, a, b, c des quantités données différentes de zéro. Discuter le nombre des solutions ; montrer qu'on n'est jamais conduit à des racines imaginaires.

(*Bacc. lettres-math., Caen, juillet 1897.*)

4202. — Dans un triangle ABC, on considère les hauteurs BB′, CC′, puis les perpendiculaires B′B″, C′C″ abaissées respectivement sur CC′, BB′. Démontrer que $\overline{B'C'}^2 = BC.B''C''$. (E. Lemoine.)

4203. — Trouver sur la base BC d'un triangle donné ABC un point D tel que $\dfrac{\overline{AB}^2}{DB}+\dfrac{\overline{AC}^2}{DC}=2BC$.

(C. Lemaire.)

4204. — On donne un tétraèdre SABC.

1° Démontrer que la section faite dans les quatre faces par un plan parallèle à deux arêtes opposées SA et BC est un parallélogramme.

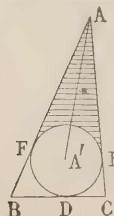
2° On donne les longueurs $SA=d$, $BC=d'$ de ces arêtes opposées, que l'on suppose rectangulaires. Soit M le sommet de la section qui est située sur l'arête SB du tétraèdre. On pose $SB=b$ et $SM=x$. Calculer l'aire de la section.

3° Déterminer x de manière que cette aire soit maximum.

(*Bacc. lettres-sciences, Lyon, juillet 1897.*)

4205. — Démontrer que dans un tétraèdre dont les quatre faces sont équivalentes, les arêtes opposées sont égales.

4206. — On considère un triangle ABC, le cercle inscrit DEF et les trois triangles curvilignes EAF, FBD, DCE, ayant chacun pour côté un arc de ce cercle.



Calculer le volume qu'engendre chacun de ces trois triangles lorsqu'il tourne autour de la bissectrice de son angle rectiligne, par exemple EAF tournant autour de la bissectrice AA′. Comparer les trois volumes ainsi obtenus.

Les données sont les angles A, B, C du triangle proposé et le rayon r du cercle inscrit. On supposera $A < B < C$.

(*Bacc. lettres-math, Nancy, juillet 1897.*)

4207. — Trouver le lieu géométrique des points M du plan d'un triangle isocèle ABC $(AB = AC)$ qui satisfont à la relation

$$\overline{MB}^2+\overline{MC}^2-n\overline{MA}^2=k^2,$$

n et k étant des grandeurs données.

(A. de Boisfleury.)

4208. — Deux cercles de centres O et O′ se coupent en A. Autour de A on fait pivoter un angle égal à la moitié de OAO′. Ses côtés rencontrent les cercles considérés en B et C. Trouver le lieu du milieu de BC.

(E. Foucart.)

4209. — On donne un angle droit XOY et un point A situé sur OX à une distance de O égale à l'unité. Par le point A, on mène les deux sécantes AB, AC telles que les angles OAB, OCA soient égaux à x degrés : $\widehat{OAB}=\widehat{OCA}=x$.

1° Trouver l'équation à laquelle doit satisfaire x pour que la somme des longueurs AB, AC soit égale à une longueur donnée m : $AB+AC=m$.

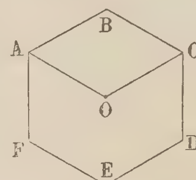
2° Former les équations qui déterminent les valeurs des angles inconnus y et z définis par les équations

$$y=\frac{\pi}{4}-x, \qquad z=2x.$$

3° Indiquer la marche à suivre pour calculer x.

Discussion.

(*Bacc. lettres-math., Toulouse, juillet 1897.*)



4210. — Déterminer le centre de gravité de l'aire OCDEFA obtenue en supprimant dans un hexagone régulier donné ABCDEF, de centre O, le quadrilatère OABC. Calculer la distance de ce centre de gravité au point O.

(*Bacc. lettres-sciences, Toulouse, juillet 1897.*)

4211. — Un vase vide pèse 100^{gr}; plein de mercure (densité : 13,5), il pèse $7^{kg},4$. Déterminer sa capacité intérieure.

On le plonge plein de mercure dans un liquide de densité 0,8 ; il pèse 6570^{gr}.

Déterminer le volume de parois du vase et la densité de la matière qui les forme.

On veut que le vase supposé fermé ait la même densité moyenne que l'eau, de façon à s'y maintenir immergé en équilibre sans aller au fond ni à la surface : quel volume de grenaille de plomb faut-il y introduire (densité du plomb : 11,3)?

On suppose que l'air n'intervient pas dans les pesées.

(*Bacc. lettres-math., Toulouse, juillet 1897.*)

4212. — Un manomètre à air comprimé est formé de deux branches cylindriques de même diamètre ; le mercure est de niveau dans les deux branches quand la branche ouverte reçoit une pression de 760^{mm}; la hauteur du tube occupée à ce moment par l'air est de 40^{cm}.

A quelle distance d du sommet se trouvera le mercure pour une pression de 3 atmosphères?

(*Bacc. lettres-sciences, Lille, juillet 1897.*)

4213. — Le tuyau d'une pompe aspirante est plein d'air à la pression atmosphérique, mesurée par une colonne H de mercure, et le piston est au bas de sa course. On donne un coup de piston.

Calculer la hauteur à laquelle l'eau s'élève.

Corps de pompe : section $s=400^{cq}$; hauteur $l=50^{cm}$.

Tuyau d'aspiration : section $s'=40^{cq}$; hauteur $l'=7^{m}$.

$H=76^{cm}$. Densité du mercure $=13,6$.

(*Bacc. lettres-math., Oran, juillet 1897.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

22e Année. — N° 2. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 15 Octobre 1897.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements .... Librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

ARITHMÉTIQUE

4197. — *Etablir les deux propriétés suivantes :*

1° *Les nombres* 1 331, 1 030 301, 1 003 003 001, *et en général tous ceux qu'on obtient en intercalant un même nombre de zéros entre les chiffres de* 1331, *sont des cubes parfaits.*

2° *Les nombres* 14 641, 104 060 401, 1 004 006 004 001, *et en général tous ceux qu'on obtient en intercalant un même nombre de zéros entre les chiffres de* 14 641 *sont des bicarrés parfaits.*

1° D'après les règles de la numération on peut écrire

$$\left.\begin{aligned} 1331 &= 1.10^3 + 3.10^2 + 3.10 + 1 \\ 1030301 &= 1.10^{2\cdot 3} + 3.10^{2\cdot 2} + 3.10^2 + 1 \\ &\text{et, en général,} \\ 1\overbrace{0\ldots0}^{n-1}3\overbrace{0\ldots0}^{n-1}3\overbrace{0\ldots0}^{n-1}1 &= 1.10^{n\cdot 3} + 3.10^{n\cdot 2} + 3.10^n + 1 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Comme les chiffres significatifs des nombres considérés, 1331, 1030301, ... sont, quant à leur valeur absolue et à leur ordre, les coefficients du développement de la 3e puissance du binome, les seconds membres des identités (1) sont respectivement les développements de

$$(10+1)^3,$$
$$(10^2+1)^3,$$
$$\ldots\ldots$$
$$(10^n+1)^3. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2° La seconde propriété s'établirait par un raisonnement analogue en observant que les chiffres significatifs des nombres proposés (1, 4, 6, 4, 1) sont, quant à leur valeur absolue et à leur ordre, les coefficients numériques du développement de la quatrième puissance du binome.

Remarque I. — Les nombres indiqués dans l'énoncé ne sont pas les seuls qui jouissent de la propriété en question et l'on peut à cet égard formuler la proposition générale suivante, qui n'est que l'inverse de la proposée :

Dans tout système de numération, les puissances de nombres de la forme (10^n+1) dont l'exposant est inférieur ou au plus égal à un nombre m tel que le plus grand coefficient du développement de la puissance d'ordre m du binome soit inférieur à la base du système, c'est-à-dire soit un nombre simple, s'obtiennent en écrivant dans leur ordre naturel les coefficients numériques du développement de la puissance considérée et en les séparant par $n-1$ zéros.

Il résulte de cette proposition que, pour le système décimal, il y a lieu d'ajouter les carrés 121, 10201, 1002001, ... aux cubes et aux quatrièmes puissances dont il a été question. Mais on ne peut aller au-delà de la quatrième puissance parce que, dès la 5e, le plus grand coefficient du développement, 10 (ces coefficients étant 1, 5, 10, 10, 5, 1) n'est plus un nombre simple. On voit, par contre, que cette 5e puissance jouirait encore de la propriété pour des nombres écrits dans le système duodécimal, parce que le nombre dix serait représenté dans ce système par un nombre simple.

Remarque II. — Les puissances des trinomes de la forme

$$(10^{n\cdot 2} + 10^n + 1)$$

et, plus généralement, des polynomes complets de la forme

$$(10^{n\cdot p} + 10^{n\cdot(p-1)} + 10^{n(p-2)} + \ldots\ldots + 10^{n\cdot 3} + 10^{n\cdot 2} + 10^n + 1),$$

jouissent de la même propriété, aux mêmes conditions, c'est-à-dire pourvu que les coefficients numériques du développement de la puissance considérée soient tous des nombres simples.

Exemples : Les carrés 12321, 102030201.....
Les cubes 1367631, 1030607060301.....
du nombre 111 et de ses dérivés 10101... .
Les carrés 1234321, 1020304030201.....
123454321, 10203040504030201.....
. . . .
12345678987654321, 102030405060708090 8.....1
des nombres 1111, 11111 ...., 111111111 et de leurs dérivés 1010101....., 101010101....., 10101010101010101.....

(A. BERTRAND, à Azillanet.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Bouzy ; H. Crozemarie ; O. Faure ; E. Foucart ; Fréchet ; G. Hiernaux ; H. Janois ; de Mendiry ; F. Pégorier ; P. Plisson ; J. Wittner ; A. Maitre.]

4198. — *Trouver un nombre de trois chiffres égal à 34 fois la somme de ses chiffres.*

Soient x, y, z les chiffres exprimant respectivement les centaines, les dizaines et les unités du nombre cherché. On doit avoir

$$100x + 10y + z = 34(x+y+z)$$
ou
$$66x - 33z = 24y$$
ou
$$11(2x - z) = 8y.$$

Dans cette dernière égalité, le premier membre, étant multiple de 11, le second membre, $8y$, doit être divisible par 11, et comme y est inférieur à 10, il faut que l'on ait

$$y = 0, \qquad \text{et par suite} \qquad 2x = z.$$

Tous les nombres de trois chiffres répondant à la question ont donc le chiffre des dizaines nul et le chiffre des unités double de celui des centaines ; ces nombres sont

102, 204, 306, 408.

(H. JANOIS, école normale du Mans.)

[Ont résolu la même question : MM. F. d'Avillez ; A. Bertrand ; G. Blondin ; C. Bourdet ; A. Bouzy ; V. Camburcanic ; H. Crozemarie ; L. Curt ; A. Faure ; E. Foucart ; M. Fréchet ; P. Gervaiseau ; G. Hiernaux ; H. Liéger ; L. Magne ; J. Méhu ; J. Ménéchal ; F. Pégorier ; P. Plisson ; J. Rongier ; L. Vignes ; P. Vincent ; Watrin ; J. Wittner ; Benbacite ; H. Bosc ; N. Delhotel ; Feintuch ; E. Le Maigre ; J. Maury ; P. Tribier ; E. Chambaud ; Michel Henri ; Jeannin.]

ALGÈBRE

4133. — *Décomposer en fractions simples du premier degré l'expression*

$$\frac{(a+b+c)x^2 - 2(ab+bc+ca)x + 3abc}{x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc}.$$

Le dénominateur de l'expression est le développement connu

du produit $(x-a)(x-b)(x-c)$. L'expression peut donc se mettre sous la forme

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c},$$

A, B, C étant trois coefficients indépendants de x qu'il s'agit de déterminer.

En égalant les deux expressions, il vient, après suppression du dénominateur commun,

$$(a+b+c)x^2-2(ab+bc+ca)x+3abc$$
$$=A(x-b)(x-c)+B(x-c)(x-a)+C(x-a)(x-b).$$

Cette identité devant être satisfaite pour toute valeur de x l'est en particulier pour $x=a$, et se réduit alors à

$$(a+b+c)a^2-2(ab+bc+ca)a+3abc=A(a-b)(a-c),$$

d'où l'on tire

$$A=\frac{a[a^2-a(b+c)+bc]}{(a-b)(a-c)}=a.$$

En faisant successivement $x=b$ et $x=c$, on aurait de même

$$B=b \quad \text{et} \quad C=c.$$

On a dès lors

$$\frac{(a+b+c)x^2-2(ab+bc+ca)x+3abc}{x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc}$$
$$=\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}.$$

On peut d'ailleurs établir directement cette identité en remarquant que le numérateur du premier membre s'écrit

$$a[x^2-(b+c)x+bc]+b[x^2-(c+a)x+ca]+c[x^2-(a+b)x+ab]$$

ou $\quad a(x-b)(x-c)+b(x-c)(x-a)+c(x-a)(x-b).$

(J. COURTINAT, collège de Cusset.)

[Ont résolu la même question : MM. J. F. d'Avillez, à Portalegre ; E. Beutel, école réale de Cannstatt ; J. Delpont ; J. Dunand, à Poligny ; E. Foucart, à Alençon ; A. Franqueville, à Rouen ; H. Janois, école normale du Mans ; G. Legrand, collège Stanislas ; A. Marcenet, collège de Cosne ; F. Pégorier, à Cette ; G. Picou, à St-Denis ; J. Wittner.]

4163. — *Le polynome*

$$(a-b)^m(b-c)^n+(b-c)^m(c-a)^n+(c-a)^m(a-b)^n$$
$$-(a-b)^n(b-c)^m-(b-c)^n(c-a)^m-(c-a)^n(a-b)^m$$

est divisible par le produit

$$(c+a-2b)(a+b-2c)(b+c-2a).$$

Pour établir la divisibilité du polynome par le facteur

$$c+a-2b=a-b-(b-c),$$

il suffit de montrer que le polynome s'annule lorsqu'on y remplace $a-b$ par $b-c$. En effet, on a ainsi

$$(b-c)^m(b-c)^n+(b-c)^m(c-a)^n+(c-a)^m(b-c)^n$$
$$-(b-c)^n(b-c)^m-(b-c)^n(c-a)^m-(c-a)^n(b-c)^m,$$

quantité nulle, puisque les termes se détruisent deux à deux.

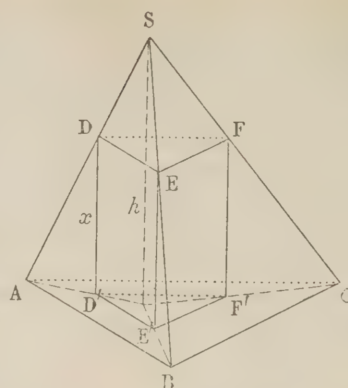
On verrait de même que le polynome est divisible par les deux autres facteurs $a+b-2c$ et $b+c-2a$.

(Ph. PLISSON, instituteur-adjoint, à Sens.)

[Ont résolu la même question : MM. G. Blondin, lycée de Sens ; Carteron, lycée de Dijon ; J. Delpont ; Feintuch ; E. Foucart ; H. Janois, école normale du Mans ; A. Maître ; F. Riesz, à Györ, Hongrie ; L. Vignes, à Boussan ; P. Vincent, école pratique d'industrie de Saint-Étienne.]

4165. — *Inscrire dans un tétraèdre donné un prisme triangulaire droit reposant sur la base du tétraèdre et ayant une surface totale donnée.*

Considérons le prisme droit DEFD'E'F', inscrit dans le tétraèdre donné SABC.



Il suffit de calculer la hauteur $DD'=x$ de ce prisme de façon que sa surface totale ait une valeur donnée k^2, condition exprimée par l'équation

$$2p'x+2S'=k^2,$$

$2p'$ désignant le périmètre et S' la surface de la base DEF.

Or les deux tétraèdres SDEF et SABC étant semblables, leurs éléments analogues sont dans le même rapport. Si donc on représente par h la hauteur du tétraèdre SABC, par $2p$ et S le périmètre et la surface de la base ABC, on a

$$\frac{p'}{p}=\frac{h-x}{h}, \qquad \frac{S'}{S}=\frac{(h-x)^2}{h^2}.$$

L'équation du problème est alors

$$\frac{2p(h-x)x}{h}+\frac{2S(h-x)^2}{h^2}=k^2,$$

ou, en développant et ordonnant par rapport à x,

$$2(S-hp)x^2-2h(2S-hp)x+h^2(2S-k^2)=0.$$

Discussion. — Pour qu'une valeur de x convienne au problème, il faut et il suffit qu'elle soit réelle et comprise entre 0 et h.

Les racines de l'équation seront réelles si l'on a

$$h^2(2S-hp)^2-2(S-hp)h^2(2S-k^2)\geqslant 0,$$

ou $\qquad 2(S-hp)k^2\geqslant 4S(S-hp)-(2S-hp)^2,$

ou enfin $\qquad 2(S-hp)k^2\geqslant -h^2p^2. \qquad (1)$

En faisant successivement $x=0$ et $x=h$ dans le premier membre, $f(x)$, de l'équation, on a

$$f(0)=h^2(2S-k^2),$$
$$f(h)=-h^2k^2.$$

Le coefficient $2(S-hp)$ du terme en x^2 pouvant être positif ou négatif, il faut distinguer deux cas principaux :

1° $S>hp$. $f(h)$ est dans ce cas de signe contraire au premier terme de $f(x)$, et, par suite, h est compris entre les deux racines, qui sont ici toujours réelles. Pour que la plus petite soit positive ou nulle, on doit avoir

$$f(0)\geqslant 0 \qquad \text{ou} \qquad k^2\leqslant 2S.$$

Lorsque cette condition est remplie, le problème admet une solution et une seule.

2° $S<hp$. $f(h)$ est de même signe que le premier terme en x^2 ; par suite h est extérieur aux deux valeurs de x, et d'ailleurs supérieur à la plus grande, car en comparant à la demi-somme, on a

$$h>\frac{h(2S-hp)}{2(S-hp)},$$

puisque cette inégalité revient à

$$\frac{-h^2p}{2(S-hp)}>0.$$

Si $k^2<2S$, $f(0)$ est positif ou de signe contraire au terme en x^2 ; donc

$$x'<0<x''<h. \qquad \text{Une solution.}$$

Si $k^2>2S$, $f(0)$ est négatif ; 0 est en dehors des valeurs de x, du côté de la plus petite ou de la plus grande suivant le signe de la demi-somme. Ainsi on a

$$0<x'<x''<h \qquad \text{si} \qquad 2S<hp$$

ou $x' < x'' < 0 < h$ si $2S > hp$.

Dans le premier de ces deux cas, les deux solutions sont acceptables dès que la condition de réalité (1) est remplie, c'est-à-dire quand on a

$$k^2 \leqslant \frac{-h^2p^2}{2(S-hp)}.$$

La discussion précédente se résume ainsi :

$$k^2 \leqslant 2S, \qquad \text{une solution ;}$$

$$2S < k^2 \leqslant \frac{-h^2p^2}{2(S-hp)}, \qquad \text{deux solutions lorsque } 2S < hp.$$

Remarque. — On peut aussi déduire ces résultats de l'étude de la variation du trinome

$$h^2k^2 = 2(S-hp)x^2 - 2h(2S-hp)x + 2Sh^2.$$

(P. CORNÉLIS, à Paris.)

[M. J. Delpont a résolu la même question.]

4200. — *Vérifier l'égalité*

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}.$$

Calculons successivement la valeur de chaque membre.

En posant

$$a = \sqrt{7+4\sqrt{3}}, \qquad b = \sqrt{7-4\sqrt{3}},$$

le premier membre est égal à $a+b$. Or on a

$$a^2+b^2 = 14$$

et

$$ab = 1 ;$$

donc

$$a+b = \sqrt{a^2+b^2+2ab} = 4.$$

En posant de même

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} = c, \qquad \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = d,$$

le second membre est égal à $c+d$. Or on a

$$c^3+d^3 = 40$$

et

$$cd = 2.$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'identité

$$(c+d)^3 = c^3+d^3+3cd(c+d),$$

on a, pour déterminer $c+d$,

$$(c+d)^3 = 40+6(c+d),$$

équation visiblement satisfaite pour $c+d=4$.

(F. PÉGORIER, à Cette.)

Autre solution. — On a

$$7+4\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^2, \qquad 20+14\sqrt{2} = (2+\sqrt{2})^3,$$
$$7-4\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2, \qquad 20-14\sqrt{2} = (2-\sqrt{2})^3 ;$$

l'égalité énoncée peut alors s'écrire

$$2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3} = 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}$$

et se trouve ainsi immédiatement vérifiée.

(M. FOURMON, collège de Carpentras.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Bertrand ; A. Bouzy, à Vervins ; V. Camburcanic, à Berlad ; Crozemarie ; J. Delpont, à Beaumont ; H. Janois, Le Mans ; A. Smantanescu, à Jassy ; L. Vignes, à Boussan ; P. Vincent, à Aix ; J. Wittner ; N. Delhotel ; Feintuch ; E. Le Maigre ; A. Maitre.]

4203. — *Trouver sur la base* BC *d'un triangle donné* ABC *un point* D *tel que* $\dfrac{\overline{AB}^2}{DB}+\dfrac{\overline{AC}^2}{DC} = 2BC$.

Calculons la longueur x du segment BD en fonction des côtés a, b, c du triangle.

La relation donnée peut s'écrire

$$\frac{c^2}{x}+\frac{b^2}{a-x} = 2a \qquad (1)$$

ou, en simplifiant,

$$2ax^2-(2a^2-b^2+c^2)x+ac^2 = 0.$$

Discussion. — Une valeur de x n'est acceptable qu'autant qu'elle est réelle et comprise entre 0 et a, afin que le premier membre de la relation (1) ait ses deux termes positifs.

Substituons 0 et a à x dans l'équation. Les résultats sont respectivement ac^2 et ab^2 ; ils sont du signe du coefficient de x^2 ; donc 0 et a sont extérieurs aux racines. Si ces racines sont réelles et si leur demi-somme est comprise entre 0 et a, les deux racines conviennent au problème.

Ces conditions de réalité et de grandeur se traduisent par les trois inégalités :

$$(2a^2-b^2+c^2)^2-8a^2c^2 \geqslant 0 \qquad (1)$$

et

$$0 < \frac{2a^2-b^2+c^2}{4a} < a. \qquad (2)$$

L'inégalité (1) s'écrit

$$4a^4-4a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2 \geqslant 0$$

ou

$$[2a^2-(b-c)^2][2a^2-(b+c)^2] \geqslant 0.$$

La différence $b-c$ étant inférieure à a en valeur absolue, le premier facteur entre crochets est positif, et l'inégalité se réduit à

$$2a^2 \geqslant (b+c)^2$$

ou

$$a\sqrt{2} \geqslant b+c.$$

Cette condition comprend les inégalités (2). Ces inégalités reviennent en effet : la première, à $2a^2 > b^2-c^2$; la seconde, à $2a^2 > c^2-b^2$.

Or, de $2a^2 \geqslant (b+c)^2$ on déduit *a fortiori* $2a^2 > b^2-c^2$ et $2a^2 > c^2-b^2$.

Ainsi lorsque $a\sqrt{2} \geqslant b+c$, il existe entre B et C deux points D répondant à la question, et ces points sont confondus en un seul quand $a\sqrt{2} = b+c$.

Remarque. — On peut considérer le cas où le point D serait pris sur l'un des prolongements de BC ; la mise en équations donne alors

$$2ax^2-(b^2+c^2-2a^2)x-ac^2 = 0$$

ou

$$2ax^2-(b^2+c^2+2a^2)x+ac^2 = 0,$$

suivant que D est supposé à gauche de B ou à droite de C.

La première équation admet deux racines réelles de signes contraires, et la racine positive convient seule. La seconde équation admet deux racines réelles positives séparées par a, et la racine supérieure à a est seule acceptable.

(A. MAITRE.)

Solution géométrique. — En appliquant le théorème de Stewart au triangle ABC et à la droite intérieure AD, on a

$$\overline{AB}^2.DC+\overline{AC}^2.DB = BC(\overline{AD}^2+DB.DC),$$

ou, en divisant par DB.DC,

$$\frac{\overline{AB}^2}{DB}+\frac{\overline{AC}^2}{DC} = \frac{BC.\overline{AD}^2}{DB.DC}+BC.$$

La condition imposée revient alors à écrire

$$\overline{AD}^2 = DB.DC.$$

Or, en traçant le cercle circonscrit à ABC et en prolongeant AD jusqu'à son second point de rencontre, E, avec le cercle, on a

$$DB.DC = AD.DE,$$

et par suite $\overline{AD}^2 = AD.DE$,

ou $AD = DE$.

Tout revient ainsi à mener une corde AE dont le milieu D soit sur BC. On peut déterminer cette corde par le point E ou par le point D.

Dans le premier cas, le point E est l'intersection du cercle ABC avec la parallèle à BC menée par le symétrique F de A par rapport à C ; dans le second cas, le point D est à la rencontre de BC avec le cercle lieu des milieux des cordes issues de A, c'est-à-dire avec le cercle de diamètre AO, O étant le centre du cercle circonscrit à ABC.

Il existe en général deux points E ou D. Lorsque les deux points E sont confondus avec le milieu de l'arc BC, la droite AD est bissectrice de l'angle A. Dans ce cas, on a

$$\overline{AD}^2 = bc - DB.DC,$$

$$DB = \frac{ac}{b+c}, \qquad DC = \frac{ab}{b+c};$$

puis, en portant ces valeurs dans la relation $\overline{AD}^2 = DB.DC$,

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{a^2bc}{(b+c)^2},$$

ou

$$2a^2 = (b+c)^2.$$

On retrouve ainsi la valeur limite de $2a^2$ obtenue plus haut.

(P. VINCENT, école des Arts et Métiers, Aix.)

[Ont résolu la même question : MM. F. d'Avillez ; A. Bouzy ; H. Janois ; E. Le Maigre ; P. Plisson ; L. Vignes ; Bourgogne ; B. Conrads.]

GÉOMÉTRIE

4169. — *Sur les côtés d'un triangle comme bases, on construit les triangles semblables* ABA′, CBB′, ACC′ (*les sommets homologues sont indiqués par les lettres de même rang*), *le premier triangle étant placé du même côté que le triangle* ABC *et les deux autres extérieurement. Démontrer que la figure* A′B′CC′ *est un parallélogramme.*

Les triangles ABA′, CBB′ étant semblables par hypothèse, on a

$$\widehat{ABA'} = \widehat{CBB'}, \quad \frac{AB}{CB} = \frac{BA'}{BB'}.$$

Par suite, les triangles ABC, A′BB′ ont un angle égal compris entre côtés proportionnels; ils sont donc semblables, et l'on peut écrire

$$\frac{A'B'}{AC} = \frac{A'B}{AB}. \qquad (1)$$

Mais comme les triangles ABA′, ACC′ sont aussi semblables, on a

$$\frac{A'B}{AB} = \frac{C'C}{AC}. \qquad (3)$$

Des égalités (1) et (2), on déduit

$$\frac{A'B'}{AC} = \frac{C'C}{AC} \quad \text{ou} \quad A'B' = CC'.$$

En comparant les triangles semblables ABC, AA′C′, puis les triangles semblables ABA′, CBB′, on verrait de même que

$$A'C' = B'C.$$

Le quadrilatère A′B′CC′ ayant ainsi ses côtés opposés égaux deux à deux est un parallélogramme.

(Louis DEBRUN.)

[Ont résolu la même question : MM. Carteron ; M. Cryé, lycée de Laval ; G. Delahaye, à Roye ; Feintuch ; E. Foucart, à Alençon ; G. Hiernaux ; A. Maître ; A. Mirc, élève de philosophie au lycée de Dijon ; P. Plisson, instituteur à Sens ; M. Rebeix ; F. Riesz, à Gyor, Hongrie.]

4170. — *Sur les côtés opposés* AB, CD *d'un quadrilatère, on construit extérieurement, et sur les côtés* DA, BC *intérieurement, les quatre triangles semblables* ABA′, CDC′, ADD′, CBB′ (*les sommets homologues sont indiqués par les lettres de même rang*). *Démontrer que la figure* A′B′C′D′ *est un parallélogramme.*

Tirons la diagonale BD. Les triangles AA′D′, ABD ayant un angle égal

$$(\widehat{A'AB} + \widehat{BAD'} = \widehat{D'AD} + \widehat{BAD'})$$

compris entre côtés proportionnels, sont semblables. Par suite,

$$\frac{A'D'}{BD} = \frac{AD'}{AD}.$$

De même,

$$\frac{B'C'}{BD} = \frac{CC'}{CD}.$$

Or

$$\frac{AD'}{AD} = \frac{CC'}{CD},$$

puisque les triangles ADD′, CDC′ sont semblables.

Donc

$$\frac{A'D'}{BD} = \frac{B'C'}{BD} \quad \text{ou} \quad A'D' = B'C'.$$

On démontrerait de même que

$$A'B' = D'C'.$$

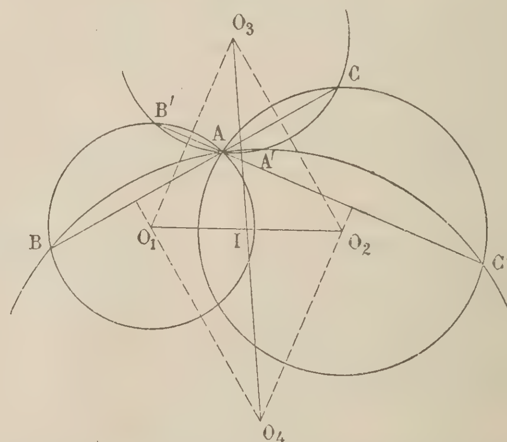
Le quadrilatère A′B′C′D′ est donc un parallélogramme.

(Louis DEBRUN.)

[Ont résolu la même question : MM. Carteron ; M. Cryé, lycée de Laval ; G. Delahaye, à Roye ; Feintuch ; E. Foucart ; G. Hiernaux ; A. Maître ; P. Plisson, instituteur à Sens ; M. Rebeix ; F. Riesz, à Györ, Hongrie.]

4173. — *Par le point* A, *commun à deux cercles sécants, on mène deux sécantes quelconques* ABC, AB′C′. *Lieu du second point de rencontre des cercles* ABC′ et AB′C.

Première solution. — Soient O_1, O_2, O_3, O_4 les centres des cercles ABB′, ACC′, AB′C et ABC′.



Les lignes des centres O_1O_4, O_2O_3, respectivement perpendiculaires aux milieux de AB, AC, sont parallèles; il en est de même des lignes O_1O_3, O_2O_4. La figure $O_1O_3O_2O_4$ est donc un parallélogramme, de sorte que la droite O_3O_4 passe par le point fixe I, milieu de O_1O_2. Comme les cercles O_3 et O_4 se coupent en deux points A, A′ symétriques par rapport à la droite O_3O_4, il en résulte que le lieu du second point commun A′ est un cercle de centre I et de rayon IA. Ce cercle est entièrement décrit, puisque la droite O_3O_4 peut occuper toutes les positions possibles autour du point I.

(Frédéric RIESZ, Györ, Hongrie.)

SECONDE SOLUTION. — Transformons la figure par rayons vecteurs réciproques.

En prenant le point A pour pôle, les deux cercles ABB′, ACC′ se transforment suivant les deux droites D, D′, qui se coupent en un point P, inverse du second point commun aux deux cercles donnés. Les droites ABC, AB′C′ ont pour inverses les droites AB_1C_1, $AB'_1C'_1$. Par suite les cercles ABC′, AB′C ont pour transformées les droites $B_1C'_1$ et B'_1C_1, et l'on est ramené à trouver le lieu du point M_1 commun à ces deux dernières droites. Or ce point décrit évidemment la polaire du point A par rapport à l'angle DPD′. Le lieu de M est donc l'inverse de cette polaire, c'est-à-dire un cercle passant par le pôle A et le second point commun aux deux cercles donnés, inverse du point P.

(ERNEST FOUCART, caporal au 103e d'infanterie.)

[Ont résolu la même question : MM. Carteron ; G. Hiernaux ; A. Maître ; M. Rebeix ; L. Vignes.]

4202. — *Dans un triangle* ABC, *on considère les hauteurs* BB′, CC′, *puis les perpendiculaires* B′B″, C′C″ *abaissées respectivement sur* CC′, BB′. *Démontrer que* $\overline{B'C'}^2 = BC.B''C''$.

Soit H le point de rencontre de BB′ et CC′.

Les angles BC′C, BB′C étant droits, le quadrilatère BCB′C′ est inscriptible; les triangles HB′C′ et HCB sont donc semblables, et l'on a

$$\frac{BC'}{BC} = \frac{HB'}{HC}.$$

En considérant le quadrilatère inscriptible B′C′C″B″, on a de même

$$\frac{B''C''}{B'C'} = \frac{HC''}{HC'}.$$

Mais, les triangles rectangles HB′C, HC″C′ ayant un angle égal sont semblables; par suite

$$\frac{HB'}{HC} = \frac{HC''}{HC'}$$

ou, en vertu de ce qui précède,

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{B''C''}{B'C'}$$

ou enfin $$\overline{B'C'}^2 = BC.B''C''.$$

C. Q. F. D.

(CH. BOURDET, lycée de Niort.)

AUTRE SOLUTION. — Les deux quadrilatères BCB′C′ et B′B″C″C′ sont semblables comme formés de triangles semblables et semblablement placés. En effet, ces quadrilatères étant inscriptibles dans un demi-cercle, les triangles HBC et HC′B′, HC′B′ et HC″B″ sont semblables; de même les triangles rectangles HCB′ et HC′C″, HBC′ et HB′B″ ayant un angle aigu égal sont également semblables.

En écrivant que deux côtés homologues des quadrilatères sont dans le même rapport, on a

$$\frac{BC}{C'B'} = \frac{B'C'}{B''C''}$$

ou $$\overline{B'C'}^2 = BC.B''C''.$$

(A. BERTRAND, à Azillanet.)

[Ont résolu la même question : MM. J. F. d'Avillez ; H. Beucler ; G. Blondin ; A. Bouzy ; E. Chambaud ; L. Debrun ; J. Delpont ; Desportes ; A. Faure ; E. Foucart ; P. Gervaiseau ; G. Hiernaux ; H. Jaffré ; J. Méhu ; de Mendiry ; J. Ménéchal ; M. Oger ; Ph. Plisson ; G. Teulade ; A. Vannier ; L. Vignes ; P. Vincent ; J. Wittner ; Benbacite ; H. Bosc ; Bourgogne ; Bourquin ; L. Curt ; G. Damieu ; Feintuch ; E. Le Maigre ; A. Maître ; J. Maury ; A. Millet ; A. Mirc ; A. Rongier ; Taralon.]

4204. — *On donne un tétraèdre* SABC.

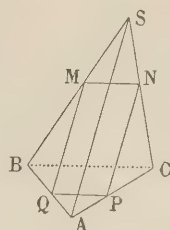
1° *Démontrer que la section faite dans les quatre faces par un plan parallèle à deux arêtes opposées* SA *et* BC *est un parallélogramme.*

2° *On donne les longueurs* $SA = d$, $BC = d'$ *de ces arêtes opposées, que l'on suppose rectangulaires. Soit* M *le sommet de la section qui est située sur l'arête* SB *du tétraèdre. On pose* $SB = b$ *et* $SM = x$. *Calculer l'aire de la section.*

3° *Déterminer* x *de manière que cette aire soit maximum.*

(*Bacc. lettres-sciences, Lyon, juillet 1897.*)

1° Le plan sécant étant parallèle à l'arête BC coupe les faces SBC, ABC suivant deux droites MN, QP parallèles à BC et par suite parallèles entre elles; de même ce plan étant parallèle à SA coupe les faces BSA, CSA suivant les parallèles MQ, NP. Donc la figure MNPQ ayant ses côtés opposés parallèles est un parallélogramme.



2° Lorsque les arêtes SA et BC sont rectangulaires, la section MNPQ devient un rectangle dont la surface est exprimée par

$$MN \times MQ.$$

Calculons MN et MQ en fonction de d, d' et x. Des triangles semblables donnent

$$\frac{MN}{BC} = \frac{SM}{SB}, \qquad \text{d'où} \qquad MN = \frac{d'x}{b};$$

$$\frac{MQ}{SA} = \frac{BM}{BS}, \qquad \text{d'où} \qquad MQ = \frac{d(b-x)}{b}.$$

On a donc pour expression de l'aire MNPQ,

$$\frac{dd'x(b-x)}{b^2}.$$

3° Cette expression devient maximum en même temps que le produit $x(b-x)$. Or les facteurs x et $b-x$ ayant une somme constante, le maximum de leur produit est atteint lorsque ces facteurs sont égaux :

$$x = b - x, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{b}{2}.$$

Ainsi, dans le cas du maximum, la section MNPQ est équidistante des deux arêtes SA et BC, et a pour valeur $\frac{dd'}{4}$.

(G. HIERNAUX, école normale de Châlons-sur-Marne.)

[Ont résolu la même question : MM. Alype Bertrand, élève à l'Institut Agronomique ; H. Beucler, à Bourogne ; G. Blondin ; A. Bouzy ; Carteron, à Dijon ; Crozemarie ; J. Delpont ; E. Foucart ; Fréclet ; H. Janois ; A. Maître ; J. Maury, à Laborie ; de Mendiry ; Plisson, à Sens ; G. Teulade ; L. Vignes ; P. Vincent, à Aix ; Benbacite ; Bourgogne ; Feintuch ; M. Georgi.]

PHYSIQUE

4175. — *Dans un récipient dont la capacité est de* 6^{lit}, *maintenu à* 20°, *on introduit* 3^{lit} *d'hydrogène sec et* 2^{lit} *d'oxygène sec mesurés à* 10° *et sous la pression de* 765^{mm} *de mercure.*

On met le feu à ce mélange au moyen d'une étincelle électrique, et l'on demande quelle sera la pression lorsque l'équilibre de température sera rétabli.

La force élastique maxima de la vapeur d'eau à 20° est mesurée par 18^{mm} *de mercure.*

Coefficient de dilatation des gaz : 0,00367.

(*Bacc. lettres-math., Paris, mars 1897.*)

Le passage de l'étincelle électrique détermine la combinaison des 3^{lit} d'hydrogène, avec $1^{lit},5$ d'oxygène.

Lorsque l'équilibre de température est rétabli, l'oxygène restant ($0^{lit},5$) occupe la capacité du récipient à 20°. Pour avoir sa force élastique x, il suffit d'appliquer les lois de Mariotte et de Gay-Lussac réunies. On a

$$\frac{0,5 \times 765}{1 + 10 \times 0,00367} = \frac{6 \times x}{1 + 20 \times 0,00367},$$

d'où l'on tire $x = 66^{mm}$.

La combinaison de l'hydrogène et de l'oxygène a produit 3^{lit} de vapeur d'eau dont la masse est donnée par la formule

$$M = 3 \times 1,293 \times \frac{5}{8} \times \frac{765}{760} \times \frac{1}{1 + 10 \times 0,00367}.$$

On trouve $M = 2^{gr},35$.

D'un autre côté, la masse de vapeur saturante qui occuperait à 20° un volume de 6^{lit} est égale à

$$6 \times 1,293 \times \frac{5}{8} \times \frac{18}{760} \times \frac{1}{1 + 20 \times 0,00367},$$

c'est-à-dire à $0^{gr},107$.

On voit d'après cela que le récipient est saturé de vapeur d'eau. Par suite, la force élastique dans le récipient, lorsque l'équilibre de température sera rétabli, est la somme des forces élastiques de l'oxygène et de la vapeur d'eau; elle est égale à

$66 + 18$ ou 84^{mm}.

(Adrien BASTET.)

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil ; R. Cayrol ; M. Cryé ; J. Delpont ; A. Maître].

4211. — *Un vase vide pèse* 100^{gr}; *plein de mercure* (*densité* : 13,5), *il pèse* $7^{kg},4$. *Déterminer sa capacité intérieure.*

On le plonge plein de mercure dans un liquide de densité 0,8 ; *il pèse* $6\,570^{gr}$.

Déterminer le volume de parois du vase et la densité de la matière qui les forme.

On veut que le vase supposé fermé ait la même densité moyenne que l'eau, de façon à s'y maintenir immergé en équilibre sans aller au fond ni à la surface : quel volume de grenaille de plomb faut-il y introduire (*densité du plomb* : 11,3)?

On suppose que l'air n'intervient pas dans les pesées.

(*Bacc. lettres-math., Toulouse, juillet 1897.*)

Le poids du mercure contenu dans le vase est de

$$7400 - 100 = 7300^{gr}.$$

Le volume de ce mercure, et par suite la capacité intérieure du vase, est donc de $\frac{7300}{13,5} = 540^{cc},7$.

Quand on plonge le vase plein de mercure dans un liquide de densité 0,8, il subit une poussée égale à

$$7400 - 6570 = 830^{gr}.$$

Le volume extérieur du vase est de

$$\frac{830}{0,8} = 1\,037^{cc},5.$$

Le volume des parois du vase a donc pour valeur

$$1\,037,5 - 540,7 = 496^{cc},8,$$

et la densité de la matière qui les forme

$$\frac{100}{496,8} = 0,20.$$

Pour que le vase supposé fermé ait la même densité moyenne que l'eau, il faut que le poids du vase soit égal au poids du volume d'eau déplacé. Or le poids du vase est de 100^{gr}; le poids du volume d'eau déplacé est de $1\,037^{gr},5$. Il faut donc ajouter $1\,037,5 - 100 = 937^{gr},5$ de plomb, ce qui correspond à un volume de $\frac{937,5}{11,3} = 82^{cc},97$.

(Alype BERTRAND.)

[Ont résolu la même question : MM. G. Blondin ; H. Bonafé ; M. Boucly ; A. Bouzy ; Crozemarie ; L. Curt ; J. Delpont ; E. Foucart ; P. Gervaiseau ; G. Hiernaux ; H. Janois ; J. Ménéchal ; P. Plisson ; A. Vannier ; P. Vincent ; Watrin ; J. Wittner ; Th. Gramain.]

BACCALAURÉATS

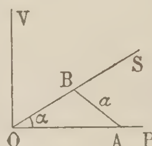
SESSION DE JUILLET 1897

ACADÉMIE D'ALGER

Baccalauréat lettres-mathématiques
(classique et moderne).

ALGER

I. — **4214**. Une droite AB de longueur donnée a, dont les extrémités s'appuient à la fois sur les deux côtés d'un angle donné POS $= \alpha$, peut occuper une infinité de positions. On demande quelle est celle pour laquelle la surface du tronc de cône qu'elle engendre en tournant autour de l'axe OV, perpendiculaire à OP, atteint une valeur donnée πma.



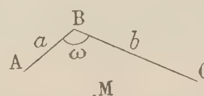
Examiner spécialement le cas où l'angle α est de 60°, et déterminer le maximum de cette surface.

Que devient ce maximum dans le cas où $\alpha = 90°$?

Nota. — On pourra prendre comme inconnues OA $= x$, OB $= y$.

II. — *1er sujet.* — Résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux (discussion).

II. — *2e sujet.* — Résoudre un triangle connaissant les trois côtés.



II. — *3e sujet.* — *Problème de la carte :* Rapporter sur une carte un point M d'où l'on a vu sous des angles donnés α et β deux droites AB et BC de longueurs données a et b et faisant entre elles un angle connu ω.

I. — Un baromètre est enfermé dans un large tube de verre scellé à la lampe. A l'instant de la fermeture, la hauteur de la colonne est 76^{cm}, et la température est 15°. Calculer la hauteur de la colonne lorsque la température est 40°.

Coefficient de dilatation du mercure . . . . . $\frac{1}{5550}$.

Coefficient de dilatation de l'air. . . . . . . 0,00366.

On ne tiendra pas compte de la dilatation du verre.

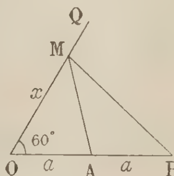
II. — *1er sujet.* — Décrire et interpréter les expériences qui conduisent aux notions de potentiel et de capacité électrique.

II. — *2e sujet.* — Condensation électrique.

II. — *3e sujet.* — Énoncé des lois fondamentales des courants. — Unités pratiques d'intensité, de résistance et de force électromotrice.

ORAN

I. — **4215**. On donne un angle de 60° POQ, et sur l'un des côtés OP on porte à la suite l'une de l'autre deux longueurs égales entre elles OA $=$ AP $= a$; on demande de trouver sur l'autre côté OQ un point M tel que le périmètre du triangle MAP ait une valeur donnée.



On prendra si l'on veut pour inconnue OM $= x$.

II. — **4216**. On donne deux points A et B sur la ligne de terre, un point C dans le plan horizontal et un point D dans le plan vertical. Sur le tétraèdre qui a

ces quatre points pour sommets, on résoudra l'une des questions suivantes :

1° Construction et évaluation des quatre hauteurs de ce tétraèdre;

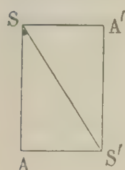
2° Mesure de ses six angles dièdres;

3° Evaluation des angles que les arêtes AB et BD font respectivement avec les faces DBC et DAC.

Physique : Voir 4213.

CONSTANTINE

I. — **4217**. Étant donné le rectangle SAS'A' dont la base AS' est R, et dont la hauteur AS est h, on considère les cônes engendrés par la rotation de la diagonale SS' autour de SA puis autour de S'A'.



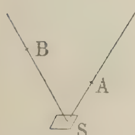
On propose de couper l'ensemble de ces deux cônes par un plan perpendiculaire à SA et tel que la somme des surfaces des sections obtenues soit équivalente à une surface donnée k^2.

Etudier la variation de cette somme lorsque le plan sécant prend toutes les positions possibles entre A et S.

II. — *1er sujet.* — Montrer que toutes les lignes trigonométriques de l'arc a s'expriment rationnellement en fonction de $\operatorname{tg}\frac{1}{2}a$.

II. — *2e sujet.* — Transformer en produit la somme de deux lignes trigonométriques, sinus, cosinus ou tangentes.

II. — *3e sujet.* — Limite de $\frac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers zéro.



I. — Deux points lumineux A et B, de même intensité lumineuse, éclairent une très petite surface S; ces points peuvent se déplacer sur deux droites SA et SB également inclinées sur la surface S.

Etablir la relation qui doit exister entre les distances $SA = x$ et $SB = y$ pour que la petite surface considérée conserve un éclairage constant.

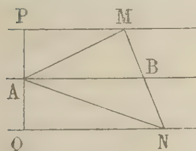
II. — *1er sujet.* — Propagation de la lumière; sa vitesse.

II. — *2e sujet.* — Spectres des différentes sources lumineuses. — Expérience du renversement des raies.

II. — *3e sujet.* — Chaleur rayonnante. — Expériences de Melloni.

TUNIS.

I.— **4218**. On considère trois parallèles à des distances $AP = AQ = h$ l'une de l'autre. Sur la parallèle du milieu, on donne les deux points A et B dont la distance est a. Par le point A, on mène la perpendiculaire PQ sur AB, et l'on demande de faire passer par le point B une droite MN telle que l'angle MAN ait une valeur donnée φ. On prendra pour inconnues $PM = x$ et $QN = y$. — Discuter.



En faisant usage du point symétrique de A par rapport au point B, trouver une solution graphique du problème.

II. — *1er sujet.* — Théorème des moments par rapport à un point pris dans le plan de deux forces concourantes.

II. — *2e sujet.* — Composition de deux forces parallèles.

II. — *3e sujet.* — Théorie de la balance ordinaire.

I. — Deux pendules électriques de longueur l, d'abord en contact, sont chargés d'une certaine quantité d'électricité. Ils s'écartent alors de la verticale et chacun d'eux fait un angle α avec cette direction.

On demande de calculer la charge x de chaque balle de poids p, le poids des fils suspendant ces balles étant négligeable.

II. — *1er sujet.* — Courants thermo-électriques.

II. — *2e sujet.* — Mesure de l'intensité d'un courant par le voltamètre.

II. — *3e sujet.* — Lois d'Ohm.

Baccalauréat lettres-sciences.

PREMIÈRE SÉRIE DE CANDIDATS

I. — Appliquer les propriétés des dérivées à la résolution de la question suivante :

De toutes les boites cylindriques fermées de même surface totale πa^2, quelle est celle qui présente la plus grande capacité?

Quelles sont les dimensions de celle dont la capacité serait d'un hectolitre et qui remplirait les conditions de maximum indiquées ?

II. — *1er sujet.* — Etant donnés deux points sur la ligne de terre, un point dans le plan vertical et un point dans le plan horizontal, faire passer une sphère par ces quatre points ; déterminer son centre et son rayon.

II. — *2e sujet.* — Placer une sphère de rayon donné R de manière qu'elle soit tangente à la fois au plan horizontal, au plan vertical et à un plan donné par ses traces $p'\alpha q$.

II. — *3e sujet.* — Etant données une droite $(ab, a'b')$ et une sphère (o, o'), mener par la droite un plan qui coupe la sphère suivant un cercle de rayon donné r.

I. — *1er sujet.* — Transformations du travail en chaleur. — Principe de l'équivalence. — Détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur : Expériences de Joule.

I. — *2e sujet.* — Principe de la machine à vapeur. — Condenseur; son utilité. — Mouvement du tiroir. — Détente. — Puissance d'une machine. — Unité pratique. — Unités C. G. S.

I. — *3e sujet.* — Densité des gaz; sa détermination par la méthode de Regnault dans le cas où le gaz n'attaque pas les métaux. — Comment varie la densité d'un gaz avec la température et la pression?

II. — On donne n éléments de pile identiques dont la résistance intérieure est r. Quelle doit être la résistance extérieure R pour qu'il n'y ait aucun avantage à les associer en série ou en batterie?

On donne $r = 2$ ohms, $R = 10$ ohms. Quelle est la disposition la plus avantageuse?

DEUXIÈME SÉRIE DE CANDIDATS

I. — *1er sujet.* — Combien peut-il y avoir de relations distinctes entre les six lignes trigonométriques d'un même arc? Etablir ces relations et en déduire les valeurs du sinus et du cosinus en fonction de la tangente.

I. — *2e sujet.* — Enoncer le théorème des projections, en déduire les formules qui donnent le sinus et le cosinus de la somme de deux arcs.

I. — *3e sujet.* — Etablir les formules qui donnent le sinus et le cosinus d'un arc en fonction de la tangente de l'arc moitié et expliquer pourquoi ces formules sont rationnelles.

II. — Etudier les variations de la fonction

$$y = \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - x - 1}.$$

Construire la courbe représentative des variations de cette fonction et déterminer l'angle que fait avec l'axe des x la tangente en chacun des points où la courbe coupe cet axe.

I. — Voir 4229.

II. — *1er sujet.* — Lampes à arc et à incandescence.

II. — *2e sujet.* — Galvanoplastie.

II. — *3e sujet.* — Téléphone. — Microphone.

EXAMENS ET CONCOURS DE 1897 *(Suite)*

CERTIFICAT D'APTITUDE A L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES

Mathématiques.

4219.— On donne un triangle isocèle OAB, dans lequel $OA = OB = a$, et on considère un point M situé dans le plan du triangle.

1° Construire le point P, situé sur la droite OM, pour lequel on a

$$\frac{MA}{MB} = \frac{PA}{PB}.$$

2° Trouver la relation qui relie les quantités OM et OP.

3° Trouver le lieu du point P lorsque le point M décrit une circonférence donnée S. — Peut-on choisir la circonférence S de manière que le lieu du point P soit cette circonférence ?

4° Le point M se déplaçant sur une circonférence de rayon donné R, tangente à OA au point O, trouver pour quelles positions de ce point M l'aire du triangle AMP a une valeur donnée m^2.

(8 juillet, de 8 h. 1/2 à midi 1/2.)

Physique et Chimie.

I. — Énoncer les lois de la dissolution des gaz et des mélanges gazeux dans les liquides. — Proposer et résoudre un problème destiné à familiariser les élèves avec l'application de ces lois.

II. — Un circuit conducteur fermé, A, est placé dans le champ d'un courant électrique B. — Étudier les courants produits en A :

1° Quand on déplace le courant B ;

2° Quand on fait varier son intensité ;

3° Quand on répète fréquemment l'un ou l'autre phénomène, en renversant chaque fois le sens de la variation.

III. — Définition des sels ammoniacaux. — Action de la chaleur sur ces sels.

Définition des amides. — L'urée.

(9 juillet, de 8 h. 1/2 à midi 1/2.)

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES

Ordre des sciences mathématiques.

Arithmétique et Algèbre.

I. — Expliquer comment la recherche de la racine carrée d'un nombre quelconque, à $\frac{1}{n}$ près, se ramène à la recherche de la racine carrée d'un nombre entier, à une unité près.

II. — **4220**. 1° Résoudre les équations

$$(24m^2 + 8m + 1)x + (15m^2 + 8m + 1)y + 3m^2 = 0,$$
$$(8m + 2)x + (5m + 1)y - m = 0,$$

dans lesquelles m désigne un nombre donné.

2° Déterminer les valeurs de m pour lesquelles ces équations forment un système indéterminé ou impossible.

3° Étudier les variations de y et du produit xy lorsque m croît de $-\infty$ à $+\infty$.

(8 juillet, de 8 h. 1/2 à midi 1/2.)

Géométrie et Cosmographie.

4221. — On considère toutes les circonférences telles que le rapport du rayon de chacune d'elles à la distance de son centre à une droite fixe D soit un nombre constant m.

1° Démontrer que deux quelconques de ces circonférences ont un de leurs centres de similitude situé sur la droite D.

2° Le nombre m étant supposé plus petit que l'unité, démontrer que toutes celles de ces circonférences qui ont leurs centres situés sur une droite donnée D' sont tangentes à deux droites fixes. — La proposition subsiste-t-elle quand m surpasse l'unité ?

3° Chercher et discuter le lieu géométrique des centres de celles de ces circonférences qui sont tangentes à un cercle donné, de centre O et de rayon r.

Construire ce lieu en supposant O situé sur la droite D, et $m = 2$: distinguer les parties du lieu qui correspondent à un contact extérieur ou à un contact intérieur entre le cercle O et les circonférences variables.

(9 juillet, de 8 h. 1/2 à midi 1/2.)

Ordre des sciences physiques et naturelles.

Sciences physiques.

I. — Production des courants par les machines dynamo-électriques. — On énoncera d'une manière précise les principes sur lesquels est fondé le fonctionnement de ces machines, et on indiquera les expériences de cours qui permettent de les vérifier.

Principales applications industrielles des machines dynamo-électriques.

II. — **4222**. Dans un tube eudiométrique qui plonge dans une cuve à mercure, on mélange 20^{cc} d'oxyde de carbone, mesurés sous la pression de 76^{cm} de mercure et à 0°, avec 50^{cc} d'oxygène, mesurés sous la pression de 38^{cm} et à 0°. On fait passer dans le mélange une étincelle électrique, puis on amène le résidu gazeux à occuper un volume de 35^{cc}. Quelle sera la pression finale du mélange?

Si l'on fait passer ensuite dans le résidu gazeux une solution de potasse, en quantité suffisante pour absorber tout l'acide carbonique, à quelle hauteur s'élèvera le mercure dans le tube eudiométrique?

(8 juillet, de 8 h. 1/2 à midi 1/2.)

Sciences naturelles.

I. — Les Mollusques : caractères généraux. — Principaux types actuels. — Mollusques céphalopodes de la période secondaire.

II. — Les échanges gazeux entre les plantes et le milieu extérieur : respiration, assimilation du carbone, émission de vapeur d'eau.

(9 juillet, de 8 h. 1/2 à midi 1/2.)

QUESTIONS PROPOSÉES

4223. — Trouver trois nombres entiers positifs sachant que leur somme est 10 et la somme de leurs produits deux à deux 31.

(CRAPIER, à Clichy.)

4224. — Simplifier l'expression

$$\sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4 b^2}} + \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^2 b^4}}.$$

(BRODBECH, à Isigny.)

4225. — Extraire la racine carrée du polynome

$$(x^2 - yz)^3 + (y^2 - zx)^3 + (z^2 - xy)^3 - 3(x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy).$$

(F. PÉGORIER, à Toulouse.)

4226. — Si a, b, c sont les côtés d'un triangle et m_a la médiane issue de A, on a

$$m_a^2 + bc > \frac{a^2}{4} > m_a^2 - bc.$$

(E. BERNARDINI, à Fermo.)

4227. — On donne deux cercles se coupant en A et A'. Construire un parallélogramme ABCD sachant que l'un des côtés passe par A', l'un des sommets est en A et les trois autres sur les cercles donnés.

(M. EMILE, aux Gaudines.)

4228. — Par un point A donné sur un cercle donné C, on fait passer deux autres cercles C' et C'' tangents entre eux et égaux au cercle C, qui les rencontre en deux points M et M' autres que A. Lieu de la projection du point A sur MM'.

(J. PASTOUR, à Antibes.)

4229. — Deux cordes de même longueur mais inégalement tendues, l'une de fer et l'autre de cuivre, sont à l'unisson.

Sachant que la corde de cuivre est trois fois plus tendue que celle de fer et que le rapport des densités des deux métaux est égal à 1,15, on demande de calculer :

1° Le rapport des diamètres des deux cordes ;

2° La tension à donner à la corde de fer, — par rapport à celle correspondant à l'unisson, — pour que l'intervalle entre les notes rendues par les deux cordes devienne égal à $\frac{3}{2}$.

(Bacc. lettres-sciences, Alger, juin 1897.)

4230. — Un morceau de glace pesant 725^{gr} est placé dans un vase contenant 2500^{gr} d'eau à la température de 5°. L'équilibre thermique étant établi, on trouve que la glace pèse 64^{gr} de plus qu'au début. On demande quelle était la température initiale de la glace.

La chaleur spécifique de la glace est 0,5 ; sa chaleur latente 80. La capacité calorifique des parois du vase est considérée comme négligeable, ainsi que les échanges de chaleur avec l'extérieur.

(Bacc. lettres-math., Lyon, juillet 1897.)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

22e Année. — N° 3. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 1er Novembre 1897.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

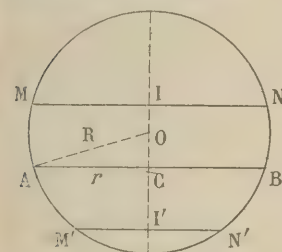
INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE (1897)

4148. — *Par la circonférence d'un cercle de rayon r on fait passer une sphère que l'on coupe par deux plans P, P' parallèles au plan du cercle donné et situés, de part et d'autre, à une distance h de ce plan.*

1° Trouver à quelles conditions on peut déterminer le rayon R de cette sphère, de façon qu'elle soit coupée par chacun des deux plans P, P' et déterminer entre quelles limites varie R.

2° Évaluer le volume du segment sphérique déterminé par les deux plans P, P' et la sphère.

1° Soient AB, MN, M'N' les traces sur un grand cercle de la sphère du cercle donné C et des petits cercles I, I' déterminés par les plans P, P' parallèles au plan du cercle C.



Pour que la sphère O existe, il faut d'abord qu'on ait $R \geqslant r$. Cette sphère coupera d'ailleurs les plans P et P' lorsque les points I et I' situés à une distance h de C tomberont à l'intérieur du cercle O, ce qui revient à écrire

$$OI < R, \qquad OI' < R$$

ou $\quad |h - \sqrt{R^2 - r^2}| < R, \qquad h + \sqrt{R^2 - r^2} < R.$

Comme $|h - \sqrt{R^2 - r^2}| < h + \sqrt{R^2 - r^2}$, la première inégalité est comprise dans la seconde, qui s'écrit

$$\sqrt{R^2 - r^2} < R - h.$$

Cette inégalité n'est possible qu'autant que son second membre est positif comme le premier ; on doit donc avoir $R > h$. En élevant au carré les deux membres positifs de l'inégalité, elle devient

$$R^2 - r^2 < R^2 - 2Rh + h^2,$$

d'où
$$R < \frac{h^2 + r^2}{2h}.$$

Pour que ce dernier résultat s'accorde avec $R > h$, il faut qu'on ait

$$h < \frac{h^2 + r^2}{2h} \qquad \text{ou} \qquad h < r.$$

En résumé, la sphère O rencontre à la fois les deux plans P et P' si l'on a

$$h < r \qquad \text{et} \qquad r < R < \frac{h^2 + r^2}{2h}.$$

Cas particuliers. — Lorsque $h = r$, on a $R = r$; dans ce cas, il n'existe qu'une seule sphère O, tangente à la fois aux plans P, P'.

Lorsque $R = r$, la sphère O a son centre en C et coupe visiblement les plans P, P' si $h < r$.

Lorsque $R = \dfrac{h^2 + r^2}{2h}$, la sphère O touche le plan P' et rencontre alors le plan P si l'on a $2R > 2h$ ou $\dfrac{h^2 + r^2}{2h} > h$ ou enfin $h < r$.

2° Le volume du segment sphérique MNN'M' a pour expression

$$V = \frac{1}{6}\pi \overline{II'}^3 + \frac{1}{2}\pi(\overline{MI}^2 + \overline{M'I'}^2)II'.$$

Or $II' = 2h$;

$$\overline{MI}^2 = R^2 - \overline{OI}^2 = R^2 - (h - \sqrt{R^2 - r^2})^2,$$

$$\overline{M'I'}^2 = R^2 - \overline{OI'}^2 = R^2 - (h + \sqrt{R^2 - r^2})^2,$$

d'où, en ajoutant,

$$\overline{MI}^2 + \overline{M'I'}^2 = 2R^2 - 2h^2 - 2(R^2 - r^2) = 2(r^2 - h^2).$$

En remplaçant dans V, il vient

$$V = \frac{1}{6}\pi\, 8h^3 + \frac{1}{2}\pi\, 2(r^2 - h^2)2h = \frac{4}{3}\pi h^3 + 2\pi h(r^2 - h^2)$$
$$= \frac{2}{3}\pi h(3r^2 - h^2).$$

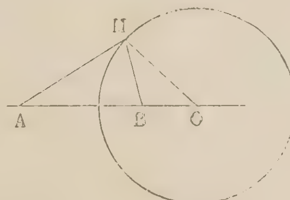
(M. Oger, à Tours.)

[Ont résolu partiellement la question : MM. E. Ardin-Delteil ; P. Barroue ; A. Maitre ; A. Nayel ; F. Pégorier ; P. Vincent.]

4149. — *Sur une droite indéfinie AB, on prend un point O tel que $\dfrac{OA}{OB} = k^2$, et de O comme centre on décrit un cercle ayant pour rayon la moyenne géométrique de OA et OB. Évaluer le rapport $\dfrac{MA}{MB}$, M étant un point quelconque de la circonférence de ce cercle.*

Tirons le rayon OM. Par hypothèse

$$\overline{OM}^2 = OA.OB,$$



d'où
$$\frac{OM}{OA} = \frac{OB}{OM} ;$$

donc les triangles OMA, OBM, qui ont un angle commun compris entre côtés proportionnels, sont semblables, et l'on a successivement

$$\frac{MA}{MB} = \frac{OM}{OB} = \frac{\sqrt{OA.OB}}{OB} = \sqrt{\frac{OA}{OB}} = k.$$

(de Mendiry.)

[Ont résolu la même question : MM. H. Crozemarie ; M. Cryé ; Feinluch ; G. Hiernaux ; M. Legras ; A. Maitre ; P. Plisson ; M. Rebeix ; F. Reisz ; L. Tarrin ; P. Vincent.]

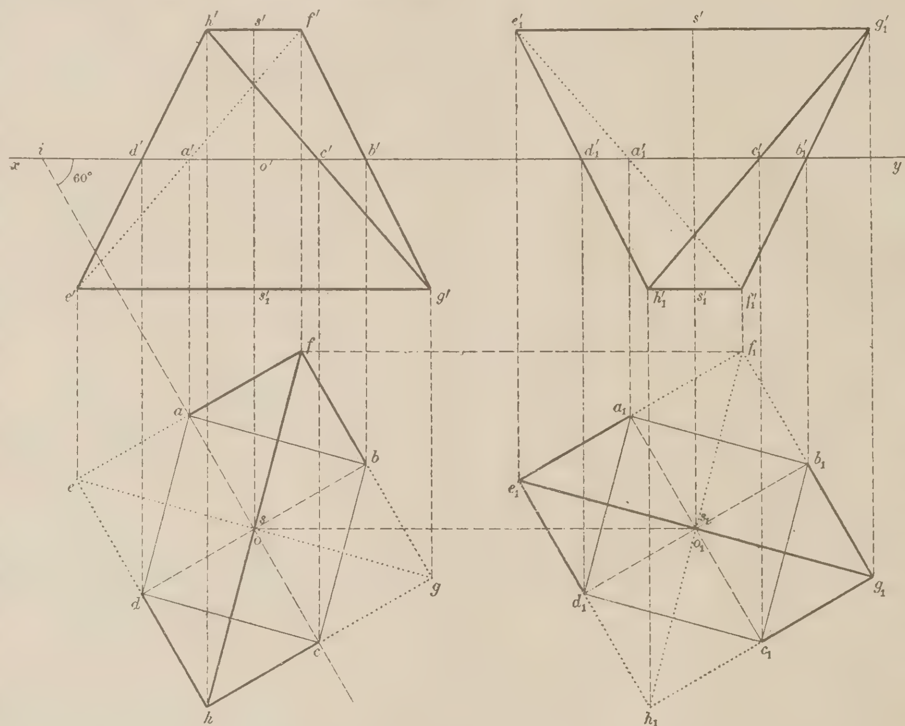
4152. — *On trace dans le plan horizontal un carré abcd dont le côté $ab = 5^{cm}$; la diagonale ac fait avec la ligne de terre un angle de 60 degrés; le centre o du carré est à une distance de la ligne de terre égale à 10^{cm}. Déterminer sur la verticale passant par le centre du carré deux points* S, S_1 *tels que les triangles ayant ces points pour sommets et les côtés du carré pour bases soient des triangles équilatéraux. Cela fait, déterminer les intersections mutuelles des quatre plans* S*ad*, S*bc*, S_1cd *et* S_1ab, *et représenter le solide formé par ces quatre plans.*

On fera la même chose pour les quatre plans S*ab*, S*cd*, S_1ad *et* S_1bc, *mais après avoir préalablement fait subir au solide* S*abcd*S_1 *une translation parallèle à xy de gauche à droite et de* 12^{cm}.

Par le point o situé à une distance $oo' = 10^{cm}$ de xy, menons la droite oi qui fait un angle de 60° avec xy ou de 30° avec oo'. La diagonale ac, hypoténuse du triangle rectangle isocèle abc dont le côté $ab = 5^{cm}$, est connue en grandeur, ce qui permet de tracer le carré $abcd$.

Pour trouver la cote des points S ou S_1, remarquons que si l'on rabat le triangle de l'espace Sao autour de ao, le point S vient en b, puisque par hypothèse S$a = ab$. Les projections verticales de S et S_1 sont donc sur la ligne de rappel de o, en des points tels que $o's' = o's'_1 = ob$.

Les plans Sad, Sbc ayant leurs traces horizontales parallèles se coupent suivant une parallèle à ces traces menée par le point (s, s'); de même les plans analogues S_1cd, S_1ab se coupent suivant une parallèle à ab ou cd issue du point (s_1, s'_1). L'intersection des plans Sad et S_1cd est une droite passant par le point (d, d') et parallèle aux droites parallèles SA, S_1C contenues dans ces plans ; on déterminerait de même l'intersection des plans Sad et S_1ab et les intersections du plan Sbc avec les plans S_1cd et S_1ab. Les quatre plans considérés déterminent ainsi le tétraèdre $(efgh, e'f'g'h')$, dont la partie située au-dessous du plan horizontal est cachée par ce plan.



En considérant les quatre plans Sa_1b_1, Sc_1d_1, $S_1a_1d_1$, $S_1b_1c_1$, on obtiendrait de même le tétraèdre $(e_1f_1g_1h_1,\ e'_1f'_1g'_1h'_1)$, qui ne diffère du premier que par une rotation de 90° autour d'une verticale.

(L. CURT, école normale de Bourg.)

[M. de Mendiry a envoyé une épure exacte.]

4150. — *Calculer la valeur numérique de* $h - C$, C *étant donné par la formule*

$$C = \frac{(\mu - \lambda)th}{1 + \mu t},$$

sachant que

$\mu = 0{,}0001818, \quad \lambda = 0{,}0000184, \quad t = 16, \quad h = 736^{mm},1.$

Nous calculerons d'abord $\mu - \lambda$ et μt. On a

$$\mu - \lambda = 0{,}0001818 - 0{,}0000184 = 0{,}0001634;$$

puis $\log \mu = \log 0{,}0001818 = \bar{4}{,}25959,$

$\log t = \quad \log 16 = 1{,}20412,$

d'où $\log \mu t = \log \mu + \log t = \bar{3}{,}46371$

et $\mu t = 0{,}0029088.$

Pour obtenir le logarithme de C, il suffit de faire la somme des logarithmes des facteurs $\mu - \lambda$, t, h et $\frac{1}{1 + \mu t}$, dont le produit est égal à C. On a ainsi

$$\begin{aligned}
\log(\mu - \lambda) &= \log 0{,}0001634 = \bar{4}{,}21325\\
\log t &= \phantom{\log 0{,}0001634} = 1{,}20412\\
\log h &= \log 736{,}1 = 2{,}86694\\
\log \frac{1}{1 + \mu t} &= \left\{\begin{matrix}\log 1 - \log 1{,}0029088\\ 0 - \quad 0{,}00126\end{matrix}\right\} = \bar{1}{,}99874\\
\log C &= 0{,}28305\\
C &= 1{,}9189.
\end{aligned}$$

Donc

$$h - C = 736{,}1 - 1{,}9189 = 734^{mm},1811.$$

(A. SMANTANESCU, lycée de Jassy.)

[Ont envoyé des calculs exacts : MM. E. Ardin-Delteil ; A. Bastet ; R. Cayrol ; P. Gervaiseau ; J. Guillaume : R. Henry : A. Nayel ; F. Pégorier ; L. Perret ; P. Vincent ; J. Wittner.]

4151. — *Un aérostat, du volume de 60 mètres cubes, est complètement rempli d'hydrogène, dont la densité, par rapport à l'air, est de 0,07. On demande quel doit être le poids de l'enveloppe et des accessoires pour qu'il puisse atteindre une hauteur où la pression est de 152 millimètres et la température de — 60 degrés* (*).

(On ne tiendra pas compte de la poussée de l'air sur les accessoires.)

Comme l'aérostat est complètement rempli d'hydrogène au départ, son volume demeure invariable pendant l'ascension ; mais à mesure que le ballon s'élève, la force élastique de l'air qui l'entoure diminuant, l'hydrogène tend à augmenter de volume, et l'excès de ce gaz s'échappe par la manche d'appendice. Il en résulte que, dans une région quelconque, la force élastique du gaz intérieur reste à peine supérieure à celle de l'air ambiant.

D'autre part, le volume d'air déplacé restant le même tandis que sa densité devient moindre, la poussée diminue ; la force ascensionnelle décroît et finit par devenir nulle : le ballon est alors en équilibre dans l'atmosphère.

(*) Les feuilles imprimées qu'on a envoyées dans les différents centres d'examens portaient 60° au lieu de — 60°, mais la faute d'impression était tellement manifeste qu'aucun candidat ne s'y est laissé prendre. Il est bien évident en effet que c'est à une altitude considérable que la pression atmosphérique n'est plus équilibrée que par une colonne de mercure de 152^{mm}, et comme la température baisse de 1° par 182^m (environ) d'élévation, il serait absurde d'admettre qu'à une pression de 152^{mm} peut correspondre une température de + 60°.

Le problème revient donc à écrire que, dans une région où la pression est de 152^{mm} et la température de $-60°$, le poids de l'air déplacé par le ballon fait équilibre au poids de l'hydrogène augmenté du poids de l'enveloppe et des accessoires.

Le poids P de l'air déplacé, exprimé en kilogrammes, est

$$60 \times 1{,}293 \times \frac{152}{760} \times \frac{1}{1 - \frac{60}{273}}.$$

L'hydrogène se trouvant sensiblement dans les mêmes conditions, son poids P', également exprimé en kilogrammes, est

$$60 \times 1{,}293 \times 0{,}07 \times \frac{152}{760} \times \frac{1}{1 - \frac{60}{273}}.$$

Appelons x le poids de l'enveloppe et des accessoires. Nous pouvons écrire

$$P = P' + x,$$

d'où

$$x = P - P' = 60 \times 1{,}293 \times \frac{152}{760} \times \frac{1}{1 - \frac{60}{273}} (1 - 0{,}07),$$

ce qui donne $x = 18^{kg},494$.

[Ont résolu la question : MM. A. Bastet ; Crozemarie ; R. Henry ; A. Mirc ; L. Sylvestre.]

Remarque I. — Le ballon dont il s'agit dans ce problème appartient à la catégorie des *ballons-sondes*, ballons non montés dont on se sert pour explorer les hautes régions de l'atmosphère. Un de ces ballons a pu atteindre, cette année, jusqu'à 17000^{m}, et à cette hauteur, où la température était de $-63°$, exécuter automatiquement une prise d'air ; la prise faite, un autre appareil automatique produisait la fusion d'une pointe de verre effilée et permettait de rapporter intact l'air recueilli à cette hauteur.

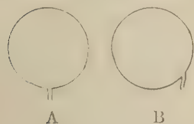
Remarque II. — Nous avons reçu de deux régions éloignées deux solutions identiques, également détestables, ce qui nous fait supposer qu'un même mauvais souffle a passé sur leurs auteurs. Nous n'en parlerions pas si les idées fausses qui se font jour dans ces copies n'étaient communes à beaucoup d'élèves.

Les auteurs de cette solution régentent l'examinateur qui a donné le problème et lui font observer, notamment, qu'il a oublié d'indiquer si le ballon était ouvert pour éviter la rupture de l'enveloppe pendant l'ascension; ils concluent, cependant, à la lecture attentive de l'énoncé, que le ballon doit être fermé.

C'est une erreur assez répandue de croire qu'on ferme les ballons après les avoir remplis de gaz : un ballon n'est jamais fermé. De même que dans une éprouvette pleine d'hydrogène, placée l'ouverture en bas, le gaz ne s'échappe pas, de même dans un ballon le gaz est toujours en libre communication avec l'atmosphère; il ne s'échappe que quand il faut, c'est-à-dire quand sa pression est supérieure à celle de l'air environnant.

Si certains auteurs croient que les ballons sont fermés — erreur qu'il faut absolument déraciner, parce qu'en partant de là un élève ne peut plus rien comprendre à la théorie des aérostats (*), — d'autres auteurs, moins éloignés de la vérité, disent que les ballons communiquent avec l'atmosphère par un « étroit orifice ». Nous demandions à des élèves l'idée qu'ils se faisaient de cet « étroit orifice », et ils estimaient qu'on devait pouvoir y passer le doigt. L'idée n'est pas tout à fait exacte : pour un ballon de $1\,800^{mc}$ par exemple, un bœuf y passerait : le diamètre de l'orifice est le vingtième de celui du ballon; c'est donc, pour un ballon de $1\,800^{mc}$, un cercle de 75^{cm} de diamètre environ.

Ce grand orifice ne peut pas rester absolument béant : il communique librement avec l'atmosphère par l'intermédiaire d'une manche d'appendice (*fig.* A). Cette manche serait peu utile si le ballon devait toujours avoir son ouverture au point le plus bas; mais par les coups de vent (*fig.* B) cette manche, qui est souple, retombe et ne permet pas au gaz de s'échapper facilement.



(*) Les auteurs qui disent explicitement ou qui admettent implicitement que les ballons sont fermés, ont soin d'ajouter qu'on ne les gonfle pas complètement au départ : on ne leur donnerait que la quantité de gaz qui, en se dilatant à mesure que la pression extérieure décroît, doit emplir complètement le ballon quand il atteint sa plus grande hauteur. C'est admissible en théorie; ce serait dangereux dans la pratique; en tout cas, ce n'est pas conforme à la réalité des faits : on gonfle *complètement* les ballons au départ, au moins pour les véritables voyages aériens.

La communication avec l'atmosphère étant toujours largement assurée, il n'y a pas à craindre qu'un ballon bien construit éclate. Aussi, quand on dit qu'un ballon est complètement rempli au départ, cela veut dire, explicitement, qu'il est ouvert ; autrement, il éclaterait à une faible hauteur.

CONCOURS GÉNÉRAL DE RHÉTORIQUE (1897)

4191. — *On donne un carré* ABCD, *dont le côté est égal à* $2a$, *et on considère un point* M *situé dans le plan de ce carré.*

1° *Calculer la somme* S *des volumes engendrés par les triangles* MAB, MBC, MCD, MDA *tournant respectivement, le premier autour de* AB, *le second autour de* BC, *le troisième autour de* CD, *et le quatrième autour de* DA.

2° *Démontrer que la somme* S *ne dépend que des quantités* a *et* d, *en désignant par* d *la distance du point* M *au centre du carré, et trouver le lieu géométrique du point* M, *lorsque ce point se déplace de manière que la somme* S *reste équivalente au volume d'un cône de hauteur* a *et de rayon donné* r.

3° *Déterminer sur le lieu précédent les positions de* M *pour lesquelles le rapport des volumes engendrés par le triangle* MAB, *tournant successivement autour de* MA *et de* MB, *est égal à un nombre donné* m.

Discuter, en supposant $r^2 = 12a^2$.

Solution par M. **Pierre Boutroux,** élève du lycée Henri IV, lauréat du concours (1er prix).

1° Si les triangles MAB, MBC, MCD, MDA ont respectivement pour hauteurs MH, MK, MI et ML, on a

$$\text{Vol. MAB} = \frac{1}{3}\pi \times AB \times \overline{MH}^2 = \frac{2a\pi}{3} \times \overline{MH}^2,$$

$$\text{Vol. MBC} = \frac{2a\pi}{3} \times \overline{MK}^2,$$

$$\text{Vol. MCD} = \frac{2a\pi}{3} \times \overline{MI}^2,$$

$$\text{Vol. MDA} = \frac{2a\pi}{3} \times \overline{ML}^2;$$

d'où, en additionnant membre à membre,

$$S = \frac{2a\pi}{3} \times (\overline{MH}^2 + \overline{MK}^2 + \overline{MI}^2 + \overline{ML}^2).$$

2° Je dis qu'on peut exprimer la somme S en fonction de a et de la distance d du point M au centre O du carré. En effet, si P est le milieu de HI, N le milieu de KL, on a $HP = NL = a$. Par suite,

$$MH = MP - a, \quad MI = MP + a,$$
$$MK = a + MN, \quad ML = a - MN.$$

Or on sait que

$$(MP + a)^2 + (MP - a)^2 = 2\overline{MP}^2 + 2a^2.$$

De même $$(a + MN)^2 + (a - MN)^2 = 2a^2 + 2\overline{MN}^2.$$

Donc $$\overline{MH}^2 + \overline{MK}^2 + \overline{MI}^2 + \overline{ML}^2 = 4a^2 + 2\overline{MP}^2 + 2\overline{MN}^2.$$

Mais, comme $MN = OP$, le triangle rectangle POM donne $\overline{MP}^2 + \overline{MN}^2 = \overline{OM}^2 = d^2$, et finalement on voit que la somme S peut se mettre sous la forme

$$S = \frac{2a\pi}{3}(4a^2 + 2d^2).$$

Il est bon de remarquer que cette démonstration ne suppose nullement le point M extérieur au carré. En effet, s'il était à l'intérieur, les valeurs de MH et de MI seraient exprimées par $(a + MP)$ et $(a - MP)$, et on aurait toujours

$$\overline{MH}^2 + \overline{MI}^2 = 2a^2 + 2\overline{MP}^2.$$

Si maintenant le point M se déplace de manière que la somme S reste équivalente au volume d'un cône de hauteur a et de rayon donné r, c'est-à-dire reste égale à $\frac{1}{3}\pi ar^2$, on a, pour toutes les positions du point M,

$$\frac{2a\pi}{3}(4a^2 + 2d^2) = \frac{1}{3}\pi ar^2,$$

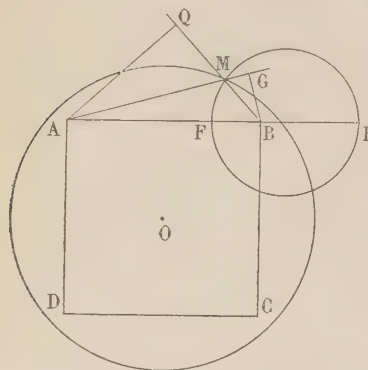
ou, en réduisant, $8a^2 + 4d^2 = r^2$.

d est donc constant et égal à $\dfrac{\sqrt{r^2 - 8a^2}}{2}$. Le lieu du point M est par suite la circonférence de centre O dont le rayon est égal à $\dfrac{\sqrt{r^2 - 8a^2}}{2}$.

Ce lieu n'existe que tant qu'on a $r^2 - 8a^2 \geqslant 0$, c'est-à-dire $r \geqslant 2a\sqrt{2}$.

Si $r = 2a\sqrt{2}$, on a $d = 0$, et le lieu du point M se réduit au centre O du carré. Dans ce cas la valeur de S est $\dfrac{8}{3}\pi a^3$.

Remarque. — Le résultat précédent permet d'énoncer le théorème suivant : Si O est le centre d'un carré ABCD, la somme des volumes engendrés par les triangles OAB, OBC, OCD, ODA tournant respectivement autour de AB, de BC, de CD et de DA est le double du volume de la sphère qui aurait pour centre O et pour rayon l'apothème du carré.



3° Abaissons, dans le triangle MAB, les hauteurs BG et AQ relatives aux côtés MA et MB.

Le volume du triangle MAB tournant autour de MA a pour expression $\dfrac{1}{3}\pi \times \mathrm{MA} \times \overline{\mathrm{BG}}^2$.

Le volume du même triangle tournant autour de MB a pour expression $\dfrac{1}{3}\pi \times \mathrm{MB} \times \overline{\mathrm{AQ}}^2$.

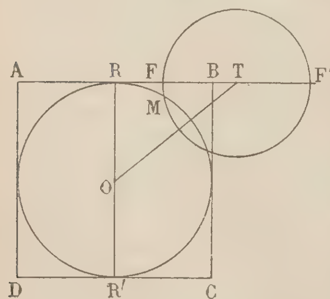
Le rapport de ces deux volumes est $\dfrac{\mathrm{MA} \times \overline{\mathrm{BG}}^2}{\mathrm{MB} \times \overline{\mathrm{AQ}}^2}$.

Or les produits $\mathrm{MA} \times \mathrm{BG}$ et $\mathrm{MB} \times \mathrm{AQ}$ sont égaux comme exprimant tous les deux le double de la surface du triangle MAB. Cette égalité montre de plus que $\dfrac{\mathrm{BG}}{\mathrm{AQ}} = \dfrac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MA}}$. Par suite, le rapport précédent s'écrit

$$\frac{\mathrm{MA} \times \overline{\mathrm{BG}}^2}{\mathrm{MB} \times \overline{\mathrm{AQ}}^2} = \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MA}}.$$

Si donc le point M est tel que ce rapport soit égal à un nombre donné m, il doit appartenir au lieu des points dont le rapport des distances aux deux points B et A est constant et égal à m. Or ce lieu, on le sait, est la circonférence qui a pour diamètre la portion de AB comprise entre les deux points conjugués harmoniques F et F′ qui divisent BA dans le rapport m. Les points demandés devant être sur cette circonférence et devant être de plus sur la circonférence déterminée plus haut, seront les points d'intersection de ces deux circonférences.

Discussion. — Dans cette discussion on suppose $r^2 = 12a^2$. Dans ce cas, d prend la valeur a, et le premier lieu du point M devient le cercle inscrit dans le carré.



Pour que le problème ait deux solutions, il faut et il suffit que ce cercle soit coupé par le cercle de diamètre FF′, ou en d'autres termes, si T est le milieu de FF′ et R le pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur AB, il faut et il suffit que l'on ait

$$\mathrm{OR} - \mathrm{TF} < \mathrm{OT} < \mathrm{OR} + \mathrm{TF}.$$

Mais, le point T étant toujours extérieur à la circonférence de rayon OR, les deux circonférences ne peuvent pas être intérieures. Par suite, la première condition posée est toujours réalisée. Reste à examiner la seconde.

Remarquons que nous pouvons considérer m comme inférieur à 1. En effet, quel que soit m, à la circonférence de diamètre FF′ correspond une circonférence symétrique par rapport au milieu R de BA, qui coupe BA suivant un diamètre, dans le rapport $\dfrac{1}{m}$. Donc si l'une de ces deux circonférences coupe le cercle de rayon OR, l'autre le coupera certainement.

Cela posé, cherchons dans quelles conditions a lieu l'inégalité $\mathrm{OT} < \mathrm{OR} + \mathrm{TF}$. Nous savons que $\mathrm{OR} = a$. Reste à calculer TF et OT.

Or on a $\dfrac{\mathrm{FB}}{\mathrm{FA}} = m$, et comme $\mathrm{FA} = \mathrm{AB} - \mathrm{FB}$, on peut écrire

$$\frac{\mathrm{FB}}{\mathrm{AB}} = \frac{m}{1+m}, \quad \text{et par suite} \quad \mathrm{FB} = \frac{2am}{1+m}.$$

De même, de l'égalité $\dfrac{\mathrm{F'B}}{\mathrm{F'A}} = m$, on déduit

$$\frac{\mathrm{F'B}}{\mathrm{AB}} = \frac{m}{1-m}, \quad \text{et par suite} \quad \mathrm{F'B} = \frac{2am}{1-m}.$$

Il résulte de là

$$\mathrm{FF'} = \mathrm{FB} + \mathrm{F'B} = \frac{2am}{1+m} + \frac{2am}{1-m} = \frac{4am}{1-m^2},$$

d'où

$$\mathrm{TF} = \frac{2am}{1-m^2}.$$

D'autre part, le triangle rectangle ROT donne $\overline{\mathrm{OT}}^2 = \overline{\mathrm{OR}}^2 + \overline{\mathrm{RT}}^2 = a^2 + \overline{\mathrm{RT}}^2$.

Or $\mathrm{RT} = \mathrm{RF} + \mathrm{TF} = \dfrac{2am}{1-m^2} + \mathrm{RF}$. Tout revient donc à calculer RF.

R étant le milieu de AB, le rapport $\dfrac{\mathrm{FB}}{\mathrm{FA}} = m$ s'écrit

$$\frac{\mathrm{BR} - \mathrm{RF}}{\mathrm{BR} + \mathrm{RF}} = m,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RF}} = \frac{1+m}{1-m},$$

et par suite

$$\mathrm{RF} = \frac{\mathrm{BR} \times (1-m)}{1+m} = \frac{a(1-m)}{1+m}.$$

Nous pouvons ainsi exprimer OT en fonction de a et de m, car on a

$$\overline{\mathrm{OT}}^2 = a^2 + \left[\frac{a(1-m)}{1+m} + \frac{2am}{1-m^2}\right]^2.$$

La quantité entre crochets s'écrit

$$\left[\frac{a(1-m)^2 + 2am}{1-m^2}\right]^2 = \frac{a^2(1+m^2)^2}{(1-m^2)^2};$$

donc

$$\overline{\mathrm{OT}}^2 = a^2 + \frac{a^2(1+m^2)^2}{(1-m^2)^2},$$

ou, en réduisant au même dénominateur,

$$\overline{\mathrm{OT}}^2 = \frac{a^2(1-m^2)^2 + a^2(1+m^2)^2}{(1-m^2)^2} = \frac{2a^2(1+m^4)}{(1-m^2)^2}.$$

On en déduit

$$\mathrm{OT} = \frac{a\sqrt{2(1+m^4)}}{1-m^2}.$$

Si nous revenons maintenant à l'inégalité $\mathrm{OT} < \mathrm{OR} + \mathrm{TF}$, nous voyons qu'elle suppose

$$\frac{a\sqrt{2(1+m^4)}}{1-m^2} < a + \frac{2am}{1-m^2},$$

ou, en divisant par a,

$$\frac{\sqrt{2+2m^4}}{1-m^2} < 1 + \frac{2m}{1-m^2}.$$

Réduisons au même dénominateur et multiplions par la quantité positive $(1-m^2)$ (on a supposé $m < 1$). Il vient

$$\sqrt{2+2m^4} < 1 + 2m - m^2.$$

Le premier membre de l'inégalité est essentiellement positif; le second l'est aussi, puisque $m < 1$. On a donc le droit d'élever ces deux membres au carré, et on obtient

$$2 + 2m^4 < 1 + 4m + 4m^2 - 2m^2 - 4m^3 + m^4,$$

ce qui donne, après réductions faites,

$$m^4 + 4m^3 - 2m^2 - 4m + 1 < 0.$$

Or le premier membre peut s'écrire

$$m^4 - 2m^2 + 1 + 4m(m^2 - 1) = (1-m^2)^2 + 4m(m^2-1).$$

On peut donc le mettre sous la forme

$$(1-m^2)(1-4m-m^2).$$

Pour que ce produit soit négatif, il faut que ses deux facteurs soient de signes contraires. Or le premier est toujours positif : le second doit donc être négatif.

Le trinome $(-m^2 - 4m + 1)$ a pour racines $(-2-\sqrt{5})$ et $\sqrt{5}-2$. Pour qu'il soit négatif, il faut que m soit extérieur à l'intervalle de ces racines, et comme m est un rapport essentiellement positif, on doit avoir $m > \sqrt{5} - 2$.

Des résultats précédents résulte la discussion suivante :

Si $m < \sqrt{5} - 2$, pas de solution ;

Si $m = \sqrt{5} - 2$, on a $\mathrm{OT} = \mathrm{OR} + \mathrm{TF}$. Les deux circonférences sont tangentes extérieurement, et il y a une solution ;

Si $\sqrt{5} - 2 < m < 1$, deux solutions ;

Si $m = 1$, le point F′ est rejeté à l'infini; le point F vient en R au milieu de AB, sur la circonférence inscrite dans le carré; on peut dans ce cas considérer le point R comme un des points demandés, le triangle MAB se réduisant à AB. Le milieu R′ de DC répond également à la question, car le triangle R′AB est isocèle, et par suite les volumes qu'il engendre en tournant successivement autour de R′A et de R′B sont bien égaux : donc leur rapport est 1. On explique ce résultat en remarquant que dans le cas considéré le diamètre FF′ devient infini et que par suite la circonférence de diamètre FF′ prend en R la direction de la perpendiculaire à AB et va passer par le milieu R′ de DC.

Si $m > 1$, le point F se trouve entre A et R, et on a une discussion symétrique de la précédente, d'après la remarque faite plus haut.

Si $1 < m < \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$, on a $m(\sqrt{5} - 2) < 1$ et par suite $\sqrt{5} - 2 < \frac{1}{m}$.

Il y a donc deux solutions pour le rapport $\frac{1}{m}$ et par suite deux solutions pour le rapport inverse m.

Si $m = \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$, il y a une solution.

Si $m > \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$, il n'y a pas de solution.

[Ont résolu la même question : MM. G. Blondin, lycée St-Louis ; A. Maître ; P. Vincent, école des Arts et Métiers d'Aix.]

GÉOMÉTRIE

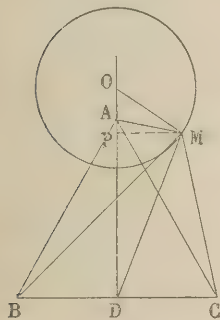
4207. — *Trouver le lieu géométrique des points* M *du plan d'un triangle isocèle* ABC (AB = AC) *qui satisfont à la relation*

$$\overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - n\overline{MA}^2 = k^2,$$

n et k étant des grandeurs données.

Joignons M au milieu D de BC. Dans le triangle MBC, la médiane MD permet d'écrire

$$\overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = 2\overline{MD}^2 + 2\overline{BD}^2.$$



En posant $BC = 2a$, la relation donnée revient alors à

$$2\overline{MD}^2 - n\overline{MA}^2 = k^2 - 2a^2. \quad (1)$$

On est ainsi ramené à chercher le lieu des points dont les carrés des distances à deux points fixes D et A, mutipliés respectivement par des coefficients donnés (qui sont ici 2 et n), ont une différence constante. Ce lieu est connu : c'est une circonférence ayant son centre sur DA prolongée, en un point O tel que $\frac{OA}{OD} = \frac{2}{n}$ (le cas de figure suppose $n > 2$).

Ce résultat s'établit d'ailleurs comme il suit :

Tirons OM et abaissons MP perpendiculaire sur AD. On a

$$\overline{MD}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OM}^2 - 2OD.OP,$$
$$\overline{MA}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OM}^2 - 2OA.OP;$$

la relation (1) devient par suite

$$\left.\begin{array}{l} 2\overline{OD}^2 + 2\overline{OM}^2 - 4OD.OP \\ n\overline{OA}^2 - n\overline{OM}^2 + 2nOA.OP \end{array}\right\} = k^2 - 2a^2,$$

ou, puisque par hypothèse $2OD = nOA$,

$$2\overline{OD}^2 - n\overline{OA}^2 + (2 - n)\overline{OM}^2 = k^2 - 2a^2,$$

d'où
$$\overline{OM}^2 = \frac{-k^2 + 2a^2 + 2\overline{OD}^2 - n\overline{OA}^2}{n - 2}.$$

On obtient ainsi pour OM une valeur constante, qui représente le rayon du cercle du lieu. On peut donner à cette valeur une autre forme en remplaçant OD par $\frac{n}{n-2}.AD$ et OA par $\frac{2}{n-2}.AD$, ce qui donne

$$OM = \frac{\sqrt{2n\overline{AD}^2 - (n-2)(k^2 - 2a^2)}}{n - 2}.$$

On voit que le rayon du cercle n'est réel que si l'on a

$$k^2 - 2a^2 \leqslant \frac{2n}{n-2} \cdot \overline{AD}^2.$$

Lorsque $n = 2$, le point O est rejeté à l'infini et OM prend une valeur infinie ; le cercle se réduit à une droite perpendiculaire à AD ; si, de plus, $k^2 = 2a^2$, la relation (1) montre que $MD = MA$, et la droite est alors perpendiculaire au milieu de AD.

Lorsque $n < 2$, le point O, défini par l'égalité $\frac{OA}{OD} = \frac{2}{n}$, est sur AD prolongée du côté de D ; la valeur de OM est dans ce cas

$$OM = \frac{\sqrt{2n\overline{AD}^2 + (2-n)(k^2 - 2a^2)}}{2 - n};$$

cette valeur n'est réelle qu'autant qu'on a

$$k^2 - 2a^2 \leqslant -\frac{2n}{2-n} \cdot \overline{AD}^2.$$

(G. BLONDIN, lycée Saint-Louis.)

[Ont résolu la même question : MM. Ch. Bourdet, lycée de Niort ; R. Cordier ; J. Delpont, à Beaumont ; A. Maître ; L. Vignes, à Boussan.]

4208. — *Deux cercles de centres* O *et* O′ *se coupent en* A. *Autour de* A *on fait pivoter un angle égal à la moitié de* OAO′. *Ses côtés rencontrent les cercles considérés en* B *et* C. *Trouver le lieu du milieu de* BC.

Soit M un point du lieu. Par hypothèse,

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{OAO'};$$

d'ailleurs, en menant la droite AD symétrique de OA par rapport à AB, on a

$$\widehat{BAD} = \frac{1}{2}\widehat{OAD};$$

et par suite, en retranchant cette égalité de la précédente,

$$\widehat{DAC} = \frac{1}{2}\widehat{DAO'},$$

ce qui montre que DA est aussi symétrique de AO′ par rapport à AC.

Cela posé, comme $\widehat{OBA} = \widehat{OAB} = \widehat{BAD}$, le rayon OB est parallèle à AD ; de même pour le rayon O′C. La figure OBCO′ est donc un trapèze ; dès lors le lieu de M est un cercle ayant son centre au milieu I de OO′, et pour rayon $IM = \frac{OB + O'C}{2}$.

Toute la circonférence de ce cercle appartien au lieu énoncé. En effet, lorsque les rayons parallèles OB, O′C tournent d'un certain angle α autour de O ou O′, les cordes AB, AC pivotent autour de A, dans le même sens, de l'angle $\frac{\alpha}{2}$, de sorte que l'angle BAC demeure constant.

(Ernest FOUCART.)

[Ont résolu la même question : MM. Ch. Bourdet, lycée de Niort ; G. Hiernaux, école normale de Châlons-sur-Marne ; L. Vignes, à Boussan ; A. Maître.]

PHYSIQUE

4212. — *Un manomètre à air comprimé est formé de deux branches cylindriques de même diamètre; le mercure est de niveau dans les deux branches quand la branche ouverte reçoit une pression de* 760^{mm}; *la hauteur du tube occupée à ce moment par l'air est de* 40^{cm}.

A quelle distance d du sommet se trouvera le mercure pour une pression de 3 atmosphères?

(*Bacc. lettres-sciences, Lille, juillet 1897.*)

Quand le mercure monte de $(40-d)^{cm}$ dans la branche fermée, il baisse d'autant dans la branche ouverte, et les deux niveaux sont à une distance verticale de $2(40-d)^{cm}$.

Le tube étant cylindrique, on peut représenter les volumes de l'air dans la branche fermée par les longueurs qu'il occupe. Au début, l'air occupe une longueur de 40^{cm} sous la pression de 76^{cm}; lorsque la pression de 3^{atm} s'exerce sur la branche ouverte, le volume de l'air est d, et la pression qu'il supporte est égale à $3\times 76-2(40-d)$.

Appliquons la loi de Mariotte; il vient

$$40\times 76 = d[3\times 76 - 2(40-d)],$$

ou

$$d^2+74d-1520=0.$$

La racine positive convient seule. Elle a pour valeur $16^{cm},74$.

Donc le mercure se trouve à $16^{cm},74$ du sommet pour une pression de 3^{atm}.

(WATRIN, à Charleville.)

[Ont résolu la question : MM. P. Alcan ; Ardin-Delteil ; J. Bordas ; Benbacite ; G. Blondin ; J. M. Chalvin ; L. Curt ; L. Delavergnas ; N. Delhotel ; M. Drovin ; E. Foucart ; E. Fourmond ; P. Guarnieri ; E. Héteau ; G. Hiernaux ; A. Liron ; J. Maury ; N. Mollon ; Raynaud.]

4213. — *Le tuyau d'une pompe aspirante est plein d'air à la pression atmosphérique, mesurée par une colonne* H *de mercure, et le piston est au bas de sa course. On donne un coup de piston.*

Calculer la hauteur à laquelle l'eau s'élève.

Corps de pompe : section $s=400^{cq}$; *hauteur* $l=50^{cm}$.

Tuyau d'aspiration : section $s'=40^{cq}$; *hauteur* $l'=7^{m}$.

$H=76^{cm}$. *Densité du mercure* $=13,6$.

(*Bacc. lettres-math., Oran, juillet 1897.*)

A mesure que le piston monte, l'air qui remplissait le tuyau d'aspiration se répand dans le corps de pompe. A cette augmentation de volume correspond une diminution de force élastique, et l'eau s'élève dans le tuyau d'aspiration à une certaine hauteur x.

Ecrivons que le produit du volume primitif de la masse d'air par sa force élastique initiale est égal au produit du second volume de cette même masse d'air par la force élastique finale :

Volume primitif de l'air : $s'l'$, force élastique initiale : H;

Second volume de l'air : $s'(l'-x)+sl$, force élastique finale : $H-\frac{x}{13,6}$.

L'équation du problème est donc

$$s'l'H=[s'(l'-x)+sl]\left(H-\frac{x}{13,6}\right),$$

et, après calculs effectués et simplification,

$$s'x^2-x(sl+s'l'+s'H\times 13,6)+13,6\,slH=0.$$

Remplaçons les lettres par leur valeur; il vient

$$40x^2-89344x+20672000=0,$$

ou

$$x^2-2233,6x+516800=0.$$

La plus petite racine est seule acceptable, car l'autre représente une hauteur supérieure à celle du corps de pompe et du tuyau d'aspiration réunis. On a donc

$$x=262^{cm},2.$$

L'eau s'élève à $2^{m},622$ dans le tuyau d'aspiration.

(N. DELHOTEL, à Commercy.)

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil ; E. Baudoin ; G. Blondin ; J. Bordas ; L. Curt ; L. Delavergnas ; J. Delpont ; E. Foucart ; P. Gervaiseau ; R. Henry ; E. Héteau ; G. Leclerc ; L. Lesieur ; A. Liron ; A. Maître ; N. Mollon ; Morin-Létessier ; P. Plisson ; P. Vincent.]

BACCALAURÉATS

SESSION D'OCTOBRE-NOVEMBRE 1897

PARIS

Baccalauréat lettres-mathématiques.

I. — Connaissant le rayon R d'une des bases d'un tronc de cône, calculer le rayon x de l'autre base sachant que l'aire de la section faite dans le tronc, parallèlement aux bases et à égale distance des bases, est égale à m fois la somme des bases. Discussion.

II. — *1er sujet.* — Tout nombre qui divise un produit de deux facteurs et qui est premier avec l'un d'eux divise l'autre.

II. — *2e sujet.* — Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction puisse être convertie exactement en fraction décimale? Démonstration.

II. — *3e sujet.* — Définition et extraction de la racine carrée d'une fraction à une approximation donnée.

I. — **4231**. Un tube en U vertical à branches égales de 10^{cq} de section est ouvert d'un côté et fermé de l'autre par un piston sans frottement et sans poids. Il contient du mercure qui s'élève au même niveau dans les deux branches et, dans la branche fermée, 200^{cc} d'air.

On charge le piston de 952^{gr} et l'on demande : 1° la nouvelle pression x de l'air de la branche fermée; 2° la différence de niveau y du mercure dans les deux branches; 3° la hauteur z dont s'est abaissé le piston. La pression extérieure, au moment de l'expérience, est équilibrée par une colonne de mercure de 76^{cm} de hauteur.

Densité du mercure : 13,6.

II. — *1er sujet.* — Mesure de la force élastique maximum de la vapeur d'eau au-dessus de 100 degrés.

II. — *2e sujet.* — Expliquer l'usage du condenseur dans une machine à vapeur.

II. — *3e sujet.* — Mélange des gaz et des vapeurs.

Baccalauréat lettres-sciences.

I. — **4232**. Étant donnée la fraction $\frac{x^2+1}{2ax+3b}$, disposer de a et de b et calculer ces valeurs de façon que cette fraction ait un maximum égal à -1 et un minimum égal à $+\frac{1}{4}$. Prendre la valeur positive de a et calculer les valeurs de x qui correspondent à ces valeurs particulières de la fraction.

II. — *1er sujet.* — Rotations autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical : applications au point, à la droite et au plan.

II. — *2e sujet.* — Méthode des plans cotés; représentation d'une droite et d'un plan. — Intersection de deux plans.

II. — *3e sujet.* — Premières notions de perspective. — Mettre en perspective un carrelage hexagonal.

I. — Un vase cylindrique en verre est gradué en parties d'égale capacité. Il contient du mercure qui, à la température de 0°, arrive à la division 1150. A quelle température faut-il porter l'appareil pour que le mercure arrive à la division 1151? Coefficient de dilatation cubique du verre, 0,000026 ; coefficient de dilatation absolue du mercure, 0,00018.

II. — *1er sujet.* — Intervalles musicaux. — Gamme.

II. — *2e sujet.* — Lois expérimentales des vibrations transversales des cordes.

II. — *3e sujet.* — Bobine de Ruhmkorff.

CONCOURS DE 1897 (*Suite*)

ÉCOLE NATIONALE ET SPÉCIALE DES BEAUX-ARTS

Section d'architecture.

I. — Trouver les expressions de l'aire et du volume engendrés par un hexagone régulier inscrit dans une circonférence de rayon R en tournant autour de la tangente menée à la circonférence en l'un de ses sommets; ceci fait, calculer à un décalitre près le volume engendré, sachant que l'aire engendrée est égale à 289mq ; mettre tous les calculs.

II. — Résoudre, par rapport à x, y, z, le système des trois équations

$$x - y + z = 7,$$
$$8x + 13y + 11z - 27 = m(3 - 5y - 3z),$$
$$3x + 8y + z - 7 = m(2z - 5y - 2) ;$$

mettre tous les calculs.

III. — On donne par ses traces un plan PαP' tel que la ligne de terre fait avec la trace horizontale αP un angle de 45°, avec la trace verticale un angle de 30° :

1° Trouver la droite d'intersection du plan bissecteur du dièdre que fait le plan donné avec le plan horizontal et du plan bissecteur du dièdre que fait le plan donné avec le plan vertical;

2° Ceci fait, on coupe le plan donné et les deux plans de projection par un plan perpendiculaire à la droite trouvée ; déterminer la vraie grandeur du rayon de la circonférence inscrite dans le triangle ainsi déterminé ; expliquer et faire l'épure.

(*1re session, 26 mars. — Durée : 3 heures.*)

I. — Étant donnée une circonférence de rayon R, on demande l'expression du côté de l'octogone régulier convexe inscrit dans cette circonférence, l'expression de l'aire engendrée par chaque côté de l'octogone lorsque cet octogone tourne autour d'un de ses côtés AB, ainsi que la somme S de ces différentes aires ; calculer ensuite S à 1 centimètre carré près, sachant que R = 1 décimètre ; mettre tous les calculs.

II. — Résoudre le système des deux équations

$$(2m^2 - 6m)x - 4m = 9 + (5m - 15)x - my,$$
$$2m(m - 1)x + my + 9 = y + 9m - \frac{2m - 2}{2m - 5} + (6m - 6)x ;$$

mettre tous les calculs.

III. — On donne par ses traces un plan PαP' perpendiculaire au plan vertical et faisant avec le plan horizontal un angle de 45°, puis une droite ab, $a'b'$ parallèle au second plan bissecteur et dont la projection verticale fait avec la ligne de terre un angle de 22° 30' ; on demande de mener par cette droite un plan faisant avec le plan PαP' un angle de 45° ; le problème admet deux solutions, trouver l'angle des deux plans obtenus; expliquer et faire l'épure.

(*2e session, 26 juin. — Durée : 3 heures.*)

ÉCOLES NATIONALES D'ARTS ET MÉTIERS

Mathématiques.

ARITHMÉTIQUE

(*1er juillet, de 8 h. à 10 h.*)

I. — Un observateur, voulant calculer la distance qui le sépare du point d'explosion d'une torpille, compte 10 secondes entre l'instant où il entend le bruit de l'explosion transmis par l'eau et celui où il entend le bruit de l'explosion transmis par l'air.

Dans les conditions de température où l'on se trouve, la vitesse du son, par seconde, est, dans l'air, de 340 mètres, et, dans l'eau, de 1 430 mètres.

Déterminer d'après cela, et à une unité près du 2e ordre décimal, à combien de kilomètres de l'observateur se trouvait la torpille.

II. — Sachant que le mille anglais équivaut à 1 760 yards et le yard à 914 millimètres 4 dixièmes, on demande de convertir en milles et yards une distance de 75 kilomètres 85 mètres.

GÉOMÉTRIE

(*2 juillet, de 3 h. à 5 h.*)

I. — Construire un triangle dans les deux cas ci-après :
1° Étant donnés chacun des angles et le périmètre de ce triangle ;
2° Connaissant sa surface et chacun de ses angles.

II. — Trouver le volume d'un segment sphérique à une base, dont la hauteur est de 4m et situé sur une sphère de 9m de rayon.

ÉCOLE NATIONALE PRATIQUE DE CLUNY

Arithmétique et Géométrie.

I. — Décomposition d'un nombre en facteurs premiers. Opérer sur le nombre 792. Enoncer la règle.

II. — Démontrer que dans toute proportion la somme des deux premiers termes est au premier ou au deuxième terme comme la somme des deux derniers est au 3e ou au 4e ; et que la somme des deux premiers termes est à leur différence comme la somme des deux derniers est à leur différence.

III. — Mener une tangente commune à deux circonférences. — Deux cas à considérer.

IV. — Démontrer que la somme des angles extérieurs d'un polygone convexe est égale à quatre angles droits.

(*30 septembre, de 2 h. à 5 h.*)

Problèmes d'arithmétique.

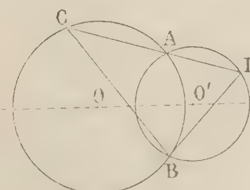
I. — Un orfèvre possède quatre lingots d'or dont les titres sont respectivement 0,675 ; 0,750 ; 0,805 et 0,915. Il désire former un lingot du poids de 0kg,758, et au titre de 0,840. Combien devra-t-il prendre de matière dans chacun des quatre premiers lingots ?

II. — Trois vélocipédistes exécutent sur une route un parcours de 100km. Le premier, qui marche avec une vitesse de 25km à l'heure, part à 8h du matin ; le second, avec une vitesse de 30km à l'heure, part à 8h,15' ; le troisième, à une vitesse de 40km à l'heure, part à 8h,30'. On demande à quelle distance du point de départ et à quelles heures se feront les croisements, et l'heure d'arrivée de chacun des trois vélocipédistes au bout du parcours.

(*30 septembre, de 8 h. à 10 h.*)

Problèmes de Géométrie.

I. — Construire deux droites connaissant leur rapport et leur produit.



II. — Deux circonférences se coupent en deux points A et B. Par le point A on mène une sécante limitée à sa rencontre avec les circonférences aux points C et D. On joint C et B, B et D. Démontrer que l'angle CBD est constant quelle que soit la direction de la sécante.

(*1er octobre, de 8 h. à 10 h.*)

ÉCOLES NATIONALES VÉTÉRINAIRES

Mathématiques.

I. — Divisibilité par 9.

Théorie de la preuve par 9 de la multiplication et de la division.

Peut-on également faire la preuve par 9 de l'addition et de la soustraction ?

II. — On donne un triangle équilatéral inscrit dans une circonférence dont le rayon est égal à 1^m et l'on demande de trouver :

1° Le volume engendré par ce triangle ;

2° La surface engendrée par son périmètre dans sa rotation autour d'un axe qui est mené, dans son plan, par un de ses sommets, extérieurement à sa surface, et qui fait un angle de 30° avec l'un des côtés aboutissant à ce sommet.

(*20 août, de 2 h. à 4 h.*)

Physique et Chimie.

I. — Le siphon.

II. — Lois des combinaisons en poids et en volumes.

(*20 août, de 10 h. 1/2 à midi.*)

Histoire naturelle.

I. — Appareil digestif des ruminants ; rumination.

II. — Structure primaire de la tige.

III. — Des roches argileuses ; leurs caractères ; leurs principales variétés.

(*20 août, de 4 h. à 5 h. 1/2.*)

ÉCOLE D'ADMINISTRATION DE LA MARINE

Arithmétique et Géométrie.

I. — Un travail est mis en adjudication et le cahier des charges stipule que tous les paiements à faire à l'entrepreneur seront passibles d'une retenue de $2^{fr},75$ pour cent.

A quel prix doit être établie la soumission d'un industriel qui considère le travail à exécuter comme valant réellement $31\,606^{fr},25$?

II. — Partager le nombre 1 850 en deux parties telles que $\frac{1}{3}$ de la première partie ajouté à $\frac{1}{7}$ de la deuxième forme un total égal à 422.

III. — Une rondelle de fer, dont le diamètre est $0^m,25$, est percée en son milieu d'un trou rond dont le diamètre est $0^m,12$. On demande :

1° Quelle est la surface de la partie non évidée de cette rondelle ;

2° Quel est le poids de la rondelle si son épaisseur est 2^{mm}, étant admis que le poids spécifique du fer est 7.

(*30 septembre. — Durée : 3 heures.*)

ÉCOLES SUPÉRIEURES DE COMMERCE RECONNUES PAR L'ÉTAT

MATHÉMATIQUES

(*11 octobre. — Durée : 3 heures.*)

Arithmétique.

I. — **4233**. Trois lingots d'argent ont pour titres : 0,95 pour le premier, 0,80 pour le second et 0,53 pour le troisième.

Le poids du premier lingot et le poids du second sont proportionnels à 4 et à 5.

Le poids du troisième lingot est le triple du poids du second lingot.

Les trois lingots fondus ensemble forment un lingot total pesant 2880^{gr}.

On demande :

1° Quel poids de cuivre ou quel poids d'argent pur il faut ajouter au lingot total pour fabriquer un alliage pouvant servir à frapper des pièces de 1 franc en argent ;

2° Quel sera le nombre de pièces de 1 franc frappées.

II. — **4234**. Un commanditaire a placé dans une maison de commerce une certaine somme d'argent à intérêts simples à un certain taux.

Si la commandite était retirée au bout de 11 mois, le commanditaire toucherait $69\,664^{fr}$. Si la commandite était retirée au bout de 2 ans et demi, le commanditaire toucherait $73\,920^{fr}$.

Calculer la somme placée et déterminer le taux du placement.

Algèbre.

Démontrer que l'équation

$$\frac{x^2 - 11x + 28}{x^2 - 9x + 14} = \frac{x-4}{x-2}$$

est une identité.

Calcul logarithmique.

$$x = \sqrt[7]{\left[\frac{6874^3 \times \sqrt[5]{0,01}}{\frac{5}{7} \times 725^6 \times \sqrt{0,678}}\right]^4}.$$

Chaque candidat doit calculer cette expression avec l'approximation que comporte la table dont il se sert.

Il est tenu compte de la bonne disposition et de l'ordre des calculs.

QUESTIONS PROPOSÉES

4235. — Si n est un nombre entier premier avec 12, le polynome

$$n^{12} - n^8 + n^4 - 1$$

est divisible par 12. (Loïc, à Rennes.)

4236. — Déterminer le plus grand commun diviseur des deux expressions

$$(a-b)^5 + (b-c)^5 + (c-a)^5$$

et

$$(a^2-b^2)^5 + (b^2-c^2)^5 + (c^2-a^2)^5.$$

4237. — Si l'on a

$$\frac{x}{b+c-a} = \frac{y}{c+a-b} = \frac{z}{a+b-c},$$

on a aussi $(b-c)x + (c-a)y + (a-b)z = 0$.

4238. — Trouver x nombres entiers consécutifs dont la somme soit x^3.

(E. Bernardini.)

4239. — Résoudre le système d'équations

$$x + y = xy,$$
$$x^2 + y^2 = -(x^3 + y^3).$$

4240. — Sur chacun des côtés d'un quadrilatère convexe ABCD on construit extérieurement un carré. Démontrer que le quadrilatère ayant pour sommets les centres de ces carrés a ses deux diagonales égales et perpendiculaires.

4241. — Dans un triangle ABC, on mène la bissectrice intérieure AD de l'angle A, limitée au côté BC.

Démontrer que la somme des rayons des cercles circonscrits aux triangles ABD et ACD est égale à la distance de l'un des sommets B ou C au milieu I de l'arc BAC du cercle circonscrit au triangle ABC.

Que devient la propriété lorsque AD est bissectrice extérieure ?

(E. Félix, à Marseille.)

4242. — Construire un cercle connaissant un point A de la circonférence, un point B d'où ce cercle soit vu sous un angle donné 2α, et un point C tel que la tangente au cercle issue de ce point ait une longueur donnée l.

(P. Vandeuren, Institut Dupuich.)

4243. — Une tige rectiligne indéfinie est fixée de manière à faire un angle de 45° avec la verticale. Un anneau pesant 20^{kg} peut glisser le long de cette tige ; on l'abandonne à lui-même et on lui laisse parcourir une longueur de tige de $27^m,75$. Quelle serait, à ce moment, sa vitesse si le frottement était nul ?

On constate que, à cause du frottement, cette vitesse n'est, en réalité, que de 2^m. On demande quelle est la quantité de chaleur qui a été produite par le frottement, sachant qu'une calorie équivaut à 425 kilogrammètres.

On prendra $g = 9^m,81$.

(*Bacc. lettres-sciences et lettres-math., Nancy, juillet 1897.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

22e Année. — N° 4. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 15 Novembre 1897.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

SUR LA BALANCE ROMAINE

La théorie sommaire de cet instrument est, en général, présentée de la façon suivante :

O étant le point fixe (axe), L et M les points d'application du poids inconnu P et du poids connu mobile Q, on suppose ces trois points en ligne droite et, de plus, le centre de gravité du fléau, sur cette droite, en G'. On impose alors (du moins en apparence) à la ligne des couteaux LOM la condition d'être horizontale dans la position repérée ou normale à laquelle elle sera toujours amenée dans les pesées. On trouve ainsi la condition d'équilibre

$$P.OL = Q.AM.$$

Cette relation contient la théorie de la graduation de l'instrument, l'origine A de cette graduation étant déterminée par la valeur de OA :

$$OA = \frac{\pi}{Q} \cdot OG',$$

dans laquelle π représente le poids du fléau.

Il se trouve que ces résultats sont exacts. Mais l'instrument qui répondrait à l'hypothèse faite, s'il était réalisable, présenterait les deux propriétés suivantes, presque évidentes :

1° Une fois le fléau en équilibre dans la position horizontale, il y serait encore dans une position quelconque.

2° Il chavirerait complètement, prenant la position verticale, dès que le curseur ne serait pas rigoureusement au point M déterminé par l'équation d'équilibre.

En d'autres termes, cet instrument serait inutilisable.

Quel que soit le dédain avec lequel est trop souvent traitée la balance romaine, type le plus simple des bascules et d'un emploi si commode, elle est loin de présenter un tel vice essentiel. C'est que le centre de gravité de son fléau est, comme dans la balance ordinaire, en un point G, au-dessous et à une distance GG' de la ligne LOM des couteaux.

L'angle φ de cette ligne avec l'horizontale HH' est alors donné, pour une valeur quelconque de P et une position quelconque de Q, par l'équation

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha + \frac{P.OL - Q.AM}{\pi.GG'},$$

α étant l'angle (avec l'horizontale) déterminant la position d'équilibre prise comme repère $(P = 0)$; la position de A, origine de la graduation, est définie par l'égalité

$$OA = \frac{\pi}{Q}\,[OG' - GG' \operatorname{tg}\alpha].$$

Pour que le fléau revienne à la même position sous l'action d'un poids P différent de zéro, il faut que $\varphi = \alpha$, d'où

$$P.OL - Q.AM = 0.$$

Si l'on *veut* enfin, avec raison d'ailleurs, choisir comme position de repère la position horizontale du fléau, on fera $\alpha = 0$, et l'origine A sera déterminée par

$$OA = \frac{\pi}{Q} \cdot OG'.$$

Ces deux dernières équations sont précisément celles auxquelles on arrivait précédemment ; elles s'établissent par un calcul tout aussi élémentaire, et plus conforme à la réalité des choses.

Il est facile de reconnaître qu'alors l'équilibre est stable, et qu'un déplacement du curseur, tant que celui-ci ne « dérape » pas, a pour effet d'amener le fléau dans une position plus ou moins inclinée.

D.

ÉCOLE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES DE PARIS (1897)

4186. — 1° *Résoudre le système*

$$3x + 2y - z = a + 1,$$
$$5x + 3y - 2z = 2a - 1,$$
$$2x - y + 3z = -a.$$

2° *Calculer à un centième près la valeur de a pour que les solutions x, y, z satisfassent à la condition* $z^2 + xy = 0$.

1° En ajoutant membre à membre les trois équations, z disparaît, et il vient, après suppression du facteur commun 2,

$$5x + 2y = a. \qquad (1)$$

De même, l'élimination de z entre les deux premières équations donne

$$x + y = 3. \qquad (2)$$

Des équations (1) et (2), on déduit facilement

$$x = \frac{a-6}{3}, \qquad y = \frac{15-a}{3},$$

puis, en portant ces valeurs dans l'expression de z tirée de la première équation,

$$z = a - 6 + \frac{2}{3}(15 - a) - a - 1 = \frac{9-2a}{3}.$$

2° La condition $z^2 + xy = 0$ exprimée en fonction des valeurs précédentes devient

$$\left(\frac{9-2a}{3}\right)^2 + \frac{(a-6)(15-a)}{9} = 0,$$

ou, en simplifiant,

$$a^2 - 5a - 3 = 0.$$

En résolvant cette équation, on obtient pour a les deux solutions

$$a = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{37}}{2}.$$

Il suffit d'évaluer $\sqrt{37}$ à 0,01 près. En prenant la valeur 6,08, approchée par défaut, la valeur

$$a'' = \frac{5+6,08}{2} = 5,54$$

est approchée par défaut, et la valeur

$$a' = \frac{5-6,08}{2} = -0,54$$

est approchée par excès.

(F. PÉGORIER, à Cette.)

[Ont résolu la même question : MM. F. de Abreu ; E. Baudoin ; F. Bouquet ; J. Bordas ; A. Brodbeck ; E. Charpentier ; B. Conrads ; H. Crozemarie ; L. Curt ; M. Dacquinis ; L. Delavergnas ; N. Delhotel ; J. Delpont. A. Desplat ; E. Foucart ; E. Fourmon ; Th. Gramain ; J. Guillaume ; R. Henry ; E. Héteau ; Kalis ; E. Louvet ; A. Maître ; J. Méhu ; A. Mirc ; A. Nayel ; Niel ; M. Oger ; H. Perdrix ; P. Plisson ; E. Roncaglia ; F. Sabathe ; H. Tourrette ; P. Tribier ; H. Valdenaire ; L. Vignes ; P. Vincent ; J. Wittner.]

4187. — *Soient R_1 et R_2 les points de rencontre des médianes relatives à chacune des bases d'un tronc de prisme triangulaire quelconque :*

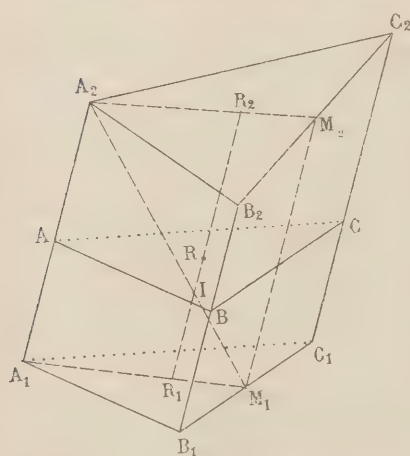
1° Démontrer que la distance R_1R_2 est la moyenne arithmétique des trois arêtes du tronc de prisme;

2° Un plan parallèle à l'une des bases décomposant le tronc de prisme en deux parties, on demande d'exprimer aussi simplement que possible le rapport des volumes de celles-ci;

3° Un tronc de prisme triangulaire étant coupé par un plan passant par une des trois arêtes parallèles, on considère toutes les positions que peut prendre ce plan et on demande les lieux : 1° du point de rencontre des côtés non parallèles de la section; 2° de la ligne qui joint les milieux des mêmes côtés.

1° Soit $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ le tronc de prisme considéré.

Le point de rencontre R_1 des médianes de la base $A_1B_1C_1$ est au tiers (à partir de la base) de l'une quelconque de ces médianes, au tiers de M_1A_1 par exemple ; de même R_2 est au tiers de M_2A_2. La droite M_1M_2 joignant les milieux des côtés non parallèles du trapèze $B_1C_1C_2B_2$, est parallèle aux deux autres côtés B_1B_2, C_1C_2, et par suite à A_1A_2. La figure $A_1M_1M_2A_2$ est donc aussi un trapèze ; par suite, la droite R_1R_2 est parallèle à A_1A_2 et à M_1M_2. Traçons alors la diagonale A_2M_1, qui coupe R_1R_2 en I; on a



$$R_1R_2 = R_1I + IR_2 = \frac{1}{3}\ A_1A_2 + \frac{2}{3}\ M_1M_2.$$

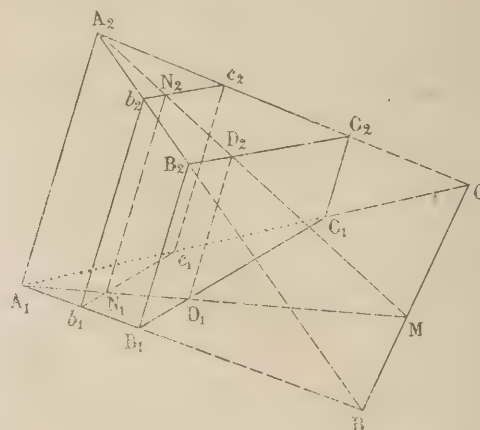
Or $$M_1M_2 = \frac{1}{2}(B_1B_2 + C_1C_2).$$

Donc $$R_1R_2 = \frac{1}{3}(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2).$$

2° Si l'on coupe le tronc de prisme par un plan tel que ABC, parallèle à la base $A_1B_1C_1$, on le décompose en deux parties. Le volume de chaque partie est égal, comme l'on sait, au produit de la section droite du tronc de prisme par le tiers de la somme des arêtes latérales. Or, le tiers de la somme des arêtes latérales, c'est la moyenne arithmétique des arêtes, et cette moyenne, on vient de le voir, est égale à la distance des centres de gravité des bases. Si donc R est le centre de gravité de la base ABC, les deux volumes $ABCA_1B_1C_1$ et $ABCA_2B_2C_2$ sont dans le rapport de R_1R à RR_2.

On peut remarquer qu'il n'est pas nécessaire, pour qu'il en soit ainsi, que le plan ABC soit parallèle à l'une des bases du tronc : le rapport des volumes sera le même avec tout plan passant par R ; parce que R sera toujours le centre de gravité du triangle suivant lequel un plan quelconque coupera le tronc de prisme.

3° Soit $A_1A_2D_2D_1$ la section faite dans le tronc par un plan mené par l'arête A_1A_2.



Pour trouver le lieu du point de rencontre M des droites non parallèles A_1D_1 et A_2D_2, remarquons que ces droites étant situées dans les plans des faces $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$, leur intersection M est sur la droite commune aux deux plans.

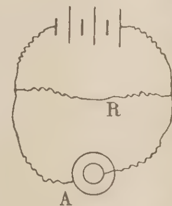
Tout plan sécant coupant le tronc de prisme étant compris entre les faces $A_1A_2B_2B_1$ et $A_1A_2C_2C_1$, la portion utile décrite par M est le segment de droite BC.

Les milieux N_1 et N_2 des côtés non parallèles A_1D_1 et A_2D_2 décrivent respectivement les parallèles b_1c_1, b_2c_2 à B_1C_1, B_2C_2 ; donc la droite N_1N_2 engendre la partie d'un plan fixe délimitée par le trapèze $b_1b_2c_1c_2$.

(J. DELPONT, à Beaumont.)

[Ont résolu la même question : MM. Carleron ; B. Conrads ; H. Crozemarie ; L. Curt ; L. Debrun ; P. Dégeilh ; N. Delhotel ; E. Foucart ; Th. Gramain ; G. Hiernaux ; A. Maître ; M. Oger ; Ph. Plisson ; L. Vignes ; P. Vincent.]

4188. — *Trois piles Daniell, de force électromotrice $1^{\text{volt}},07$, chargent un accumulateur A.*



On réunit les pôles de la pile par une résistance $R = 12^{\text{ohms}},9$ telle que l'intensité du courant qui passe par l'accumulateur devient nulle. A ce moment la résistance R est parcourue par un courant I de 0,18 ampères.

Quelle est la force électromotrice de l'accumulateur et la résistance intérieure de la batterie de charge ?

La différence de potentiel aux extrémités de la résistance R introduite s'obtient, d'après la loi d'Ohm, en multipliant cette résistance R par l'intensité du courant qui la parcourt. Elle est donc de

$$12,9 \times 0,18 = 2^{\text{volts}},322.$$

Comme il ne passe alors aucun courant dans l'accumulateur, ce dernier a une force électromotrice égale à $2^{\text{volts}},322$.

D'un autre côté, on a

$$0,18 = \frac{3 \times 1,07}{3r + 12,9},$$

d'où on tire $\qquad 3r = 4^{\text{ohms}},932.$

Telle est la résistance intérieure de la batterie de charge.

La résistance intérieure de chacune des piles, lesquelles sont nécessairement disposées en série, est $\frac{4,932}{3} = 1^{\text{ohm}},644.$

(A. MAITRE.)

[M. Crozemarie a résolu la question.]

4189. — *On attaque* 10^{gr} *de plomb pur par de l'acide azotique ordinaire jusqu'à dissolution complète ; formuler la réaction.*

On évapore ensuite à la température de $100°$ *jusqu'à poids constant ; donner le poids du résidu sec.*

Ce résidu est soumis enfin à l'action de la chaleur à une température voisine du rouge. On demande :

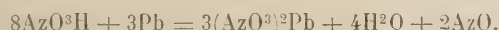
1° *L'équation rendant compte de la décomposition qui a pu se produire à cette température du rouge ;*

2° *La composition qualitative et la composition quantitative en poids du produit gazeux qui a pu se former ;*

3° *La nature et le poids du résidu après l'action de la chaleur au rouge.*

Poids atomiques : Pb = 206,4; H = 1; O = 16; Az = 14.

Le plomb se dissout dans l'acide azotique avec formation d'azotate de plomb et dégagement d'oxyde azotique, d'après la formule



$$8AzO^3H + 3Pb = 3(AzO^3)^2Pb + 4H^2O + 2AzO.$$

Si l'on évapore à la température de 100° jusqu'à poids constant, le résidu est constitué par l'azotate de plomb. Or la formule précédente montre que, pour $206^{gr},4$ de plomb, on obtient $330^{gr},4$ d'azotate.

Le poids du résidu sec d'azotate obtenu est donc de

$$\frac{330,4 \times 10}{206,4} = 16^{gr},007.$$

A la température du rouge, cet azotate se décompose d'après l'équation



$$(AzO^3)^2Pb = PbO + O + 2AzO^2.$$

Le produit gazeux de cette décomposition est constitué par de l'oxygène et du peroxyde d'azote.

Le poids de l'oxygène est de $\frac{16 \times 16,007}{330,4} = 0^{gr},775,$

et celui du peroxyde, de $\frac{92 \times 16,007}{330,4} = 4^{gr},457.$

Le résidu final est l'oxyde de plomb PbO, dont le poids est de

$$\frac{222,4 \times 16,007}{330,4} = 10^{gr},774.$$

(J. DELPONT.)

[Ont résolu la question : MM. Bouquet; L. Calais; B. Conrads; Crozemarie; L. Curt; N. Delhotel; Georgi; R. Henry; E. Heteau; L. Lesieur; D. Limongelli; A. Maitre; A. Maniez; J. Ménéchal; N. Mollon; A. Rongier; H. Valdenaire.]

ALGÈBRE

4113. — *Une droite* FF', *de longueur* 2c, *étant donnée, on décrit une circonférence sur cette droite comme diamètre et on considère les deux points* F *et* F' *comme les foyers d'une ellipse qui coupe la circonférence précédente. On propose :*

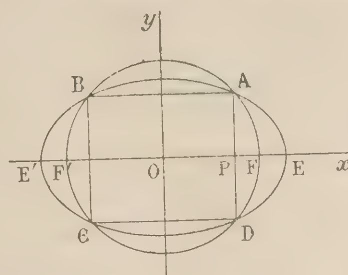
1° *D'établir l'équation qui permet de calculer ou construire le demi-grand axe* a *de cette ellipse en supposant que le rectangle* ABCD *inscrit à la fois dans le cercle et dans l'ellipse ait une surface donnée* k^2 *;*

2° *De faire connaître les conditions de possibilité du problème et, pour la limite supérieure de* k^2 *ainsi trouvée, d'exprimer la valeur de* a *;*

3° *De calculer le rapport de la valeur limite* k^2 *à la surface de l'ellipse correspondante.*

(*Bacc. lettres-sciences, Paris, avril 1897.*)

1° Le cercle et l'ellipse se coupent en quatre points A, B, C, D,



symétriques deux à deux par rapport aux axes de l'ellipse. Si x et y sont les coordonnées du point A par rapport aux axes de l'ellipse, on a le système

$$4xy = k^2, \qquad (1)$$

$$x^2 + y^2 = c^2, \qquad (2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \qquad (3)$$

Nous pourrions chercher à obtenir directement a en portant les valeurs de x et y tirées de (2) et (3) dans (1), mais l'équation résultante serait alors du huitième degré en a. On évite cette difficulté en procédant comme il suit :

En éliminant y entre (1) et (2) on a

$$x^2 + \frac{k^4}{16x^2} = c^2,$$

ou $\qquad 16x^4 - 16c^2x^2 + k^4 = 0, \qquad (4)$

équation qui détermine la valeur de x.

Eliminant ensuite y entre (2) et (3), on a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2 - x^2}{a^2 - c^2} = 1,$$

ou $\qquad a^4 - 2c^2a^2 + c^2x^2 = 0, \qquad (5)$

équation qui fait connaître a en fonction de c et de la valeur connue x.

2° Pour que l'équation (4) ait ses racines réelles, on doit avoir

$$64c^4 - 16k^4 \geqslant 0,$$

ou $\qquad k^2 \leqslant 2c^2;$

dans ce cas, il existe deux valeurs de x^2 réelles, positives et inférieures à c^2, puisque leur somme est c^2 et leur produit toujours positif.

En remplaçant dans l'équation (5), x^2 par l'une des deux valeurs de x^2, on obtient pour a^2 deux valeurs réelles et positives. En effet, la condition de réalité de ces valeurs :

$$c^4 - c^2x^2 \geqslant 0$$

est toujours satisfaite, puisque $x^2 < c^2$.

Ces deux valeurs positives de a^2 ayant c^2 pour demi-somme, la plus grande est supérieure à c^2, et par suite convient seule ici.

En particulier, lorsque k^2 atteint sa limite supérieure, $2c^2$, on a $x^2 = \frac{c^2}{2}$, et l'équation (5) devient

$$a^4 - 2c^2a^2 + \frac{c^4}{2} = 0,$$

d'où, en écartant la plus petite racine,

$$a^2 = c^2 + \frac{c^2}{\sqrt{2}}$$

et $\qquad a = c\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}.$

3° Dans le cas précédent, la surface de l'ellipse correspondante a pour expression

$$\pi ab = \pi a\sqrt{a^2 - c^2} = \pi c\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{\frac{c^2}{\sqrt{2}}}$$
$$= \pi c^2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}}.$$

Le rapport demandé est donc

$$\frac{2c^2}{\pi c^2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{1 + \sqrt{2}}}.$$

(A. BONNEMAIN, lycée de Toulon.)

[Ont résolu la même question : MM. Bayor, à Castelnau ; Benoist-Daubray, école prof[lle] de S[t]-Aignan ; G. Bernard, lycée de Rennes ; G. Costey ; J. Courtinat, collège de Cusset ; L. Echeman ; G. Fontaine, institution Lelarge, à Paris ; A. Franqueville, à Rouen ; H. Janois, école normale du Mans ; M. Legras, lycée d'Orléans ; de Mendiry ; A. Nayel, à Thouars ; P. Vincent, école pratique d'industrie de S[t]-Etienne ; E. Waibel, école polytechnique de Stuttgart.]

4217. — *Etant donné le rectangle* SAS'A' *dont la base* AS' *est* R *et dont la hauteur* AS *est* h, *on considère les cônes engendrés par la rotation de la diagonale* SS' *autour de* SA *puis autour de* S'A'.

On propose de couper l'ensemble de ces deux cônes par un plan perpendiculaire à SA *et tel que la somme des surfaces des sections obtenues soit équivalente à une surface donnée* k^2.

Etudier la variation de cette somme lorsque le plan sécant prend toutes les positions possibles entre A *et* S.

(*Bacc. lettres-mathématiques, Constantine, juillet 1897*).

Soit BCB' la trace du plan sécant, situé à une distance SB $= x$ du côté SA' du rectangle.

Les sections déterminées par ce plan dans les deux cônes sont deux cercles de centres B, B' et de rayons BC, B'C. La condition imposée s'écrit donc

$$\pi\overline{BC}^2 + \pi\overline{B'C}^2 = k^2.$$

Or on a

$$\frac{BC}{AS'} = \frac{SB}{SA}, \quad \text{d'où} \quad BC = \frac{Rx}{h};$$

$$\frac{B'C}{A'S} = \frac{S'B'}{S'A'}, \quad \text{d'où} \quad B'C = \frac{R(h-x)}{h}.$$

L'équation du problème est alors

$$\frac{\pi R^2x^2}{h^2} + \frac{\pi R^2(h-x)^2}{h^2} = k^2,$$

ou

$$x^2 + (h-x)^2 = \frac{k^2h^2}{\pi R^2},$$

ou

$$2x^2 - 2hx + h^2\left(1 - \frac{k^2}{\pi R^2}\right) = 0.$$

En raison de la symétrie de la figure, l'équation précédente admet aussi bien pour racine SB que S'B' ou AB. Cette équation doit donc avoir ses deux racines réelles et positives.

La condition de réalité est

$$h^2 - 2h^2\left(1 - \frac{k^2}{\pi R^2}\right) \geqslant 0$$

ou

$$k^2 \geqslant \frac{\pi R^2}{2}.$$

Les deux valeurs de x, dont la somme est h, sont positives en même temps que leur produit, c'est-à-dire lorsque

$$k^2 \leqslant \pi R^2.$$

Ainsi, pour une valeur de k^2 comprise entre $\frac{\pi R^2}{2}$ et πR^2, les deux valeurs de x sont réelles et positives, et, par suite, inférieures à leur somme h : ces valeurs fournissent donc deux solutions équidistantes des sommets S et S' des deux cônes, — résultat évident *a priori*.

Variation de k^2 *lorsque* x *croît de* 0 *à* h. — On a

$$k^2 = \frac{\pi R^2}{h^2}\left[x^2 + (h-x)^2\right],$$

ou, en ajoutant et retranchant $2x(h-x)$ à la quantité entre crochets,

$$k^2 = \frac{\pi R^2}{h^2}\left[(x + h - x)^2 - 2x(h-x)\right],$$

ou

$$k^2 = \pi R^2 - \frac{2\pi R^2}{h^2}x(h-x).$$

L'étude de la variation de k^2 est ainsi ramenée à celle de la variation du produit $x(h-x)$. Or ce produit, pour des valeurs croissantes de x, part de zéro, croît jusqu'à un certain maximum égal à $\left(\frac{h}{2}\right)^2$ et qu'il atteint pour $x = \frac{h}{2}$, puis décroît ensuite jusqu'à zéro.

Par conséquent la valeur de k^2 décroît de πR^2 à $\frac{\pi R^2}{2}$ (minimum) lorsque x varie de 0 à $\frac{h}{2}$; k^2 croît ensuite, en repassant par les mêmes valeurs, pour x compris entre $\frac{h}{2}$ et h.

(ERNEST FOUCART.)

[Ont résolu la même question : MM. F. Beynas ; P. Bonnot ; J. Bordas ; A. Brodbeck ; G. Charpentier ; H. Crozemarie ; L. Curt ; J. Delpont ; G. Digne ; Georgi ; P. Gervaiseau ; A. Gourdin ; H. Guillaud ; G. Hiernaux ; H. Janois ; Ph. Jumaud ; P. Le Hénaff ; A. Maître ; J. Maury ; J. Ménéchal ; A. Mirc ; A. Nayel ; Ph. Plisson ; Raynaud ; A. Rongier ; L. Tarrin ; H. Valdenaire ; P. Vincent.]

4223. — *Trouver trois nombres entiers positifs sachant que leur somme est* 10 *et la somme de leurs produits deux à deux* 31.

Si x désigne le plus petit des nombres cherchés, on peut représenter les deux autres par $x+m$ et $x+n$, m et n étant des nombres entiers positifs. On doit alors avoir

$$x + x + m + x + n = 10,$$
$$x(x+m) + x(x+n) + (x+m)(x+n) = 31,$$

ou, en simplifiant,

$$3x + m + n = 10,$$
$$3x^2 + 2(m+n)x + mn = 31.$$

On déduit de là

$$m + n = 10 - 3x,$$
$$mn = 3x^2 - 20x + 31.$$

Pour que $m+n$ soit positif, il faut qu'on ait

$$3x < 10 \quad \text{ou} \quad x \leqslant 3.$$

Les seules valeurs possibles de x sont donc 1, 2, 3 ; en calculant les valeurs correspondantes de $m+n$ et mn, on obtient :

pour $x = 1$, $m+n = 7$, $mn = 14$;
pour $x = 2$, $m+n = 4$, $mn = 3$;
pour $x = 3$, $m+n = 1$, $mn = -2$.

Dans l'hypothèse $x = 1$, les valeurs de m et n sont imaginaires, et pour $x = 3$, elles sont de signes contraires. Pour $x = 2$, on a

$$m = 1, \qquad n = 3.$$

Les nombres 2, 3, 5 sont donc les seuls qui répondent au problème.

(CRAPIER, instituteur à Clichy.)

[Ont résolu la même question : M[lles] C. David ; M. Pont ; MM. Allanic ; J. Amboise ; E. Baudoin ; Benbacite ; A. Bertrand ; F. Beynas ; P. Bonnot ; J. Bordas ; H. Bosc ; Bouquet ; A. Bouzy ; C. Brunet ; Burgat ; E. Chambaud ; J. Condemine ; Costes ; L. Delavergnas ; J. Delpont ; G. Digne ; J. Douménach ; Eldin ; Feintuch ; E. Foucart ; E. Fourmon ; P. Gervaiseau ; A. Gipoulou ; L. Gourdet ; A. Gourdin ; A. Grosz ; A. Gruny ; H. Guillaud ; G. Hiernaux ; H. Janois ; Jarrige ; Jouanneau ; G. Leclerc ; J. Legrand ; P. Le Hénaff ; E. L'Hoste ; L. Magne ; A. Maître ;

C. Marie ; H. Martiny ; F. Masbœuf ; J. Maury ; J. Ménéchal ; E. Ménissier ; H. Michel ; A. Mirc ; Niel ; M. Oger ; E. Paris ; F. Pégorier ; Ch. Pellion ; G. Perdrizet ; J. Peyret ; Ph. Plisson ; Raynaud ; M. Rivière ; Roussel ; A. Sarteel ; P. Ségala ; E. Sevin ; E. Sinturel ; A. G. Strasser ; L. Sylvestre ; Ch. Szabo ; T. Taralon ; P. Tribier ; V. R. T. ; H. Valdenaire ; J. Vidal ; L. Vignes ; P. Vincent ; J. Wittner.]

4224. — *Simplifier l'expression*

$$\sqrt{a^2+\sqrt[3]{a^4b^2}}+\sqrt{b^2+\sqrt[3]{a^2b^4}}.$$

On peut écrire successivement

$$\sqrt{a^2+\sqrt[3]{a^4b^2}}=\sqrt{\sqrt[3]{a^6}+\sqrt[3]{a^4b^2}}$$
$$=\sqrt{\sqrt[3]{a^4}(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})}=\sqrt[3]{a^2}\sqrt{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}.$$

Par analogie, on a

$$\sqrt{b^2+\sqrt[3]{a^2b^4}}=\sqrt[3]{b^2}\sqrt{\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{a^2}}.$$

L'expression devient alors

$$(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})\sqrt{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}$$

ou, en observant que $\mathrm{A}\sqrt{\mathrm{A}}=\sqrt{\mathrm{A}^2}.\sqrt{\mathrm{A}}=\sqrt{\mathrm{A}^3}$,

$$\sqrt{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^3}.$$

(L. GAMET, lycée de Clermont-Ferrand.)

AUTRE SOLUTION. — On peut aussi arriver plus rapidement au même résultat à l'aide des exposants fractionnaires. On a

$$\left(a^2+a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(b^2+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

(ERNEST FOUCART.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Ardin-Delteil ; G. Amouroux ; Brodbeck ; V. Cambureanu ; Chambeau ; L. Delavergnas ; Feintuch ; G. Fontaine ; A. Gourdin ; A, Grosz ; G. Hiernaux ; H. Janois ; Jarrige ; A. Maître ; J. Maury ; M. Oger ; F. Pégorier ; F. Riesz ; E, Sinturel ; Strasser ; C. Szabo ; P. Vincent ; J. Wittner.]

4225. — *Extraire la racine carrée du polynome*

$$(x^2-yz)^3+(y^2-zx)^3+(z^2-xy)^3-3(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy).$$

Le polynome peut s'écrire

$$(x^2-yz)[(x^2-yz)^2-(y^2-zx)(z^2-xy)]$$
$$+(y^2-zx)[(y^2-zx)^2-(z^2-xy)(x^2-yz)]$$
$$+(z^2-xy)[(z^2-xy)^2-(x^2-yz)(y^2-zx)],$$

ou, après avoir effectué les opérations indiquées entre crochets,

$$(x^2-yz)x(x^3+y^3+z^3-3xyz)$$
$$+(y^2-zx)y(x^3+y^3+z^3-3xyz)$$
$$+(z^2-xy)z(x^3+y^3+z^3-3xyz),$$

ou, en mettant le facteur commun en évidence,

$$(x^3+y^3+z^3-3xyz)(x^3-xyz+y^3-xyz+z^3-xyz)$$

ou encore $\qquad (x^3+y^3+z^3-3xyz)^2.$

Sous cette dernière forme, on voit immédiatement que la racine carrée du polynome est

$$x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

(PH. GERVAISEAU, à Loué.)

[Ont résolu la même question : MM. C. Brunet ; E. Chambaud ; Costes ; G. Digne ; Feintuch ; E. Fourmon ; L. Gamet ; A. Grosz ; H. Janois ; Jarrige ; A. Liron ; L. Magne ; J. Méhu ; E. Ménissier ; F. Pégorier ; F. Riesz ; A. Strasser ; P. Vincent.]

GÉOMÉTRIE

Solution de la question 4205 et Compléments,

par M. **A. Vacquant**, professeur au lycée de Nancy.

Démontrer que dans un tétraèdre dont les quatre faces sont équivalentes, les arêtes opposées sont égales.

Lemme. — *Le lieu géométrique des droites qui passent par un point pris dans le plan bissecteur d'un dièdre et qui sont partagées par ce point et les faces du dièdre en parties égales est un plan parallèle à l'arête du dièdre et perpendiculaire au plan bissecteur.*

Soient (*fig.* 1) deux demi-plans P et Q se coupant suivant ωI, et O un point quelconque pris dans le plan bissecteur β du dièdre ωI. Je considère le plan passant par O et perpendiculaire à ωI, déterminant l'angle plein AωB du dièdre ωI; soient AOB la perpendiculaire en O à la bissectrice ωO de l'angle AωB, et OI' parallèle à ωI. Le plan (AB, OI') contient toutes les droites indiquées. En effet, soit COD une droite différente de AB, coupant P et Q en C et D tels que OC' = OD. Le quadrilatère ACBD est un parallélogramme, car les diagonales AB et CD se coupent en parties égales; donc AC et BD sont parallèles; il en résulte que le plan ABCD ne peut rencontrer ωI en un certain point M, car AC et BD se couperaient en M; donc le plan ABCD est parallèle à ωI, c'est-à-dire que la droite CD est dans le plan (AB, OI') parallèle à ωI et perpendiculaire au plan bissecteur β du dièdre ωI puisque AB est perpendiculaire à β. Réciproquement, toute droite du plan (AB, OI') passant par O répond à la question, et la proposition est démontrée.

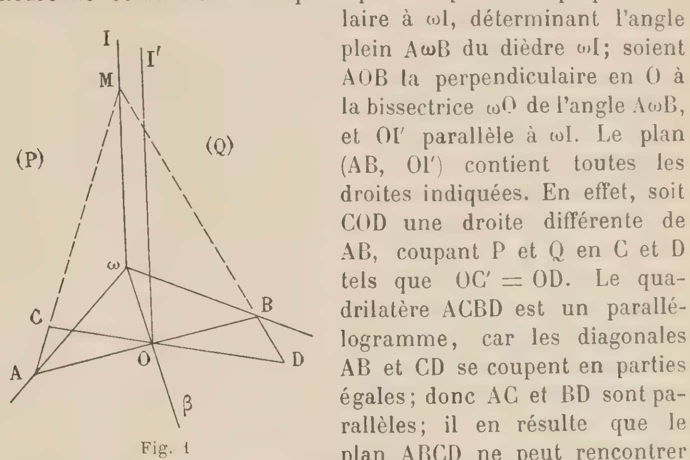


Fig. 1

Soit maintenant un tétraèdre SABC ayant ses quatre faces équivalentes. Je considère (*fig.* 2) le prisme de base ABC, d'arête latérale SA; le plan SBC partage ce prisme en deux pyramides, l'une triangulaire SABC qui est le tétraèdre donné, et l'autre quadrangulaire SBB$_1$CC$_1$, de sommet S, ayant pour base le parallélogramme BCB$_1$C$_1$; cette pyramide a ses quatre faces latérales équivalentes. Dans le tétraèdre SBB$_1$C$_1$ les faces SBB$_1$ et SB$_1$C$_1$ du dièdre SB$_1$ étant équivalentes, le plan bissecteur du dièdre SB$_1$ qui partage l'arête BC$_1$ en parties proportionnelles à ces faces, et par suite en parties égales, passe par le milieu O de BC$_1$; on voit de même, dans le tétraèdre SBCC$_1$ que le plan bissecteur du dièdre SC n'est autre que SCO; de sorte que dans la pyramide SBCB$_1$C$_1$ les dièdres SB$_1$ et SC ont même plan bissecteur SB$_1$C; de même les dièdres SC$_1$ et SB ont même plan bissecteur SBC$_1$.

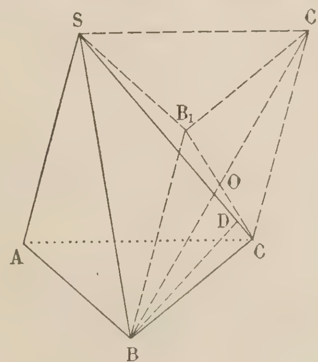


Fig. 2

Cela étant, considérons *seulement* le plan bissecteur SB$_1$C commun aux dièdres SB$_1$ et SC; d'après le lemme, la droite BC$_1$ qui passe par le point O de ce plan bissecteur doit être

située dans deux plans distincts passant par O et perpendiculaires à SB_1C (distincts puisque SB_1 et SC ne sont pas parallèles) ; donc BC_1 est perpendiculaire au plan SB_1C et par suite à la droite B_1C de ce plan ; le parallélogramme BCB_1C_1 ayant ses diagonales orthogonales est un losange, donc $BC = BB_1 = SA$. On verrait de même, à l'aide des prismes de base ABC, d'arête latérale SB ou SC, que $AC = SB$ et $AB = SC$; la question est donc résolue.

De ce qui précède on déduit les résultats suivants :

Théorème I. — *Dans un tétraèdre* SABC, *si les faces du dièdre* AB *sont équivalentes et s'il en est de même des faces du dièdre opposé* SC, *les arêtes opposées* BC *et* SA, AC *et* SB *sont égales et les faces équivalentes sont égales.*

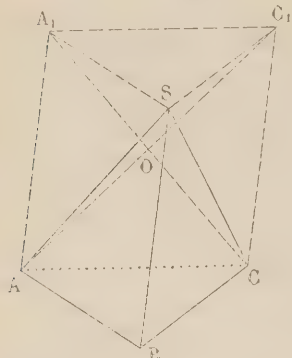


Fig. 3

Cela résulte immédiatement de la démonstration précédente faite avec le prisme $ABCSB_1C_1$ (*fig.* 2) et le prisme $ABCSA_1C_1$ (*fig.* 3). Alors les faces équivalentes ASC et BSC sont deux triangles égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun : SC commun, $SA = BC$ et $AC = SB$. On voit de même que les faces équivalentes ABC et ABS sont égales.

Dans le cas où les quatre faces du tétraèdre SABC sont équivalentes, on peut considérer un troisième prisme de base ABC, d'arête latérale SC et on a le résultat indiqué par l'énoncé ; alors les quatre faces équivalentes sont égales, puisque ce sont des triangles ayant les côtés égaux chacun à chacun. Donc, en complétant l'énoncé de la question, on a :

Théorème II. — *Dans un tétraèdre, si les quatre faces sont équivalentes, les arêtes opposées sont égales et les quatre faces sont égales.*

Ce théorème a été démontré déjà par M. Emile Lemoine (*Association française pour l'avancement des sciences*, Nantes, 1875). La démonstration de l'auteur est toute différente de celle qui précède.

Corollaire. — *Pour qu'un tétraèdre ait ses quatre faces équivalentes, il faut et il suffit que les arêtes opposées soient égales.*

Construction d'un tétraèdre répondant aux conditions indiquées dans les théorèmes I et II.

I. On prend deux triangles égaux ASC et BSC ayant SC commun, $SA = BC$ et $SB = AC$; alors les deux triangles ABS et ABC sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun. On peut donc construire la figure d'une infinité de manières.

II. On prend deux triangles égaux ASC et BSC ayant SC commun, $SA = BC$, $SB = AC$. On fait tourner le triangle BSC autour de SC, la hauteur BD de ce triangle décrit un plan P perpendiculaire à SC et B décrit un cercle Σ. Du point A comme centre, on décrit une sphère Ω de rayon SC ; si le plan P coupe cette sphère suivant un cercle Σ', un point commun à Σ et Σ' sera un point B, quatrième sommet d'un tétraèdre cherché.

On voit assez facilement qu'une condition nécessaire à l'existence d'un point B est que chacun des triangles égaux constituant les faces du tétraèdre ne possède que des angles aigus. On peut alors énoncer la propriété suivante :

Dans un tétraèdre SABC *dont les arêtes opposées sont égales, les faces sont égales et chacune d'elles est un triangle qui ne peut être obtusangle.*

Cette propriété a encore été démontrée autrement (par le calcul) par M. E. Lemoine dans l'article indiqué.

J'indiquerai dans une autre note quelques propriétés, faciles à établir géométriquement, d'un tétraèdre dont les arêtes opposées sont égales.

4226. — *Si* a, b, c *sont les côtés d'un triangle et* m_a *la médiane issue de* A, *on a*

$$m_a^2 + bc > \frac{a^2}{4} > m_a^2 - bc.$$

Dans tout triangle, on a

$$b + c > a > | b - c |$$

ou, en élevant chaque membre positif au carré,

$$b^2 + c^2 + 2bc > a^2 > b^2 + c^2 - 2bc.$$

Or, d'après un théorème connu,

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}.$$

Portons cette valeur de $b^2 + c^2$ dans la double inégalité précédente ; il vient

$$2m_a^2 + \frac{a^2}{2} + 2bc > a^2 > 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} - 2bc,$$

et, en retranchant $\frac{a^2}{2}$ de chaque membre, puis divisant par 2,

$$m_a^2 + bc > \frac{a^2}{4} > m_a^2 - bc.$$

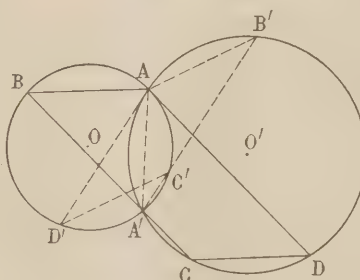
C. Q. F. D.

(G. Amouroux, lycée de Toulouse.)

[Ont résolu la même question : MM. P. Alcan ; J. Amboise ; E. Ardin-Delteil ; Baudoin-Legros ; E. Baudot ; E. Bernardini ; F. Beynas ; J. Bordas ; C. Brunet ; Costes ; L. Danjou ; F. Dégeilh ; G. Delahaye ; L. Delavergnas ; N. Delhotel ; J. Delpont ; J. Douménach ; Eldin ; J. Fabre ; G. Fauvernier ; Feintuch ; E. Foucart ; E. Fourmon ; P. Fournel ; L. Gamet ; P. Gervaiseau ; A. Gipoulou ; A. Grosz ; A. Gruny ; H. Guillaud ; G. Hiernaux ; H. Janois ; Jouanneau ; A. Larue ; Ch. Lefebvre ; Le Hénaff ; L. Magne ; A. Maître ; C. Marie ; F. Masbœuf ; J. Maury ; J. Ménéchal ; E. Ménissier ; Meynier ; H. Michel ; A. Mirc ; F. Pégorier ; Ch. Pellion ; A. Perrissond ; J. Pillard ; Ph. Plisson ; Raynaud ; F. Riesz ; M. Rivière ; A. Rongier ; E. Sinturel ; A. Strasser ; L. Sylvestre ; Ch. Szabo ; L. Tarrin ; L. Vignes ; P. Vincent ; L. Vollaire.]

4227. — *On donne deux cercles se coupant en* A *et* A′. *Construire un parallélogramme* ABCD *sachant que l'un des côtés passe par* A′, *l'un des sommets est en* A *et les trois autres sur les cercles donnés.*

Supposons le problème résolu : soit ABCD un parallélogramme remplissant les conditions énoncées.



Traçons la corde commune AA′. Les deux cordes AD et A′C du cercle O′ étant parallèles soustendent des arcs et des cordes égales. Donc

$$AA' = CD$$

et, puisque

$$CD = AB,$$
$$AA' = AB.$$

De là cette construction : De A comme centre, avec AA′ pour rayon, on décrit un cercle qui coupe le cercle O en un point B autre que A′ ; on trace la droite BA′, que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre, en C, avec le cercle O′, puis on mène dans ce cercle la corde CD parallèle à BA, et l'on tire AD.

Le point B pouvant aussi bien être pris sur le cercle O′ que

sur le cercle O, la construction précédente fournit une seconde solution, AB'C'D'.

Le problème est toujours possible, car la corde commune AA' est toujours inférieure au diamètre d'un des cercles O ou O'.

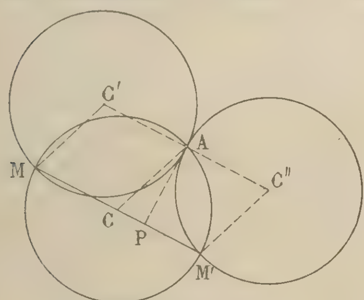
On peut remarquer que le côté AD du parallélogramme est tangent en A au cercle O, de même que AD' est tangent en A au cercle O'.

(A. GOURDIN, école primaire supérieure de Saint-Aignan.)

[Ont résolu la même question : MM. L. Bolzinger ; P. Bonnot ; H. Bosc ; A. Brodbeck ; C. Brunet ; J. Condemine ; R. Cordier ; Debrun ; P. Dégeilh ; L. Delavergnas ; A. Delcambre ; Eldin ; M. Emile ; G. Fauvernier ; E. Foucart ; L. Gourdet ; G. Hiernaux ; G. Ithier ; H. Janois ; H. Lévy ; L. Magne ; J. Ménéchal ; E. Ménissier ; Raynaud ; P. Ségala ; — en partie seulement : Mlle Clémence David ; MM. J. Amboise ; E. Ardin-Delteil ; Audriot ; E. Baudoin ; Baudoin-Legros ; Cantin ; N. Christoff ; Costes ; M. Drovin ; R. Durand ; Feintuch ; E. Fourmon ; P. Fournel ; A. Franchi ; L. Gamet ; E. Garès ; P. Gervaiseau ; A. Gipoulou ; A. Grosz ; A. Gruny ; Jouanneau ; A. Larue ; E. Le Maigre ; E. L'Hoste ; A. Liron ; Lœwy ; E. Louvet ; A. Maître ; J. Martin ; H. Martiny ; F. Masbœuf ; A. Mirc ; A. Perrissond ; J. Peyret ; J. Pillard ; F. Riesz ; M. Rivière ; A. Robinet ; A. Rongier ; E. Routier ; A. Sarteel ; E. Sevin ; A. Slivueano ; H. Soulé ; A. Strasser ; G. Szabo ; T. Taralon ; P. Tarnier ; L. Tarrin ; V. R. T. ; H. Valdenaire ; L. Vignes ; P. Vincent.]

4228. — *Par un point A donné sur un cercle donné C, on fait passer deux autres cercles C' et C'' tangents entre eux et égaux au cercle C, qui les rencontre en deux points M et M' autres que A. Lieu de la projection du point A sur MM'.*

Les deux cercles C' et C'' étant tangents, la ligne des centres C'C'' passe par le point de contact A.



Tirons les droites MC', MC', M'C, M'C''. Le quadrilatère MCAC' ayant ses quatre côtés égaux, est un losange ; il en est de même du quadrilatère M'CAC''. Par suite, les droites CM et CM', qui ont un point commun et sont parallèles à la droite C'C'', sont en prolongement l'une de l'autre.

Le lieu cherché n'est donc autre que celui de la projection du point A sur une droite pivotant autour du point C. L'angle APC étant toujours droit, le lieu est le cercle décrit sur AC comme diamètre.

(J. PILLARD, lycée d'Orléans.)

[Ont résolu la même question : Mlle C. David ; MM. J. Amboise ; Audriot ; Baudoin-Legros ; L. Bolzinger ; J. Bordas ; A. Brodbeck ; Burgat ; Cantin ; E. Charpentier ; N. Christoff ; J. Condemine ; R. Cordier ; Costes ; G. Damien ; L. Debrun ; P. Dégeilh ; L. Delavergnas ; A. Delcambre ; G. Digne ; M. Drovin ; R. Durand ; Eldin ; G. Fauvernier ; Feintuch ; G. Fontaine ; E. Foucart ; L. Gamet ; A. Gipoulou ; A. Gourdin ; A. Gruny ; G. Hiernaux ; G. Ithier ; H. Janois ; Jouanneau ; A. Larue ; E. Le Maigre ; H. Lévy ; L. Magne ; A. Maître ; H. Martiny ; F. Masbœuf ; E. Ménissier ; H. Michel ; A. Mirc ; Pajot ; J. Pastour ; A. Perrissond ; J. Peyret ; P. Plisson ; Raynaud ; A. Riche ; F. Riesz ; J. Rigal ; M. Rivière ; E. Routier ; E. Sevin ; A. Strasser ; T. Taralon ; P. Tarnier ; L. Tarrin ; V. R. T. ; L. Vignes.]

PHYSIQUE



4124. — *Une sorte de gros thermomètre à mercure, contenant 13k,6 de mercure, porte latéralement une éprouvette en verre mince, soudée à la paroi, pénétrant jusqu'au centre du réservoir. La température du mercure étant 10°, on introduit dans l'éprouvette 10gr de glace à 0° qui pénètre jusqu'au fond et y entre en fusion. Sachant que la tige du thermomètre a une section de 1 millimètre carré, on demande de combien le niveau du mercure se déplacera dans cette tige.*

On ne tiendra pas compte du poids de l'enveloppe du thermomètre, et on supposera qu'il n'y a pas d'échange sensible de chaleur entre lui et les corps environnants.

Densité du mercure, 13,6.

Chaleur latente de fusion de la glace, 80 calories.

Chaleur spécifique du mercure, 0,033.

Coefficient de dilatation apparente du mercure dans le verre, $\frac{1}{6480}$.

(*Bacc. lettres-math., Marseille, novembre 1896.*)

Cherchons d'abord la température finale x du mercure contenu dans le thermomètre.

La glace absorbe $80 \times 10 = 800^{cal}$ pour fondre sans changer de température, et l'eau provenant de la fusion absorbe $10x^{cal}$ pour s'échauffer de 0° à $x°$. D'un autre côté, le mercure cède $13600 \times 0{,}033(10 - x)^{cal}$ pour se refroidir de 10° à $x°$.

Écrivons que la chaleur gagnée est égale à la chaleur perdue ; il vient

$$800 + 10x = 13600 \times 0{,}033(10 - x),$$

d'où

$$x = 8°{,}038.$$

Le volume apparent du mercure contenu à 10° dans le thermomètre est $\frac{13600}{13{,}6} = 1000^{cc}$. Soit V le volume apparent occupé par le mercure à 8°,038 ; les volumes apparents du mercure à 0° étant égaux, on a

$$\frac{1000}{1 + \frac{10}{6480}} = \frac{V}{1 + \frac{8{,}038}{6480}},$$

d'où

$$V = 999^{cc}{,}697.$$

Le volume ayant diminué de $1000 - 999{,}697 = 0^{cc}{,}303$, le niveau du mercure dans la tige s'est abaissé de

$$\frac{0{,}303}{0{,}01} = 30^{cm}{,}3.$$

(M. OGER.)

[Ont résolu la même question : MM. O. Bouquey ; L. Bruhais ; J. Condemine ; J. Dunand ; A. Franqueville ; J. Longe ; J. Ménéchal ; Mirc ; R. Vasselin.]

4229. — *Deux cordes de même longueur mais inégalement tendues, l'une de fer et l'autre de cuivre, sont à l'unisson.*

Sachant que la corde de cuivre est trois fois plus tendue que celle de fer et que le rapport des densités des deux métaux est égal à 1,15, on demande de calculer :

1° *Le rapport des diamètres des deux cordes ;*

2° *La tension à donner à la corde de fer, — par rapport à celle correspondant à l'unisson, — pour que l'intervalle entre les notes rendues par les deux cordes devienne égal à* $\frac{3}{2}$.

(*Bacc. lettres-sciences, Alger, juin 1897.*)

1° Appelons n le nombre de vibrations du son que produisent les deux cordes de longueur l.

Soient r, p et d le rayon, le poids tenseur et la densité de la corde de fer ; r', $3p$ et $d \times 1{,}15$ seront le rayon, le poids tenseur et la densité de la corde de cuivre.

La formule qui résume les lois des vibrations transversales donne pour la corde de fer

$$n = \frac{1}{2rl}\sqrt{\frac{gp}{\pi d}}$$

et, pour la corde de cuivre,

$$n = \frac{1}{2r'l}\sqrt{\frac{g \times 3p}{\pi d \times 1{,}15}}.$$

On a donc

$$\frac{1}{2rl}\sqrt{\frac{gp}{\pi d}} = \frac{1}{2r'l}\sqrt{\frac{g \times 3p}{\pi d \times 1{,}15}},$$

d'où on tire

$$\frac{2r'}{2r} = \sqrt{\frac{3}{1{,}15}} = 1{,}615.$$

2° L'intervalle entre les notes rendues par les deux cordes devant être $\frac{3}{2}$, le nombre de vibrations de la corde de fer, par rapport à n, devra être de $\frac{3}{2}n$.

Or, lorsque deux cordes formées de la même substance ont même longueur et même diamètre, les nombres de leurs vibrations sont proportionnels aux racines carrées de leurs poids tenseurs. En appelant p et p' les poids tenseurs de la corde de fer, on a

$$\frac{\frac{3}{2}n}{n} = \frac{\sqrt{p'}}{\sqrt{p}},$$

d'où $$p' = \frac{9}{4}p.$$

Telle est la nouvelle tension à donner à la corde de fer.

(BENBACITE, à Alger.)

[Ont résolu la question : MM. P. Alcan; Ardin-Delteil; E. Baudot; F. Boisnard; J. Condemine; Costes; Crozemarie; L. Curt; R. Dautry; N. Delhotel; R. Durand; G. Fauvernier; P. Fournel; A. Gipoulou; G. Hiernaux; G. Leclerc; E. l'Hoste; P. Le Hénaff; J. Maury; E. Ménissier; Meyrier; A. Mirc; Nayel; Niel; A. Périmond; J. Peyret; Raynaud; J. Rigal; V. R. T; A. Maitre; F. Pégorier.]

QUESTIONS PROPOSÉES

4244. — Si a et b sont deux nombres entiers quelconques, le quotient $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ n'est jamais égal à un nombre entier.

(J. Pastour, à Antibes.)

4245. — Si a, b, c, d sont quatre nombres en progression géométrique, on a

$$(a-b+c-d)^2 = (a-b)^2 + 2(b-c)^2 + (c-d)^2.$$

4246. — n étant un nombre entier quelconque, l'un des deux nombres $3^{3n}+2^{3n}$ et $3^{3n}-2^{3n}$ est divisible par 35.

4247. — Soit O le centre du cercle circonscrit, H le point de concours des hauteurs d'un triangle ABC ; sur AB et sur AC on prend respectivement AD = AH et AE = AO ; démontrer que DE est égal au rayon du cercle circonscrit.

(P. Mascaret.)

4248. — Dans un triangle isocèle ABC (AB = AC), on prend le symétrique D par rapport à AB du centre O du cercle circonscrit, et par D on mène à AC une parallèle qui coupe BC en E. Démontrer que l'angle DOE est droit.

4249. — On partage l'hypoténuse BC d'un triangle rectangle ABC en trois parties égales par les points D et E. Démontrer que

$$\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 + \overline{AE}^2 = \frac{2}{3}\overline{BC}^2.$$

(J. Lagarde, collège de Tournus.)

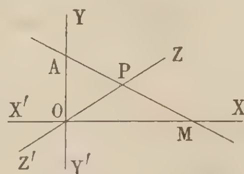
4250. — Soient H le point de concours des hauteurs et G le centre de gravité d'un triangle ; I et O les centres des cercles inscrit et circonscrit. Démontrer que

$$\overline{HI}^2 + 2\overline{OI}^2 = 3\overline{IG}^2 + 6\overline{GO}^2.$$

4251. — On joint les sommets d'un triangle équilatéral ABC à un point quelconque P de son plan par des droites qui coupent le cercle circonscrit ABC en A', B', C'. Démontrer la relation

$$AP.AA' + BP.BB' + CP.CC' = 2\overline{AB}^2.$$

4252. — On donne deux droites rectangulaires X'X, Y'Y, se coupant au point O, et un point A situé sur OY à une distance OA = a du point O. On donne aussi une troisième droite Z'Z passant par le point O. Mener par le point A une sécante AT telle que l'on ait, en désignant par M le point où elle coupe X'X et par P le point où elle coupe Z'Z, la relation $AM \times AP = ma^2$, où m est un nombre donné. — Discuter.



I. — Traiter ce problème par le calcul, en prenant pour inconnue l'angle u de AO avec AT. On désignera par θ l'angle connu XOZ.

II. — La sécante AT étant supposée répondre à la question, soit Q le point où la perpendiculaire menée à cette sécante au point P rencontre la droite Y'Y. Démontrer que AQ = ma. — Déduire de là une solution géométrique du problème.

(*Bacc. lettres-math., Lyon, juillet 1897.*)

4253. — Étant donné un hexagone régulier ABCDEF, on suppose que le sommet A est attiré par les autres sommets avec des intensités respectivement égales aux inverses des distances :

1° Déterminer la résultante de ces attractions.

2° Même question, en substituant à l'hexagone un polygone régulier convexe de n côtés.

(T. Caronnet.)

4254. — On suspend au-dessous du plateau d'une balance un poids cylindrique en métal de poids P ; l'équilibre étant établi, on immerge le poids complètement dans un liquide de densité D, son poids diminue et devient égal à p ; on immerge ensuite la même masse métallique dans un autre liquide, son poids devient alors égal à p' ; on demande :

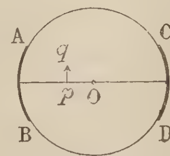
1° la densité du second liquide;

2° la densité du poids cylindrique.

Application : $P = 1^{kg},452$, $p = 1^{kg},382$, $p' = 1^{kg},397$, $D = 1{,}113$.

(*Bacc. lettres-math., Lyon, novembre 1896.*)

4255. — Dans une sphère de grand diamètre $2r$, on découpe deux miroirs concaves identiques AB et CD diamétralement opposés. Un objet pq est placé près du centre ; construire géométriquement les deux images dues à deux réflexions successives, c'est-à-dire l'image p_1q_1 provenant des rayons réfléchis d'abord sur AB puis ensuite sur CD, et l'image p_2q_2 provenant des rayons réfléchis d'abord sur CD puis ensuite sur AB.



On supposera ensuite $Op = \frac{r}{4}$ et on calculera les distances au centre O des images p_1q_1 et p_2q_2.

(*Bacc. lettres-math., Lille, juillet 1897.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

22e Année. — N° 5. JOURNAL Paris, le 1er Décembre 1897.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

(1897)

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

4196. — 1° *Les droites* Δ *qui sont coupées harmoniquement par deux cercles donnés* C *et* C′ *enveloppent une conique; montrer que cette conique reste la même lorsqu'on remplace les deux cercles* C *et* C′ *par deux autres respectivement concentriques aux précédents et tels que la somme des carrés des rayons des deux nouveaux cercles soit égale à la somme des carrés des rayons des deux premiers.*

2° *Trouver le lieu des centres des cercles* S *qui sont coupés harmoniquement par deux cercles donnés* C *et* C′ *et qui sont orthogonaux à un troisième cercle donné* Γ. *Ce lieu est une conique* Σ *dont on déterminera les directions asymptotiques et dont on discutera le genre en admettant que le centre de* Γ *se déplace d'une façon quelconque dans le plan, tandis que les cercles* C *et* C′ *restent fixes.*

On montrera que la direction des axes de Σ *ne dépend que des positions des centres des trois cercles donnés et nullement de leurs rayons.*

3° *Trouver le lieu du centre de la conique* Σ *dans les deux hypothèses suivantes* : 1° *on fait varier le rayon du cercle* Γ *en laissant fixes le centre de ce cercle et les deux cercles* C *et* C′; 2° *on laisse fixe le cercle* Γ, *ainsi que les centres de* C *et* C′, *et on fait varier les rayons de ces deux derniers cercles de telle sorte que la somme de leurs carrés reste constante.*

4° *Démontrer que les cercles* S *orthogonaux au cercle* Γ *et coupés harmoniquement par deux cercles* C *et* C′ *sont aussi coupés harmoniquement par une infinité de couples de cercles que l'on cherchera à caractériser géométriquement.*

Nota. — *On dit qu'un cercle* S *est coupé harmoniquement par deux cercles* C *et* C′, *lorsque le rapport anharmonique des deux points de rencontre de* S *avec* C *et des deux points de rencontre de* S *avec* C′ *est, sur le cercle* S, *égal à* — 1.

1re **Partie.** — Remarquons d'abord que si deux couples de points A, B; C, D sont conjugués harmoniques, les milieux E et F des deux segments AB et CD forment une involution avec les deux couples donnés; si l'on considère en effet le point central I de l'involution déterminée par AB et CD, on a, en grandeur et en signe,

$$IA.IB = IC.ID;$$

d'autre part, le rapport (ABCD) étant égal à — 1, on a

$$2(IA.IB + IC.ID) = (IA + IB)(IC + ID),$$

ou, en remarquant que le second membre est égal à 4IE.IF, on a

$$IA.IB = IE.IF;$$

par suite E et F appartiennent à l'involution de centre I et dont font partie A et B, ce qui démontre la propriété énoncée; la réciproque est immédiate.

Appliquons cette remarque à une droite Δ coupant harmoniquement deux cercles suivant les couples de points A, B; C, D; ces

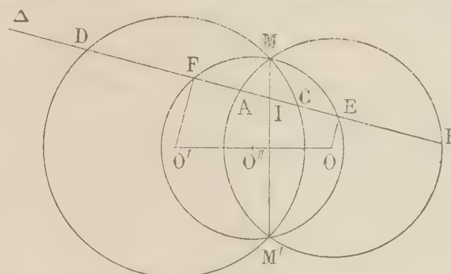


Fig. 1

points forment une involution dont le point central I est situé sur l'axe radical des deux cercles; les milieux E et F des segments AB et CD sont les projections des centres O et O′ sur Δ; comme on a

$$IE.IF = IA.IB = IC.ID,$$

ces points E et F sont sur un cercle ayant avec les premiers même axe radical MM′; le centre O″ de ce cercle est le milieu de OO′, et est fixe, et le cercle lui-même est fixe; dès lors l'enveloppe de Δ est, comme on le sait, une conique ayant pour foyers O et O′ et pour cercle principal le cercle de centre O″ dont nous venons de parler; nous appellerons Σ_0 cette conique.

En désignant par d la distance OO′ et par r, r', r'' les rayons des cercles de centres O, O′, O″, on obtient le rayon r'' par le théorème de la médiane dans le triangle OMO′ ou, si les cercles O et O′ ne se coupent pas, par un calcul simple, et l'on a dans tous les cas

$$2r''^2 = r^2 + r'^2 - \frac{d^2}{2}.$$

On voit que r'' ne change pas lorsque r et r' varient de façon que $r^2 + r'^2$ reste constant; il en est de même de l'enveloppe de Δ.

Le cercle O″, et par suite l'enveloppe, n'existent que si

$$d^2 < 2r^2 + 2r'^2;$$

l'enveloppe est une ellipse ou une hyperbole suivant que O et O′ sont intérieurs ou extérieurs au cercle O″, c'est-à-dire suivant que d^2 est inférieur ou supérieur à la somme $r^2 + r'^2$; dans le cas particulier où d^2 est égal à cette somme, c'est-à-dire où les deux cercles C et C′ sont orthogonaux, l'enveloppe se réduit aux deux centres O et O′.

2e **Partie.** — Soit S un cercle de centre O_1 et de rayon r_1 coupant harmoniquement les cercles C et C′, de centres O et O′, aux points A, B, C, D; le couple C, D fait partie sur S d'une involution dont A et B sont les points doubles, par suite la corde CD passe par le pôle P de la corde AB; cette condition

que les cordes AB et CD soient conjuguées par rapport à S est du reste suffisante pour que les quatre points A, B, C, D forment une division harmonique.

Je vais exprimer cette condition en écrivant que le pôle de l'axe radical AB de O et O_1 se trouve sur l'axe radical CD de O' et O_1; je désignerai par d_1, d'_1 et α les longueurs O_1O, O_1O' et l'angle qu'elles font entre elles, et, comme précédemment, par r, r' et d les rayons des cercles C et C' et la distance OO'.

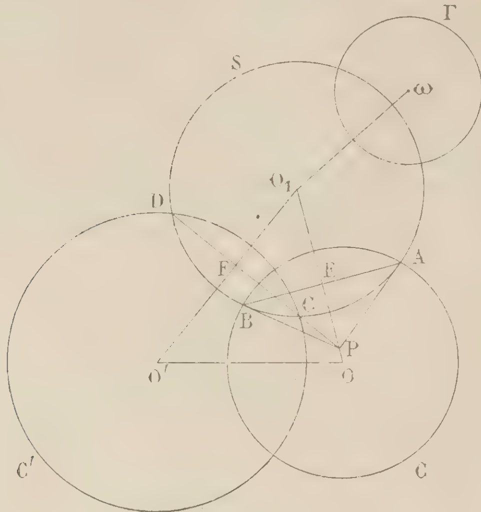


Fig. 2

On sait que les distances de O_1 aux axes radicaux AB et CD sont

$$O_1E = \frac{d_1^2 + r_1^2 - r^2}{2d_1}, \qquad O_1F = \frac{d_1'^2 + r_1^2 - r'^2}{2d'_1};$$

en écrivant que $O_1P.O_1E = r_1^2$, que O_1F doit être égal à $O_1P \cos\alpha$, et que $\cos\alpha$ est donné par la relation

$$d^2 = d_1^2 + d_1'^2 - 2d_1d'_1 \cos\alpha,$$

on est conduit par élimination de α à la relation suivante entre les rayons et les distances des centres des trois cercles CC' et S :

$$(1) \quad 2r_1^2(d_1^2 + d_1'^2 - d^2) = (r_1^2 + d_1^2 - r^2)(r_1^2 + d_1'^2 - r'^2).$$

Il ne reste plus qu'à exprimer que S est orthogonal à un cercle donné Γ de centre ω et de rayon ρ; en désignant $O_1\omega$ par δ, on a

$$r_1^2 = \delta^2 - \rho^2$$

et, en remplaçant r_1^2 par cette valeur, on a la relation

$$(2) \quad 2(\delta^2-\rho^2)(d_1^2+d_1'^2-d^2) = (\delta^2+d_1^2-\rho^2-r^2)(\delta^2+d_1'^2-\rho^2-r'^2).$$

C'est la condition à laquelle doivent satisfaire les distances δ, d_1, d'_1 de O_1 aux trois centres ω, O, O' pour que le cercle S satisfasse à la question.

Pour interpréter cette condition, je remarque d'abord que les points communs au cercle Γ et à chacun des cercles C et C' satisfont à la relation précédente, car les deux membres s'annulent lorsqu'on fait

$$\delta = \rho \quad \text{et} \quad d_1 = r$$

ou $d'_1 = r'$; je suis ainsi amené à considérer les axes radicaux du cercle Γ et des cercles C et C'. En désignant par a et a' les distances ωO et $\omega O'$, ils sont perpendiculaires à ces droites,

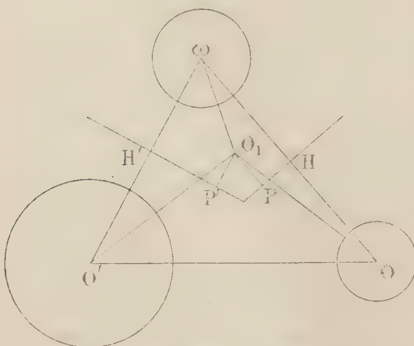


Fig. 3

en des points H et H' tels que l'on ait

$$\omega H = \frac{a^2 + \rho^2 - r^2}{2a}, \qquad \omega H' = \frac{a'^2 + \rho^2 - r'^2}{2a'};$$

si O_1P et O_1P' sont les perpendiculaires abaissées de O_1 sur ces axes radicaux, prises positivement si O_1 est du même côté que ω par rapport à ces droites, les différences des carrés des distances de O_1 aux points ω, O et O' s'expriment par les relations suivantes que l'on trouve facilement :

$$d_1^2 - \delta^2 = r^2 - \rho^2 + 2a.O_1P,$$
$$d_1'^2 - \delta^2 = r'^2 - \rho^2 + 2a'.O_1P',$$

de sorte que la relation (2) devient, après l'élimination de d_1 et d'_1 et développement des calculs :

$$(3) \qquad (\delta^2 - \rho^2)(r^2 + r'^2 - d^2) = 2aa'.O_1P.O_1P'.$$

Elle exprime que la puissance de O_1 par rapport au cercle Γ est proportionnelle au produit des distances de ce point aux deux axes radicaux.

Lorsque les deux cercles C et C' sont orthogonaux, le premier membre de l'équation (3) étant nul, on a $O_1P = 0$ ou $O_1P' = 0$, de sorte que le lieu du point O_1 se réduit aux deux axes radicaux dont on vient de parler. En laissant ce cas de côté, je vais démontrer le théorème suivant, qui est la généralisation de la propriété des cercles focaux des coniques :

Le lieu d'un point tel que sa puissance par rapport à un cercle fixe soit proportionnelle au produit de ses distances à deux droites fixes est une conique.

Je commence par rappeler la propriété bien connue des points d'un cercle circonscrit à un quadrilatère, propriété que j'énoncerai de la manière suivante :

Si ABCD est un quadrilatère inscrit dans un cercle et si l'on suppose ses côtés dirigés de façon que les angles formés en deux sommets opposés soient supplémentaires, il existe entre les valeurs algébriques des distances $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$, $M\delta$ d'un point M du cercle circonscrit aux côtés successifs (*) la relation

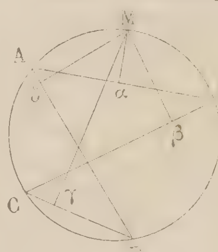


Fig. 4

$$(4) \qquad M\alpha.M\gamma + M\beta.M\delta = 0.$$

Je vais généraliser cette propriété et démontrer ce lemme :

La somme des produits des distances d'un point aux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle est dans un rapport constant avec la puissance du point par rapport à ce cercle.

Soit M le point considéré, M_1 et M_2 les points de rencontre avec la circonférence du diamètre passant par M, ω le centre du cercle et ρ son rayon ; si $M\alpha$, $M_1\alpha_1$, $M_2\alpha_2$, $\omega\alpha_0$ sont les perpendiculaires abaissées de ces points sur un des côtés du quadrilatère, on a la relation

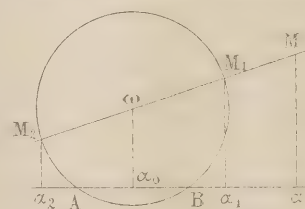


Fig. 5

$$2\rho M\alpha = (\rho + M\omega)M_1\alpha_1 + (\rho - M\omega)M_2\alpha_2.$$

Si l'on considère les relations analogues relatives aux autres côtés du quadrilatère, et si l'on forme les produits des distances aux côtés opposés, il vient, en remarquant que l'équation (4) est satisfaite pour M_1 et pour M_2,

$$4\rho^2(M\alpha.M\gamma + M\beta.M\delta) = (\rho^2 - \overline{M\omega}^2)[M_1\alpha_1.M_2\gamma_2 + M_2\alpha_2.M_1\gamma_1 + M_1\beta_1.M_2\delta_2 + M_2\beta_2.M_1\delta_1];$$

(*) Je dirai avec M. Fontené (*Géométrie dirigée*, p. 32) qu'une distance telle que $M\alpha$ a une valeur algébrique positive ou négative suivant que le segment AB a par rapport à M un moment positif ou négatif.

la dernière parenthèse est égale, d'après la même remarque, à

$$(M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2)(M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2) + (M_1\beta_1 + M_2\beta_2)(M_1\delta_1 + M_2\delta_2),$$

ou à

$$4(\omega\alpha_0 . \omega\gamma_0 + \omega\beta_0 . \omega\delta_0),$$

de sorte qu'elle a une valeur constante, et le rapport

$$\frac{M\alpha . M\gamma + M\beta . M\delta}{M\omega^2 - \rho^2}$$

est constant, C.Q.F.D.

Le théorème énoncé en découle immédiatement, car si l'on considère un quadrilatère inscrit dans le cercle donné et dont deux côtés opposés soient situés sur les deux droites données, la puissance d'un point du plan par rapport à ce cercle peut être remplacée, d'après le lemme précédent, par une quantité proportionnelle à la somme des produits des distances du même point aux côtés opposés du quadrilatère; le point jouit alors de la propriété qu'il existe entre ses distances à ces quatre côtés une relation de la forme

$$\lambda M\alpha . M\gamma + \mu M\beta . M\delta = 0$$

et, d'après le théorème de Pappus, le lieu qu'il décrit est une conique circonscrite au quadrilatère.

Nous avons ainsi démontré que le centre O_1 du cercle S décrit une conique Σ passant par les points communs au cercle Γ et à chacun des cercles C et C'; pour trouver ses directions asymptotiques, nous remarquerons que O_1 ne peut s'éloigner à l'infini que si le cercle S se réduit à une droite; cette droite doit passer par ω et couper harmoniquement les cercles C et C', par suite être tangente à la conique Σ_0 que nous avons trouvée dans la première partie, et dont les foyers sont O et O'; nous sommes amenés à tracer de ω des tangentes à cette conique; ce seront des cercles S dont le centre est à l'infini dans la direction perpendiculaire à chacune de ces tangentes.

Si ω est extérieur à la conique Σ_0, ces tangentes sont réelles, et la conique Σ est une hyperbole dont les directions asymptotiques sont perpendiculaires aux tangentes dont on vient de parler. Les directions des axes de Σ sont parallèles aux bissectrices des angles de ces tangentes; d'après un théorème connu sur les tangentes issues d'un point à une conique et les droites joignant ce point aux foyers, elles sont parallèles aux bissectrices de l'angle $O\omega O'$ et de son supplément; on voit bien que ces directions restent les mêmes quels que soient les rayons des cercles S, S' et Γ.

Si ω est intérieur à la conique Σ_0, Σ est une ellipse, car elle n'a pas de point à l'infini; les directions des axes sont les mêmes que précédemment. Cela résulte, soit de la raison de continuité lorsque l'on passe du cas d'une hyperbole au cas d'une ellipse, soit de cette remarque que la conique Σ passe par les points de rencontre du cercle Γ avec les axes radicaux de Γ avec S et S'. On sait que les axes de Σ sont parallèles aux bissectrices des angles formés par ces deux dernières droites, et ces bissectrices sont parallèles à celles de l'angle $O\omega O'$.

3e Partie. — Le centre de Σ se trouve à l'intersection de deux diamètres; nous choisirons ceux des axes radicaux HK, H'K' de Γ avec S et S'; nous savons déjà que les points de rencontre H et H' de ces droites avec les lignes des centres sont les milieux des segments quelles déterminent sur la conique Σ, par suite les diamètres passent respectivement par ces points H et H'; leur direction est déterminée par la propriété suivante qui est bien connue : *Deux directions conjuguées d'une conique forment un faisceau harmonique avec les directions asymptotiques.*

Il suffit donc de mener par ω une parallèle ωK_1 à HK, et de prendre la conjuguée ωL de cette droite par rapport aux perpendiculaires aux tangentes ωT, $\omega T'$ à la conique Σ_0, car ces perpendiculaires sont les directions asymptotiques de Σ. La parallèle à ωL menée par H sera le diamètre de HK par rapport à Σ; une construction analogue donne le diamètre de H'K', et le point σ commun aux deux diamètres est le centre de la conique Σ.

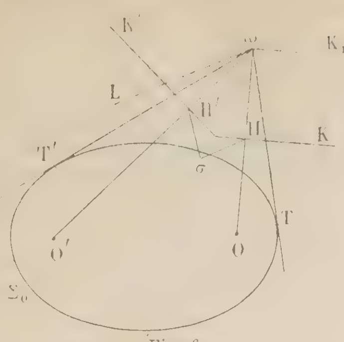


Fig. 6

Lorsque les centres des cercles Γ, S et S' restent fixes, et que leurs rayons varient, de façon toutefois que $r^2 + r'^2$ reste constant, le point ω et la conique Σ_0 restent fixes, et alors $H\sigma$ et $H'\sigma$ restent parallèles à des directions fixes. Les relations

$$\omega H = \frac{a^2 + \rho^2 - r^2}{2a}, \qquad \omega H' = \frac{a'^2 + \rho^2 - r'^2}{2a'}$$

donnent

$$2a . \omega H - 2a' . \omega H' = a^2 - r^2 - a'^2 + r'^2,$$

$$2a . \omega H + 2a' . \omega H' = a^2 + a'^2 + 2\rho^2 - (r^2 + r'^2),$$

de sorte que, dans les deux cas indiqués dans l'énoncé, les points H et H' décrivent sur ωO et $\omega O'$ des divisions homographiques semblables, et HH' enveloppe chaque fois une parabole. Les droites $H\sigma$ et $H'\sigma$ décrivent autour des points à l'infini dans leurs directions respectives des faisceaux homographiques ayant en commun la droite de l'infini ; on en conclut que dans l'un et l'autre cas le lieu du point σ est une droite ; il suffit de deux points de chacune de ces droites pour les construire.

4e Partie. — Cherchons les couples de cercles C_1 et C'_1 pouvant remplacer les cercles C et C'; les cercles S sont complètement caractérisés par le cercle Γ auquel ils restent orthogonaux et par la conique Σ lieu de leurs centres ; il suffit dès lors de chercher les cercles C_1 et C'_1 qui peuvent donner lieu à la même conique Σ.

Comme cette conique passe par les points communs à Γ et aux cercles C et C', une première condition nécessaire imposée aux cercles cherchés est de passer par les points communs à Γ et à Σ, c'est-à-dire par les points communs à Γ et à S et S'.

Mais ceci peut avoir lieu de trois manières différentes, suivant le choix que l'on fait du couple de sécantes communes au cercle Γ et à la conique Σ ; un de ces couples est toujours réel, c'est celui qui est constitué par les axes radicaux HK, H'K' déjà considérés ; les deux autres ne seront réels que si ces axes radicaux coupent Γ en des points réels.

Considérons plus généralement une conique quelconque Σ, un cercle Γ de centre ω, et un des couples de sécantes communes à ces deux courbes, soit AB, CD ; abaissons de ω les perpendiculaires ωH, $\omega H'$ sur ces deux droites, et désignons par m, m' et φ les longueurs de ces perpendiculaires et l'angle qu'elles font entre elles. Considérons sur Σ un point quelconque O_1 et abaissons de ce point les perpendiculaires O_1P et O_1P' sur AB et CD, désignons enfin par λ la valeur du rapport

$$\frac{O_1P . O_1P'}{\overline{\omega O_1}^2 - \rho^2},$$

en comptant OP_1 positivement si O_1 et ω sont du même côté de AB, négativement dans le cas contraire, et de même O_1P'.

Si l'on considère alors deux cercles C et C' dont les centres O et O' sont respectivement sur ωH et $\omega H'$, dont les axes radicaux avec Γ soient AB et CD, et tels enfin que leurs rayons r, r' et la distance d de leurs centres satisfassent à la relation

$$\frac{r^2 + r'^2 - d^2}{2aa'} = \lambda,$$

ces cercles répondent à la question ; en effet, les cercles Σ qui les coupent harmoniquement et sont orthogonaux à Γ ont leurs centres sur une conique définie par l'équation (3) :

$$(\delta^2 - \rho^2)(r^2 + r'^2 - d^2) = 2aa'O_1P.O_1P'.$$

Cette conique passe par A, B, C, D et par le point particulier O_1 qui a servi à calculer la valeur de λ, dès lors elle se confond avec la conique donnée Σ qui passe par les cinq mêmes points. Pour

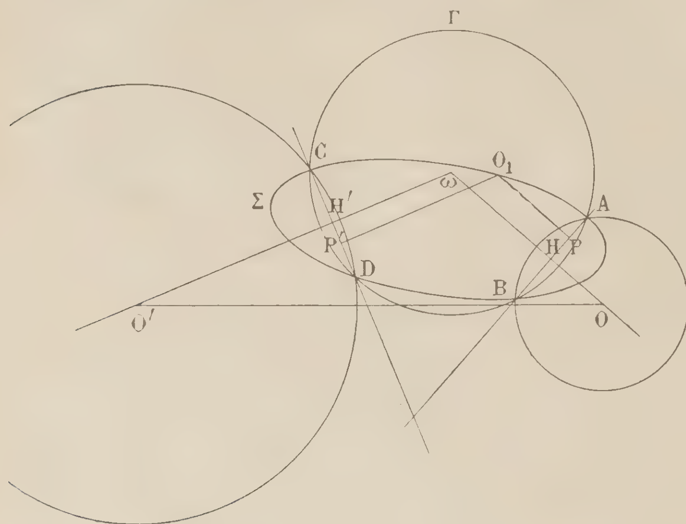


Fig. 7

chercher comment sont disposés les cercles C et C′ satisfaisant aux conditions précédentes, je remarque qu'en désignant par a et a' les valeurs algébriques de ωO et $\omega O'$, on doit avoir

$$\omega H = m = \frac{a^2 + \rho^2 - r^2}{2a}, \qquad \omega H' = m' = \frac{a'^2 + \rho^2 - r'^2}{2a'},$$

$$d^2 = a^2 + a'^2 - 2aa' \cos \varphi,$$

$$\lambda = \frac{r^2 + r'^2 - d^2}{2aa'};$$

l'élimination de r^2, r'^2 et d^2 entre ces équations donne la relation suivante entre a et a' :

$$aa'(\lambda - \cos \varphi) + am + a'm' - \rho^2 = 0;$$

c'est une relation homographique.

Ainsi donc à chacun des couples de sécantes communes à Γ et Σ correspondent une infinité de cercles C et C′ ; ils admettent les deux sécantes considérées comme axes radicaux avec le cercle Γ, et leurs centres décrivent deux divisions homographiques.

H. V.

[M. Barthélemy, élève de Mathématiques spéciales au lycée de Rennes, a résolu la question.]

CONCOURS GÉNÉRAL DE PREMIÈRE-SCIENCES

(1897)

PHYSIQUE ET CHIMIE

Solutions par M. **Rocheray**, élève du lycée d'Évreux, lauréat du concours (1er Prix*).

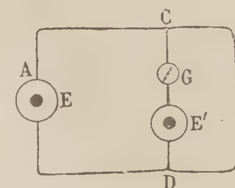
[M. Mathieu, professeur.]

4140. — *Un fil de dérivation, qui renferme un galvanomètre et un élément Daniell, réunit deux points du circuit d'un élément Bunsen qu'il partage en deux parties* A *et* B. *L'aiguille du galvanomètre est au zéro de la graduation. On introduit dans la partie* A *du circuit principal, qui contient l'élément Bunsen, une résistance de* 0,026 *ohms. L'aiguille est déviée. Quelle résistance faudra-t-il introduire dans la partie* B *pour que l'aiguille revienne au zéro ?*

Force électromotrice de l'élément Bunsen : 1,96 *volts.*

Force électromotrice de l'élément Daniell : 1,10 *volts.*

Appelons E et E′ les forces électromotrices respectives de l'élément Bunsen et de l'élément Daniell ; R, R′ les résistances des circuits CAD, CBD, et I l'intensité dans le circuit CAD avant l'introduction de toute résistance. Comme il n'y a pas de courant en CD, l'intensité dans le circuit CBD est également I. Appliquons la loi de Kirchoff : $\Sigma ir = \Sigma e$ aux circuits CADC et CBDC. Il vient



$$IR = E - E', \qquad IR' = E'$$

d'où
$$\frac{R}{R'} = \frac{E - E'}{E'}. \qquad (1)$$

Après avoir introduit en A la résistance r et en B la résistance demandée x, l'intensité en CD est encore nulle, et dans les parties CAD, CBD elle a une même valeur I′. En appliquant la même loi aux deux mêmes circuits que précédemment on a

$$I'(R + r) = E - E', \qquad I'(R' + x) = E',$$

d'où, en tenant compte de l'équation (1),

$$\frac{E - E'}{E'} = \frac{R + r}{R' + x} = \frac{R}{R'} = \frac{r}{x},$$

d'où enfin
$$x = \frac{rE'}{E - E'}.$$

Application numérique :

$$x = \frac{0{,}026 \times 1{,}10}{0{,}86} = 0^{\text{ohm}},03325.$$

4141. — *On traite* 10gr *d'acétamide par une solution de potasse caustique portée à l'ébullition. Quels seront les poids des produits de la réaction lorsqu'elle sera complète et quel volume occuperait à* 0° *et sous la pression de* 76cm *celui de ces produits qui est gazeux dans les conditions ordinaires de température et de pression ?*

Poids atomique du carbone : 12.

Densité de l'azote : 0,967.

Densité de l'oxygène : 1,105.

Densité de l'hydrogène : 0,0695.

Poids du litre d'air à 0° *et sous la pression de* 76cm : 1gr,293.

Les molécules d'azote, d'oxygène et d'hydrogène étant diatomiques, les poids atomiques de ces gaz seront donnés, en fonction de leur densité, par la formule

$$a = \frac{2d}{2 \times 0{,}0695}.$$

En faisant successivement d égal à 0,967, à 1,105 et à 0,0695, on obtient pour le poids atomique de l'azote 14, pour celui de l'oxygène 16, et pour celui de l'hydrogène 1.

Cela posé, la formule exprimant l'action de la potasse sur l'acétamide est

$$AzH^2.C^2H^3O + KOH = AzH^3 + C^2H^3O^2K.$$

Elle montre que pour 59gr d'acétamide on obtient 17gr de gaz ammoniac et 98gr d'acétate de potassium. Donc avec 10gr d'acétamide on aura $\frac{17 \times 10}{59} = 2^{gr},881$ de gaz ammoniac et $\frac{98 \times 10}{59} = 16^{gr},61$ d'acétate de potassium.



(*) Dans la comparaison entre les copies classées de Paris et celles des départements, M. Rocheray a obtenu le premier rang.

La densité du gaz ammoniac étant $\frac{17 \times 0,0695}{2}$, le volume occupé à 0° et sous la pression de 76^{cm} par $2^{gr},881$ de gaz ammoniac est

$$\frac{2,881}{\frac{17 \times 0,0695}{2} \times 1,293} = 3^{lit},772.$$

Remarque. — On aurait pu calculer le volume du gaz ammoniac formé sans se servir de son poids. La formule de réaction montre en effet que 59^{gr} d'acétamide donnent $22^{lit},25$ de gaz ammoniac à 0° et sous la pression de 76^{cm}. Par suite, 10^{gr} donnent

$$\frac{22,25 \times 10}{59} = 3^{lit},7.$$

[Ont résolu la même question : MM. E. Ardin-Delteil ; Bayor; Ch. Bourdet ; J. Delpont ; Limongelli ; M. Oger ; A. Rongier.]

ARITHMÉTIQUE

4233. — *Trois lingots d'argent ont pour titres : 0,95 pour le premier, 0,80 pour le second et 0,53 pour le troisième.*

Le poids du premier lingot et le poids du second sont proportionnels à 4 et à 5.

Le poids du troisième lingot est le triple du poids du second lingot.

Les trois lingots fondus ensemble forment un lingot total pesant $2\,880^{gr}$.

On demande :

1° Quel poids de cuivre ou quel poids d'argent pur il faut ajouter au lingot total pour fabriquer un alliage pouvant servir à frapper des pièces de 1 franc en argent ;

2° Quel sera le nombre de pièces de 1 franc frappées.

(*Écoles supérieures de commerce, 1897.*)

Le poids du troisième lingot étant le triple du poids du second, les nombres proportionnels représentant les poids des trois lingots sont 4, 5 et 15, dont la somme égale 24.

Poids du 1er lingot : $\frac{2880^{gr} \times 4}{24} = 480^{gr}$;

Poids du 2e lingot : $\frac{2880^{gr} \times 5}{24} = 600^{gr}$;

Poids du 3e lingot : $\frac{2880^{gr} \times 15}{24} = 1800^{gr}$.

Argent pur contenu dans le 1er lingot $480^{gr} \times 0,95 = 456^{gr}$,
id. 2e lingot $600^{gr} \times 0,8 = 480^{gr}$,
id. 3e lingot $1800^{gr} \times 0,53 = 954^{gr}$.

Poids total de l'argent pur du lingot final . . . . . 1890^{gr}.

Titre de ce lingot $\frac{1890^{gr}}{2880} = 0,656$.

Ce titre étant inférieur à celui des pièces de 1^{fr}, qui est 0,835, il faudra ajouter de l'argent pur au lingot pour le rendre propre à la fabrication des pièces de 1^{fr}.

Or le poids du cuivre du lingot est de $2\,880^{gr} - 1\,890^{gr} = 990^{gr}$. Ce poids doit représenter les 0,165 du poids total du lingot que l'on veut obtenir. Ce poids total sera donc de :

$$\frac{990^{gr}}{0,165} = 6000^{gr},$$

et comme le poids du cuivre ne doit pas varier, on devra ajouter

$6\,000 - 2\,880 = 3\,120^{gr}$ ou $3^{kg},120$ d'argent pur.

Le nombre des pièces de 1^{fr} frappées sera donc de

$$6\,000 : 5 = 1\,200.$$

(E. LOUVET, à Puteaux.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Ardin-Delteil ; E. Baudoin ; J. Bordas ; A. Bouzy ; A. Brodbeck ; J. M. Chalvin ; E. Chambaud ; L. Curt ; N. Delhotel ; J. Delpont ; E. Déprez ; J. Douménach ; L. Florentin ; Gernez Pf ; A. Gourdin ; T. Gramain ; R. Henry ; E. Héteau ; J. H. Lafon ; J. M. Lagarde ; H. Lefèvre ; E. Le Maigre ; A. Liron ; E. Madet ; J. Ménéchal ; E. Ménissier ; A. Mirc ; Niel ; F. Pégorier ; L. Perret ; A. Perrissond ; V. R. T. ; P. Vincent ; Watrin ; A. Wiart ; L. Delavergnas ; E. Foucart ; A. Jeannel ; P. Le Hénaff ; Armand Léon ; C. Pommeron.]

4234. — *Un commanditaire a placé dans une maison de commerce une certaine somme d'argent à intérêts simples à un certain taux.*

Si la commandite était retirée au bout de 11 mois, le commanditaire toucherait $69\,664^{fr}$. *Si la commandite était retirée au bout de 2 ans et demi, le commanditaire toucherait* $73\,920^{fr}$.

Calculer la somme placée et déterminer le taux du placement.

(*Écoles supérieures de commerce, 1897.*)

Deux ans et demi font 30 mois.

L'intérêt de la somme pendant 30 mois — 11 mois ou 19 mois est

$$73\,920^{fr} - 69\,664^{fr} = 4256^{fr}.$$

Par suite, l'intérêt pendant 11 mois est

$$\frac{4256^{fr} \times 11}{19} = 2464^{fr}.$$

La somme placée sera donc

$$69\,664^{fr} - 2464^{fr} = 67\,200^{fr}.$$

et le taux du placement :

$$\frac{2464 \times 100 \times 12}{67\,200 \times 11} = 4,$$

c'est-à-dire 4 %.

(J.-M. CHALVIN, école de Vinay.)

[Ont résolu la même question : Mlle M. Durand ; MM. E. Ardin-Delteil ; J. Bordas ; Ch. Bourdet ; A. Bouzy ; A. Brodbeck ; Carrière ; E. Chambaud ; N. Delhotel ; E. Déprez ; Devallon ; Douménach ; G. Dupuy ; R. Durand ; L. Florentin ; J. Fourestier ; P. Fournel ; Gernez Pf ; A. Gourdin ; Th. Gramain ; E. Héteau ; J. H. Lafon ; J. Lagarde ; Ch. Lefebvre ; H. Lefèvre ; E. Louvet ; J. Maury ; J. Ménéchal ; E. Ménissier ; A. Mirc ; A. Nayel ; Niel ; F. Pégorier ; L. Perret ; A. Perrissond ; A. Thévenet ; V. R. T. ; J. Vidal ; P. Vincent ; J. Wittner ; V. Cambureanu ; L. Delavergnas ; E. Foucart ; A. Jeannel ; P. Le Hénaff ; C. Pommeron.]

ALGÈBRE

4232. — *Etant donnée la fraction* $\frac{x^2 + 1}{2ax + 3b}$, *disposer de* a *et de* b *et calculer ces valeurs de façon que cette fraction ait un maximum égal à* -1 *et un minimum égal à* $+\frac{1}{4}$. *Prendre la valeur positive de* a *et calculer les valeurs de* x *qui correspondent à ces valeurs particulières de la fraction.*

(*Bacc. lettres-sciences, Paris, novembre 1897.*)

Egalons la fraction à y, et, après avoir chassé le dénominateur, ordonnons par rapport à x ; on a l'équation

$$x^2 - 2ayx + 1 - 3by = 0. \qquad (1)$$

La condition de réalité des racines est

$$a^2y^2 + 3by - 1 \geqslant 0.$$

On satisfait à cette inégalité en prenant y extérieur aux deux valeurs y' et y'' qui annulent le premier membre.

Ces valeurs fournissent ainsi le maximum et le minimum de y, et comme, par hypothèse, elles sont égales à -1 et à $\frac{1}{4}$, on a

$$a^2 - 3b - 1 = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{a^2}{16} + \frac{3}{4}b - 1 = 0. \qquad (3)$$

En retranchant (2) de l'équation (3) préalablement multipliée par 16, il vient

$$15b - 15 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad b = 1;$$

de l'équation (2), on déduit ensuite

$$a = \pm\sqrt{3b+1} = \pm 2.$$

Les valeurs obtenues pour a et b rendant les racines de l'équation (1) égales à leur demi-somme, ay, on a, pour les valeurs de x correspondant au maximum et au minimum de la fraction dans le cas où $a = 2$,

$$x = 2(-1) = -2, \qquad x = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

(Gabriel DIGNE, à Avignon.)

[Ont résolu la même question : MM. A. B. ; E. Charpentier ; N. Delhotel ; J. Delpont ; R. Durand ; Feintuch ; R. Henry ; H. Janois ; H. Lefèvre ; Legras ; A. Maître ; M. Manseau ; J. Maury ; M. Rivière ; L. Sylvestre ; L. Tarrin ; P. Vincent ; J. Wittner ; G. Anastasiu ; E. Blanc ; G. Dobrovici ; E. Foucart ; P. Le Hénaff ; A. Smântânescu.]

4236. — *Déterminer le plus grand commun diviseur des deux expressions*

$$(a-b)^5 + (b-c)^5 + (c-a)^5$$

et

$$(a^2-b^2)^5 + (b^2-c^2)^5 + (c^2-a^2)^5.$$

La première expression s'annule quand on y remplace a par b, b par c ou c par a. Donc, elle est divisible par le produit

$$(a-b)(b-c)(c-a).$$

En effectuant la division, on trouve pour quotient

$$5(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

L'expression peut donc s'écrire

$$5(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

De même, la seconde expression s'annule quand on y remplace a^2 par b^2, b^2 par c^2 et c^2 par a^2. Donc elle est divisible par le produit

$$(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2).$$

Par analogie avec la première expression, on voit que la seconde peut s'écrire

$$5(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2).$$

Le plus grand commun diviseur des deux expressions est dès lors

$$5(a-b)(b-c)(c-a).$$

(J. BORDAS, instituteur à Tulle.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Maître ; F. Pégorier ; G. Picou.]

4237. — *Si l'on a*

$$\frac{x}{b+c-a} = \frac{y}{c+a-b} = \frac{z}{a+b-c},$$

on a aussi $\quad (b-c)x + (c-a)y + (a-b)z = 0.$

Si l'on désigne par ρ la valeur commune des trois rapports égaux, on a

$$x = \rho(b+c-a), \qquad y = \rho(c+a-b), \qquad z = \rho(a+b-c).$$

En portant ces valeurs dans le premier membre de la relation à démontrer, il vient

$$\begin{aligned}\rho[(b+c-a)(b-c) &+ (c+a-b)(c-a) + (a+b-c)(a-b)]\\ &= \rho(b^2-c^2-ab+ac+c^2-a^2-bc+ba+a^2-b^2-ca+cb)\\ &= \rho\times 0 = 0.\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

(E. de RYCKER, institut Dupuich, Bruxelles.)

[Ont résolu la même question : MM. P. Alcan ; Allanic ; A. Baras ; P. Barroué ; L. Bedos ; L. Bénèzech ; Benhaïm ; G. Bernard ; J. de Bersaucourt ; A. Bertrand ; J. Bordas ; C. Bourdet ; A. Bouzy ; G. Brets ; Burgat ; H. Carme ; E. Charpentier ; A. Cremer ; M. Cryé ; G. Delahaye ; N. Delhotel ; R. Durand ; Feintuch ; J. Font ; G. Fontaine ; P. Fournel ; P. Frescal ; L. Gourdet ; Th. Gramain ; Guénard ; H. Guillaud ; G. Hiernaux ; H. Janois ; F. Ladevèze ; E. Laudat ; G. Leclerc ; A. Lecoq ; H. Lefèvre ; M. Legras ; H. Lévy ; A. Liron ; E. Louvet ; E. Madet ; A. Maître ; C. Marie ; J. Maury ; J. Méhu ; de Mendiry ; E. Ménissier ; A. Mirc ; G. Moulin ; F. Pégorier ; L. Perret ; G. Picou ; P. Plisson ; G. Pommeron ; M. Rivière ; M. Rotté ; H. Séjour ; L. Sylvestre ; P. Tarnier ; V. R. T. ; P. Vincent ; J. Wittner ; J. Amboise ; G. Anastasiu ; E. Blanc ; N. Bourgogne ; E. Brossard ; V. Cambureanu ; G. Dobrovici ; L. Durieux ; E. Foucart ; J. Guillaume ; P. Le Hénaff ; A. Smântânescu ; Auguste V.]

4239. — *Résoudre le système d'équations*

$$x + y = xy,$$
$$x^2 + y^2 = -(x^3 + y^3).$$

Si l'on fait $x + y = xy = \varphi$, x et y sont les racines de l'équation

$$X^2 - \varphi X + \varphi = 0; \tag{1}$$

on a donc identiquement

$$\left.\begin{aligned} x^2 - \varphi x + \varphi = 0\\ y^2 - \varphi y + \varphi = 0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

En ajoutant ces identités membre à membre il vient

$$x^2 + y^2 - \varphi(x+y) + 2\varphi = 0;$$

et, en remplaçant $x + y$ par sa valeur φ,

$$x^2 + y^2 = \varphi^2 - 2\varphi. \tag{3}$$

Multiplions les identités (2) respectivement par x et par y, puis ajoutons membre à membre ; il vient

$$x^3 + y^3 - \varphi(x^2+y^2) + \varphi(x+y) = 0;$$

et, en remplaçant (x^2+y^2), $(x+y)$ par leurs valeurs respectives $(\varphi^2 - 2\varphi)$, φ, et réduisant,

$$x^3 + y^3 = \varphi^3 - 3\varphi. \tag{4}$$

En vertu de la seconde des équations proposées et des relations (3) et (4), on aura donc

$$(\varphi^3 - 3\varphi^2) + (\varphi^2 - 2\varphi) = 0,$$

ou, en réduisant,

$$\varphi(\varphi^2 - 2\varphi - 2) = 0;$$

équation qui a pour racines

$$\varphi = 0, \qquad \varphi = 1 + \sqrt{3}, \qquad \varphi = 1 - \sqrt{3}.$$

En portant successivement ces valeurs de φ dans l'équation (1), nous aurons pour déterminer x et y les trois équations

$$X^2 = 0, \qquad X^2 - (1+\sqrt{3})X + (1+\sqrt{3}) = 0,$$
$$X^2 - (1-\sqrt{3})X + (1-\sqrt{3}) = 0,$$

dont les racines sont respectivement

$$\left\{\begin{aligned} x &= 0,\\ y &= 0;\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}\,.\,\sqrt{-1}}{2},\\ y &= \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}\,.\,\sqrt{-1}}{2};\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{2},\\ y &= \frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}.\end{aligned}\right.$$

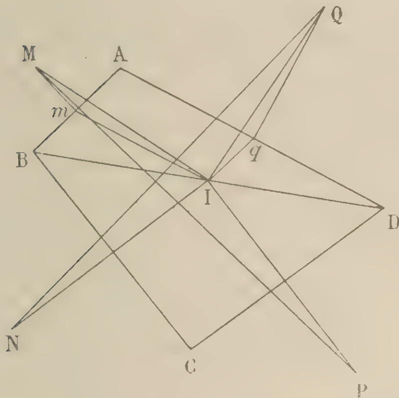
(A. BERTRAND, à Azillanet.)

[Ont résolu la même question ; MM. E. Ardin-Delteil ; L. Barberot ; E. Baudot ; G. Bernard ; J. de Bersaucourt ; J. Bordas ; P. Boutroux ; A. Bouzy ; J. M. ; Chalvin ; E. Charpentier ; A. Cotte ; A. Cremer ; P. Dégeilh ; N. Delhotel ; J. Delpont ; Desmoulins ; G. Digne ; Eldin ; J. Font ; G. Fontaine ; P. Frescal ; H. Guillaud ; R. Henri ; G. Hiernaux ; H. Janois ; E. Laudat ; G. Leclerc ; H. Lefèvre ; M. Legras ; L. Magne ; A. Maître ; H. Michel ; A. Mirc ; Niel ; F. Pégorier ; G. Picou ; P. Plisson ; M. Rivière ; X. Roche ; M. Rotté ; L. Sylvestre ; P. Tribier ; V. R. T. ; H. Valdenaire ; Vial ; A. Vincent ; P. Vincent ; A. Wiart ; J. Amboise ; Benhaïm ; V. Cambureanu ; G. Dobrovici ; L. Durieux ; J. Guillaume ; P. Le Hénaff.]

GÉOMÉTRIE

4240. — *Sur chacun des côtés d'un quadrilatère convexe* ABCD *on construit extérieurement un carré. Démontrer que le quadrilatère ayant pour sommets les centres de ces carrés a ses deux diagonales égales et perpendiculaires.*

Première solution. — Soient M, N, P, Q les centres des carrés construits extérieurement sur les côtés du quadrilatère ABCD. Joignons ces points, ainsi que les milieux m, q de AB, AD, au milieu I de la diagonale BD.



Les triangles IMm, QIq sont égaux, comme ayant deux côtés égaux et perpendiculaires, savoir : le côté Im égal et parallèle à Aq, c'est-à-dire égal et perpendiculaire au côté Qq ; de même pour les côtés mM et Iq. Il en résulte que les troisièmes côtés IM, QI sont égaux et perpendiculaires (les angles égaux MIm et IQq ayant deux côtés perpendiculaires, les deux autres, de même sens, le sont également).

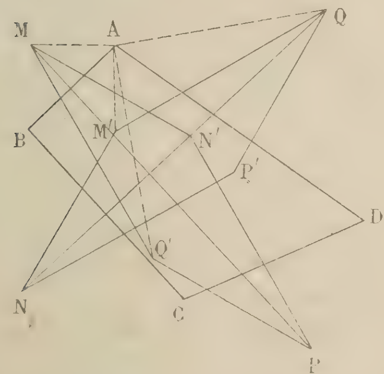
On verrait de même que les droites IN et IP sont égales et perpendiculaires.

Dès lors, les triangles MIP et QIN ont deux couples de côtés égaux et perpendiculaires, et par suite les troisièmes côtés MP, NQ sont égaux et perpendiculaires. C. Q. F. D.

Voir la question 4263.

(G. DELAHAYE, à Roye.)

Seconde solution. — Soient M', N', P', Q' les centres des carrés construits intérieurement sur les côtés du quadrilatère ABCD. D'après la question 4170 (p. 12), les deux figures MN'PQ' et M'NP'Q sont des parallélogrammes (les triangles semblables sont ici des triangles rectangles isocèles).



Je dis que ces parallélogrammes sont égaux, les côtés égaux étant de plus perpendiculaires entre eux. En effet, joignons le point A aux points M, M', Q, Q'. Les deux triangles AMQ', AM'Q ont les côtés AM et AM', AQ' et AQ égaux et perpendiculaires ; par suite les troisièmes côtés MQ' et M'Q sont égaux et perpendiculaires. Par analogie, les côtés MN' et M'N jouissent de la même propriété.

Les deux parallélogrammes ayant ainsi les couples de côtés opposés égaux et perpendiculaires sont égaux et superposables par une rotation de 90° ; donc les diagonales correspondantes MP et QN, M'P' et N'Q' sont égales et perpendiculaires. La propriété est ainsi vérifiée en même temps pour les carrés construits intérieurement sur les côtés du quadrilatère.

(M. REBEIX, lycée du Puy.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Grosz ; Guénard, lycée d'Amiens ; H. Lefèvre.]

PHYSIQUE

4230. — *Un morceau de glace pesant 725gr est placé dans un vase contenant 2500gr d'eau à la température de 5°. L'équilibre thermique étant établi, on trouve que la glace pèse 64gr de plus qu'au début. On demande quelle était la température initiale de la glace.*

La chaleur spécifique de la glace est 0,5 ; sa chaleur latente 80. La capacité calorifique des parois du vase est considérée comme négligeable, ainsi que les échanges de chaleur avec l'extérieur.

(*Bacc. lettres-math., Lyon, juillet 1897.*)

La température finale est évidemment 0°. Soit x la température initiale de la glace, température qui est inférieure à 0°.

L'eau, en passant de 5° à 0°, cède 2500×5^{cal}. Les 64gr d'eau qui se solidifient dégagent d'ailleurs 64×80^{cal}.

La glace, pour passer de $x°$ à 0°, absorbe $725 \times 0{,}5 \times x^{cal}$, et comme la chaleur absorbée est égale à la chaleur dégagée, on a

$$725 \times 0{,}5 \times x = 64 \times 80 + 2500 \times 5,$$

d'où l'on tire

$$x = 48°{,}6 \text{ au-dessous de zéro.}$$

(A. MIRC.)

[Ont résolu la même question ; MM. P. Alcan ; Ardin-Delteil ; E. Baudot ; Benbacite ; A. Bouzy ; Costes ; J. Condemine ; Crozemarie ; L. Curt ; N. Delhotel ; L. Florentin ; E. Fourmon ; Gruny ; X. Lacreuse ; P. Le Hénaff : A. Liron ; A. Maître ; J. Ménéchal ; E. Ménissier ; Niel ; P. Ségala ; V. R. T.]

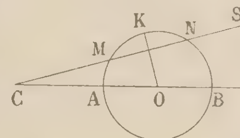
BACCALAURÉATS

SESSION D'OCTOBRE-NOVEMBRE 1897

LYON

Baccalauréat lettres-mathématiques.

I. — **4256.** On donne, dans un plan, un cercle de centre O, et un point C, sur un diamètre AB de ce cercle. On désigne par M et N les points où une sécante CS, menée par C, rencontre le cercle ; par K l'extrémité du rayon perpendiculaire à cette sécante et la rencontrant ; enfin par H le point d'intersection de OK et de CS.



Cela posé, on demande de déterminer la sécante CS de manière que l'on ait la relation

$$\overline{CM}^2 + \overline{CN}^2 = 12 . OH \times HK.$$

Discuter, en supposant que le cercle reste fixe et que le point C se déplace sur le diamètre AB.

On représentera par R le rayon du cercle et par a la distance OC. — On pourra prendre pour inconnue la distance $OH = x$ ou l'angle $OCS = u$.

II. — *1er sujet.* — Intersection d'une droite et d'une ellipse.

II. — *2e sujet.* — Mener à une ellipse une tangente par un point donné.

II. — *3e sujet.* — Mener à une parabole une tangente par un point donné.

I. — **4257.** Un ballon renferme de l'air sec à 10° et sous la pression de 756mm. Le poids de cet air est de 6gr,32. On demande quel serait le poids d'acide carbonique qui remplirait le même ballon à la température de 0° et sous la pression de 760mm.

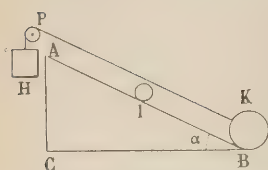
On donne la densité de l'acide carbonique 1,526 ; le coefficient de dilatation cubique du verre $\frac{1}{38700}$, celui du gaz $\frac{1}{273}$.

II. — *1er sujet.* — Formation des images au moyen des miroirs concaves.

II. — 2e *sujet.* — Formation des images au moyen des lentilles convexes.

II. — 3e *sujet.* — Effet d'un prisme sur un rayon de lumière blanche.

Baccalauréat lettres-sciences.



I. — **4258.** Un corps K de poids p est à l'extrémité inférieure B de la ligne de plus grande pente AB d'un plan incliné faisant avec le plan horizontal un angle α; il est fixé à un cordon supposé sans masse, passant sur une poulie P et soutenant un poids H de valeur π de telle sorte que le brin PK se trouve tendu parallèlement à AB. Le poids H est assez lourd pour entraîner le corps K et l'obliger à remonter le plan incliné.

On demande quelle valeur devrait avoir un poids placé en I, sur la ligne de plus grande pente, pour que le corps K, le remontant après avoir parcouru la $\frac{1}{n}$ (n étant entier) partie de la ligne BA arrivât à l'extrémité supérieure A de cette dernière avec une vitesse nulle.

On ne tiendra pas compte du choc qui se produit au moment de la rencontre de K avec I et l'on supposera que tous les mouvements s'effectuent sans aucun frottement.

Discuter les conditions à remplir pour que le double mobile reste en équilibre lorsqu'il est parvenu au sommet de la pente.

II. — 1er *sujet.* — Restes de la division d'un nombre entier par 2, 3, 4, 5, 8, 9, 25, 125. — Caractère de divisibilité par chacun de ces nombres.

II. — 2e *sujet.* — Définition des nombres premiers. — Propriétés élémentaires. — Décomposition d'un nombre entier en un produit de facteurs premiers. — Emploi des nombres premiers à la résolution de quelques opérations : multiplication, division, extraction d'une racine carrée ou cubique

Composition du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple de plusieurs nombres décomposés en facteurs premiers.

II. — 3e *sujet.* — Rapport de deux nombres. — Rapports égaux. — Quelles transformations peut-on faire subir à deux rapports égaux sans altérer leur égalité ?

Mesure des grandeurs. — Définition du rapport de deux grandeurs de même espèce. — *Théorème* : le rapport de deux grandeurs de même espèce est égal au quotient des nombres qui les mesurent.

1er *sujet.* — Lois du pendule et applications de cet instrument.

2e *sujet.* — Théorie mécanique de la chaleur.

3e *sujet.* — Machines à vapeur. Divers types.

CONCOURS DE 1897 (*Suite*).

SURNUMÉRARIAT DE L'ENREGISTREMENT

Arithmétique.

I. — Un père fait, à titre de partage anticipé, donation de ses biens à ses deux fils :

Au premier, il attribue le 1/3 de sa fortune;

Au deuxième, 2000 fr. de plus qu'au premier.

Il se réserve 20000 fr.

Déterminer le chiffre de la fortune du donateur et de la part donnée à chaque enfant.

II. — Une obligation au porteur, remboursable à 500 fr., productive d'intérêts annuels à 3 °/~o~, est cotée en Bourse au cours de 480 fr., cours moyen.

Cette obligation supporte annuellement les taxes suivantes :

1° Impôt de 4 °/~o~ sur le montant de son revenu ;

2° Droit de transmission de 0,20 °/~o~ sur la valeur du titre d'après le cours moyen de la Bourse ;

3° Le droit d'abonnement du timbre de 0,06 °/~o~ sur le capital nominal du titre.

On demande :

1° Quel est le tant pour cent de la retenue totale que ces trois taxes cumulées font subir au revenu annuel de l'obligation;

2° A quelle somme nette se réduit par suite de ce prélèvement le montant du coupon touché par le porteur du titre à chaque échéance semestrielle.

QUESTIONS PROPOSÉES

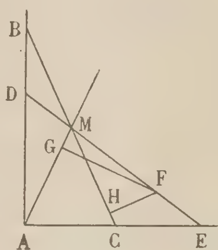
4259. — Trouver un carré parfait de quatre chiffres, sachant que le nombre formé par les deux derniers chiffres est multiple du nombre formé par les deux premiers.

(E. Bernardini.)

4260. — Résoudre l'équation

$$(m+2a)\sqrt[n]{(a+x)^p}+(n-2a)\sqrt[n]{(a-x)^p}=(mna)^2\sqrt[n]{a^p-x^p}.$$

(V. V. Cambureanu, lycée de Berlad.)



4261. — Par le milieu M de l'hypoténuse d'un triangle rectangle ABC, on fait passer une sécante DE, limitée aux côtés de l'angle droit; on prend EF = DM; on tire la droite AM; on abaisse du point F les perpendiculaires FG, FH sur AM et BC. Démontrer que AG = AH.

4262. — Construire un triangle connaissant un sommet, le point de concours des hauteurs et le centre de gravité.

(E. Rosenberg, collège Rollin.)

4263. — Démontrer que les carrés construits intérieurement sur deux côtés opposés AB, CD d'un pseudocarré (quadrilatère dont les diagonales sont égales et perpendiculaires) ont même centre et que ce point est le milieu de la droite qui joint les centres des carrés construits extérieurement sur les côtés BC, DA.

(G. Delahaye, à Roye.)

4264. — Démontrer que l'aire d'un triangle est égale au produit de la portion du diamètre du cercle circonscrit comprise entre un sommet et le côté opposé par la demi-somme des distances des deux autres sommets à ce diamètre.

(J. Pastour, à Antibes.)

4265. — Sur les prolongements des côtés opposés AB, CD d'un quadrilatère, on prend deux points M, M' tels que

$$\frac{MA}{MB}=\frac{M'D}{M'C}=\frac{\overline{AD}^2}{\overline{BC}^2};$$

soient de même N, N' les points analogues pris sur les côtés DA, BC prolongés et tels que

$$\frac{ND}{NA}=\frac{N'C}{N'B}=\frac{\overline{DC}^2}{\overline{AB}^2}.$$

Démontrer que les quatre points M, M', N, N' sont sur un même cercle.

4266. — Étant donnés deux points A et B, on demande le lieu du point M tel que la distance AM soit dans un rapport donné avec la distance du point B à la droite AM.

(H. Lévy, école normale d'Auteuil.)

4267. — Un courant donne au voltamètre 120^cc^ d'hydrogène par minute, à la température de 20° et sous la pression de 750^mm^. La tension de la vapeur d'eau acidulée est 17^mm^ à cette température : calculer l'intensité du courant.

On sait qu'un courant dont l'intensité est 1 ampère met en liberté 117^mmc^ d'hydrogène en une seconde, à 0° et sous la pression de 760^mm^.

Le coefficient de dilatation des gaz est $\frac{1}{273}$.

(*Bacc. lettres-sciences, Caen, mars 1897.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

22e Année. — N° 6. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 15 Décembre 1897.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements .... Librairie **Nony** et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

SUR UN POINT DE LA THÉORIE DE LA RACINE CARRÉE

par M. **P. Barrieu**, Professeur au Lycée de Périgueux.

Supposons que l'on ait à exposer la théorie de la racine carrée entière sur le nombre 5386 choisi comme exemple.

Après avoir démontré qu'on aura exactement les dizaines de la racine en prenant la racine carrée entière des 53 centaines du nombre et avoir ainsi trouvé que le chiffre des dizaines est 7, on retranche du nombre donné le carré de 7 dizaines, et le reste 486 ainsi obtenu est alors égal au double produit des dizaines de la racine par les unités, plus le carré des unités, plus le reste de l'opération s'il y en a un.

53·86	7
49..	14
486	

Si donc on désigne par u le chiffre des unités de la racine et par R le reste de l'opération, on a

$$48\cdot 6 = 2 \text{ fois } 7 \text{ diz} \times u + u^2 + \text{R} = 14 \text{ diz} \times u + u^2 + \text{R}. \quad (1)$$

Il reste maintenant à démontrer que si l'on divise les 48 dizaines de 486 par 14 dizaines on aura le chiffre des unités ou un chiffre trop fort, mais jamais un chiffre trop faible. Tout le monde connaît la démonstration ordinaire, qui n'offre peut-être pas toute la précision désirable et que les élèves ont toujours quelque peine à s'approprier. Voici la démonstration que nous proposons de lui substituer :

Reprenons l'égalité

$$48\cdot 6 = 14 \text{ diz} \times u + u^2 + \text{R}.$$

Si nous désignons par d le nombre de dizaines contenues dans la somme $u^2 + \text{R}$, les dizaines du second membre se composeront de

$$14 \text{ diz} \times u + d \text{ dizaines}$$

et, comme ces dizaines sont nécessairement égales aux 48 dizaines du premier membre, on aura

$$48 \text{ diz} = 14 \text{ diz} \times u + d \text{ diz},$$

d'où, en divisant les deux membres par 10,

$$48 = 14 \times u + d.$$

Par conséquent, si d est plus petit que 14, le quotient entier de la division de 48 par 14 sera égal à u; si au contraire d est supérieur ou égal à 14, le quotient entier de la division de 48 par 14 sera supérieur à u.

Si donc on prend le quotient entier de la division de 48 par 14, on aura le chiffre u des unités ou un chiffre trop fort, mais jamais un chiffre trop faible. C. Q. F. D.

On continue ensuite comme d'habitude.

NOTE SUR LA FONCTION EXPONENTIELLE

Les puissances positives d'un nombre a plus grand que un augmentent indéfiniment avec l'exposant, et tendent vers l'unité lorsque l'exposant tend vers zéro.

Cette proposition est bien connue ; en voici une démonstration simple qui n'est sans doute pas nouvelle, mais qui n'est pas ordinairement exposée dans les ouvrages d'algèbre.

En désignant par x un nombre > 1, et par m un nombre entier, le quotient de $x^m - 1$ par $x - 1$ est formé de m nombres > 1, de sorte que l'on a

$$x^m - 1 > m(x - 1).$$

Si l'on fait dans cette inégalité $x = a$, puis $x = a^{\frac{1}{m}}$, on a

$$a^m - 1 > m(a - 1),$$

et

$$a - 1 > m(a^{\frac{1}{m}} - 1);$$

on en conclut les inégalités

$$a^m > 1 + m(a - 1),$$

$$a^{\frac{1}{m}} - 1 < \frac{a-1}{m};$$

elles montrent que a^m augmente indéfiniment avec m, et que $a^{\frac{1}{m}} - 1$ tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$, ce qui démontre la proposition dans le cas de m entier. Il suffit de remarquer que les inégalités

$$\frac{p}{q} > m, \qquad \frac{p'}{q'} < \frac{1}{m'} \qquad \text{entraînent} \qquad a^{\frac{p}{q}} > a^m, \qquad a^{\frac{p'}{q'}} < a^{\frac{1}{m'}}$$

pour voir qu'elle est vraie pour des exposants quelconques.

H. V.

ÉCOLE NORMALE PRIMAIRE SUPÉRIEURE DE SAINT-CLOUD (1897)

4179. — *Démontrer que si a et b sont deux nombres entiers quelconques, le plus grand commun diviseur de a et de b est le même que le plus grand commun diviseur des nombres $5a + 3b$ et $13a + 8b$.*

Première solution. — En appliquant la méthode ordinaire, on a

	2	1	1	1	1	
$13a + 8b$	$5a + 3b$	$3a + 2b$	$2a + b$	$a + b$	a	b
$3a + 2b$	$2a + b$	$a + b$	. a	$+ b$		

On est ainsi ramené à chercher le plus grand commun diviseur de a et b, ce qui justifie la propriété.

(Ch. Bourdet, lycée de Niort.)

Seconde solution. — Tout diviseur commun à a et b divise à la fois les nombres $5a + 3b$ et $13a + 8b$, formés de multiples de a et de b.

Réciproquement, tout diviseur commun d aux nombres $5a + 3b$ et $13a + 8b$ divise chacun des nombres a et b. Posons en effet

$$5a + 3b = md, \qquad 13a + 8b = m'd;$$

en égalant successivement deux valeurs de b puis de a, on en déduit

$$\frac{md-5a}{3}=\frac{m'd-13a}{8},\quad \text{d'où}\quad a=(8m-3m')d,$$

$$\frac{md-3b}{5}=\frac{m'd-8b}{13},\quad \text{d'où}\quad b=(5m'-13m)d.$$

C. Q. F. D.

Les nombres $5a+3b$ et $13a+8b$ admettent ainsi les mêmes diviseurs communs que a et b, et, en particulier, le même plus grand commun diviseur.

(ALYPE BERTRAND, Institut agronomique.)

[Ont résolu la même question : Mlle J. Parisot ; MM. E. Ardin-Delteil ; P. Barroué ; E. Baudot ; J. Bordas ; A. Bouzy ; Brodbeck ; L. Cabrol ; Collot ; R. Cordier ; H. Crozemarie ; L. Curt ; P. Dégeilh ; N. Delhotel ; J. Delpont ; A. Desplat ; Donnadieu ; Feintuch ; E. Foucart ; E. Fournon ; P. Gervaiseau ; Gourdet ; Guillaud ; R. Henry ; G. Hiernaux ; H. Janois ; P. Le Hénaff ; L. Lesieur ; E. Louvet ; L. Magne ; A. Maître ; A. Maniez ; J. Ménéchal ; F. Merigeaud ; A. Mirc ; N. Mollon ; Niel ; M. Oger ; F. Pégorier ; P. Plisson ; Szabo ; L. Sylvestre ; H. Tourrette ; M. Vial ; L. Vignes ; P. Vincent.]

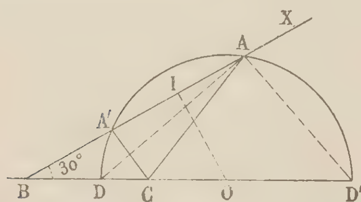
4180. — *Dans un triangle* ABC, *on donne l'angle* $B=30°$, *le rapport* $\frac{AC}{AB}=m$, *m étant un nombre positif donné, et la distance* α *qui sépare, sur le côté* BC, *le pied* D *de la bissectrice de l'angle* A *et le pied* D′ *de la bissectrice de l'angle extérieur adjacent en* A.

1° *Construire géométriquement le triangle.*

2° *Calculer les trois côtés du triangle ; discuter et chercher si l'angle en* C *du triangle est aigu ou obtus, si l'angle en* A *du triangle est aigu ou obtus.*

Même problème en supposant l'angle $B=150°$.

1° Si nous prenons sur une droite un segment DD′ égal à α et que nous tracions le cercle O de diamètre DD′ ce cercle sera un premier lieu du sommet A, puisque les bissectrices AD, AD′, sont rectangulaires.



Supposons que ABC soit le triangle répondant à la question. On a, en vertu de la propriété des bissectrices,

$$\frac{BD}{DC}=\frac{BD'}{D'C}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{m},$$

ou, en ajoutant terme à terme les deux premiers rapports égaux,

$$\frac{BD+BD'}{CD+CD'}=\frac{1}{m}.$$

Or $\quad BD+BD'=(BO-OD)+(BO+OD')=2BO$

et $\quad CD+CD'=DD'=\alpha.$

Par suite $\quad \frac{2BO}{\alpha}=\frac{1}{m},\quad$ d'où $\quad BO=\frac{\alpha}{2m}.$

Le point B est ainsi connu, par sa distance au point O. En menant par B une droite BX faisant avec BO un angle de 30°, on obtient le point A par l'intersection de BX avec le cercle O. On aura ensuite le sommet C en prenant soit $\widehat{DAC}=\widehat{DAB}$, soit $DC=mBD$.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que la droite BX coupe le cercle O. La distance OI de cette droite au centre du cercle étant égale à $\frac{OB}{2}=\frac{\alpha}{4m}$, on doit donc avoir

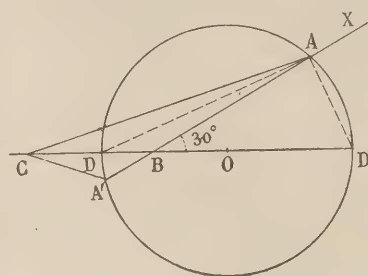
$$\frac{\alpha}{4m}\leqslant\frac{\alpha}{2},\quad \text{d'où}\quad m\geqslant\frac{1}{2}.$$

Cette condition remplie, la droite BX rencontre le cercle O en deux points. Ces points sont situés d'un même côté de DD′ tant que le point B ne tombe pas entre D et O, c'est-à-dire, en comparant les valeurs de OB et de OD, tant que $m<1$; les deux triangles ABC et A′BC satisfont alors tous deux à la question.

En remarquant que $\frac{AC}{AB}=\frac{A'C}{A'B}$, on conclut que BC est bissectrice extérieure du triangle ACA′, de sorte que les triangles ABC et A′BC ont les angles en C supplémentaires, et par suite l'un de ces angles est obtus et l'autre aigu.

L'angle en A du triangle obtusangle ABC est toujours aigu ; l'angle A′ est aigu ou obtus suivant que l'angle C est supérieur ou inférieur à 60°, ou, ce qui revient au même, suivant que $m<$ ou $>\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lorsque $m>1$, la valeur de OB est inférieure à celle de OD ; on est dans le cas de figure ci-contre : les deux triangles ABC, A′BC sont de part et d'autre de DD′. Le triangle A′BC, dont l'angle en B est de 30°, convient seul ; quant au triangle ABC, il répond au cas où l'on donne $B=180°-30°=150°$.



Dans le triangle obtusangle ABC, les angles en C et A sont aigus ; il en est de même de l'angle en C du triangle A′BC, puisque BC est bissectrice de l'angle ACA′. L'angle en A′ ne peut être qu'obtus, puisque l'angle en C est inférieur à 30° et *a fortiori* à 60°.

Dans le cas limite $m=1$, l'un des triangles se réduit à la droite AD et l'autre au point D.

2° On a (première figure)

$$a=BD+DC=BD\,(1+m),$$

ou, comme $\quad BD=BO-DO=\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{m}-1\right),$

$$a=\frac{\alpha(1-m^2)}{2m}.$$

En considérant la seconde figure, on aurait de même

$$a=\frac{\alpha(m^2-1)}{2m}$$

Le côté a étant connu, on en déduit b et c au moyen des équations

$$b=cm,\qquad b^2=a^2+c^2-2ac\cos 30°,$$

applicables aux deux figures.

Si l'on élimine par exemple b, c est déterminé par l'équation du second degré

$$(1-m^2)c^2-a\sqrt{3}\,.\,c+a^2=0. \tag{1}$$

Discussion. — La valeur de a étant toujours positive dans le cas de figure qui s'y rapporte, il faut et il suffit, pour que le problème soit possible, qu'il existe au moins une valeur réelle et positive de c.

La condition de réalité est

$$(a\sqrt{3})^2-4(1-m^2)a^2\geqslant 0,$$

ou $$m\geqslant\frac{1}{2}.$$

Si $\frac{1}{2}\leqslant m<1$, le produit des racines, $\frac{a^2}{1-m^2}$, est positif, de même que leur somme $\frac{a\sqrt{3}}{1-m^2}$; les deux valeurs de c sont réelles et positives, et fournissent deux solutions.

Si $m>1$, le produit des racines est négatif ; les deux valeurs de c sont réelles et de signes contraires. La valeur positive

fournit une solution. Quant à la valeur négative, on l'interprète en observant que sa valeur absolue vérifie la relation

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2ac \cos 30^\circ$$

ou $$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos 150^\circ,$$

qui montre que l'angle B, opposé au côté b, vaut alors 150° (triangle ABC de la seconde figure).

Il en résulte que lorsque $B = 150^\circ$, le problème n'est possible que si $m > 1$, et n'admet qu'une solution.

Les valeurs de c et b ont pour expression

$$c = \frac{a(\sqrt{3} \pm \sqrt{4m^2 - 1})}{2(1 - m^2)}, \qquad b = \frac{am(\sqrt{3} \pm \sqrt{4m^2 - 1})}{2(1 - m^2)},$$

les signes supérieurs ou inférieurs étant pris ensemble.

Pour que l'angle C soit aigu, il faut qu'on ait

$$c^2 < a^2 + b^2,$$

ou $$c^2(1 - m^2) < a^2,$$

ou, en tenant compte de (1),

$$a\sqrt{3} \, . c - a^2 < a^2,$$

ou enfin $$c < \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

En remplaçant c par $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ dans le premier membre de (1), on obtient

$$\frac{a^2}{3}(1 - 4m^2),$$

résultat négatif d'après la condition de réalité.

Donc pour $m < 1$, ce résultat est de signe contraire au coefficient de c^2 dans (1), et l'on a

$$c' < \frac{2a}{\sqrt{3}} < c'';$$

un des angles en C est aigu et l'autre obtus. Pour $m > 1$, on a, en remarquant que $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ est supérieur à la racine positive,

$$c' < c'' < \frac{2a}{\sqrt{3}},$$

et les angles en C sont tous deux aigus.

Pour que l'angle A soit aigu, il faut qu'on ait

$$a^2 < b^2 + c^2$$

ou $$a^2 < c^2(m^2 + 1)$$

ou, en tenant compte de (1),

$$a\sqrt{3} \, . c < 2c^2,$$

inégalité satisfaite lorsque

$$c < 0 \quad \text{ou} \quad c > \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

(D'après ce qu'on a vu plus haut, le côté c peut être négatif lorsque $m > 1$).

Substituons 0 et $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ à c dans le premier membre de (1); on obtient

$$a^2 \quad \text{et} \quad \frac{a^2}{4}(1 - 3m^2).$$

Si $\frac{1}{2} \leqslant m < \frac{1}{\sqrt{3}}$, ces résultats sont du signe de $1 - m^2$, et l'on a

$$0 < \frac{a\sqrt{3}}{2} < c' < c'';$$

les deux angles A sont aigus

Si $\frac{1}{\sqrt{3}} < m < 1$, on a

$$0 < c' < \frac{a\sqrt{3}}{2} < c'';$$

l'un des angles A est obtus et l'autre aigu.

Si $m > 1$, on a

$$c' < 0, \qquad c'' < \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

l'un des angles A est aigu et l'autre obtus.

Ces résultats concordent bien avec ceux de la discussion géométrique.

(L. MESSENT.)

DEUXIÈME SOLUTION. — Construisons un triangle semblable au triangle cherché. Pour cela, faisons un angle B_1 de 30°; prenons un point A quelconque sur un de ses côtés, et de ce point, avec $m.AB_1$ pour rayon, décrivons un arc de cercle qui coupera l'autre côté en C_1 : le triangle AB_1C_1 est semblable au triangle cherché. Menons les bissectrices AD_1, AD'_1 de l'angle A. Le triangle cherché sera celui dont les bissectrices intercepteront sur la direction de la base un segment DD' égal à α. Il suffit donc de prendre D_1E égal *à* α, de mener ED' parallèle à AD_1, et D'D parallèle à D'_1D_1 : ABC est le triangle cherché.

L'arc de cercle décrit du point A avec $m.AB_1$ pour rayon coupe B_1C_1 en un second point, C_2, qui conduit à une seconde solution, Abc.

(E. GIRARDIN, à Douai.)

[Ont résolu la même question : MM. G. Blondin ; A. Bouzy ; H. Crozemarie ; Collot ; L. Curt ; N. Delhotel ; J. Guyot ; A. Maitre ; M. Oger ; P. Plisson.]

4181. — *Un objet est placé à 16 décimètres d'un tableau sur lequel on veut projeter son image avec une lentille convergente, dont la distance focale est égale à* 30^{cm}. *Quelle position faut-il donner à la lentille et quel est le rapport de la grandeur de l'image à celle de l'objet ?*

La lentille doit évidemment se trouver entre l'objet et le tableau ; on a donc

$$p + p' = d.$$

Or, la formule des lentilles convergentes, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$, donne

$$p'f + pf = pp', \qquad (p + p')f = pp',$$

ou $$df = pp'.$$

p et p', dont on connaît la somme et le produit, sont donc les racines de l'équation

$$X^2 - dX + df = 0,$$

qui donne $$X = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4df}}{2}. \qquad (1)$$

Pour être acceptables, les valeurs de p et p' doivent être réelles, positives et inférieures à d.

Les racines seront réelles pour

$$d^2 - 4df \geqslant 0,$$

ou $$d \geqslant 4f,$$

condition toujours remplie pour $d = 160$ et $f = 30$.

Le produit des racines étant toujours positif, de même que leur somme, les valeurs de p et de p' sont positives.

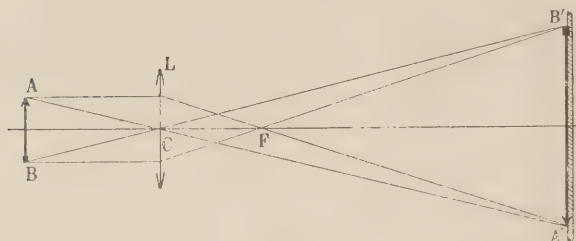
Si l'on remplace dans l'équation (1), d et f par leurs valeurs numériques, on trouve

$$p = 4^{dm}, \qquad p' = 12^{dm}.$$

On pourra d'ailleurs prendre $p = 12^{dm}$ et inversement $p' = 4^{dm}$, de sorte qu'il y a deux positions de la lentille.

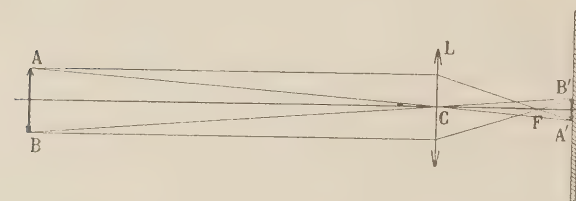
Rapport de grandeur de l'image et de l'objet. — Dans le premier cas, on a

$$\frac{i}{o} = \frac{p'}{p} = \frac{12}{4} = 3,$$



et dans le second,

$$\frac{i}{o} = \frac{p'}{p} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$



Les figures précédentes montrent la construction géométrique de l'image dans les deux cas.

(L. LESIEUR, à Neufmauil.)

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil ; A. Bertrand ; J. Bordas ; A. Bouzy ; G. Blondin ; L. Cabrol ; E. Charpentier ; Chapon ; B. Conrads ; Crozemarie ; L. Curt ; N. Delhotel ; J. Delpont ; Faria de Abreu ; Fourmont ; Foucart ; P. Gervaiseau ; H. Guillaud ; S. Héteau : Kalis ; P. Le Hénaff ; E. Le Maigre ; A. Maître ; J. Ménéchal ; Nayel ; Niel ; M. Oger ; F. Pégorier ; H. Perdrix ; E. Roncaglia ; A. Rougier ; L. Sylvestre ; C. Szabo ; P. Tribier ; H. Valdenaire ; M. Vial ; P. Vincent.]

ARITHMÉTIQUE

4235. — *Si n est un nombre entier premier avec 12, le polynome*

$$n^{12} - n^8 + n^4 - 1$$

est divisible par 12.

Le polynome proposé contient visiblement le facteur $(n^4 - 1)$; on peut donc écrire

$$n^{12} - n^8 + n^4 - 1 = (n^4 - 1)(n^8 + 1),$$

et comme $(n^4 - 1)$ n'est lui-même que le produit

$$(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1),$$

on a finalement

$$n^{12} - n^8 + n^4 - 1 = (n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)(n^8 + 1).$$

Puisque n est premier avec 12, il n'est divisible ni par 2 ni par 3 ; il résulte de là les conséquences suivantes :

1° Les nombres $(n - 1)$, $(n + 1)$ sont deux pairs consécutifs et l'on sait qu'en ce cas l'un est divisible par 2 et l'autre par 4.

2° Des trois nombres consécutifs $(n - 1)$, n, $(n + 1)$, l'un est divisible par 3 ; et, comme ce ne peut être n, c'est nécessairement l'un des deux autres.

3° Les deux nombres $(n^2 + 1)$, $(n^8 + 1)$ sont pairs. (A)

Par suite, le produit des quatre facteurs $(n - 1)$, $(n + 1)$ $(n^2 + 1)$, $(n^8 + 1)$ est divisible par $2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2$ ou 96 et, *a fortiori*, par 12. C. Q. F. D.

Remarque I. — La véritable condition qui donne lieu aux conséquences établies ci-dessus, est que le nombre n ne soit divisible ni par 2, ni par 3, c'est-à-dire soit simplement premier avec 6. En tenant compte de cette observation et de (A), on démontre facilement que chacun de ces deux nombres n'est que simplement pair ; en effet, tout nombre impair n étant précédé ou suivi d'un nombre divisible par 4, est nécessairement de la forme $m.4 \pm 1$. Toutes ses puissances paires seront donc de la forme $m.4 + 1$; par suite, le nombre immédiatement supérieur à chacune de ces puissances $(n^{2 \cdot k} + 1)$, sera lui-même de la forme $m.4 + 2$, c'est-à-dire simplement pair.

De ce que les conclusions auxquelles nous parvenons sont plus étendues que celles de l'énoncé, on doit modifier ce dernier comme il suit :

Si n est un nombre entier premier avec 6, le polynome

$$n^{12} - n^8 + n^4 - 1$$

est divisible par 96.

Remarque II. — On peut facilement établir aussi que si n est un nombre entier premier avec 30, le polynome

$$n^{12} - n^8 + n^4 - 1$$

est divisible par 480.

Il suffit pour cela de démontrer qu'en outre des diviseurs précédemment indiqués, le polynome admet encore le diviseur 5.

Remarquons tout d'abord qu'on peut écrire :

$$n^{12} - n^8 + n^4 - 1 = (n^2 - 1)(n^2 + 1)(n^8 + 1).$$

D'après la nouvelle hypothèse, n n'est divisible ni par 2 ni par 3 ni par 5. De ce dernier point il résulte que n est nécessairement de l'une des formes $m.5 \pm 1$, $m.5 \pm 2$; et son carré de l'une des formes $m.5 + 1$, $m.5 + 4$. L'un des deux facteurs $(n^2 - 1)$, $(n^2 + 1)$ est, par suite, divisible par 5.

(A. BERTRAND, à Azillanet.)

M. L.-E. Pratt, à Tecumseh (Nebraska), a démontré aussi la divisibilité par 96.

[Ont résolu la même question : MM. P. Alcan ; Allanic ; J. Amboise ; A. Baras ; P. Barroué ; L. Bedos ; Benhaïm ; G. Bernard ; J. Bordas ; H. Bosc ; C. Bourdet ; N. Bourgogne ; P. Boutroux ; A. Bouzy ; A. Brodbeck ; A. Broutin ; Burgat ; V. Cambureanu ; H. Carme ; J. M. Chalvin ; E. Charpentier ; A. Cotte ; A. Cremer ; M. Cryé ; L. Curt ; L. Delavergnas ; J. Delpont ; N. Delhotel ; E. Déprez ; G. Dobrovici ; Duchez ; A. Dumont ; Eldin ; Feintuch ; G. Fontaine ; Forissier ; E. Foucart ; P. Frescal ; E. Garès ; Gernez Pf. ; P. Gervaiseau ; L. Gourdet ; T. Gramain ; A. Grosz ; Grzybowski ; H. Guillaud ; P. Guillemin ; R. Henry ; G. Hiernaux ; H. Janois ; A. Jeannel ; J. Lagarde ; A. Larcher ; A. Larue ; G. Leclerc ; A. Lecocq ; H. Lefèvre ; Legras ; P. Le Hénaff ; E. Le Maigre ; H. Lévy ; Loïc ; E. Louvet ; L. Magne ; A. Meynier ; A. Maître ; J. Maury ; C. Marie ; H. Martiny ; J. Méhu ; de Mendiry ; J. Ménéchal ; E. Ménissier ; H. Michel ; A. Mire ; Niel ; Pajot ; F. Pégorier ; L. Perret ; A. Perrisond, G. Picou ; P. Plisson ; C. Pommeron ; R. Quéré ; Raynaud ; M. Rebeix ; M. Rivière ; A. Rongier ; Rousset ; J. Sous ; P. Tarnier ; P. Tribier ; Auguste V. ; H. Valdenaire ; Vial ; P. Vincent ; Watrin ; J. Wittner.]

4246. — *n étant un nombre entier quelconque, l'un des deux nombres*

$$3^{3n} + 2^{3n} \qquad \text{et} \qquad 3^{3n} - 2^{3n}$$

est divisible par 35.

On a

$$3^3 = 27 = 35 - 2^3.$$

En élevant chaque membre à la $n^{ième}$ puissance, on en déduit

$$3^{3n} = \text{mult. } 35 \pm 2^3,$$

suivant que n est pair ou impair.

Par suite, le nombre $3^{3n} - 2^{3n}$ est divisible par 35 lorsque n est pair, et le nombre $3^{3n} + 2^{3n}$, lorsque n est impair.

C. Q. F. D.

(J. M. CHALVIN, cours complémentaire de Vinay.)

[Ont résolu la même question : MM. Allanic ; G. Anastasiu ; Bacher ; G. Barrié ; P. Barroué ; E. Baudot ; Benhaïm ; G. Bernard ; A. Bertrand ; L. Bigot ; L. Bolzinger ; P. Bonnot ; H. Bose ; P. Boutroux ; A. Bouzy ; de Brousse ; Burgat ; H. Carme ; B. Carrière ; Chappoz ; A. Chapron ; C. Constantinesco ; Costes ; N. Delhotel ; J. Delpont, G. Digne ; Dobrovici ; M. Drovin. R. Durand ; Eldin ; G. Fauvernier ; Feintuch ; E. Foucart ; P. Fournel ; Fournier ; L. Gamet ; E, Gernez ; P. Gervaiseau ; L. Gourdet ; H. Guillaud ; P. Guillemin ; G. Hiernaux ; H. Janois ; Laguarigue de Survilliers ; J. Le Gal ; Legras ; Le Hénaff ; E. Le Maigre ; H. Lévy ; M. Lœwy ; L. Magne, A. Maître ; C. Marie ; J. Maury ; J. Méhu ; de Mendiry ; Meynier ; H. Michel ; Niel ; F. Pégorier ; Ch. Pellion ; Peyret ; H. Pihier ; P, Plisson ; J. Quintescu ; M. Rebeix ; Ribes ; Richard ; A. Riche ; J. Rigal ; P. Rolley ; A. Rongier ; E. Rousset ; A. Sarteel ; P. Ségala ; A. Sineau ; Smântanescu ; Stanciulescu ; L Sylvestre ; C. Szabo ; P. Tarnier ; L. Tarrin ; J. Trouillé ; H. Valdenaire ; H. Varinot ; A. Vergnole ; Vial ; P. Vincent ; J. Wittner ; A. Gourdin.]

ALGÈBRE

4201. — *Résoudre le système des quatre équations*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{c}, \qquad \frac{u}{a} + \frac{v}{b} = \frac{1}{c},$$

$$ux + vy + 1 = 0, \qquad a(y + v) + b(x + u) = c(uy + vx),$$

x, y, u, v désignant les inconnues, a, b, c des quantités données différentes de zéro. Discuter le nombre des solutions ; montrer qu'on n'est jamais conduit à des racines imaginaires.

(*Bacc. lettres-math., Caen, juillet 1897.*)

Des deux premières équations on déduit

$$y = b\left(\frac{1}{c} - \frac{x}{a}\right), \qquad v = b\left(\frac{1}{c} - \frac{u}{a}\right). \qquad (1)$$

En portant ces valeurs dans les deux autres équations, il vient

$$ux + b^2\left(\frac{1}{c} - \frac{x}{a}\right)\left(\frac{1}{c} - \frac{u}{a}\right) + 1 = 0,$$

$$ab\left(\frac{2}{c} - \frac{x+u}{a}\right) + b(x+u) = c\left[ub\left(\frac{1}{c} - \frac{x}{a}\right) + xb\left(\frac{1}{c} - \frac{u}{a}\right)\right]$$

ou, après simplifications,

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)xu - \frac{b^2}{ac}(x+u) + \frac{b^2}{c^2} + 1 = 0,$$

$$\frac{2c}{a}xu - (x+u) + \frac{2a}{c} = 0.$$

En résolvant ce système du premier degré par rapport à xu et $x + u$, on obtient

$$x + u = \frac{2a(a^2 - c^2)}{c(a^2 - b^2)}, \qquad xu = \frac{a^2(b^2 - c^2)}{c^2(a^2 - b^2)}.$$

Par suite x et u, dont on connaît la somme et le produit, sont racines de l'équation

$$X^2 - \frac{2a(a^2 - c^2)}{c(a^2 - b^2)} \cdot X + \frac{a^2(b^2 - c^2)}{c^2(a^2 - b^2)} = 0. \qquad (2)$$

On a ainsi pour x et u deux systèmes de valeurs symétriques, et, par suite, en vertu de (1), deux systèmes de valeurs symétriques pour y et v, — résultat facile à expliquer d'après la symétrie des équations données.

Pour que les deux systèmes de solutions qui vérifient le système proposé soient réels, il faut et il suffit que l'équation (2) ait ses racines réelles, c'est-à-dire qu'on ait :

$$\frac{a^2(a^2 - c^2)^2}{c^2(a^2 - b^2)^2} - \frac{a^2(b^2 - c^2)}{c^2(a^2 - b^2)} \geqslant 0,$$

ou, en supprimant un facteur commun essentiellement positif,

$$(a^2 - c^2)^2 - (a^2 - b^2)(b^2 - c^2) \geqslant 0.$$

Or, en vertu de l'identité

$$2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2,$$

on a

$$2(a^2 - b^2)(b^2 - c^2) = (a^2 - c^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 - (b^2 - c^2)^2,$$

et l'inégalité devient

$$2(a^2 - c^2)^2 - (a^2 - c^2)^2 + (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 \geqslant 0,$$

ou $$(a^2 - c^2)^2 + (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 \geqslant 0.$$

Cette dernière inégalité ayant son premier membre essentiellement positif est toujours satisfaite.

(J. BORDAS, à Tulle.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Maître ; F. Pégorier, à Cette.)

4245. — *Si a, b, c, d sont quatre nombres en progression géométrique, on a*

$$(a - b + c - d)^2 = (a - b)^2 + 2(b - c)^2 + (c - d)^2.$$

Dans l'hypothèse de l'énoncé on a, entre les quatre nombres a, b, c, d, la relation

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d};$$

on en déduit, en vertu d'une propriété des fractions égales,

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{b-c}{c-d}$$

ou $$(a - b)(c - d) = (b - c)^2.$$

En multipliant chaque membre par 2 et ajoutant de part et d'autre $(a - b)^2 + (c - d)^2$, il vient

$$(a - b)^2 + 2(a - b)(c - d) + (c - d)^2 = (a - b)^2 + 2(b - c)^2 + (c - d)^2$$

c'est-à-dire

$$(a - b + c - d)^2 = (a - b)^2 + 2(b - c)^2 + (c - d)^2.$$

C. Q. F. D.

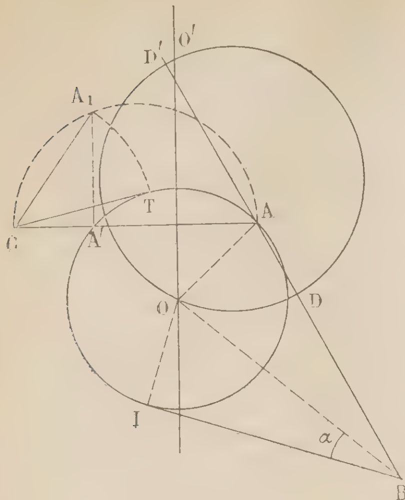
(A. BERTRAND, à Azillanet.)

[Ont résolu la même question : MM. Allanic ; J. Amboise ; N. Anastasin ; E. Ardin-Delteil ; Bacher ; A. Baras ; G. Barrié ; P. Barroué ; E. Baudot ; E. Baudoin ; Benbacite ; P. Bénézech ; G. Bernard ; J. de Bersaucourt ; E. Blanc ; L. Bolzinger ; Bonnefont-Pédufau ; H. Bosc ; F. J. Bourrières ; M. Boutaud ; A. Bouzy ; Brossard ; de Brousse ; Cambureanu ; L. Caralp ; H. Carme ; B. Carrière ; E. Chaineau ; J. M. Chalvin ; Chappaz ; Charmaison ; G. Charpentier ; F. Chuberre ; P. Colin ; Costes ; J. Coupat ; M. Cryé ; P. Courbière ; R. Dautry, P. Dégeilh ; G. Delahaye ; L. Delavergnas ; Delcambre ; J. Delpont ; M. Deschamps ; A. Desplat ; G. Digne ; Dobrovici ; M. Drovin ; G. Dupuy ; R. Durand ; Eldin ; G. Fauvernier ; Feintuch ; E. Foucart ; P. Fournel ; L. Fournier, à Rennes ; Fournier ; P. Frescal ; L. Gamet ; E. Gernez ; P. Gervaiseau ; L. Gourdet ; E. Guénard ; H. Guillaud ; P. Guillemin ; G. Hiernaux ; H. Janois ; X. Lacreuse ; J. H. Lafon ; J. M. Lagarde ; A. Larue ; E. Laudat ; E. Layes ; G. Leclerc ; H. Lefèvre ; J. Le Gal ; M. Legras ; Le Hénaff ; H. Lévy ; M. Lœwy ; E. Louvet ; L. Magne ; A. Maître ; C. Marie ; J. Maury ; J. Mehu ; de Mendiry ; Meynier ; H. Michel. E. Moëne ; F. Morel ; Niel ; M. Oger ; V. Parizet ; Peyret ; Pigouche ; H. Pihier ; P. Plisson ; J. Quintescu ; Raynaud ; M. Rebeix ; Ribes ; Richard ; A. Riche ; J. Rigal ; Robin ; A. Rongier, à Bourg ; Rosenberg ; E. Rousset ; A. Sarteel ; P. Ségala ; A. Sineau ; E. Sinturel ; Smântanescu ; B. Sordet ; L. Soulé ; J. Sous ; L. Sylvestre ; Ch. Szabo ; P. Tarnier ; L. Tarrin ; A. Trumerelle ; Auguste V. ; V. R. T. ; H. Valdenaire ; H. Varinot ; A. Vergnole ; Vial, P. Vincent ; Boutry ; A. Gourdin ; Geltzenlichter ; Houben ; E. de Rycker.]

GÉOMÉTRIE

4242. — *Construire un cercle connaissant un point A de la circonférence, un point B d'où ce cercle soit vu sous un angle donné 2α et un point C, tel que la tangente au cercle issue de ce point ait une longueur donnée l.*

Supposons le problème résolu : soit le cercle O passant par le point donné A, vu du point B sous un angle 2α et tel que la tangente $CT = l$.



Traçons la droite CA qui coupe le cercle O en un second point, A′. On a

$$CA'.CA = \overline{CT}^2 \quad \text{ou} \quad l^2.$$

Le point A′ est donc connu ; on l'obtient graphiquement en projetant sur CA l'extrémité A_1 de la corde $CA_1 = l$ du cercle de diamètre CA. Par suite un premier lieu du point O est la perpendiculaire élevée au milieu de AA′.

D'ailleurs, comme

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OI}{OB} = \sin\alpha,$$

un second lieu du point O est la circonférence lieu des points dont le rapport des distances à A et B est constant et égal à $\sin\alpha$. Cette circonférence a pour diamètre DD′, D et D′ étant les deux points du lieu situés sur AB.

On obtient ainsi le point O par l'intersection d'une droite et d'un cercle ; on peut alors tracer le cercle O dont le centre et un point sont connus.

La perpendiculaire au milieu de AA′ et le cercle DD′ ayant en général deux points communs, le problème admet au plus deux solutions, qui, suivant les données, peuvent se confondre en une seule ou bien ne pas exister.

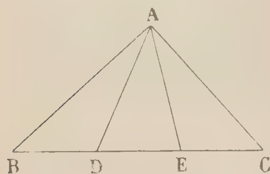
(M. REBEIX, lycée du Puy.)

[Out résolu la même question : MM. A. Barras ; P. Dégeilh ; J. Delpont ; G. Digne ; G. Dobrovici : Feintuch : E. Foucart ; A. Grosz ; G. Hiernaux ; Jouve ; P. Leduc ; M. Legras ; A. Liron ; M. Loewy ; L. Magne ; A. Maitre ; H. Martiny ; G. Picou ; J. Pillard ; M. Rivière ; L. Tarrin.]

4249. — *On partage l'hypoténuse* BC *d'un triangle rectangle* ABC *en trois parties égales par les points* D *et* E. *Démontrer que*

$$\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 + \overline{AE}^2 = \frac{2}{3}\overline{BC}^2.$$

Première solution. — Dans les triangles ABE et ADC, AD et AE sont deux médianes ; donc



$$\overline{AB}^2 + \overline{AE}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{DE}^2,$$

$$\overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{DE}^2.$$

Ajoutons membre à membre, en remarquant que

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 ;$$

il vient

$$\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{AE}^2 + 4\overline{DE}^2,$$

ou, en réduisant,

$$\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{BC}^2 - 3\overline{DE}^2.$$

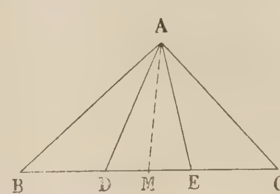
Comme $DE = \frac{BC}{3}$, le second membre de cette égalité se réduit à $\frac{2}{3}\overline{BC}^2$.

C. Q. F. D.

(E. LAUDAT, lycée Saint-Louis.)

[Ont résolu ainsi la question : MM. J. Amboise ; Bacher ; L. Barberot ; G. Barrié ; E. Baudot ; Benbacite ; Bénézech ; G. Bernard ; G. Bernard, à Béziers ; Bourrières ; A. Bouzy ; G. Brets ; Cambureanu ; J. Camus ; C. Cauchy ; Cayatte-Boisnard ; E. Chaineau ; Chappaz ; G. Charpentier ; Clergue ; G. Damien ; L. Danjou ; P. Dégeilh ; G. Degoix ; A. Delcambre ; F. Delcambre ; J. Delpont ; G. Digne ; Dobrovici ; J. Douménach ; F. Dupin ; G. Dupuy ; R. Durand ; Feintuch ; G. Fontaine ; E. Foucart ; P. Fournel ; L. Gamet ; A. Gipoulou ; Gourdet ; H. Guillaud ; M. Hermant ; Homestier ; Hugon ; H. Janois ; X. Lacreuse ; G. Leclerc ; H. Lefèvre ; E. Le Maigre ; L. Magne ; E. Mateiescu ; Mathieu ; J. Méhu ; J. Ménéchal ; Meynier ; Mongin ; A. Nayel ; Niel ; E. Pajot ; Peyret ; Pigouche ; H. Pihier ; Prudent Cosse ; C. Prost ; J. Quintescu ; F. Rey ; Richard ; A. Riche ; A. Rongier ; Rosenberg ; H. Roure ; A. Sarteel ; G. Siedel ; A. Smântànescu ; Soulé ; Sugnot ; L. Sylvestre ; C. Szabo ; L. Tarrin ; V. R. T. ; J. Vaquer ; Vial ; J. Vidal ; J. Walkulski ; Houben ; Ravenswaay.]

Seconde solution. — Menons la médiane AM du triangle ADE. On a



$$\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 = 2\overline{AM}^2 + 2\overline{DM}^2.$$

Or $$AM = BM = \frac{BC}{2}$$

et

$$DM = \frac{DE}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{BC}{3} = \frac{1}{6}BC.$$

Par suite,

$$\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 = \frac{\overline{BC}^2}{2} + \frac{\overline{BC}^2}{18} = \frac{5\overline{BC}^2}{9}. \qquad (1)$$

D'ailleurs $$\overline{DE}^2 = \left(\frac{BC}{3}\right)^2 = \frac{\overline{BC}^2}{9}, \qquad (2)$$

et, en faisant la somme des membres extrêmes de (1) et (2),

$$\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 = \frac{6}{9}\overline{BC}^2 \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3}\overline{BC}^2.$$

(A. CREMER, athénée de Verviers.)

[Ont résolu ainsi la question : MM. J. G. B. ; A. Ballé ; A. Baras ; P. Barroué ; E. Baudoin ; Benhaïm ; J. de Bersaucourt ; H. Bosc ; Brossard ; Burgat ; Cantin ; H. Charpentier ; B. Carrière ; E. Chambaud ; Charmaison ; F. Chuberre ; Costes ; Coudé ; Custaud ; R. Dautry ; L. Delavergnas ; N. Delhotel ; M. Drovin ; G. Fauvernier ; L. Florentin ; J. Font ; L. Fournier ; L. Gamet ; R. Georgi ; Herrmann ; G. Hiernaux ; F. Ladevèze ; J. Lagarde ; J. Lahourguette ; A. Larcher ; A. Larue ; P. Leduc ; Legras ; H. Lévy ; A. Maître ; R. Manen ; C. Marie ; de Mendiry ; H. Michel ; E. Moëne ; F. Morel ; V. Parizet ; F. Pégorier ; C. Pellion ; A. Perrissond ; J. Pillard ; Ph. Plisson ; Robin ; E. Routier ; Seguenot ; H. Séjour ; J. Sire ; B. Sordet ; A. Souriaud ; J. Sous ; R. Sudre ; P. Tarnier ; P. Tribier ; J. Trouillé ; Tumerelle ; H. Valdenaire ; H. Varinot ; A. Vergnole ; Watrin ; A. Gourdin ; Geltzenlichter.]

Troisième solution. — En abaissant la hauteur AH du triangle ABC, on a, dans le triangle ABD,

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD.BH,$$

et dans le triangle AEC,

$$\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 - 2CE.CH.$$

Additionnant membre à membre, on obtient

$$\begin{aligned}\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\overline{BD}^2 - 2BD(BH + CH) \\ &= \overline{BC}^2 + 2BD(BD - BC) \\ &= \overline{BC}^2 - 4\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \frac{4}{9}\overline{BC}^2 = \frac{5}{9}\overline{BC}^2.\end{aligned}$$

Le calcul se termine ensuite comme dans la seconde solution.

(Paul VINCENT, école d'arts et métiers d'Aix.)

[Ont résolu ainsi la question : Mlle C. David ; MM. Anastasiu ; E. Ardin-Delteil ; H. Beucler ; F. Beynas ; L. Bigot ; L. Bolzinger ; F. Bonnot ; Chalvin ; J. Chantre ; Chapron ; Constantinesco ; M. Cryé ; R. Drion ; Fournier ; L. Gamet ; P. Gervaiseau ; Jacquet ; Jouanneau ; Jouve ; Kalis ; Le Gal ; Le Hénaff ; M. Lœwy ; Martiny ; J. Maury ; H. Miconnet ; H. Pingeot ; B. Poitevin ; C. Pommeron ; Raynaud ; M. Rebeix ; P. Rolley ; E. Routier ; Auguste V ; L. Vacelet ; H. Villetard ; J. Wittner ; H. Zroaenepœl.]

[Ont envoyé des démonstrations différentes : MM. Allanic ; Chaillet ; A. Des-

plat ; Eldin ; Epp ; Faivre ; P. Frescal ; E. Gernez ; L. Gourdet ; P. Guillemin ; E. Layes ; E. Louvet ; E. Madel ; R. Manen ; Ribes ; J. Rigal ; G. Rodenbourg ; E. Routier ; Saget ; P. Ségala ; E. Sinturel ; E. J. Villemagne.]

M. G. Delahaye démontre que si l'on partage la base $BC = a$ d'un triangle ABC en n parties égales et si l'on joint le sommet A à ces points de division, la somme des carrés des $n-1$ droites ainsi obtenues est égale à

$$\frac{n-1}{2}\left[b^2 + c^2 - \frac{a^2(n+1)}{3n}\right].$$

PHYSIQUE

4243. — *Une tige rectiligne indéfinie est fixée de manière à faire un angle de 45° avec la verticale. Un anneau pesant 20^{kg} peut glisser le long de cette tige ; on l'abandonne à lui-même et on lui laisse parcourir une longueur de tige de $27^m,75$. Quelle serait, à ce moment, sa vitesse si le frottement était nul ?*

On constate que, à cause du frottement, cette vitesse n'est, en réalité, que de 2^m. On demande quelle est la quantité de chaleur qui a été produite par le frottement, sachant qu'une calorie équivaut à 425 kilogrammètres.

On prendra $g = 9^m,81$.

(*Bacc. lettres-sciences et lettres-math., Nancy, juillet 1897.*)

1° Le poids P de l'anneau peut être décomposé en deux forces : l'une, f', perpendiculaire au plan incliné, l'autre, f, parallèle à ce plan. La force f' n'a d'autre effet que d'appuyer l'anneau sur le plan. La force f qui fait glisser l'anneau a pour valeur P sin 45° ou $\frac{P\sqrt{2}}{2}$; elle imprime à la masse de l'anneau un mouvement uniformément accéléré dont l'accélération γ est inférieure à l'accélération g qui serait imprimée en chute libre sous l'influence du poids P.

On sait que deux forces constantes sont proportionnelles aux accélérations qu'elles impriment séparément à une même masse. On aura donc

$$\frac{\frac{P\sqrt{2}}{2}}{P} = \frac{\gamma}{g},$$

d'où
$$\gamma = \frac{g\sqrt{2}}{2} = 6^m,936.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la formule $v = \sqrt{2\gamma e}$.

$$v = \sqrt{2 \times 6,936 \times 27,75} = 19^m,62.$$

2° Si l'anneau avait réellement cette vitesse, le travail effectué serait $\frac{1}{2}\, m \times (19,62)^2$, m étant la masse de l'anneau. Comme sa vitesse n'est que de 2^m, le travail effectué est $\frac{1}{2}\, m \times 2^2$, et la différence $w = \frac{1}{2}\, m\left[(19,62)^2 - 2^2\right]$ représentera l'énergie absorbée par le frottement.

Comme $m = \frac{P}{g} = \frac{20}{9,81}$, on a

$$w = \frac{20\left[(19,62)^2 - 2^2\right]}{2 \times 9,81} = 388^{kgm},3.$$

La quantité de chaleur produite par le frottement sera

$$\frac{388,3}{425} = 0^{cal},9135.$$

Si l'on emploie les unités C. G. S., $m = 20000$. Le travail absorbé par le frottement est

$$w = \frac{20000\left[(1962)^2 - (200)^2\right]}{2 \times 981} = 38094440000 \text{ ergs.}$$

A ce travail correspondent

$$\frac{38094440000}{417 \times 10^5} = 913,5 \text{ pet. calories.}$$

(A. MIRC, à Dijon.)

[Ont résolu la question ; MM. P. Alcan ; J. de Bersaucourt ; L. Bigot ; E. Brossard ; E. Déprez ; Forissier ; E. Gernez ; A. Larcher ; G. Leclerc ; A. Liron ; Raynaud ; L. Sylvestre.]

4254. — *On suspend au-dessous du plateau d'une balance un poids cylindrique en métal de poids P ; l'équilibre étant établi, on immerge le poids complètement dans un liquide de densité D, son poids diminue et devient égal à p ; on immerge ensuite la même masse métallique dans un autre liquide, son poids devient alors égal à p' ; on demande :*

1° La densité du second liquide ;

2° La densité du poids cylindrique.

Application : $P = 1^{kg},452$, $p = 1^{kg},382$, $p' = 1^{kg},397$, $D = 1,113$.

(*Bacc. lettres-math., Lyon, novembre 1896.*)

Soit V le volume du poids cylindrique. Immergé dans le liquide de densité D, ce poids subit une poussée égale à VD, et son poids apparent est

$$p = P - VD,$$

d'où l'on tire
$$V = \frac{P - p}{D}.$$

On a de même, en représentant par D' la densité du second liquide,

$$p' = P - VD',$$

d'où
$$D' = \frac{P - p'}{V} = \frac{(P - p')D}{P - p}. \qquad (1)$$

Quant à la densité du poids cylindrique, elle a pour valeur

$$d = \frac{P}{V} = \frac{PD}{P - p}. \qquad (2)$$

Application. — En remplaçant les lettres par leurs valeurs dans les relations (1) et (2), il vient :

1° Densité du second liquide :

$$D' = \frac{(1,452 - 1,397)1,113}{1,452 - 1,382} = 0,874 ;$$

2° Densité du poids cylindrique :

$$d = \frac{1,452 \times 1,113}{1,452 - 1,382} = 2?,086.$$

(E. SINTUREL.)

[Ont résolu la même question : Mlle M. Durand ; MM. E. Ardin-Delteil ; A. Audibert ; A. Ballé ; Bacher ; J. Barberot ; L. B., à O. ; A. Barroué ; E. Baudot ; Benbacite ; J. de Bersaucourt ; P. Bénézech ; H. Beucler ; F. Beynas ; L. Bigot ; P. Bonnot ; H. Bosc ; F. Boisnard ; M. Boutry ; A. Bouzy ; E. Brossard ; M. Broutin ; de Brousse ; Burgat ; J. Camus ; B. Carrière ; C. Cauchy ; A. Chaperon ; E. Chaineau ; J. M. Chalvin ; A. Charmaison ; G. Charpentier ; F. Chuberre ; Clergue ; Colin ; Costes ; . Coupat ; Custaud ; L. Danjou ; N. Delhotel ; J. Delpont ; Delavergnas ; M. Deschamps ; G. Digne ; J. Douménach ; M. Drovin ; P. Dupuis ; R. Durand ; G. Dupuy ; G. Fauvernier ; J. Fillols ; L. Florentin ; G. Fontaine ; E. Foucart ; J. Fourestier ; P. Fournel ; L. Fournier ; P. Frescal ; L. Gamet ; J. J. G. B. ; M. Georgi ; E. Gernez ; P. Gervaiseau ; A. Gipoulou ; Grzybowski ; P. Guillemin ; P. Hermann ; H. Janois ; Jouanneau ; E. Joyer ; Kalis ; X. Lacreuse ; J. Lahourguette ; E. Lance ; A. Larcher , L. Lassence ; E. Laudat ; E. Layet ; G. Leclerc ; J. Le Gal ; Legras ; P. Le Hénaff ; E. Le Maigre ; H. Lévy ; F. Leulliot ; M. Lœwy ; E. Marienon ; Martin Gousset ; H. Martiny ; Mathieu ; J. Maury ; J. Méhu ; J. Melin ; de Mendiry ; J. Ménéchal ; H. Miconnet ; E. Moëne ; Mongin ; F Morel ; Niel ; E. Pajot ; V. Parizet ; J. Pellard ; A. Perissond ; Pellion ; J. Petit ; J. Peyret ; G. Pommeron ; Poitevin ; Quilichini ; Raynaud ; J. Rigal ; Robin ; P. Rolley ; A. Rongier ; E. Rousset ; E. Routier ; P. Ségala ; L. Seguenot ; A. Sineau ; J. Sire ; J. Sous ; Soulé ; R. Sudre ; L. Sylvestre ; C. Szabo ; L. Tarrin ; V. R. T. ; P. Tribier ; H. Valdenaire ; H. Varinot ; A. Vergnole ; Vial ; J. Vrouillé ; J. Wittner ; P. Vœlfflé ; H. Zwaenywel ; Geltzenlichter ; Limongelli ; L. Perret ; P. Vincent.]

CONCOURS DE 1897 (*Suite*).

ÉCOLE NATIONALE ET SPÉCIALE DES BEAUX-ARTS

Section d'architecture.

Mathématiques.

I. — Étant donnée une demi-circonférence de rayon R décrite sur AB comme diamètre et un point P sur ce diamètre tel que $OP = a$, par P on élève sur le diamètre AB la perpendiculaire PM qui rencontre en M la demi-circonférence, on mène les droites AM, BM et on fait tourner toute la figure autour de AB :

1° Trouver l'expression algébrique du volume engendré par le triangle AMB, du volume V engendré par la partie ombrée, et l'expression S de la surface du solide engendré par la partie ombrée ;

2° Dans le cas où $a = \frac{R}{3}$ et où $R = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{132}}$, calculer par logarithmes le volume V ; mettre tous les calculs.

II. — Résoudre l'équation

$$\frac{(x-1)(3x^2-11x+10)}{4x^2-28x+40} - \frac{5x-4}{6x(x-6)+30} + \frac{2x-3}{3x^2-30x+75} = \frac{50x^2-172x+47}{(6x-30)(2x^2-12x+10)};$$

mettre tous les calculs.

(*3e session, 27 octobre. Durée : 2 heures.*)

Géométrie descriptive.

L'épure à faire consiste dans le tracé des ombres à 45° de la façade représentant l'épannelage d'une cheminée comprise entre deux chambranles de portes.

La demi-élévation et la coupe ci-jointes suffisent, avec les indications de profils, à établir cette épure.

Le cadre de l'épure sera limité de chaque côté de la ligne d'axe xx par la ligne CC.

Échelle (par rapport au dessin remis aux candidats) : $\frac{1}{4}$.

Chercher les ombres de la cheminée sur elle-même, sur le mur, sur le chambranle et le fond de la porte, en un mot toutes les ombres que comporte le dessin.

Nota. — Les candidats sont invités à tracer sur l'épure, soit à l'encre rouge, soit même au crayon, les lignes d'opération principales, et à l'encre noire les données et les résultats ; il sera tenu compte du degré d'achèvement de l'épure. (*3e session, 28 octobre. — Durée : 8 heures.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4268. — Résoudre l'équation

$$(x+b+c)(x+c+a)(x+a+b)(a+b+c) = abcx.$$

4269. — Sachant que

$$x+y+z = a,$$
$$x^2+y^2+z^2 = 2a^2,$$
$$x^3+y^3+z^3 = 3a^3,$$

calculer

$$x^4+y^4+z^4.$$

(E. Sinturel, collège de Cusset.)

4270. — Soient O_a, O_b, O_c les centres des carrés construits sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle et A′, B′, C′ les milieux de ces côtés. On a

$$\overline{O_cA'}^2 + \overline{O_aB'}^2 + \overline{O_bC'}^2 = \overline{O_cB'}^2 + \overline{O_aC'}^2 + \overline{O_bA'}^2.$$

4271. — Par le point de concours O des bissectrices d'un triangle ABC on mène des perpendiculaires à chacune de ces bissectrices : B′C″ à AO (B′ sur AB, C″ sur AC), C′A″ à OB et A′B″ à OC. Démontrer que :

1° L'hexagone A′A″B′B″C′C″ est circonscriptible et composé de six triangles A′OA″, A″OB′, ... semblables et égaux deux à deux ;

2° Le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC égale la somme des rayons des cercles inscrits dans les triangles AA′A″, BB′B″, CC′C″. Même relation pour les rayons des cercles circonscrits à ces mêmes triangles.

(R. Manen, petit séminaire de Massals.)

4272. — Étant donné un cercle, on sait que les trois cercles décrits sur trois cordes issues d'un de ses points, P, se coupent suivant trois points A, B, C en ligne droite. Démontrer :

1° Que si on décrit des cercles sur PA, PB, PC comme diamètres, ces cercles se coupent en un même point de la droite AB ;

2° Que si ω_1, ω_2, ω_3 désignent les centres des trois premiers cercles et μ_1, μ_2, μ_3 ceux des trois derniers, ces centres sont en ligne droite trois à trois.

(P. B., à Brest.)

4273. — On considère deux cercles O, O′ tangents intérieurement en P et qui coupent leur diamètre commun OO′ en A et B. Une droite variable perpendiculaire à OO′, rencontre les cercles O, O′ en A′, B′.

Lieu du point d'intersection des droites AA′ et BB′.

(E. Bourrienne.)

4274. — Par l'un des points, A, communs à deux cercles sécants O et O′, on mène une sécante variable BAC et l'on prend le conjugué harmonique M du point A par rapport aux points B et C. Lieu du point M.

(M. Rebeix, lycée du Puy.)

4275. — Un aérostat, de forme sphérique, ayant 10^m de diamètre, est rempli d'hydrogène de densité 0,069 par rapport à l'air. L'enveloppe pèse 365^{gr} par mètre carré. Le poids des aéronautes, des agrès et des accessoires est de 375^{kg}. La température est 18° et la pression atmosphérique 758^{mm}. Calculer :

1° Le poids de l'hydrogène que renferme l'aérostat ;

2° La force ascensionnelle au départ ;

3° La hauteur dont s'élèvera l'aérostat pendant la première seconde.

On donne :

1° Le poids du litre d'air sous la pression 760^{mm} et à 0°... $1^{gr},293$;

2° Le coefficient de dilatation des gaz $\alpha = \frac{1}{273}$;

3° L'accélération de la pesanteur $g = 9^m,8$.

(*Bacc. lettres-sciences, Marseille, novembre 1896.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

22e Année. — No 7. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 1er Janvier 1898.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO....................	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL..............	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie **Nony** et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

NOTE D'ARITHMÉTIQUE

par M. **A. Goulard**, professeur au lycée de Marseille.

Lemme. — *Tout nombre non premier admet un diviseur* (>1) *inférieur ou égal à sa racine carrée entière.*

Désignons par p le plus petit diviseur (>1) d'un nombre non premier a, et soit $a = pq$. Comme q est aussi un diviseur de a, on a $q \geqslant p$, et par suite $a \geqslant p^2$.

Corollaire. — *Si un nombre n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à sa racine carrée entière, ce nombre est premier.*

Problème. — *Reconnaître si un nombre donné est premier.*

Règle : *On divise le nombre donné par les nombres premiers* 2, 3, 5, 7,....... *Si aucune division ne se fait exactement, on peut affirmer que le nombre donné est premier dès que la division de ce nombre par un nombre premier p donne un quotient entier inférieur à* $p' + d$, *p' étant le nombre premier qui vient immédiatement après p, et d étant la différence entre p' et q.*

Soit a le nombre donné, et soit q le quotient de la division de a par p. On a

$$a < p(q + 1).$$

Or $\quad p = p' - d \quad$ et $\quad q + 1 \leqslant p' + d.$

Donc $\quad a < (p' - d)(p' + d) \quad$ ou $\quad p'^2 - d^2,$

et par suite $\quad a < p'^2. \quad$ Donc $\quad ....$

QUELQUES PROPRIÉTÉS D'UN TÉTRAÈDRE DONT LES ARÊTES OPPOSÉES SONT ÉGALES

par M. **A. Vacquant**, professeur au lycée de Nancy.

Comme compléments à la question 4205 dont j'ai donné précédemment une solution (no 4, p. 29), je vais démontrer quelques propriétés d'un tétraèdre dont les arêtes opposées sont égales.

D'abord les propriétés suivantes sont immédiates :

1o *Les quatre faces sont des triangles égaux*, comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun;

2o *Les hauteurs du tétraèdre sont égales*, puisque les bases sont égales;

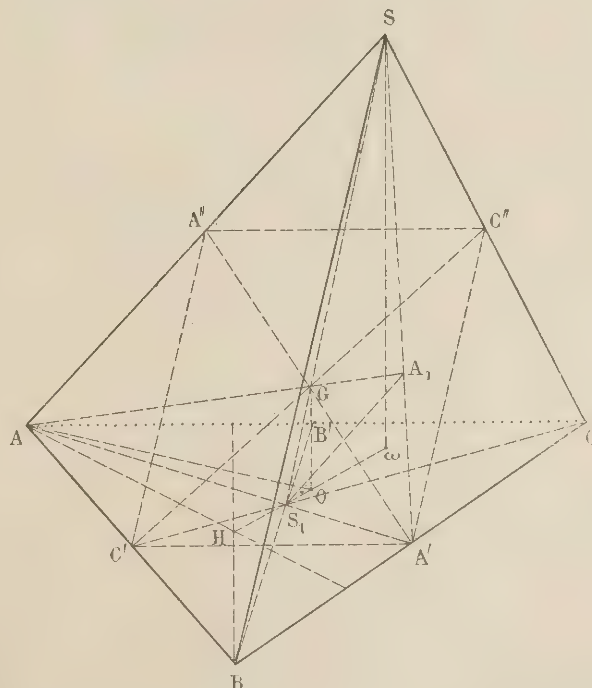
3o *Les dièdres opposés sont égaux*, car tous les angles trièdres du tétraèdre sont égaux comme ayant les trois faces égales chacune à chacune, et les dièdres homologues sont ceux qui ont pour arêtes les arêtes opposées du tétraèdre.

Maintenant, dans le tétraèdre SABC dont les quatre faces sont égales, le plan bissecteur ASA′ d'un dièdre SA passe par le milieu A′ de l'arête BC opposée à SA c'est-à-dire coïncide avec le plan mené par SA et le milieu de l'arête opposée BC; donc :

4o *Dans le tétraèdre* SABC, *les six plans bissecteurs des dièdres se coupent en un point* G *qui est le centre de gravité du tétraèdre.*

Si on considère les droites joignant respectivement chaque sommet au centre de gravité de la face opposée, on a la proposition suivante :

5o *Les quatre droites joignant respectivement un sommet au centre de gravité de la face opposée sont égales; elles concourent au point* G *qui est le centre commun de la sphère inscrite et de la sphère circonscrite.*



Deux quelconques AA_1 et SS_1 de ces quatre droites se coupent, comme on sait, en un point G tel que $GS_1 = \frac{1}{4} SS_1$, et par suite ce point G, qu'on nomme centre de gravité du tétraèdre, appartient à ces quatre droites. Ce point G appartenant aussi (4o) aux plans bissecteurs des dièdres du tétraèdre est le centre de la sphère inscrite dans le tétraèdre; le rayon de cette sphère inscrite est le quart de la hauteur du tétraèdre puisque $S_1G = \frac{1}{4} S_1S$.

Les médianes AA' et SA' des triangles égaux ABC, BSC sont égales; le triangle ASA' est donc isocèle; par suite le trapèze, ASA_1S_1 est isocèle puisque $AS_1 = SA_1 = \frac{2}{3} AA'$. Les diago-

nales de ce trapèze isocèle étant égales, on a $AA_1 = SS_1$. Donc

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = SS_1.$$

D'ailleurs $\quad GA = \frac{3}{4}\, AA_1, \qquad GS = \frac{3}{4}\, SS_1;$

on a donc $\quad GA = GB = GC = GS,$

et G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre.

Maintenant, comme $A'A = A'S$ et $GA = GS$, la droite $A'G$ est perpendiculaire à AS; c'est donc la hauteur $A'A''$ du triangle isocèle ASA', et A'' est le milieu de AS; par conséquent (c'est d'ailleurs une propriété connue appartenant à tout tétraèdre) la droite $A'A''$, joignant les milieux de deux arêtes opposées BC et AS, passe par G; mais de plus $A'A''$ est perpendiculaire à AS et aussi à BC. De même la droite $C'C''$ qui joint les milieux des arêtes opposées AB et CS passe par G et est perpendiculaire commune à ces arêtes; la figure $A'C'A''C''$ est un losange car $A'C' = A''C'' = \frac{AC}{2}$, $C'A'' = A'C'' = \frac{BS}{2}$ et $AC = BS$; donc les droites $A'A''$ et $C'C''$ se coupent en G à angle droit, et on a le résultat suivant :

6° *Dans le tétraèdre* SABC, *chacune des droites joignant les milieux de deux arêtes opposées est la perpendiculaire commune à ces arêtes; ces droites passent par* G *et sont perpendiculaires deux à deux.*

Il est facile de calculer ces perpendiculaires communes $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ et le rayon GA de la sphère circonscrite en fonction des arêtes a, b, c du tétraèdre. On a, dans le triangle BSC,

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2\overline{SA'}^2,$$

$$\overline{SA'}^2 = \frac{2(b^2+c^2) - a^2}{4}.$$

Le triangle rectangle $A'A''S$ donne

$$\overline{A'A''}^2 = \overline{SA'}^2 - \overline{SA''}^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}.$$

De même $\quad \overline{B'B''}^2 = \frac{c^2+a^2-b^2}{2},$

$$\overline{C'C''}^2 = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}.$$

Dans le losange $A'C'A''C''$, on a

$$GA'' = \frac{A'A''}{2}, \qquad \overline{GA''}^2 = \frac{\overline{A'A''}^2}{4} = \frac{b^2+c^2-a^2}{8},$$

et le triangle rectangle GAA'' donne

$$\overline{GA}^2 = \overline{AA''}^2 + \overline{GA''}^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2+c^2-a^2}{8}$$

ou $$\overline{GA}^2 = R^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{8}.$$

Remarquons maintenant, puisque $GA = GB = GC$, que le pied O de la perpendiculaire abaissée de G sur le plan ABC est équidistant des trois points A, B, C et par suite coïncide avec le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Soit ω la projection du sommet S sur la base ABC; les trois points S_1, O, ω sont en ligne droite; le point S_1 est le centre de gravité du triangle ABC. Comme $S_1S = 4S_1G$, il en résulte $S_1\omega = 4S_1O$ ou encore $O\omega = 3S_1O$, ce qui donne une construction simple du point ω et par suite du tétraèdre : en partant de sa base ABC on construira S_1, O, ω et ensuite S. On a donc la propriété suivante :

7° *Dans le tétraèdre* SABC, *le pied* ω *de la hauteur relative à une face* ABC, *le centre de gravité* S_1 *de cette face, le centre* O *du cercle circonscrit à cette face, sont trois points en ligne droite, et on a* $O\omega = 3S_1O$, *le point* O *étant entre* S_1 *et* ω.

On peut aussi donner une définition du point ω à l'aide du point O et du point de concours H des hauteurs du triangle ABC. On sait que les trois points O, S_1, H sont en ligne droite et que le point S_1 situé entre O et H est tel que $S_1H = 2S_1O$, par suite $OH = 3S_1O = O\omega$, et l'énoncé précédent peut être remplacé par le suivant :

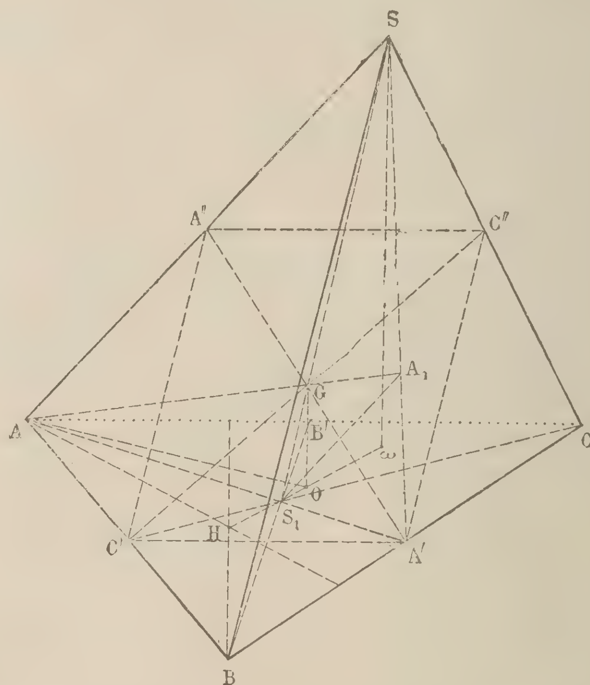
Le centre O *du cercle circonscrit au triangle* ABC *est au milieu de la droite qui joint le point de concours* H *des hauteurs de ce triangle au pied* ω *de la hauteur abaissée de* S *sur* ABC.

Pour terminer, j'indiquerai un calcul simple de la hauteur h du tétraèdre. Soit S la surface du triangle ABC. On sait que $OA = \frac{abc}{4S}$. On a

$$\overline{GO}^2 = \overline{GA}^2 - \overline{OA}^2$$

ou $$\frac{h^2}{16} = \frac{a^2+b^2+c^2}{8} - \frac{a^2b^2c^2}{16S^2} = \frac{2(a^2+b^2+c^2)S^2 - a^2b^2c^2}{16S^2}$$

$$h^2 = \frac{(a^2+b^2+c^2)\,\frac{b^2c^2}{2}\,\sin^2 A - a^2b^2c^2}{S^2}.$$



Comme $\quad \sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$, on a

$$h^2 = \frac{(a^2+b^2+c^2)[4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2] - 8a^2b^2c^2}{8S^2}$$

$$= \frac{-(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)^2 + 4b^2c^2(b^2+c^2-a^2)}{8S^2}$$

$$= \frac{(b^2+c^2-a^2)[4b^2c^2 - (b^2+c^2+a^2)(b^2+c^2-a^2)]}{8S^2}$$

$$= \frac{(b^2+c^2-a^2)[a^4 - (b^2-c^2)^2]}{8S^2}$$

$$= \frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{8S^2}.$$

A l'aide de cette formule, on aperçoit les résultats suivants :

Si le triangle ABC est rectangle, on a $a^2 = b^2 + c^2$, $h = 0$ et le tétraèdre dégénère en une figure plane, ce qu'on voit aisément par la géométrie.

Pour que h^2 soit positif, il faut et il suffit que l'on ait

$$(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) > 0,$$

ce qui entraîne, comme on le voit facilement

$$a^2 < b^2 + c^2,$$
$$b^2 < c^2 + a^2,$$
$$c^2 < a^2 + b^2,$$

et ces inégalités signifient que *tous les angles du triangle* ABC *sont aigus*, ce qu'on peut voir aussi géométriquement comme je l'ai indiqué dans l'article précédent.

CERTIFICAT D'APTITUDE AU PROFESSORAT DES ÉCOLES NORMALES

Aspirants (1897).

4184. — *Démontrer que le quotient entier d'un nombre entier* N *par un produit de facteurs entiers* a, b, c *peut s'obtenir en divisant* N *par* a, *puis le quotient par* b *et ce dernier quotient par* c.

Application. — *Les trois divisions successives ayant toutes donné un même reste* r, *et celui-ci étant le plus grand possible, on suppose que la division de* N *par le produit* abc *donne pour reste* $R = 19r$ *et pour quotient* 7, *on suppose en outre que* $c = a + b$; *déterminer le nombre* N.

En désignant par q, q', q'' les quotients des trois divisions successives et par r, r', r'' les restes correspondants, on peut écrire

$$N = aq + r, \qquad r \leqslant a - 1; \qquad (1)$$
$$q = bq' + r', \qquad r' \leqslant b - 1; \qquad (2)$$
$$q' = cq'' + r'', \qquad r'' \leqslant c - 1. \qquad (3)$$

Remplaçons dans (2) q' par sa valeur (3); il vient

$$q = bcq'' + br'' + r',$$

et en portant cette valeur dans (1),

$$N = abcq'' + abr'' + ar' + r. \qquad (4)$$

D'après cette égalité, q'' sera le quotient de N par abc si le reste est inférieur au diviseur abc. Or, en ayant égard aux inégalités (1), (2), (3), ce reste a pour limite supérieure

$$ab(c-1) + a(b-1) + a - 1 = abc - 1,$$

valeur inférieure à abc.

Application. — On a par hypothèse,

$$r'' = r' = r = a - 1 \quad \text{ou} \quad b - 1 \quad \text{suivant que} \quad a < \text{ou} > b,$$

puis
$$N = 7ab(a+b) + 19r.$$

Pour identifier N avec la valeur (4), posons

$$r(ab + a + 1) = 19r,$$

ce qui revient à
$$a(b+1) = 18.$$

En égalant a à l'un des diviseurs de 18 ou 2×3^2, on obtient les solutions suivantes :

$a = 1$, $b = 17$, $r = 0$, d'où $N = 7.17.18 = 2142$;
$a = 2$, $b = 8$, $r = 1$, $N = 7.16.10 + 19 = 1139$;
$a = 3$, $b = 5$, $r = 2$, $N = 7.15.8 + 38 = 878$;
$a = 6$, $b = 2$, $r = 1$, $N = 7.12.8 + 19 = 691$;
$a = 9$, $b = 1$, $r = 0$, $N = 7.9.10 = 630$;
$a = 18$, $b = 0$, $r = 0$, $N = 0$.

(L. PERRET, à Bagé-la-Ville.)

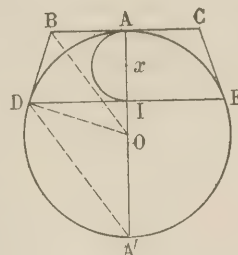
[Ont résolu la même question : MM. Collot ; N. Delhotel ; A. Desplat ; Th. Gramain ; E. Louvet ; L. Magne ; J. Ménéchal ; Niel ; M. Oger ; F. Pégorier ; L. Sylvestre ; H. Tourrette ; H. Valdenaire.]

4185. — *On donne une circonférence* O, *de rayon* R; *on trace une tangente* BAC, *une corde* DE *parallèle à* BC, *la droite* DB *tangente en* D *et la demi-circonférence qui a pour diamètre* AI; *on fait tourner la figure autour du diamètre* AA'. *Déterminer la distance* AI *pour que le volume engendré par le quadrilatère* ABDI *soit au volume de la sphère de diamètre* AI *dans un rapport donné* m.

Entre quelles limites peut varier le nombre m ?

Dans le cas particulier où $m = 6$, *quel est le rapport des deux volumes* B'C'D'E', B''C''D''E'' *ainsi trouvés ?*

A quels nombres entiers sont proportionnelles : 1° *les trois parties de la surface de la sphère* O; 2° *les trois parties du volume de cette sphère, séparées par les deux plans* D'E' *et* D''E'' ?



Posons $AI = x$. En écrivant que le volume du tronc de cône engendré par le trapèze ABDI est dans un rapport m avec celui de la sphère de diamètre AI, on a

$$\frac{1}{3}\pi AI(\overline{AB}^2 + \overline{DI}^2 + AB.DI) = \frac{1}{6}\pi \overline{AI}^3 m,$$

ou, en divisant par $\frac{1}{3}\pi AI$ et remplaçant AI par x,

$$\overline{AB}^2 + \overline{DI}^2 + AB.DI = \frac{mx^2}{2}.$$

Pour calculer AB et DI en fonction de R et x, tirons les droites BO, DA'; elles sont parallèles, car l'angle inscrit AA'D est égal à la moitié AOB de l'angle au centre AOD. En considérant alors les triangles semblables AOB, IA'D, on a

$$\frac{AB}{ID} = \frac{AO}{IA'}, \qquad \text{d'où} \qquad AB = \frac{R}{2R - x} \cdot DI;$$

d'ailleurs le triangle DOI donne

$$\overline{ID}^2 = R^2 - \overline{OI}^2 = R^2 - (R - x)^2 = x(2R - x). \qquad (1)$$

Par suite, l'équation du problème devient

$$\frac{R^2 x(2R - x)}{(2R - x)^2} + x(2R - x) + Rx = \frac{mx^2}{2},$$

ou, en multipliant par $\frac{2R - x}{x}$,

$$R^2 + (2R - x)^2 + R(2R - x) = \frac{mx}{2}(2R - x),$$

ou enfin, en simplifiant,

$$(m + 2)x^2 - 2R(m + 5)x + 14R^2 = 0.$$

Discussion. — Pour qu'une valeur de x convienne, il faut et il suffit qu'elle soit réelle, positive et inférieure à 2R.

La condition de réalité est

$$R^2(m + 5)^2 - 14R^2(m + 2) \geqslant 0,$$

ou
$$m^2 - 4m - 3 \geqslant 0.$$

Cette inéquation a son premier membre positif, c'est-à-dire de même signe que son premier terme, pour toute valeur de m non comprise entre les deux racines de l'équation

$$m^2 - 4m - 3 = 0;$$

comme l'une de ces racines est négative, la valeur de m, qui est toujours positive, doit être supérieure à la racine positive, ce qui donne

$$m \geqslant 2 + \sqrt{7}.$$

Lorsque cette condition est remplie, les deux valeurs de x sont réelles et positives, puisque leur somme, $\frac{2R(m+5)}{m+2}$, et leur produit, $\frac{14R^2}{m+2}$, sont ici toujours positifs. En outre, ces valeurs sont forcément inférieures à 2R; autrement la relation (1) aurait son second membre égal à un nombre négatif, tandis que

le premier membre, $\overline{DI}^2$, serait essentiellement positif. On pourrait d'ailleurs vérifier ce résultat en comparant les racines à 2R.

Ainsi, le problème comporte toujours deux solutions quand $m > 2 + \sqrt{7}$; pour $m = 2 + \sqrt{7}$, ces solutions sont confondues.

Examen du cas particulier $m = 6$. — L'équation du problème devient dans ce cas

$$4x^2 - 11Rx + 7R^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$x' = R, \qquad x'' = \frac{7}{4}R.$$

Comme, par hypothèse, les volumes B'C'D'E' et B''C''D''E'' sont égaux à 6 fois les volumes de deux sphères de rayons x' et x'', le rapport de ces volumes est

$$\left(\frac{x'}{x''}\right)^3 = \left(\frac{4}{7}\right)^3.$$

Les plans ayant pour traces D'E' et D''E'' partagent la sphère O en trois zones dont les surfaces sont entre elles comme leurs hauteurs ; ces hauteurs sont

$$AI' = R, \qquad I'I'' = x'' - x' = \frac{3}{4}R, \qquad I''A' = \frac{R}{4},$$

de sorte que les trois zones sont proportionnelles aux nombres entiers 4, 3, 1.

Le demi-cercle D'AE' engendre une demi-sphère de volume $\frac{2}{3}\pi R^3$; le segment circulaire D''A'E'' engendre un segment sphérique à une base dont le volume est

$$\frac{1}{3}\pi\overline{A'I''}^2(3R - A'I'') = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{4}\right)^2\left(3R - \frac{R}{4}\right) = \frac{11\pi R^3}{192}.$$

Par suite le volume restant de la demi-sphère D'A'E' a pour expression

$$\frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{11\pi R^3}{192} = \frac{117\pi R^3}{192}.$$

Les trois parties du volume de la sphère séparées par les plans D'E' et D''E'' sont donc proportionnelles aux nombres

$$\frac{2}{3}, \qquad \frac{117}{192}, \qquad \frac{11}{192}$$

ou aux nombres entiers

$$128, \qquad 117, \qquad 11.$$

(J. DELPONT, à Beaumont.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Baudot ; J. Bordas ; E. Charpentier ; H. Crozemarie ; L. Curt ; N. Delhotel ; A. Desplat ; E. Fourmon ; Fournel ; M. Fréchet ; P. Gervaiseau ; E. Héteau ; H. Janois ; A. Jeannel ; L. Lesieur ; E. Louvet ; L. Magne ; J. Ménechal ; A. Mirc ; Niel ; A. Noyelle ; M. Oger ; Raynaud ; L. Sylvestre ; H. Tourrette ; P. Tribier ; L. Vignes ; P. Vincent.]

ALGÈBRE

4238. — *Trouver x nombres entiers consécutifs dont la somme soit x^3.*

Ce problème n'est qu'un cas particulier du problème général suivant, que nous allons résoudre : *Trouver x nombres entiers consécutifs dont la somme soit x^k*, k étant un nombre entier positif.

Les x nombres entiers consécutifs

$$y, \quad y+1, \quad y+2, \quad .. , \quad y+x-1,$$

forment une progression arithmétique de raison 1. En vertu d'une formule connue, la somme des x termes de cette progression est

$$\frac{(y + y + x - 1)x}{2} = x^k,$$

d'où l'on tire

$$y = \frac{2x^{k-1} - x + 1}{2}. \tag{1}$$

y étant par hypothèse un nombre entier, le numérateur du second membre de (1) doit être pair. Ce numérateur est composé de trois termes dont le premier $2x^{k-1}$ est naturellement pair, $2x^{k-1} + 1$ est impair, donc le troisième terme x à retrancher de la somme des deux autres doit être impair.

x est impair et par conséquent de la forme

$$x = 2m + 1, \tag{2}$$

m étant un nombre entier quelconque pouvant prendre toutes les valeurs positives à partir de zéro.

Substituant (2) dans (1), on a

$$y = (2m + 1)^{k-1} - m. \tag{3}$$

Les deux équations (2) et (3) donnent la solution du problème.

Il est facile de voir que, quel que soit k, on obtient pour toute valeur numérique attribuée à m, une progression dont le premier terme est donné par (3) et le nombre de termes par (2).

Si l'on fait $k = 3$, on a le cas particulier proposé.

La solution de ce problème est donc

$$x = 2m + 1,$$

$$y = (2m + 1)^2 - m.$$

Pour $m = 0$, on a $x = 1$ et $y = 1$. La progression obtenue se réduit au terme unique 1.

Pour $m = 1$, on a $x = 3$ et $y = 8$. La progression obtenue comprend trois termes dont le premier est 8 et dont la somme est bien 3^3:

$$8 + 9 + 10 = 3^3.$$

m pouvant prendre toute valeur entière à partir de zéro, il s'ensuit que le problème proposé comporte un nombre infini de solutions.

(X. ROCHE, à Léré.)

[Ont résolu la même question : M^elles C. David ; M. Durand ; MM. Benbacite ; A. Bertrand ; E. Blanc ; J. Bordas ; H. Bosc ; N. Bourgogne ; P. Boutroux ; A. Bouzy ; A. Brodbeck ; Burgat ; V. Cambureanu ; A. Cotte ; A. Cremer ; L. Curt ; N. Delhotel ; G. Dobrovici ; G. Dupuy ; L. Durieux ; Eldin ; Feintuch ; E. Foucart ; P. G. ; L. Gourdet ; Th. Gramain ; R. Henry ; G. Hiernaux ; H. Janois ; J. Lagarde ; A. Larue ; H. Lefèvre ; P. Le Henaff ; H. Lévy ; A. Liron ; E. Louvet ; L. Magne ; A. Maitre ; E. Maitre ; H. Michel ; A. Mirc ; Pajot ; F. Pégorier ; P. Plisson ; R. Quéré ; M. Rivière ; Rousset ; E. Sevin ; P. Tarnier ; H. Valdenaire ; B. Varèse ; A. Vincent ; P. Vincent ; Watrin.]

GÉOMÉTRIE

4144. — *On donne un triangle* ABC *et, dans son plan, un point fixe* P *par lequel on mène une droite quelconque* Δ.

1° *Trouver sur* Δ *un point* X *tel que* $\overline{XA}^2 + \overline{XB}^2 + \overline{XC}^2$ *soit minimum.*

2° *Lieu du point* X *lorsque la droite* Δ *pivote autour de* P.

1° Joignons A, B, C à un point quelconque X' de Δ et au centre de gravité G du triangle.

D'après la relation connue (*)

$$\overline{X'A}^2 + \overline{X'B}^2 + \overline{X'C}^2 = \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 + 3\overline{GX'}^2,$$

la somme en question devient minimum en même temps que la distance GX′. Le point cherché X est donc le pied de la perpendiculaire abaissée de G sur la droite Δ.

2° Lorsque la droite Δ pivote autour de P, le sommet X de l'angle droit GXP décrit le cercle de diamètre GP. Tous les points du cercle font évidemment partie du lieu.

[L. WEISZ, à Pécs (Hongrie).]

AUTRE SOLUTION. — Soient A′, B′, C′ les projections de A, B, C sur la droite Δ.

On a

$$\overline{X'A}^2 = \overline{X'A'}^2 + \overline{AA'}^2,$$
$$\overline{X'B}^2 = \overline{X'B'}^2 + \overline{BB'}^2,$$
$$\overline{X'C}^2 = \overline{X'C'}^2 + \overline{CC'}^2.$$

Comme AA′, BB′, CC′ sont des segments constants, tout revient à chercher le point X correspondant au minimum de la somme

$$\overline{X'A'}^2 + \overline{X'B'}^2 + \overline{X'C'}^2.$$

En posant

$$\overline{A'C'} = \alpha, \quad \overline{B'C'} = \beta$$

et $\overline{X'C'} = \lambda,$

cette somme peut s'écrire

$$(\alpha - \lambda)^2 + (\lambda - \beta)^2 + \lambda^2$$

ou

$$3\lambda^2 - 2(\alpha + \beta)\lambda + \alpha^2 + \beta^2.$$

On est ainsi ramené à trouver le minimum d'un trinome du second degré. On sait que ce trinome devient minimum lorsque la variable λ est la demi-somme des deux valeurs de λ qui annulent le trinome.

On a donc dans ce cas

$$\lambda = \frac{\alpha + \beta}{3}.$$

En prenant le milieu I de A′B′, on a $\alpha + \beta = 2\mathrm{C'I}$, et par suite

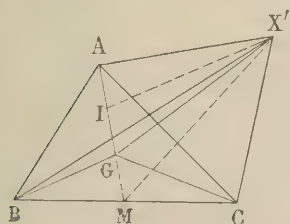
$$\mathrm{C'X} = \frac{2}{3}\,\mathrm{C'I},$$

ce qui montre que X est la projection du centre de gravité du triangle, situé aux $\frac{2}{3}$ de la médiane issue de C, à partir du sommet. Cette remarque permet de trouver le lieu de X lorsque la droite Δ pivote autour de P.

(LOÏC, lycée de Rennes.)

[Ont résolu la même question : MM. Bayor, à Castelnau ; C. Bourdet ; Carpentier-Javelot ; L. Debrun ; J. Delpont ; E. Foucart, à Alençon ; G. Hiernaux, école normale de Châlons-sur-Marne ; E. Montagut, à Périgueux ; J. Pastour ; P. Plisson, instituteur à Sens ; A. Rongier, école normale de Bourg ; L. Tarrin, à Moulins ; Watrin, à Charleville.]

(*) Cette relation peut s'établir ainsi :



Joignons X′ au milieu M de BC et au milieu I de AG. On a

$$\overline{X'A}^2 + \overline{X'G}^2 = 2\overline{AI}^2 + 2\overline{IX'}^2, \quad (1)$$
$$\overline{X'I}^2 + \overline{X'M}^2 = 2\overline{IG}^2 + 2\overline{GX'}^2, \quad (2)$$

d'où, en ajoutant (1) au double de (2),

$$\overline{X'A}^2 + 2\overline{X'M}^2 = 2\overline{AI}^2 + 4\overline{IG}^2 + 3\overline{GX'}^2.$$

D'ailleurs, comme

$$\overline{X'B}^2 + \overline{X'C}^2 = 2\overline{BM}^2 + 2\overline{X'M}^2,$$

on en déduit, en ajoutant de nouveau,

$$\begin{aligned}\overline{X'A}^2 + \overline{X'B}^2 + \overline{X'C}^2 &= 2\overline{AI}^2 + 4\overline{IG}^2 + 2\overline{BM}^2 + 3\overline{GX'}^2\\ &= 2\overline{IG}^2 + 2\overline{GM}^2 + 2\overline{BM}^2 + 3\overline{GX'}^2\\ &= \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 + 3\overline{GX'}^2.\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

4174. — *Autour d'un point P pris à l'intérieur d'un cercle O de rayon R, on fait tourner un angle droit dont les côtés rencontrent la circonférence en A et B.*

Des points O et P on abaisse sur la corde AB les perpendiculaires OD et PI. Démontrer que :

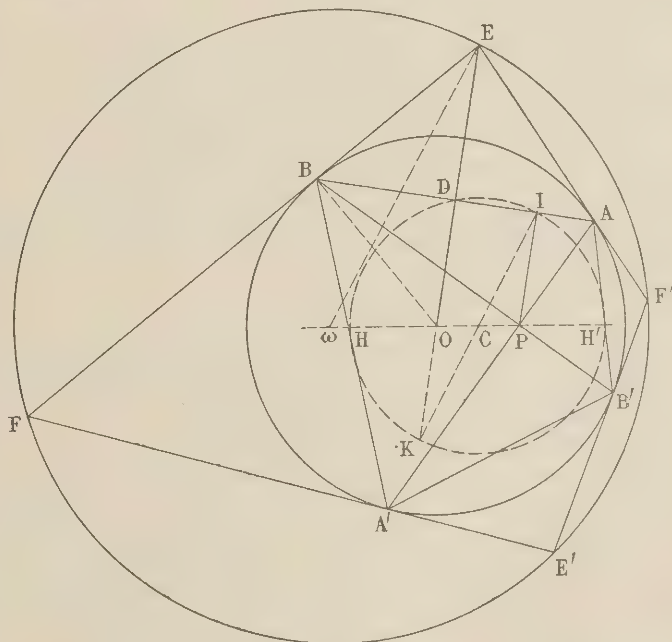
1° *Le produit* OD × PI *est constant ;*

2° *La corde* AB *enveloppe une ellipse ;*

3° *Il y a une infinité de quadrilatères qui sont à la fois circonscrits à l'ellipse et inscrits dans le cercle donné ;*

4° *Le lieu du pôle de* AB *par rapport au cercle donné est un cercle, et que par suite il y a une infinité de quadrilatères qui sont à la fois circonscrits au premier cercle et inscrits dans ce dernier.*

1° D'après la question 3946 (V. *Journal*, 21e année, p. 25), le lieu des points D et I est une circonférence ayant son centre au milieu C de OP et un rayon égal à $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - d^2}$, d désignant la distance OP.



Traçons cette circonférence, et soient H, H′ les points où elle rencontre la droite OP. L'angle inscrit IDO étant droit, sous-tend le diamètre IK ; les triangles CIP, COK ayant deux côtés égaux qui comprennent un angle égal sont égaux. Par suite, PI = OK, et l'on a

$$\mathrm{OD.PI} = \mathrm{OD.OK} = \mathrm{OH.OH'}.$$

Les points O, H, H′ étant fixes, ce résultat montre que le produit OD.PI est constant. Cette valeur constante a d'ailleurs pour expression

$$OH.OH' = (CH - CO)(CH' + CO) = \overline{CH}^2 - \overline{CO}^2$$
$$= \frac{2R^2 - d^2}{4} - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(R^2 - d^2).$$

2° On sait que dans une ellipse les foyers se projettent sur une tangente quelconque en deux points situés sur le cercle principal de la courbe. Il en résulte que la droite AB enveloppe une ellipse admettant le cercle C pour cercle principal et pour foyers les points O et P symétriques par rapport à C.

3° Soient A' et B' les seconds points de rencontre avec le cercle O de PA, PB prolongées. D'après ce qui précède, le quadrilatère ABA'B', dont les trois côtés BA', A'B', B'A sont vus de P sous un angle droit, est circonscrit à l'ellipse enveloppe de AB ; ce quadrilatère est d'ailleurs inscrit dans le cercle donné O.

Tous les quadrilatères dont les diagonales sont rectangulaires et se coupent au point P jouissent des mêmes propriétés.

4° Soit E le pôle de la corde AB par rapport au cercle O. Le triangle OBE étant rectangle en B, on a

$$OD.OE = R^2.$$

Le point E peut donc être regardé comme l'inverse du point D lorsqu'on prend le point O comme pôle et R^2 comme module d'inversion. Or le point D décrivant le cercle C, qui ne passe pas par le pôle O, la transformée de ce cercle est un cercle homothétique du cercle C par rapport à O ; son rayon s'obtient en menant par E la parallèle Eω à CK. Pour calculer sa valeur, remarquons que

$$\frac{\omega E}{CK} = \frac{OE}{OK} = \frac{OE.OD}{OK.OD} = \frac{OE.OD}{OH.OH'} = \frac{R^2}{\frac{1}{2}(R^2 - d^2)},$$

d'où
$$\omega E = \frac{R^2\sqrt{2R^2 - d^2}}{R^2 - d^2}.$$

Les cordes BA', A'B', B'A pouvant être considérées comme des positions particulières de la corde AB, leurs pôles F, E', F' sont également sur le cercle ω.

Il y a ainsi une infinité de quadrilatères tels que EFE'F' qui sont circonscrits au cercle O et inscrits dans le cercle ω.

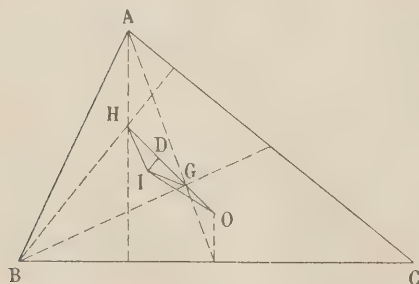
(Louis DEBRUN.)

[Ont résolu la même question : MM. C. Bourdet ; E. Foucart ; M. Legras ; A. Maitre ; J. Pastour ; P. Plisson ; M. Rebeix ; L. Vignes.]

4250. — *Soient* H *le point de concours des hauteurs et* G *le centre de gravité d'un triangle ;* I *et* O *les centres des cercles inscrit et circonscrit. Démontrer que*

$$\overline{HI}^2 + 2\overline{OI}^2 = 3\overline{IG}^2 + 6\overline{GO}^2.$$

On sait que, dans un triangle, le point de concours H des hauteurs, le centre de gravité G et le centre O du cercle circonscrit sont trois points en ligne droite et tels que HG = 2GO.



Joignons le point I aux trois points H, G, O et au milieu D de HG. En appliquant le théorème de la médiane aux triangles HIG et DIO, on a

$$\overline{HI}^2 + \overline{IG}^2 = 2\overline{ID}^2 + 2\overline{HD}^2,$$
$$\overline{ID}^2 + \overline{IO}^2 = 2\overline{IG}^2 + 2\overline{GO}^2.$$

Ajoutons ces deux égalités, après avoir multiplié la seconde par 2 ; il vient, en réduisant,

$$\overline{HI}^2 + 2\overline{IO}^2 = 3\overline{IG}^2 + 2\overline{HD}^2 + 4\overline{GO}^2,$$

ou, comme HD = GO,

$$\overline{HI}^2 + 2\overline{IO}^2 = 3\overline{IG}^2 + 6\overline{GO}^2.$$

C. Q. F. D.

Il convient de remarquer que la relation précédente subsiste pour un point I quelconque, situé ou non dans le plan du triangle.

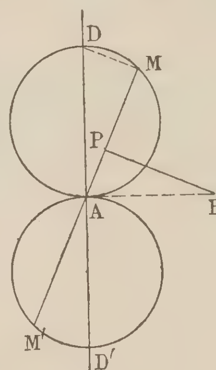
(L. MAGNE, école primaire supérieure de Belvès.)

[Ont résolu la même question : MM. Blanc ; H. Bosc ; G. Delahaye ; N. Delhotel ; G. Fauvernier ; Feintuch ; G. Fontaine ; E. Foucart ; P. Gervaiseau ; E. Guénard ; P. Guillemin ; G. Hiernaux ; Jouanneau ; P. Leduc ; H. Lévy ; M. Lœwy ; A. Maître ; de Mendiry ; Niel ; A. Riche ; E. Sinturel ; J. Sire ; C. Szabo ; L. Tarrin ; V. R. T. ; H. Valdenaire, H. Varinot ; A. Vergnole ; Vial ; P. Vincent ; M. Boutry ; A. Gourdin ; H. Martiny.]

4266. — *Étant donnés deux points* A *et* B, *on demande le lieu du point* M *tel que la distance* AM *soit dans un rapport donné avec la distance du point* B *à la droite* AM.

Soit M un point du lieu, tel que

$$\frac{AM}{BP} = \frac{m}{n},$$



BP étant la perpendiculaire abaissée sur AM.

En A élevons une perpendiculaire à AB ; soit D le point où elle rencontre la parallèle à BP issue de M. Les triangles PAB, MDA ayant les angles en A complémentaires, sont semblables ; donc

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AM}{BP}, \quad \text{d'où} \quad AD = \frac{m}{n} AB.$$

La distance AD étant constante, le point D est fixe, et le lieu de M est visiblement le cercle de diamètre AD.

En prenant la distance AM du côté opposé à P, en AM', on obtient un second cercle, symétrique du premier par rapport à A, et faisant également partie du lieu.

(BURGAT, école normale d'Albertville.)

[Ont résolu la même question : MM. Benhaïm ; E. Blanc ; Boutry ; A. Brodbeck ; G. Charpentier ; M. Drovin ; G. Dupuy ; G. Fontaine ; E. Foucart ; E. Garès ; L. Gourdet ; Grzybowski ; G. Hiernaux ; H. Janois ; Jouanneau ; H. Keefer ; Laguarigue de Survilliers ; Legrand ; H Lévy ; L. Magne ; E. Mathieu ; L. P., à A. ; V. Parizet ; J. Pastour ; P. Rolley ; M. Saget ; Tellier ; Tiret ; V. R. T. ; H. Varinot ; G. Vente ; Vial ; C. Szabó, à Györ ; A. Maitre].

PHYSIQUE ET CHIMIE

CONCOURS GÉNÉRAL DE SECONDE MODERNE (1897)

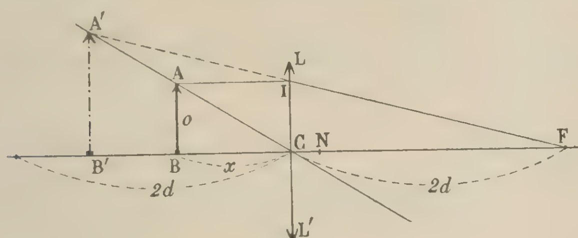
PHYSIQUE ET CHIMIE

Solutions par M. **Jacob Cahen**, élève du collège Chaptal, Lauréat du concours (1er prix).

4192. — *L'œil est placé à une distance invariable* d *d'un objet dont la grandeur est* o. *Entre l'œil et l'objet, et à une distance* x *de l'objet, on place une lentille convergente dont la distance focale est* 2d. *On demande : 1° de construire l'image de l'objet ; 2° de trouver la grandeur de cette image ; 3° de calculer la tangente de l'angle sous lequel l'œil voit l'image ; 4° de discuter la valeur de cette tangente lorsque* x *varie de* 0 *à* d.

Soient AB l'objet, que nous supposerons limité inférieurement par l'axe principal de la lentille LL' et N la position de l'œil.

1° Le rayon AI, parallèle à l'axe, se réfracte suivant la droite IF passant par le foyer F. Le rayon passant par le centre optique



C de la lentille ne subit aucune déviation. L'intersection A' des droites IF et AC est l'image du point A. En abaissant du point A une perpendiculaire sur l'axe principal, on a l'image A'B' de la droite AB.

2° On a
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C}{BC},$$
d'où l'on tire
$$A'B' = o \times \frac{B'C}{x}. \qquad (1)$$

La formule ordinaire des lentilles donne
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{B'C} = \frac{1}{2d}, \qquad \frac{1}{B'C} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2d}, \qquad B'C = \frac{2dx}{2d - x}.$$

Remplaçant dans (1) B'C par sa valeur, il vient
$$A'B' = \frac{o}{x} \times \frac{2dx}{2d - x} = \frac{2\,od}{2d - x}.$$

3° L'angle sous lequel l'œil voit l'image est $\widehat{A'NB'}$. Appelons ω cet angle; il est mesuré sensiblement par sa tangente, c'est-à-dire par le rapport $\frac{A'B'}{NB'}$.

Or
$$NB' = B'C + NB - BC = \frac{2dx}{2d - x} + d - x = \frac{x^2 - dx + 2d^2}{2d - x}.$$
On a donc
$$\operatorname{tg} \omega = \frac{A'B'}{NB'} = \frac{\frac{2\,od}{2d - x}}{\frac{x^2 - dx + 2d^2}{2d - x}} = \frac{2od}{x^2 - dx + 2d^2}.$$

4° Quand $x = 0, \qquad \operatorname{tg} \omega = \frac{2od}{2d^2} = \frac{o}{d}.$

Quand $x = d, \qquad \operatorname{tg} \omega = \frac{2od}{2d^2} = \frac{o}{d}.$

Quand $0 < x < d, \qquad \operatorname{tg} \omega = \frac{2od}{x^2 - dx + 2d^2}.$

Or $x^2 - dx + 2d^2 < 2d^2$, car $x^2 - dx < 0$, x étant $< d$. Donc quand x varie de 0 à d, $\operatorname{tg} \omega$ part de la valeur $\frac{o}{d}$, augmente d'abord, puis, à un certain moment, diminue jusqu'à $\frac{o}{d}$, lorsque $x = d$.

Cherchons pour quelle valeur de x $\operatorname{tg} \omega$ est maximum. Il faut pour cela que $x^2 - dx + 2d^2$ soit minimum ou que $x^2 - dx$ soit minimum. Or $x^2 - dx$ sera minimum quand $dx - x^2$ ou $x(d - x)$ sera maximum.

$x(d - x)$ est un produit de deux facteurs, de somme d constante. Il est maximum quand les deux facteurs sont égaux, c'est-à-dire quand $d = 2x$; alors $x = \frac{d}{2}$.

La valeur maxima de $\operatorname{tg} \omega$ est la valeur de $\operatorname{tg} \omega$ pour $x = \frac{d}{2}$. Calculons cette valeur. On a
$$x^2 - dx + 2d^2 = \frac{7d^2}{4},$$
ce qui donne
$$\operatorname{tg} \omega = \frac{2od}{\frac{7d^2}{4}} = \frac{8o}{7d}.$$

[Ont resolu la même question : MM. G. Blondin ; J. Bordas ; Cazemajou ; E. Charpentier ; Conrads ; Crozemarie ; L. Curt ; N. Delhotel ; P. Gervaiseau ; M. Georgi ; C. Labo ; A. Maitre ; J. Menéchal ; A. Mirc ; A. Nayel ; M. Oger ; A. Rongier ; E. Sevin; L. Sylvestre ; P. Vincent.]

4193. — *On fait passer un courant de chlore :*

1° Dans une dissolution étendue et froide de potasse caustique ;

2° Dans une dissolution concentrée et chaude de la même base.

Quel est le rapport des volumes de chlore qui, dans ces deux expériences, produiraient un même poids de chlorure de potassium ?

La solution chaude et concentrée ayant été saturée par 10^{lit} *de chlore, mesurés à 0° et sous la pression de* 76^{cm}, *on l'évapore jusqu'à siccité et on calcine la masse solide ainsi obtenue. Quel sera le volume du gaz qui se dégagera et quel sera le poids du résidu solide ?*

Poids atomique du potassium	39
Densité du chlore	2,44
Densité de l'hydrogène	0,0695

Quand la solution de potasse caustique est étendue et froide, on a la réaction


$$2Cl + 2KOH = ClOK + H^2O + KCl.$$

Quand la solution est concentrée et chaude, il se forme du chlorate de potassium suivant l'équation


$$6Cl + 6KOH = ClO^3K + 3H^2O + 5KCl.$$

1° Si dans la première réaction, on veut obtenir 5KCl, il faut prendre 10Cl. Donc le rapport des poids, et par conséquent des volumes de chlore qui, dans ces deux réactions, fourniraient un même poids de chlorure de potassium est $\frac{10}{6}$ ou $\frac{5}{3}$.

2° Quand on évapore la solution jusqu'à siccité, l'eau est chassée. Si l'on calcine ensuite la masse solide, ClO^3K se décompose en KCl et O^3. Donc le poids de gaz que Cl^6 a produit est O^3 et le poids du résidu solide est $5KCl + KCl = 6KCl$. Le volume occupé par O^3 est la moitié de celui qui est occupé par Cl^6 : donc le volume d'oxygène obtenu en employant 10^{lit} de chlore est de 5^{lit}.

3° En prenant 2,44 pour la densité du chlore, le poids atomique de ce gaz est $\frac{2,44}{0,0695} = 35,1$.

Puisque 6KCl sont produits par Cl^6, $35^{gr},1$ de chlore produiront $39 + 35,1 = 74^{gr},1$ de chlorure de potassium et 10^{lit} de chlore
$$\frac{74,1 \times 10 \times 2,44 \times 1,293}{35,1},$$
c'est-à-dire $66^{gr},50$ de ce sel.

[Ont résolu la même question : MM. J. Bordas ; L. Calais ; Crozemarie ; J. Delpont ; E. Héteau ; A. Maitre ; Morin-Letessier ; A. Mirc ; M. Oger.]

4267. — *Un courant donne au voltamètre 120^{cc} d'hydrogène par minute, à la température de $20°$ et sous la pression de 750^{mm}. La tension de la vapeur d'eau acidulée est 17^{mm} à cette température : calculer l'intensité du courant.*

On sait qu'un courant dont l'intensité est 1 ampère met en liberté 117^{mmc} d'hydrogène en une seconde, à $0°$ et sous la pression de 760^{mm}.

Le coefficient de dilatation des gaz est $\frac{1}{273}$.

(*Bacc. lettres-sciences, Caen, mars 1897.*)

La masse de l'hydrogène sec dégagé en une seconde par le courant est donnée par la formule

$$m = \frac{120}{60} \times a \times d \times \frac{75 - 1,7}{76} \times \frac{1}{1 + \frac{20}{273}},$$

a désignant la masse spécifique de l'air et d la densité de l'hydrogène à $0°$ sous la pression de 76^{cm}.

La masse de l'hydrogène sec dégagé en une seconde par un courant ayant 1 ampère d'intensité a pour valeur

$$m' = 0,117 \times a \times d.$$

L'intensité cherchée est donc

$$I = \frac{m}{m'} = \frac{2 \times a \times d \times \frac{75 - 1,7}{76} \times \frac{1}{1 + \frac{20}{273}}}{0,117 \times a \times d},$$

$$I = 15^{amp},36.$$

(Gernez Pfaumatter.)

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil ; Bayor ; F. Beynas ; E. Bonnet ; M. Boutry ; L. Cabrol ; E. Clément ; J. Coupat ; L. Curt ; N. Delhotel ; R. Durand ; J. Fourestier ; P. Frescal ; P. Guillemin ; J. H. Lafon ; E. Layes ; G. Leclerc ; E. Madet ; J. Maury ; A. Mirc ; F. Morel ; V. Parizet; Raynaud ; P. Rollert ; P. Ségala ; L. Tarrin ; V. R. T. ; H. Valdenaire ; A. Vary; P. Bonnet ; A. Grandguillotte ; E. Ménissier.]

CONCOURS DE 1897 (*Suite*).

ÉCOLE MILITAIRE D'INFANTERIE (Saint-Maixent).

Arithmétique.

I. — Comment varie un produit de deux facteurs si l'on augmente le plus petit d'une unité et si l'on diminue le plus grand d'une unité ?

II. — Réduire au même dénominateur les fractions

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{7}{8}, \frac{11}{24}.$$

III. — Une chambre occupée par 30 hommes mesure $12^m,50$ de long, $6^m,85$ de large, $4^m,02$ de haut ; déterminer le nombre de mètres, décimètres et centimètres cubes qui revient à chaque homme.

IV. — Trois voisins ont logé des troupes, savoir :
Le 1er, 10 hommes et 5 chevaux pendant 20 jours ;
Le 2e, 15 hommes et 30 chevaux pendant 15 jours ;
Le 3e, 50 hommes pendant 8 jours.
Il leur est alloué une indemnité de 400 fr. Faire la répartition de cette somme entre les trois voisins, sachant que l'allocation pour un homme équivaut à celle pour deux chevaux.

(*Durée : 3 heures.*)

Géométrie.

I. — Tout angle inscrit dans un cercle a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés. Différents cas.

II. — Tout point de la bissectrice d'un angle est équidistant des côtés de cet angle et réciproquement. — Les bissectrices des trois angles d'un triangle concourent en un même point.

III. — Avec un rayon donné, tracer une circonférence tangente à deux droites données.

IV. — Démontrer que la surface comprise entre deux circonférences concentriques est équivalente au cercle qui a pour diamètre une corde de la circonférence extérieure tangente à la circonférence intérieure.

(*Durée : 3 heures.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4276. — 1° Trouver la plus petite valeur de x telle que $x^2 - 1$ soit divisible par 1898.

2° Pour quelles valeurs de l'exposant y le nombre $3^y - 1$ est-il divisible par 1898 ?

(A. Goulard.)

4277. — Montrer que si l'on a

$$x^3 + y^3 + z^3 = x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z = 1,$$

le produit xyz est nul.

4278. — Dans un triangle ABC, on projette le point de concours H des hauteurs en E, F sur les deux bissectrices de l'angle A. Démontrer que le milieu D de BC et les deux points E, F sont en ligne droite.

4279. — On considère deux cercles O, O' se coupant en A et B. On joint A et B à un point quelconque C du cercle O' par deux droites qui rencontrent le cercle O en D et E. Démontrer que la médiane du triangle CDE issue de C passe par un point fixe.

(M. Rebeix, lycée du Puy.)

4280. — Sur une droite AB on prend un point C tel que

$$AB.BC = \overline{CA}^2 ;$$

de B et C comme centres avec AC pour rayon on décrit deux cercles qui se coupent en D. Démontrer que le triangle ABD est isocèle, les angles à la base étant égaux au double de l'angle au sommet.

4281. — Les droites joignant les extrémités A et B d'une corde fixe AB d'une circonférence au milieu de la droite qui joint le milieu de la corde à un point quelconque M de la circonférence rencontren MA et MB en P et Q. Lieux des points P et Q.

(J. Pastour, à Antibes.)

4282. — Calculer les trois côtés d'un triangle, connaissant l'angle A, le périmètre $2p$ et la surface S.

(*Baccalauréat, Marseille.*)

4283. — Un vase cylindrique en verre est gradué en parties d'égale capacité. Il contient du mercure qui, à la température de 0°, arrive à la division 1150. A quelle température faut-il porter l'appareil pour que le mercure arrive à la division 1151 ? Coefficient de dilatation cubique du verre, 0,000026 ; coefficient de dilatation absolue du mercure, 0,00018.

(*Bacc. lettres-sciences, Paris, octobre 1897.*)

4284. — Deux pendules électriques de longueur l, d'abord en contact, sont chargés d'une certaine quantité d'électricité. Ils s'écartent alors de la verticale et chacun d'eux fait un angle α avec cette direction.

On demande de calculer la charge x de chaque balle de poids p, le poids des fils suspendant ces balles étant négligeable.

(*Bacc. lettres-math., Tunis, juin 1897.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

22e Année. — N° 8. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 15 Janvier 1898.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

CONCOURS GÉNÉRAL DE PREMIÈRE-SCIENCES

(1897)(*).

4158. — *Un disque circulaire peut rouler, mais rouler seulement et non glisser, sur une droite horizontale xy. Une tige AB, homogène, égale en longueur au diamètre du disque, repose par son extrémité A sur la droite xy et s'appuie tangentiellement sur le disque.*

Entre quelles limites doit être comprise l'inclinaison θ de la tige AB sur la droite xy pour que le système de la tige et du disque soit en équilibre? On suppose essentiellement que le glissement de la tige AB sur le disque implique un frottement, ainsi que le glissement du point A sur la droite xy. On supposera égaux les coefficients de ces deux frottements et on représentera leur valeur commune par $\operatorname{tg}\varphi$, φ désignant un angle de moins de 45°.

Montrer que l'équilibre deviendrait impossible, eu égard aux dimensions de la tige, si le coefficient de frottement était moindre que $\frac{1}{2}$.

Équilibre du disque. — Le disque est soumis à son poids et à l'action de la barre en M.

Comme son poids passe par le point de contact I, il faudra, pour qu'il soit en équilibre, que l'action de la barre en M passe aussi par I.

Équilibre de la barre. — Les forces en action sur la barre AB sont : son poids P appliqué au milieu G, la réaction du disque, dont la droite d'action est MI, comme nous venons de le voir dans l'étude du disque, et la réaction de xy sur l'extrémité A.

Par conséquent, si l'on décompose le poids P de la barre suivant HM et HA, on obtiendra deux composantes qui, pour l'équilibre, devront être détruites par les réactions du disque et de la droite xy.

Or, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, d'après la théorie du frottement, que les angles

$$\text{HMN} = \frac{\theta}{2}, \qquad \text{HAD} = \alpha,$$

soient inférieurs ou égaux à l'angle commun φ du frottement. Nous aurons donc

$$\frac{\theta}{2} \leqslant \varphi, \qquad (1)$$

$$\alpha \leqslant \varphi. \qquad (2)$$

Je dis que l'inégalité (1) entraîne l'inégalité (2). En effet, nous avons visiblement

$$\text{AK} = \text{KB}',$$

d'où

$$\text{AK} < \text{KI},$$

ou bien

$$\text{HK}.\operatorname{tg}\alpha < \text{HK}.\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},$$

c'est-à-dire

$$\alpha < \frac{\theta}{2}.$$

Ceci posé, il reste l'unique condition

$$\frac{\theta}{2} \leqslant \varphi,$$

d'où

$$\theta \leqslant 2\varphi.$$

Quand θ deviendra égal à 2φ, la barre sera sur le point de glisser sur le disque.

Enfin, la barre étant assujettie à reposer tangentiellement sur le disque, il résulte pour θ une limite inférieure.

Plaçons-nous dans le cas limite où la barre est tangente en son extrémité B ; nous avons

$$\operatorname{tg}.\widehat{\text{OAI}} = \frac{\text{R}}{2\text{R}} = \frac{1}{2},$$

d'où

$$\widehat{\text{OAI}} = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{2},$$

et l'angle $\frac{\theta}{2}$ doit être supérieur à $\widehat{\text{OAI}}$.

En résumé, l'angle θ est délimité comme il suit :

$$2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{2} \leqslant \theta \leqslant 2\varphi.$$

Pour que cette double inégalité soit possible, nous voyons que l'on doit avoir

$$2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{2} \leqslant 2\varphi,$$

d'où

$$\frac{1}{2} \leqslant \operatorname{tg}\varphi.$$

[M. A. Maitre a résolu la même question.]

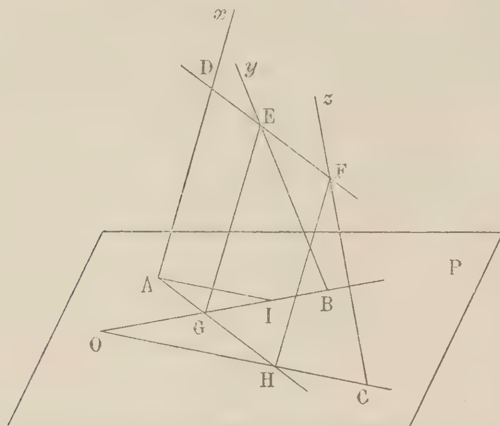
ALGÈBRE

4070. — *Mener une droite parallèle à un plan donné et rencontrant trois droites données.*

Soit P le plan donné; Ax, By, Cz les trois droites, qui coupent le plan P aux points A, B, C; et DEF la droite cherchée, parallèle au plan P, et coupant respectivement Ax, By et Cz aux points

(*) Il n'a pas été attribué de prix, en 1897, au concours général de Première-Sciences, pour les Mathématiques.
La solution suivante est extraite du recueil de *Problèmes de Mécanique* de M. Caronnet, 2e fascicule, *Cinématique et Dynamique*, qui est en cours d'impression.

D, E, F. Menons du point E la droite EG parallèle à Ax. Cette droite détermine avec By le plan yBO, qui coupe le plan P suivant la droite BO, et est parallèle à Ax. De même, si nous menons du point F la droite FH parallèle à Ax, nous aurons déterminé le plan zCO qui coupe le plan P suivant la droite CO et est aussi parallèle à Ax. Les deux droites CO, BO sont déterminées, et la ligne AGH est parallèle à la droite cherchée DEF. Tout revient à déterminer cette droite AGH.



Pour cela, soit $OB = a$, $OC = b$; $OG = x$, $OH = y$.

Dans le triangle EGB les trois angles sont connus; par suite le rapport des côtés EG, GB est déterminé : posons $\frac{GB}{EG} = \lambda$.

De même, le triangle FCH dont les angles sont connus nous donnera $\frac{CH}{HF} = \lambda'$. Divisons ces deux égalités membre à membre, en remarquant que $EG = HF$; nous obtiendrons

$$\frac{GB}{CH} = \frac{\lambda}{\lambda'} = m; \qquad \text{ou} \qquad \frac{a-x}{b-y} = m. \qquad (1)$$

Si maintenant nous menons la ligne AI parallèle à OC, et si nous appelons p et q les deux longueurs connues AI et IO, les deux triangles semblables AGI et OGH nous donnent

$$\frac{AI}{OH} = \frac{GI}{OG}; \qquad \text{ou} \qquad \frac{p}{y} = \frac{q-x}{x}.$$

D'où l'équation

$$px = qy - xy. \qquad (2)$$

L'équation (1) nous donne $y = \frac{mb - a + x}{m}$ et en portant cette valeur dans l'équation (2), et réduisant, nous obtenons pour déterminer x l'équation du second degré

$$x^2 - (a - mb + q - mp)x - q(mb - a) = 0.$$

Le problème peut donc admettre deux solutions; et la connaissance de x suffit pour déterminer AGH, et par conséquent le résoudre. A. D.

4199. — Si $a+b+c+d+e+f=0$
et $a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3=0$,
on a

$$(a+c)(a+d)(a+e)(a+f) = (b+c)(b+d)(b+e)(b+f).$$

(*Examens de Cambridge.*)

De la première hypothèse on déduit

$$a+b = -(c+d+e+f) \qquad (1)$$

et

$$(a+b)^3 = -(c+d+e+f)^3$$

ou, en développant dans chaque membre,

$$a^3+b^3+3ab(a+b) = \left\{\begin{array}{l} -(c^3+d^3+e^3+f^3) \\ -3(c+d)(e+f)(c+d+e+f) \\ -3cd(c+d)-3ef(e+f). \end{array}\right\} \qquad (2)$$

De la seconde hypothèse on conclut de même

$$a^3+b^3 = -(c^3+d^3+e^3+f^3).$$

En tenant compte de cette dernière relation, la relation (2) devient

$$\left.\begin{array}{l} ab(a+b) = -(c+d)(e+f)(c+d+e+f) \\ \qquad -cd(c+d)-ef(e+f). \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Cela posé, développons l'expression

$$(a+c)(a+d)(a+e)(a+f) - (b+c)(b+d)(b+e)(b+f);$$

le terme $cdef$, qui figure de part et d'autre avec des signes contraires, disparaît, et il reste

$$\begin{array}{l}(a^4-b^4)+(a^3-b^3)(c+d+e+f) \\ \quad +(a^2-b^2)(cd+ce+cf+de+df+ef) \\ \quad +(a-b)(cde+cdf+cef+def).\end{array}$$

Un binome de la forme $a^n - b^n$ est toujours divisible par $a-b$; on peut donc écrire

$$\begin{array}{l}(a-b)[(a^2+b^2)(a+b)+(a^2+ab+b^2)(c+d+e+f) \\ +(a+b)(cd+ce+cf+de+df+ef)+(cde+cdf+cef+def)].\end{array}$$

Remplaçons au deuxième terme entre les crochets le coefficient $c+d+e+f$ par son équivalent tiré de (1), $-(a+b)$, et réciproquement, au troisième terme, le coefficient $a+b$ par son équivalent $-(c+d+e+f)$; il vient

$$(a-b)[-ab(a+b)-(c+d+e+f)(c+d)(e+f)-cd(c+d)-ef(e+f)].$$

Portons enfin dans cette expression la valeur équivalente de $ab(a+b)$ tirée de la relation (3); il viendra :

$$\begin{array}{l}(a-b)[(c+d)(e+f)(c+d+e+f)+cd(c+d)+ef(e+f) \\ \quad -(c+d)(e+f)(c+d+e+f)-cd(c+d)-ef(e+f)],\end{array}$$

expression identiquement nulle. C. Q. F. D.

(A. BERTRAND, à Azillanet.)

[M. Fréchet, lycée Buffon, a résolu la même question.]

4268. — *Résoudre l'équation*

$$(x+b+c)(x+c+a)(x+a+b)(a+b+c) = abcx.$$

Si l'on fait

$$a+b+c = S, \qquad a+b = C, \qquad a+c = B, \qquad b+c = A,$$

l'équation proposée devient d'abord

$$(x+A)(x+B)(x+C)S = (S-A)(S-B)(S-C)x;$$

puis, en développant aux deux membres et réduisant,

$$(x+S)[Sx(x-S+A+B+C)+ABC] = 0,$$

et enfin, en remarquant que $A+B+C = 2S$,

$$(x+S)(Sx^2+S^2x+ABC) = 0.$$

Les racines sont donc

$$x=-S, \quad x = \frac{-S^2+\sqrt{S^4-4SABC}}{2S}, \quad x = \frac{-S^2-\sqrt{S^4-4SABC}}{2S},$$

ou, en revenant des auxiliaires aux données,

$$x = -(a+b+c),$$

$$x = \frac{-(a+b+c)^2+\sqrt{(a+b+c)^4-4(a+b+c)(a+b)(a+c)(b+c)}}{2(a+b+c)},$$

$$x = \frac{-(a+b+c)^2-\sqrt{(a+b+c)^4-4(a+b+c)(a+b)(a+c)(b+c)}}{2(a+b+c)}.$$

Remarque. — On résoudrait à l'aide du même artifice les

équations

$$(x-b-c)(x-a-c)(x-a-b)(a+b+c)=abcx,$$

$$(x+b+c)(x+a+c)(x+a+b)(a+b+c) = (a+2b+2c)(b+2a+2c)(c+2a+2b)x,$$

$$(x-b-c)(x-a-c)(x-a-b)(a+b+c) = (a+2b+2c)(b+2a+2c)(c+2a+2b)x.$$

Les solutions sont pour chacun de ces cas :

$$x=\mathrm{S},\qquad x=\frac{\mathrm{S}^2+\sqrt{\mathrm{S}^4-4\mathrm{SABC}}}{2\mathrm{S}},\qquad x=\frac{\mathrm{S}^2-\sqrt{\mathrm{S}^4-4\mathrm{SABC}}}{2\mathrm{S}};$$

$$x=\mathrm{S},\qquad x=\frac{-3\mathrm{S}^2+\sqrt{9\mathrm{S}^4+4\mathrm{SABC}}}{2\mathrm{S}},\qquad x=\frac{-3\mathrm{S}^2-\sqrt{9\mathrm{S}^4+4\mathrm{SABC}}}{2\mathrm{S}};$$

$$x=-\mathrm{S},\qquad x=\frac{3\mathrm{S}^2+\sqrt{9\mathrm{S}^4+4\mathrm{SABC}}}{2\mathrm{S}},\qquad x=\frac{3\mathrm{S}^2-\sqrt{9\mathrm{S}^4+4\mathrm{SABC}}}{2\mathrm{S}}.$$

(A. BERTRAND, à Azillanet.)

[Ont résolu la même question : MM. Bourrières ; R. Van Cauwenberghe ; A. Cremer ; G. Digne ; Dobrovici ; F. Geltzenlichter ; L. Gourdet ; A. Maître ; F. Morel ; F. Pégorier ; E. Sinturel ; C. Szabo ; A. Wiart.]

4269. — *Sachant que*

$$x+y+z=a,$$
$$x^2+y^2+z^2=2a^2,$$
$$x^3+y^3+z^3=3a^3,$$

calculer $x^4+y^4+z^4$.

$$\mathrm{X}^3+p\mathrm{X}^2+q\mathrm{X}+r=0$$

étant l'équation qui admet pour racines x, y, z, on sait que l'on a, en général,

$$\Sigma.x^m+p\Sigma.x^{(m-1)}+q\Sigma.x^{(m-2)}+r\Sigma.x^{(m-3)}=0;$$

on déduit, en particulier, de cette relation,

$$\Sigma.x^4+p\Sigma.x^3+q\Sigma.x^2+r\Sigma.x=0$$

ou, en remplaçant $\Sigma.x^3$, $\Sigma.x^2$, $\Sigma.x$ par leurs valeurs données,

$$\Sigma.x^4+3pa^3+2qa^2+ra=0.$$

On a encore, en appliquant la même formule,

$$3a^3+2pa^2+qa+3r=0,$$

et, en vertu des relations connues entre les coefficients et les racines,

$$p=-\Sigma.x=-a,$$

$$q=\Sigma.xy=\frac{(\Sigma.x)^2-\Sigma.x^2}{2}=\frac{a^2-2a^2}{2}=-\frac{a^2}{2}.$$

Pour avoir $\Sigma.x^4$, il suffira donc d'éliminer p, q, r entre les quatre relations

$$\Sigma.x^4+3pa^3+2qa^2+ra=0,$$
$$3a^3+2pa^2+qa+3r=0,$$
$$p+a=0,$$
$$q+\frac{a^2}{2}=0.$$

En portant dans la seconde relation les valeurs de p et q tirées des deux dernières, on obtient la valeur de r,

$$r=-\frac{a^3}{6},$$

et, les trois valeurs de p, q, r substituées dans la première, on a enfin, après réduction,

$$\Sigma.x^4=\frac{25a^4}{6}.$$

Remarque. — Il est aisé de voir que la formule qui nous a permis de calculer $\Sigma.x^4$, nous donnerait aussi de proche en proche $\Sigma.x^5$, $\Sigma.x^6$, ..., $\Sigma.x^m$.

(A. BERTRAND, à Azillanet.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Ardin-Delteil ; L. Barberot ; Boutignon ; G. Brets ; M. Deschamps ; G. Digne ; Feintuch ; Geltzenlichter ; L. Gourdet ; A. Jeannel ; A. Maître ; A. Mirc ; F. Morel ; F. Pégorier ; A. Sarteel ; E. Sinturel ; A. Smantanescu ; C. Szabo ; H. Thouvenot ; A. Wiart.]

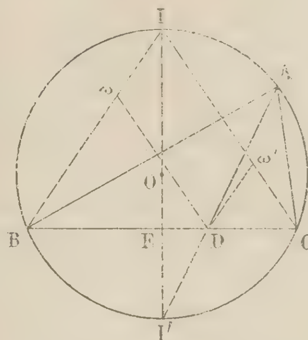
GÉOMÉTRIE

4241. — *Dans un triangle* ABC, *on mène la bissectrice intérieure* AD *de l'angle* A, *limitée au côté* BC.

Démontrer que la somme des rayons des cercles circonscrits aux triangles ABD *et* ACD *est égale à la distance de l'un des sommets* B *ou* C *au milieu* I *de l'arc* BAC *du cercle circonscrit au triangle* ABC.

Que devient la propriété lorsque AD *est bissectrice extérieure?*

Soient ω, ω' les centres des cercles circonscrits aux triangles ABD et ACD.



Joignons ω et I aux points B et C. Les angles BωD, BIC sont égaux comme égaux chacun à l'angle A : le premier est en effet le double de l'angle inscrit BAD, moitié de l'angle A. Par suite, les triangles isocèles BωD, BIC ayant les angles aux sommets égaux, sont semblables, et l'on a

$$\widehat{\omega\mathrm{BD}}=\widehat{\mathrm{IBD}},\qquad \widehat{\omega\mathrm{DB}}=\widehat{\mathrm{ICB}},$$

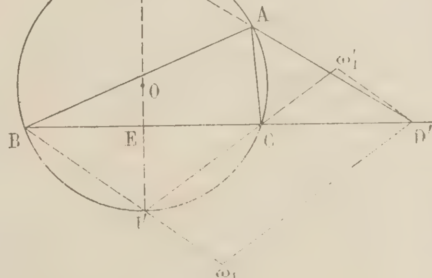
ce qui montre que les trois points I, ω, B sont en ligne droite et que la droite ωD est parallèle à IC. Par analogie, les trois points I, ω', C sont en ligne droite et la droite ω'D est parallèle à IB.

Il en résulte que la figure IωDω' est un parallélogramme, et ses côtés opposés sont égaux ; on peut alors écrire

$$\omega\mathrm{B}+\omega'\mathrm{D}=\omega\mathrm{B}+\omega\mathrm{I}=\mathrm{BI}=\mathrm{CI}.$$

C. Q. F. D.

En considérant la bissectrice extérieure AD', on établit comme plus haut que la figure I'ω_1D'ω_1' est un parallélogramme.



Dans ce cas, on a

$$\mathrm{BI'}\text{ ou }\mathrm{I'C} = \mathrm{B}\omega_1-\mathrm{I'}\omega_1 = \mathrm{B}\omega_1-\omega_1'\mathrm{D'},$$

c'est-à-dire que la distance de l'un des sommets B ou C au milieu I' de l'arc BC est égale à la différence des rayons des cercles circonscrits aux triangles ABD' et ACD'.

(Marcel Legras, lycée Saint-Louis.)

Solution trigonométrique. — Si l'on désigne par r et r' les rayons des cercles ABD et ACD, on a

$$2r=\frac{\mathrm{BD}}{\sin\frac{\mathrm{A}}{2}},\qquad 2r'=\frac{\mathrm{CD}}{\sin\frac{\mathrm{A}}{2}},$$

d'où, en ajoutant et divisant par 2,

$$r+r'=\frac{\mathrm{BC}}{2\sin\frac{\mathrm{A}}{2}}=\frac{\mathrm{BE}}{\sin\frac{\mathrm{A}}{2}}=\mathrm{BI}.$$

Dans le cas de la bissectrice extérieure AD′, on aurait

$$2r_1 = \frac{BD'}{\sin\left(90^\circ + \frac{A}{2}\right)}, \qquad 2r'_1 = \frac{CD'}{\sin\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)},$$

d'où, en observant que

$$\sin\left(90^\circ + \frac{A}{2}\right) = \sin\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = \cos\frac{A}{2},$$

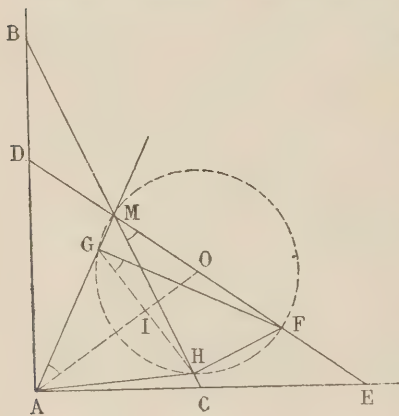
$$r_1 - r'_1 = \frac{BC}{2\cos\frac{A}{2}} = \frac{BE}{\cos\frac{A}{2}} = BI'.$$

(Ch. Bourdet, lycée de Niort.)

[Ont résolu complètement cette question : MM. L. Bedos ; E. Blanc ; A. Cotte ; P. Dégeilh ; A. Delcambre ; G. Dobrovici ; E. Félix ; E. Foucart ; G. Fontaine ; A. Grosz ; G. Hiernaux ; Jouanneau ; Jouve ; P. Leduc ; P. Le Hénaff ; E. Le Maigre ; A. Liron ; L. Magne ; A. Maitre ; de Mendiry ; A. Mirc ; A. Nayel ; F. Pégorier ; H. Quéré ; M. Rebeix ; M. Rivière ; E. Routier ; J. Sire ; P. Tribier ; Auguste V. ; G. Delahaye : l'ont résolue partiellement : MM. E. Baudot ; J. Bordas ; E. Charpentier ; L. Debrun ; N. Delhotel ; Feintuch ; P. Gervaiseau ; H. Janois ; H. Lévy ; V. R. T. ; H. Valdenaire.]

4261. — *Par le milieu* M *de l'hypoténuse d'un triangle rectangle* ABC, *on fait passer une sécante* DE, *limitée aux côtés de l'angle droit ; on prend* EF = DM ; *on tire la droite* AM ; *on abaisse du point* F *les perpendiculaires* FG, FH *sur* AM *et* BC. *Démontrer que* AG = AH.

Première solution. — Les angles droits MGF et MHF ont leurs sommets sur un cercle ayant son centre au milieu O de MF. Je dis que les droites AO et GH sont perpendiculaires en un point I.



En effet, le quadrilatère inscriptible MGHF donne d'abord

$$\widehat{AGI} = \widehat{MFH};$$

d'autre part, en considérant successivement les triangles isocèles MAC, OAE et le triangle MCE, on peut écrire

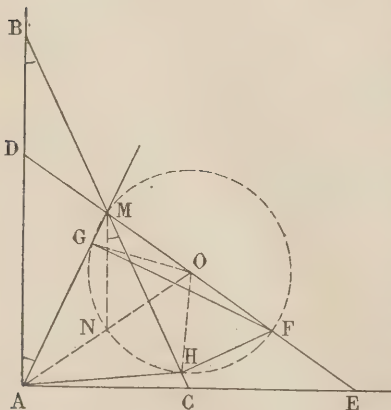
$$\widehat{GAI} = \widehat{MAC} - \widehat{OAE} = \widehat{MCA} - \widehat{OEA} = \widehat{CME}.$$

Les triangles AGI et MFH ayant ainsi deux angles égaux sont semblables, et par suite l'angle AIG est égal à l'angle droit MHF.

La droite AO étant perpendiculaire à la corde GH du cercle O passe par le milieu de cette corde, de sorte que le point A est équidistant des points G et H.

(M. Drovin, école normale de Châlons.)

Seconde solution. — Tirons les rayons OG, OH du cercle MGHF. Nous allons établir que la droite AO est bissectrice de l'angle GOH, ce qui entraînera l'égalité des triangles AOG, AOH (angles égaux compris entre côtés égaux) et par suite l'égalité des côtés AG, AH.



Joignons M au point de rencontre N de AO avec l'arc GH. Les triangles isocèles OMN, ODA étant semblables, MN est parallèle à DA, et l'on a

$$\widehat{AMN} = \widehat{BAM}.$$

Mais dans le triangle isocèle ABM,

$$\widehat{AMC} = 2\widehat{BAM};$$

donc

$$\widehat{AMC} = 2\widehat{AMN},$$

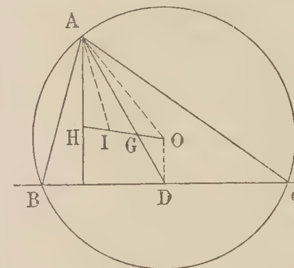
ce qui montre que MN est bissectrice de l'angle inscrit AMC, et par suite, d'après les mesures des angles, NO bissectrice de l'angle au centre GOH.

(A. Gipoulou, instituteur adjoint, à Puy-l'Evêque.)

[Ont résolu la même question : MM. Bayor ; Benhaïm ; L. Blanc ; L. Bolzinger ; Boutry ; A. Brodbeck ; Burgat ; H. Charpentier ; L. Cussenot ; P. Dégeilh ; A. Delcambre ; E. Foucart ; G. Hiernaux ; Laguarigue de Survilliers ; E. Layes ; H. Lefèvre ; Legrand ; A. Lescure ; H. Lévy ; J. Lire ; H. Martiny ; J. Massip ; E. Mathieu ; A. Mirc ; M. Rebeix ; M. Rivière ; E. Rousselot ; A. Sarteel ; R. Sudre ; P. Tarnier ; P. Bonnot ; P. Le Hénaff ; A. Maître ; Ohannès Tarikian, à Ada-Bazar.]

4262. — *Construire un triangle connaissant un sommet, le point de concours des hauteurs et le centre de gravité.*

On sait que le point de concours H des hauteurs, le centre de gravité G et le centre O du cercle circonscrit sont trois points en ligne droite et tels que HG = 2GO. On obtiendra donc le centre O du cercle circonscrit en prolongeant HG d'une longueur $GO = \frac{HG}{2}$; en traçant alors le cercle O passant par A, on aura le cercle circonscrit au triangle cherché. On déterminera ensuite le côté BC en remarquant que ce côté est perpendiculaire à la hauteur AH et rencontre la médiane AG en un point D tel que $GD = \frac{AG}{2}$.



La seule condition de possibilité est que le point D soit compris dans le cercle O, ce qui suppose

$$OD < OA.$$

Cherchons à exprimer OD et OA en fonction des côtés du triangle connu AHG.

On a d'abord

$$OD = \frac{AH}{2}.$$

Ensuite, en joignant A au milieu I de HG, on a dans le triangle AIO,

$$\overline{AO}^2 + \overline{AI}^2 = 2\overline{AG}^2 + 2\overline{GO}^2, \tag{1}$$

et, dans le triangle AHG,

$$\overline{AH}^2 + \overline{AG}^2 = 2\overline{AI}^2 + 2\overline{IG}^2. \tag{2}$$

En doublant l'égalité (1) et l'ajoutant à (2), il vient

$$2\overline{AO}^2 + \overline{AH}^2 = 3\overline{AG}^2 + 6\overline{GO}^2,$$

d'où, en remplaçant GO par $\frac{HG}{2}$,

$$\overline{AO}^2 = \frac{3}{2}\overline{AG}^2 + \frac{3}{4}\overline{HG}^2 - \frac{\overline{AH}^2}{2}.$$

La condition OD < OA devient alors

$$\frac{\overline{AH}^2}{4} < \frac{3}{2}\overline{AG}^2 + \frac{3}{4}\overline{HG}^2 - \frac{\overline{AH}^2}{2}$$

ou

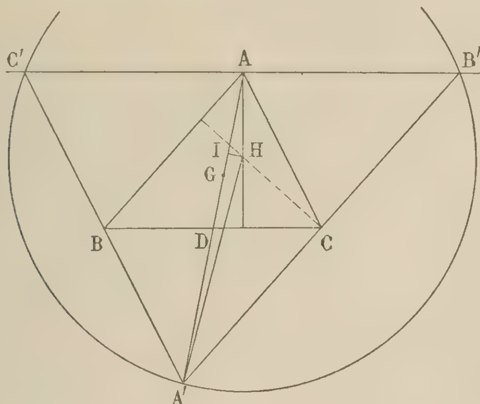
$$\overline{AH}^2 < 2\overline{AG}^2 + \overline{HG}^2.$$

(L. Tarrin, instituteur-adjoint à Saint-G. de V.)

Autre solution. — Supposons le problème résolu, et soit ABC le triangle cherché. Par chacun des sommets A, B, C, menons une parallèle au côté opposé ; on forme ainsi le triangle A′B′C′, dans

lequel G est le centre de gravité et H le centre du cercle circonscrit (les hauteurs HA et HC sont en effet perpendiculaires aux milieux A, C des côtés B'C', B'A').

On est alors ramené à construire le triangle A'B'C' connaissant le pied A de la médiane issue de A', le centre de gravité G et le centre H du cercle circonscrit.



Pour faire cette construction, prolongeons AG d'une longueur $GA' = 2AG$, puis de H comme centre, avec HA' pour rayon, traçons un cercle qui coupe en B' et C' la perpendiculaire élevée en A à AH.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit qu'on ait

$$HA < HA',$$

ou, en projetant H en I sur AA',

$$IA < IA'.$$

Or $$IA = AH \cos HAG$$

et $$IA' = 3AG - IA.$$

Donc $$AH \cos HAG < 3AG - AH \cos HAG,$$

d'où $$\cos HAG < \frac{3}{2} \frac{AG}{AH}.$$

Ainsi l'angle HAG doit être supérieur à un certain angle α tel que

$$\cos \alpha = \frac{3}{2} \frac{AG}{AH}.$$

En particulier, lorsque cet angle est obtus, le problème est toujours possible.

En remplaçant, dans la condition précédente, cos HAG par sa valeur en fonction des côtés du triangle AGH, on retrouve la condition obtenue plus haut.

(E. ROSENBERG, collège Rollin.)

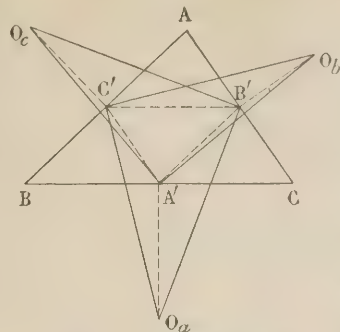
[Ont résolu la même question: MM. J. F. d'Avillez; G. Bernard; A. Bertrand; P. Bonnot; Boutry; Garès; A. Gourdin; R. Henry; Lachenaud; Laguarigue de Survilliers; Legrand; H. Lévy; J. Martin; A. Peyret; J. Peyret; P. Plisson; M. Rebeix; F. Rey; M. de Ronchonnot; J. Sire; V. R. T.; P. Vincent.]

4270. — *Soient* O_a, O_b, O_c *les centres des carrés construits sur les côtés* BC, CA, AB *d'un triangle et* A', B', C' *les milieux de ces côtés. On a*

$$\overline{O_cA'}^2 + \overline{O_aB'}^2 + \overline{O_bC'}^2 = \overline{O_cB'}^2 + \overline{O_aC'}^2 + \overline{O_bA'}^2.$$

Première solution. — La droite O_aA', perpendiculaire à BC, l'est aussi à la droite C'B', parallèle à BC. Par suite, les points O_a et A' appartiennent au lieu des points dont la différence des carrés des distances à B' et C' est constante, et l'on a

$$\overline{O_aB'}^2 - \overline{O_aC'}^2 = \overline{A'B'}^2 - \overline{A'C'}^2.$$



De même,

$$\overline{O_bC'}^2 - \overline{O_bA'}^2 = \overline{B'C'}^2 - \overline{B'A'}^2$$

et

$$\overline{O_cA'}^2 - \overline{O_cB'}^2 = \overline{C'A'}^2 - \overline{C'B'}^2.$$

En ajoutant ces trois égalités, on tombe sur la relation énoncée. On voit en outre que cette relation subsiste quand O_a, O_b, O_c sont trois points quelconques appartenant aux perpendiculaires élevées aux milieux des côtés BC, CA, AB.

(Ernest FOUCART.)

Seconde solution. — D'après la première solution de la question 4240 (p. 39), les triangles $A'C'O_c$ et $A'B'O_b$ sont égaux, comme ayant deux côtés égaux et perpendiculaires. Il en résulte que

$$O_cA' = O_bA'.$$

De même $$O_aB' = O_cB',$$
$$O_bC' = O_aC'.$$

La relation proposée devient alors évidente.

(E. LÉOTARD, lycée de Dijon.)

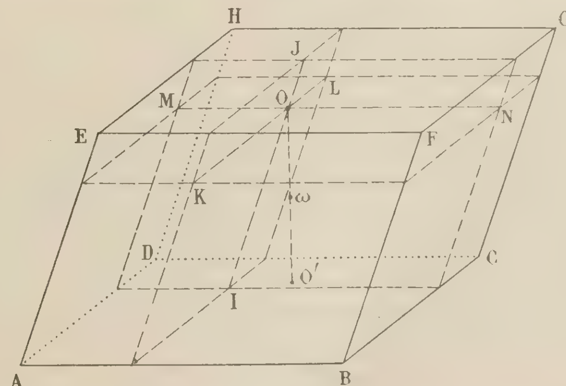
[Ont résolu la même question: MM. Amboise; J. F. d'Avillez; P. Barroué; E. Biévez; L. Bolzinger; M. Boucly; J. Camus; E. Chaineau; E. Chambaud; A. Cremer; G. Delahaye; L. Delavergnas; M. Deschamps; Dobrovici; G. Dupuy; Féintuch; L. Gourdet; A. Gourdin; R. Guillemin; C. Guinet; G. Hiernaux; H. Janois; H. Jouanneau; H. Keefer; E. Layes; P. Leduc; E. Le Maigre; F. Leulliot; H. Lévy; A. Maître; R. Manen; C. Marrot; A. Mirc; F. Montaland; F. Morel; J. Pailleret; M. Rebeix; B. Ribes; P. Rolley; E. De Rycker; G. Sarrassat; E. Sinturel; J. Sire; C. Szabo; H. Thouvenot; H. Varinot; Villemagne; L. Curt; J. Méhu.]

MÉCANIQUE

4038. — *On divise un parallélépipède en huit parties par des plans menés parallèlement aux faces et passant par un point* O *intérieur au solide.*

Trouver le centre des poids placés aux sommets du solide donné et respectivement proportionnels aux volumes des parallélépipèdes partiels aboutissant à ces sommets.

Considérons le parallélépipède ABCDEFGH. Soient IJ, KL, MN



les intersections deux à deux des trois plans menés par le point intérieur O parallèlement aux faces.

Les poids placés aux sommets A et E sont par hypothèse proportionnels aux volumes des parallélépipèdes de diagonales OA

et OE ; ces parallélépipèdes ayant une base commune sont entre eux comme leurs hauteurs, proportionnelles elles-mêmes à OI et OJ. Par suite les poids considérés ont pour *centre* un point de AE situé à une distance OJ de A et à une distance OI de E ; ce point appartient visiblement au plan symétrique du plan OMK par rapport au centre ω du parallélépipède.

On verrait de même que ce plan contient les points d'application des résultantes des trois couples de poids B et F, C et G, D et H.

Le centre des huit poids appliqués au solide se trouve ainsi dans un plan symétrique du plan OMK par rapport à ω. Par analogie, il se trouve également dans les deux plans symétriques des plans OKI et OMI par rapport à ω. Ces trois plans se coupent en un point O′, symétrique de O par rapport à ω, et répondant à la question.

(L. CURT, école normale de Bourg.)

[Ont résolu la même question : MM. L. Aviotte ; Bayor, à Castelnau ; P. Bresson ; E. Michaud et N. Mollon, pens[t] de Valbenoîte, à S[t]-Etienne ; C. Carteron et G. Fauvernier, lycée de Dijon ; G. Costey ; R. Henry, instituteur à Maizières (Aube) ; G. Hiernaux, école normale de Châlons-sur-Marne ; A. Lochard ; Massol, à Tours ; Plessix, lycée Janson-de-Sailly ; L. Raynaud, à Toulon ; A. Rongier, école normale de Bourg.]

PHYSIQUE

4231. — *Un tube en U vertical à branches égales de* 10^{cq} *de section est ouvert d'un côté et fermé de l'autre par un piston sans frottement et sans poids. Il contient du mercure qui s'élève au même niveau dans les deux branches et, dans la branche fermée,* 200^{cc} *d'air.*

On charge le piston de 952^{gr} *et l'on demande : 1° la nouvelle pression x de l'air de la branche fermée ; 2° la différence de niveau y du mercure dans les deux branches ; 3° la hauteur z dont s'est abaissé le piston. La pression extérieure, au moment de l'expérience, est équilibrée par une colonne de mercure de* 76^{cm} *de hauteur.*

Densité du mercure : 13,6.

(*Bacc. lettres-math., Paris, novembre 1897.*)

1° La nouvelle pression de l'air dans la branche fermée fait équilibre à la pression atmosphérique augmentée des 952^{gr} dont on a chargé le piston. L'augmentation de pression produite par les 952^{gr} sur 1^{cq} est représentée par une colonne de mercure ayant pour hauteur

$$\frac{952}{13,6 \times 10} \quad \text{ou} \quad 7^{cm}.$$

La nouvelle pression x de l'air dans la branche fermée est donc de $76 + 7$ ou 83^{cm}.

2° Cette pression étant supérieure à la pression dans l'autre branche, le mercure descendra dans la branche fermée et montera dans la branche ouverte.

Le niveau du mercure dans la branche fermée supporte une pression égale à 83^{cm} par centimètre carré. Sur le même plan horizontal dans la branche ouverte, la pression est $y + 76$.

On a $83 = y + 76$, d'où $y = 7^{cm}$.

3° Pour obtenir la nouvelle hauteur h de l'air dans la branche fermée, il suffit d'appliquer la loi de Mariotte :

$$76 \times 200 = 10\,h \times 83.$$

On tire de cette équation,

$$h = 18^{cm},313.$$

Le niveau du mercure dans la branche fermée a baissé de $\frac{7}{2}$ ou $3^{cm},5$, ce qui a fait descendre le piston de $3^{cm},5$; et comme la hauteur de l'air a diminué de $20 - 18,313$ ou $1^{cm},687$, le piston est descendu en réalité de $3^{cm},5 + 1,687 = 5^{cm},187$.

(A. MIRC.)

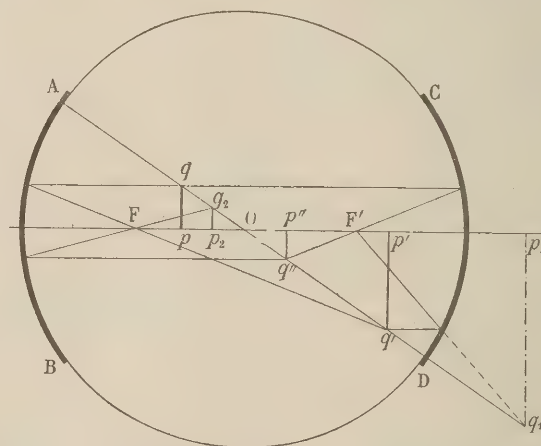
[Ont résolu la même question : MM. P. Alcan ; J. M. Chalvin ; L. Curt ; J. Delavergnas ; M. Georgi ; Th. Gramain ; J. Fourestier ; Le Hénaff ; H. Lefèvre ; A. Liron ; A. Maître ; M. Manseau ; J. Maury ; E. Ménissier ; Niel ; G. Pfaumatter ; L. Perret ; Raynaud ; P. Tribier.]

4255. — *Dans une sphère de grand diamètre 2r, on découpe deux miroirs concaves identiques AB et CD diamétralement opposés. Un objet pq est placé près du centre ; construire géométriquement les deux images dues à deux réflexions successives, c'est-à-dire l'image* p_1q_1 *provenant des rayons réfléchis d'abord sur AB puis ensuite sur CD, et l'image* p_2q_2 *provenant des rayons réfléchis d'abord sur CD puis ensuite sur AB.*

On supposera ensuite $Op = \frac{r}{4}$ *et on calculera les distances au centre O des images* p_1q_1 *et* p_2q_2.

(*Bacc. lettres-math., Lille, juillet 1897.*)

1° L'objet pq, par une première réflexion sur le miroir AB, donne une image réelle, renversée, $p'q'$, qui vient se former entre le miroir CD et son foyer F′.



La position de cette image est donnée par la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{r}, \qquad (1)$$

dans laquelle p et p' désignent les distances de l'objet et de son image au miroir AB. On en déduit

$$p' = \frac{pr}{2p - r}, \qquad (2)$$

de sorte que $p'q'$ est à une distance du miroir CD égale à

$$2r - p' = \frac{r(3p - 2r)}{2p - r}. \qquad (3)$$

Dans la seconde réflexion sur CD, tout se passe comme si les rayons, partant de $p'q'$, se réfléchissaient sur CD. On obtient ainsi la première image demandée p_1q_1, virtuelle, droite par rapport à $p'q'$, renversée et amplifiée par rapport à pq.

La position de cette image est donnée par la relation

$$\frac{2p - r}{r(3p - 2r)} - \frac{1}{p'_1} = \frac{2}{r},$$

dans laquelle p'_1 est la distance de p_1q_1 au miroir CD.

On obtient

$$p'_1 = \frac{r(3p-2r)}{3r-4p}, \qquad (4)$$

et pour la distance D_1 de p_1q_1 au centre O,

$$D_1 = r + p'_1 = \frac{r(r-p)}{3r-4p}. \qquad (5)$$

2° L'objet pq, par une première réflexion sur le miroir CD, donne une image réelle renversée, $p''q''$, entre le centre de courbure O et le foyer principal F' du miroir CD.

La position de cette image est donnée par la relation

$$\frac{1}{2r-p} + \frac{1}{p''} = \frac{2}{r}, \qquad (6)$$

p'' étant la distance de l'image $p''q''$ au miroir CD.

La formule (6) donne

$$p'' = \frac{r(2r-p)}{3r-2p},$$

et la distance de $p''q''$ au miroir AB a pour valeur

$$2r - p'' = \frac{r(4r-3p)}{3r-2p}. \qquad (7)$$

Dans la seconde réflexion sur AB, tout se passe comme si les rayons partant de $p''q''$ se réfléchissaient sur AB. On obtient ainsi la seconde image demandée p_2q_2, réelle, renversée par rapport à $p''q''$, droite par rapport à pq.

La position de cette image est donnée par la relation

$$\frac{3r-2p}{r(4r-3p)} + \frac{1}{p''_1} = \frac{2}{r},$$

dans laquelle p''_1 est la distance de p_2q_2 au miroir AB.

On obtient

$$p''_1 = \frac{r(4r-3p)}{5r-4p}, \qquad (8)$$

et, pour la distance D_2 de p_2q_2 au centre O,

$$D_2 = r - p''_1 = \frac{r(r-p)}{5r-4p}. \qquad (9)$$

3° Si l'on suppose $Op = \frac{r}{4}$, on a $p = \frac{3r}{4}$.

Cette valeur introduite dans les formules (5) et (9) donne

$$D_1 = \infty, \qquad D_2 = \frac{r}{8}.$$

Le premier résultat est confirmé par la valeur de p' tirée de la formule (2). On trouve $p' = \frac{3r}{2}$, c'est-à-dire que l'image $p'q'$ se forme au foyer principal F' du miroir CD.

Remarque. — L'emploi de la formule de Newton conduit à des résultats identiques tout en rendant les calculs plus rapides.

(ARDIN-DELTEIL.)

[Ont résolu la même question : MM. L. P. A. ; A. Audibert ; G. Bernard ; L. Bigot ; A. Bouzy ; A. Broutin ; E. Brossard ; C. Cauchy ; G. Charpentier ; L. D. ; R. Dautry ; N. Delhotel ; G. Digne ; G. Dupuy ; Ept ; L. Florentin ; P. Frescal ; L. Gamet ; Geltzenlichter ; M. Georgi ; R. Georgi ; A. Gipoulou ; P. Guillemin ; G. Hiernaux ; G. Lalou ; A. Larcher ; L. Layes ; H. Lefèvre ; E. Madet ; H. Miconnet ; A. Mirc ; Mongin ; Morel ; V. Parizet ; A. Perrissond ; J. Petit ; Quilichini ; A. Rongier ; R. Sudre ; L. Sylvestre ; H. Valdenaire ; Vial ; H. Villetard.]

CONCOURS DE 1897 (*Suite*).

ÉCOLE MILITAIRE DE L'ARTILLERIE ET DU GÉNIE

(Versailles.)

I. — Division de l'Artillerie et du Génie.

(Candidats de l'artillerie et du génie.)

Arithmétique.

I. — Théorie de la conversion des fractions ordinaires en fractions décimales et inversement.

Trouver les fractions ordinaires génératrices des fractions décimales

0,2323..... et 0,3654654.....

Démontrer et énoncer la règle générale.

II. — Démontrer que le produit de trois nombres entiers consécutifs est toujours divisible par 6.

III. — Dans une colonne de corps d'armée marchant à raison de 4^{km} en 50 minutes, le général commandant l'avant-garde envoie à 8 heures 15 minutes du matin un vélocipédiste porter un avis au général commandant le corps d'armée, qui marche à $5^{km},300^{m}$ derrière lui. Le vélocipédiste marche à 15^{km} à l'heure en allant et à 12^{km} à l'heure en revenant ; il est retenu 5 minutes par le général commandant le corps d'armée. On demande à quelle heure il sera revenu auprès du général commandant l'avant-garde ; on tiendra compte de ce que la colonne tout entière s'arrête de 8 heures 50^{m} à 9 heures.

IV. — A quel taux est placé un capital de $1703^{fr},95$ qui rapporte $49^{fr},25$ en 8 mois ?

(*3 décembre, de 1 h. 1/2 à 5 h. 1/2.*)

Algèbre.

I. — Résoudre et discuter le système

$$ax + by + c = 0,$$
$$a'x + b'y + c' = 0.$$

II. — Démontrer que la moyenne arithmétique entre deux nombres positifs est plus grande que la moyenne géométrique.

III. — Faire la somme des carrés et celle des cubes des racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

IV. — On paie 74^{fr} en donnant 19 pièces, les unes de 5^{fr}, les autres de 2^{fr}. Combien en donne-t-on de chaque espèce ?

Généraliser pour une somme S qu'on paie avec n pièces ayant les unes une valeur a, les autres une valeur b et donner les conditions de possibilité.

(*4 décembre, de 1 h. 1/2 à 5 h. 1/2.*)

Géométrie.

I. — Comment trouve-t-on le rapport de la circonférence au diamètre ? Quel est ce rapport ?

II. — Volume du tronc de pyramide à bases parallèles ; énoncé et démonstration.

III. — Trouver la valeur de la surface comprise entre deux circonférences concentriques ; montrer qu'elle est égale à celle d'un cercle ayant pour diamètre une corde de la grande circonférence tangente à la circonférence intérieure.

IV. — On donne deux plans qui se coupent et on considère une droite AB perpendiculaire à l'un d'eux ; on projette cette droite sur l'autre plan. Démontrer que cette projection est perpendiculaire à l'intersection des deux plans.

(*6 décembre, de 1 h. 1/2 à 5 h. 1/2.*)

Trigonométrie.

I. — Exprimer $1 \pm \sin x$ et $1 \pm \cos x$ en fonction des lignes trigonométriques de l'angle $\frac{x}{2}$.

II. — Calculer les éléments et l'aire d'un triangle rectangle dont on connaît un côté, b, et l'angle adjacent C :

$$b = 3479{,}65, \qquad C = 41^\circ 87' 54''.$$

(*Trigonométrie et Topographie, 6 décembre, de 7 h. 1/2 à 11 h. 1/2.*)

II. — Division du train des équipages.

(Candidats de l'artillerie, du génie, de la cavalerie et du train des équipages militaires.)

Arithmétique.

I. — Démontrer que quand on divise le dividende et le diviseur par un même nombre le quotient ne change pas.

II. — Convertir en fraction décimale la fraction $\frac{58134}{87691}$.

III. — Une barre de fer de $15^{m},66$ s'allonge de $8^{mm},323$ pour une augmentation de température de $4^{o},1$. On demande de combien s'allongera un rail de $5^{m},98$ pour une augmentation de température de $15^{o},3$.

IV. — Un sous-officier a droit à une pension de retraite de 750^{fr} après 25 ans de service. Quelle est la part proportionnelle qui lui est due après 16 ans 4 mois 25 jours de service ?

(*9 décembre, de 1 h. 1/2 à 5 h. 1/2.*)

Géométrie.

I. — Le rapport des surfaces de deux polygones semblables est égal au rapport des carrés des côtés homologues.

II. — Lieu des points d'un plan également distants de deux droites qui se coupent en dehors des limites de la feuille.

III. — On partage le diamètre d'une circonférence en n parties égales ; sur chacune de ces parties comme diamètre on décrit une circonférence.

1° Démontrer que la somme des longueurs de ces n circonférences est égale à la longueur de la grande circonférence ;

2° Quel est le rapport de la surface comprise entre une des petites circonférences et la grande circonférence à la surface du grand cercle ?

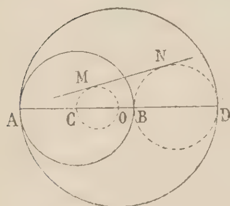
(*Géométrie et Topographie, 10 décembre, de 1 h. 1/2 à 5 h. 1/2.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4285. — Trouver un nombre carré parfait de huit chiffres, sachant que les deux nombres formés par les quatre premiers chiffres et les quatre autres chiffres sont consécutifs.

(F. Pégorier.)

4286. — Etant donnés deux cercles O et C tangents intérieurement au point A, on considère les points de rencontre B et D de ces cercles avec le diamètre commun. Démontrer que :



1° Le point A appartient à la tangente commune extérieure aux deux cercles décrits sur CO et BD comme diamètres ;

2° Si M et N sont les points de contact respectifs de la tangente commune, on a AN = 2AM. Déterminer en outre le point de rencontre A′ des tangentes communes intérieures. Conditions de réalité.

(Benjamin Hémois.)

4287. — Trouver le lieu des points d'un plan tels que leur distance à un point A soit moyenne proportionnelle entre leur distance à une droite XY et une longueur donnée k.

(E. Rosenberg, collège Rollin.)

4288. — En un point quelconque M d'une ellipse on mène la tangente et la normale à la courbe ; ces deux droites rencontrent le petit axe aux points P et Q. Par le point Q où la normale rencontre le petit axe, on mène une nouvelle tangente à l'ellipse qui touche la courbe au point M′ :

1° Démontrer que la normale au point M′ passe par le point P ;

2° Déduire de cette propriété la solution du problème suivant : Par un point du petit axe de l'ellipse, mener les normales à cette courbe.

(E. Sinturel et F. Morel, collège de Cusset.)

4289. — Un triangle ABC dont le rayon du cercle circonscrit est double de celui du cercle inscrit, est équivalent au triangle qui a pour sommets les milieux des arcs BAC, CBA, ACB du cercle circonscrit.

(J. Pastour, à Antibes.)

4290. — Si les trois côtés d'un triangle $a > b > c$ forment une progression arithmétique de raison r :

1° On a $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$.

2° Le rayon du cercle inscrit est égal à $\frac{2r}{3\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} - \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)}$.

Cas particulier où l'angle A est droit.

(A. Goulard.)

4291. — Complément aux propriétés du tétraèdre isocèle (voir la note de M. Vacquant, dans le dernier numéro) :

Appelons a, b, c les côtés de l'une quelconque des faces égales ABC ; A, B, C les angles de cette face ; α, β, γ les médianes qui joignent les milieux des côtés a, b, c aux milieux des arêtes opposées du tétraèdre ; φ, ψ, θ les angles dièdres ayant pour arêtes a, b, c ; V le volume du tétraèdre ; S l'aire ABC. On aura :

1. $$\beta^2+\gamma^2 = a^2,\quad \gamma^2+\alpha^2 = b^2,\quad \alpha^2+\beta^2 = c^2 ;$$

2. $$\frac{\sin\varphi}{\sin A} = \frac{\sin\psi}{\sin B} = \frac{\sin\theta}{\sin C} ;$$

3. $$V = \frac{\alpha\beta\gamma}{3} = \frac{abc}{3}\sqrt{\cos A \cos B \cos C} ;$$

4. $$S = \frac{\sqrt{\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2}}{2},$$

d'où $$\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2 = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4} ;$$

5. Si on appelle p la puissance de l'un des sommets du tétraèdre par rapport à la sphère inscrite,

$$p = \frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)} = \frac{(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2)}{4(\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2)}.$$

(J. G.)

4292. — Calculer la distance focale d'une lentille, sachant qu'elle donne une image de $0^{mm},8$ de hauteur d'un homme ayant $1^{m},76$ et qu'un coureur faisant 63^{km} en $5^{h}\,20^{m}$, et partant de la lentille, rencontre cet homme au bout de $1^{h}\,31^{m}\,15^{s}$.

(*Bacc. lettres-math., Toulouse, juillet 1896.*)

4293. — On donne n éléments de pile identiques dont la résistance intérieure est r. Quelle doit être la résistance extérieure R pour qu'il n'y ait aucun avantage à les associer en série ou en batterie ?

On donne $r = 2$ ohms, $R = 10$ ohms. Quelle est la disposition la plus avantageuse ?

(*Bacc. lettres-sciences, Alger, juin 1897.*)

ERRATUM. — Une transposition typographique nous a fait dénaturer le sens des considérations qui accompagnent la solution de la question **4235** (page 44). Voici ce qu'il faut lire :

Remarque I. — La véritable condition qui donne lieu aux conséquences établies ci-dessus, est que le nombre n ne soit divisible ni par 2 ni par 3, c'est-à-dire soit simplement premier avec 6. En tenant compte de cette observation et de ce que les conclusions auxquelles nous parvenons sont plus étendues que celles de l'énoncé, on doit modifier ce dernier comme il suit : etc.

Il faut, en outre, mettre à la suite de l'article, en renvoi et hors texte, la note suivante :

(A) On démontre facilement que chacun de ces deux nombres n'est que simplement pair ; en effet, tout nombre impair n étant précédé ou suivi d'un nombre divisible par 4, est nécessairement de la forme $m.4 \pm 1$. Toutes ses puissances paires seront donc de la forme $m.4+1$; par suite, le nombre immédiatement supérieur à chacune de ces puissances $(n^{2k}+1)$, sera lui-même de la forme $m.4+2$, c'est-à-dire simplement pair.

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

22e Année. — N° 9. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES PARIS, le 1er Février 1898.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements .... Librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (1897)

Solution par M. **J. Cernesson**, professeur au lycée de Sens.

4139. — I. *On donne dans l'espace trois droites* (A), (B), (C).

On mène un plan ϖ *perpendiculaire à* (A); *soient* P, Q, R *les points où ce plan rencontre respectivement les droites* (A), (B), (C). *Soient* Q' *le point où la droite* (A) *est rencontrée par le plan perpendiculaire à* (C) *mené par le point* Q *et* R' *le point où la même droite* (A) *est rencontrée par le plan perpendiculaire à* (B) *mené par le point* R. *Démontrer que la longueur du segment* Q'R' *reste la même quand le plan* ϖ *se déplace parallèlement à lui-même.*

II. *Existe-t-il un plan coupant les trois droites* (A), (B), (C) *en des points* A, B, C *tels que les droites* BC, CA, AB *soient respectivement rectangulaires avec les droites* (A), (B), (C)?

S'il existe un pareil plan, il en existe une infinité.

III. *Existe-t-il un point* M *tel que si l'on désigne par* M' *son symétrique par rapport à la droite* (A) *et par* M'' *le symétrique de* M' *par rapport à la droite* (B), *les points* M *et* M'' *soient symétriques par rapport à la droite* (C)?

S'il existe un tel point M, *il en existe une infinité. Quel est alors leur lieu?*

On examinera le cas particulier où les trois droites (A), (B), (C) *ont un point commun et le cas plus particulier encore où elles forment un trièdre trirectangle.*

IV. *Dans le cas particulier où les droites* (A), (B) *ont un point commun* O *et où la droite* (C) *est perpendiculaire au plan de ces deux droites sans passer au point* O, *on déterminera le lieu des pieds des hauteurs du triangle* ABC *et le lieu du point de rencontre de ces hauteurs. L'un des pieds est fixe.*

Première partie. — Figurons les deux droites (B) et (C), leur perpendiculaire commune FG, leurs projections (B_1) et (C_1) sur le plan parallèle aux deux droites passant par le milieu de FG. Soient Q et R les points où un plan ϖ, perpendiculaire à (A), rencontre respectivement B et C (*fig.* 1).

Pour mener par Q un plan perpendiculaire à C, il suffit de mener QQ_1 perpendiculaire à (B_1) et Q_1Q_2 perpendiculaire à (C_1); la droite (C_1), contenue dans le plan (B_1C_1), est perpendiculaire aux deux droites Q_1Q_2 et QQ_1, donc au plan QQ_1Q_2; il en est par suite de même de (C).

Pour la même raison, le plan RR_1R_2, obtenu en menant RR_1 perpendiculaire sur (C_1) et R_1R_2 perpendiculaire sur (B_1), est le plan perpendiculaire à (B), mené par R.

Ces deux plans, passant par QQ_1 et RR_1, sont tous deux perpendiculaires au plan (B_1C_1); leurs traces R_1R_2 et Q_1Q_2 sur ce plan se coupant en ω, leur intersection est une droite ωx, perpendiculaire au plan (B_1C_1), par suite parallèle à la perpendiculaire commune FG; c'est donc une droite de direction fixe.

Soit O le point de rencontre de ωx et du plan ϖ; appelons Oy et Oz les droites OQ et OR. La droite Oy est l'intersection du plan ϖ, perpendiculaire par hypothèse à (A), avec le plan QQ_1Q_2, perpendiculaire par construction à (C); elle est donc perpendiculaire en direction à (C) et (A); c'est donc aussi une droite de direction fixe. — De même on verrait que Oz conserve une direction fixe comme étant perpendiculaire à (B) et (A). Les arêtes du trièdre $Oxyz$ se déplacent donc parallèlement à elles-mêmes lorsque le plan ϖ se déplace en restant perpendiculaire à (A).

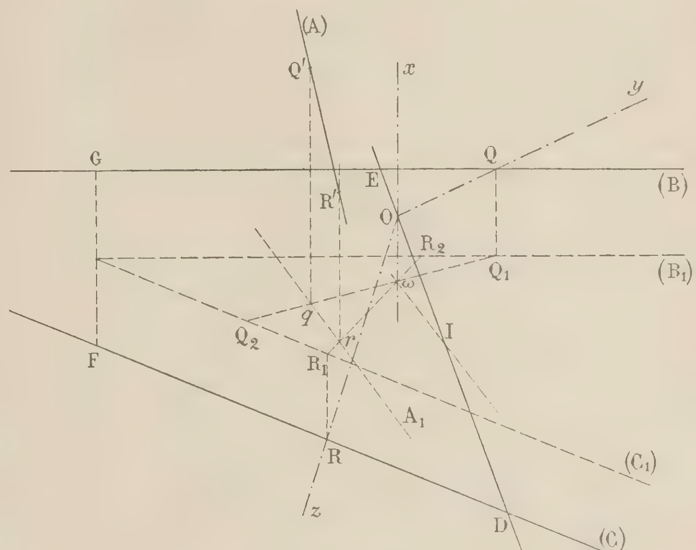


Fig.

Le plan (B, Oy) est fixe comme passant par la droite fixe (B) et restant parallèle à la direction fixe Oy; de même le plan (C, Oz) est fixe; ces deux plans se coupent donc suivant une droite fixe DE, rencontrant le plan (B_1C_1) en I, et passant évidemment par O.

D'après ce qui a été dit, Oz et Ox sont tous deux perpendiculaires à B; donc le plan (BOy) est le plan mené par l'arête Oy du trièdre $Oxyz$ perpendiculairement à la face xOz; de même le plan (C, Oz) est le plan mené par Oz perpendiculairement à la face yOz. Or on sait que, si par chaque arête d'un trièdre on mène le plan perpendiculaire à la face opposée, ces trois plans se coupent suivant une même droite. Dans notre figure, cette droite n'est autre que DE. Le plan (Ox, DE) est donc perpendiculaire au plan yOz, c'est-à-dire au plan ϖ. Par suite il est parallèle à la droite (A).

Comme, d'autre part, ce plan (Ox, DE) est perpendiculaire au plan (B_1C_1), la projection (A_1) de (A) sur le plan (B_1C_1) est parallèle à la trace ωI du plan sur (B_1C_1). Par suite, le plan ϖ se déplaçant, le point ω décrit la droite ωI parallèle à (A_1); les

droites ωR_1 et ωQ_1 se déplacent parallèlement à elles-mêmes, et par suite interceptent sur (A_1) une longueur *constante qr*; cette longueur est donc la projection d'un segment *constant* $Q'R'$ de (A).

Or Q' et R' sont les points où (A) est rencontrée par les plans QQ_1Q_2 et RR_1R_2 ; la première proposition est ainsi démontrée.

Deuxième partie. — Supposons qu'il existe un plan, rencontrant les droites (A), (B), (C) en trois points A, B, C, tels que les droites BC, CA, AB soient respectivement perpendiculaires à (A), (B), (C) (*fig.* 2).

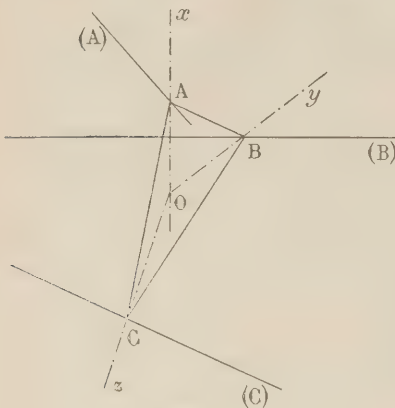


Fig. 2

Puisque BC est perpendiculaire sur (A), on peut mener par BC un plan ϖ perpendiculaire à (A); si de plus on mène par le point B le plan perpendiculaire à (C) et par le point C le plan perpendiculaire à (B), ces trois plans déterminent le trièdre $Oxyz$ de la première partie.

Mais puisque BA est perpendiculaire à (C) et CA perpendiculaire à (B), ces deux derniers plans contiennent respectivement BA et CA, donc le point A se trouve sur l'intersection Ox de ces deux plans. La droite (A) rencontre donc Ox, et les trois plans (A, Ox), (B, Oy), (C, Oz) se coupent suivant une droite DE.

Donc: *Lorsqu'il existe un plan* ABC, *rencontrant* (A), (B), (C) *en des points* A, B, C *tels que* BC, CA, AB *soient perpendiculaires sur* (A), (B), (C), *les trois plans menés par chaque droite parallèlement à la perpendiculaire commune aux deux autres se coupent suivant une même droite.*

Réciproquement, cette condition étant remplie, on peut trouver une infinité de plans tels que ABC.

En effet, menons un plan quelconque ϖ perpendiculaire sur (A), rencontrant (B) et (C) en B et C. Par B menons le plan perpendiculaire à (C), par C le plan perpendiculaire à (B): ces deux plans déterminent avec ϖ le trièdre $Oxyz$. Le plan (B, Oy) est le plan mené par (B) parallèlement à la perpendiculaire commune à (A) et (C); le plan (C, Oz) est le plan mené par (C) parallèlement à la perpendiculaire commune à (A) et (B); si DE est l'intersection de ces deux plans, le plan (Ox, DE), parallèle par construction à la plus courte distance de (B) et (C), contient par hypothèse la droite (A), laquelle rencontre donc Ox en A.

Mais alors, AB contenue dans le plan xOy perpendiculaire à (C), est elle-même perpendiculaire à (C) ; de même AC est perpendiculaire à (B). Le plan ABC remplit donc les conditions énoncées.

Le plan ϖ mené perpendiculairement à A étant arbitraire, il existe donc une infinité de plans tels que ABC.

Troisième partie. — Supposons qu'il existe un point M tel que, si l'on désigne par M' son symétrique par rapport à la droite (A), par M″ le symétrique de M' par rapport à (B), les points M et M″ soient symétriques par rapport à (C) (*fig* 3).

Les côtés MM', M'M″, M″M du triangle MM'M″ seront rencontrés en leurs milieux A, B, C par les droites (A), (B), (C). La droite (A), perpendiculaire par hypothèse à MM', le sera aussi à sa parallèle BC; de même (B) et (C) seront respectivement perpendiculaires à CA et AB. Le plan ABC est donc un des plans définis dans la deuxième partie; ce plan étant supposé donné, M se construit en menant par A une parallèle à BC et par C une parallèle à AB. Puisqu'il y a une infinité de plans ABC, il y aura donc une infinité de points M.

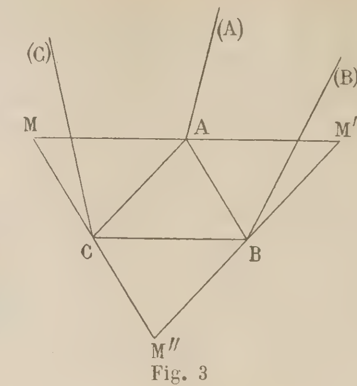


Fig. 3

Lieu du point M. — Nous nous appuierons sur le théorème suivant, bien connu :

Lorsqu'une droite mobile CD *se déplace de façon que* C *et* D *décrivent deux droites données, et que* CD *reste parallèle à un plan donné, le lieu d'un point* M, *divisant* CD *dans un rapport donné, est une droite située dans un plan parallèle aux deux droites données* (*).

Soient ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ trois des plans définis précédemment (*fig.* 4). Les côtés AB, A_1B_1, A_2B_2 sont parallèles à un plan fixe perpendiculaire à (C) ; les côtés AC, A_1C_1, A_2C_2 sont parallèles à un plan fixe perpendiculaire à (B). Si donc on appelle D, D_1, D_2 les milieux de AC, A_1C_1, A_2C_2, ces points se trouvent, d'après le théorème précédent, sur une droite (D) située dans un plan parallèle à (A) et (C).

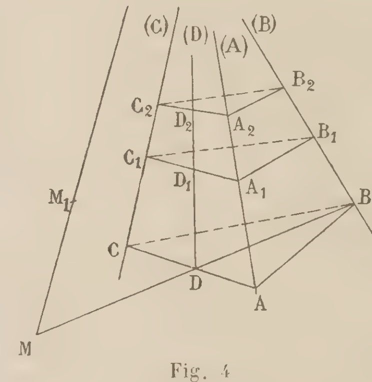


Fig. 4

Lorsque deux droites fixes (A) et (B) sont rencontrées par trois droites AB, A_1B_1, A_2B_2 parallèles à un même plan, on sait que

$$\frac{AA_1}{A_1A_2} = \frac{BB_1}{B_1B_2}; \qquad (1)$$

appliquant la même proposition aux deux droites (A) et (D), rencontrées par AC, A_1C_1, A_2C_2, il vient

$$\frac{AA_1}{A_1A_2} = \frac{DD_1}{D_1D_2}; \qquad (2)$$

de (1) et (2), il résulte que

$$\frac{DD_1}{D_1D_2} = \frac{BB_1}{B_1B_2}.$$

D'après la réciproque de la même proposition, les droites BD, B_1D_1, B_2D_2 sont donc parallèles à un plan fixe.

Mais on obtient le point M en prolongeant BD d'une longueur $DM = DB$. Donc $\frac{MB}{MD} = 2$, et le lieu du point M est une droite située dans un plan parallèle à (B) et (D).

(*) La démonstration se fait aisément en remarquant que, si par chaque droite on mène un plan parallèle à l'autre, le rapport des distances du point M à ces deux plans est connu. On projette ensuite toute la figure sur l'un de ces plans, parallèlement à une direction fixe parallèle au plan donné.

Premier cas particulier. — Les trois droites (A), (B), (C) forment un trièdre OABC (*fig.* 5).

Fig. 5

Dans ce cas, les plans menés par chaque droite parallèlement à la perpendiculaire commune aux deux autres deviennent les plans menés par chaque arête du trièdre perpendiculairement à la face opposée ; ils se coupent donc suivant une même droite. Les trois droites vérifient donc la condition énoncée dans la deuxième partie. Tout plan perpendiculaire à cette droite détermine un triangle ABC, tel que BC, CA, AB soient perpendiculaires à (A), (B), (C) ; tous les plans ABC sont parallèles.

Fig. 6

La droite (D) est dans le plan OAC ; le lieu du point M est une droite OM passant par O.

Second cas particulier. — Le trièdre est trirectangle (*fig.* 6).

Un plan quelconque ABC remplit les conditions voulues ; BA située dans le plan OAB est évidemment perpendiculaire à (C), etc. Tout point de l'espace est un point M.

Quatrième partie. — Supposons que les droites (A) et (B) se coupent en O et que la droite (C) soit perpendiculaire au plan

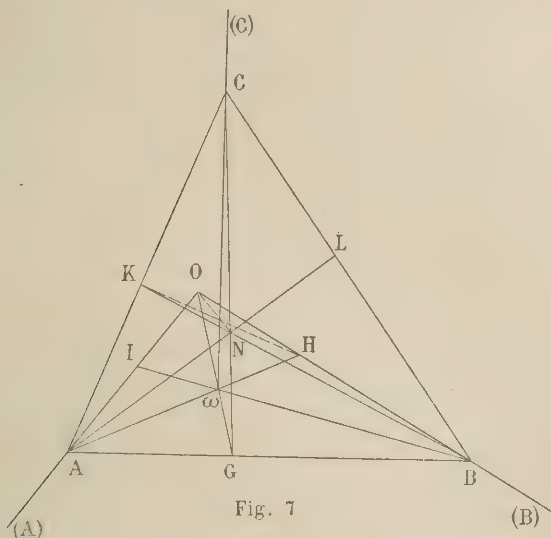


Fig. 7

OAB en ω (*fig.* 7). Les perpendiculaires communes à (C) et (B), (C) et (A) sont les perpendiculaires abaissées de ω sur (A) et (B). Donc les trois plans menés par (A), (B), (C) parallèlement aux perpendiculaires communes à (B) et (C), (C) et (A), (A) et (B) se coupent bien suivant une droite, car les deux premiers de ces plans se confondent avec OAB ; cette droite est Oω.

Il existe donc des plans ABC satisfaisant à la condition énoncée dans la deuxième partie.

Soit ABC le triangle déterminé par un de ces plans. Menons les droites Aω, Bω, Cω, qui rencontrent OB, OA, AB en H, I, G. Par hypothèse, (B) est perpendiculaire à Aω et à Cω, donc au plan ACω et par suite à la droite AωH. De même, (C) est perpendiculaire à BωI ; ω est donc l'orthocentre du triangle OAB ; Oω est par conséquent la troisième hauteur du triangle OAB.

ω étant un point fixe, et (A) et (B) des droites fixes, ωH et ωI sont fixes, donc aussi les points A et B. — Le point C est un point quelconque de la droite C.

Lieu des pieds des hauteurs du triangle ABC. — Soit G le point de rencontre de Oω et de AB ; cette dernière droite étant perpendiculaire à Oω et ωC, l'est aussi à leur plan et par suite à CG ; CG est donc une hauteur du triangle ABC ; son pied G est un point fixe.

Soit BK la hauteur issue de B ; AC est perpendiculaire à (B) par hypothèse, à BK par construction ; elle l'est donc au plan OBK, et par suite à la droite KH de ce plan. Or KH est dans le plan fixe CAω ; l'angle AKA est droit ; le lieu de K est donc la circonférence de diamètre AH, décrite dans le plan ACω.

On verrait de même que le lieu du pied L de la hauteur AL est la circonférence de diamètre BI, dans le plan BCω.

Lieu du point de rencontre des hauteurs. — Soit N le point de rencontre de BK et AL ; menons ON. Cette droite appartient au plan OBK perpendiculaire à AC, au plan OAL perpendiculaire à BC ; donc elle est perpendiculaire au plan ABC ; l'angle ONG est donc droit ; le plan ONG étant fixe, le lieu de N est la circonférence de diamètre OG, située dans GCω.

[MM. Barthélemy et Oger ont envoyé de bonnes solutions.]

NOTE SUR LES THÉORIES

DE LA DIVISION ET DE LA RACINE CARRÉE

par M. **A. Goulard**, professeur au lycée de Marseille.

La solution de la difficulté soulevée par M. Barrieu (nº du 15 décembre) sur un point de la théorie de la racine carrée se trouve tout entière dans la théorie de la division. En effet, il y a avantage, ce me semble, à exposer cette dernière théorie de la façon suivante :

Lemme I. — *Si le diviseur est terminé par des zéros, on ne change pas le quotient en supprimant ces zéros et en supprimant un nombre égal de chiffres à la droite du dividende.*

Ainsi le quotient de 48623 par 14000 est le même que le quotient de 48 par 14. — En conséquence, le quotient de 48623 par 14572 est inférieur ou égal au quotient de 48 par 14.

Lemme II. — *En divisant le nombre des centaines (par exemple) du dividende par le diviseur, on obtient le nombre des centaines du quotient.*

Ces lemmes sont un peu plus généraux que les propositions qui constituent le fond de la théorie de la division ; mais leur démonstration n'est ni plus longue, ni plus difficile. Le premier lemme et la conséquence immédiate qu'on en tire suffisent pour le cas où le quotient n'a qu'un chiffre ; le deuxième lemme permet de ramener au cas précédent le cas où le quotient a plusieurs chiffres.

Soit maintenant à extraire la racine carrée de 5386. Le chiffre des dizaines est 7 ; désignons par u le chiffre des unités. On doit avoir

$$(70+u)^2 < 5386,$$

ou

$$140u + u^2 < 486$$

et *a fortiori*

$$140u < 486.$$

Donc le chiffre cherché u est inférieur ou égal au quotient de 486 par 140, c'est-à-dire (lemme I) au quotient de 48 par 14.

A PROPOS DE LA NOTE DE M. BARRIEU

SUR LA RACINE CARRÉE

par M. **Raffalli**, professeur en congé.

Remarque préliminaire. — Soient A et B deux nombres entiers. Nous les divisons par un même nombre entier. Soient a et b les quotients à une unité près.

1° En général l'inégalité

$$A < B$$

n'entraîne pas forcément l'inégalité $a < b$: on doit écrire

$$a \leq b.$$

2° Il y a exception lorsque B est multiple du diviseur. Dans ce cas, on doit écrire

$$a < b.$$

Prenons le diviseur égal à 12 par exemple. Les nombres qui, divisés par 12, donnent a comme partie entière du quotient sont

$$12a$$
$$12a + 1$$
$$\dots\dots\dots$$
$$12a + 11.$$

En prenant deux quelconques de ces nombres pour A et B, on voit bien qu'on a ici $a = b$.

Prenons pour B le nombre entier qui suit $12a + 11$; on aura $B = 12a + 12 = 12(a+1)$; on voit bien alors que

$$a < b.$$

Cela posé, soit N un nombre entier ; a, une partie de sa racine carrée à une unité près ; b, la partie restant à trouver. *Il s'agit de démontrer que si* q *est le quotient à une unité près de* $N - a^2$ *par* $2a$, *on aura*

$$b \leq q.$$

On a en effet

$$(a+b)^2 \leq N,$$

$$2ab + b^2 \leq N - a^2,$$

d'où, en général, $$2ab < N - a^2.$$

La première partie de la remarque nous donne alors

$$b \leq q. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Dans le cas particulier où $N - a^2$ est divisible par $2a$, on voit donc, d'après la seconde partie de la remarque, qu'on aura toujours $$b < q.$$

Note. — La remarque trouve son application dans d'autres cas.

Soit par exemple à diviser 384 par 37. Il s'agit de démontrer que le quotient a deux chiffres. Or

$$37 \times 10 < 384.$$

Le premier membre divisé par 37 donne pour quotient 10 ; soit q le quotient cherché. La remarque donne

$$10 \leq q.$$

D'autre part, $$384 < 37 \times 100.$$

On est ici dans le cas exceptionnel ; on a donc

$$q < 100.$$

En résumé $$10 \leq q < 100.$$

Donc q a bien deux chiffres. (Ici d'ailleurs $q = 10$).

ALGÈBRE

4277. — *Montrer que si l'on a*

$$x^3 + y^3 + z^3 = x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z = 1,$$

le produit xyz *est nul.*

PREMIÈRE SOLUTION. — De la relation $x + y + z = 1$, on déduit

$$y + z = 1 - x,$$

ou, en élevant les deux membres au carré,

$$y^2 + z^2 + 2yz = 1 - 2x + x^2.$$

Remplaçons $y^2 + z^2$ par sa valeur tirée de la relation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; il vient

$$1 - x^2 + 2yz = 1 - 2x + x^2,$$

ou $$yz = x^2 - x,$$

ou, en multipliant chaque membre par x,

$$xyz = x^3 - x^2.$$

On aurait de même, par raison de symétrie,

$$xyz = y^3 - y^2,$$
$$xyz = z^3 - z^2.$$

En ajoutant ces trois dernières égalités membre à membre, on trouve

$$3xyz = x^3 + y^3 + z^3 - x^2 - y^2 - z^2 = 1 - 1 = 0,$$

et par suite $$xyz = 0.$$

C.Q.F.D.

(GERMAIN BERNARD, collège de Béziers.)

SECONDE SOLUTION. — Un calcul simple donne

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3 &= x^3 + y^3 + z^3 + 3yz^2 + 3y^2z + 3zx^2 + 3xz^2 \\ &\quad + 3xy^2 + 3x^2y + 6xyz \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) \\ &\quad - 3(x^3+y^3+z^3) + 6xyz \\ &= 3(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) - 2(x^3+y^3+z^3) \\ &\quad + 6xyz.\end{aligned}$$

Tenant compte de l'hypothèse

$$x^3 + y^3 + z^3 = x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z = 1,$$

il vient

$$1 = 3 - 2 + 6xyz,$$

d'où

$$xyz = 0.$$

[Ont résolu la même question : MM. A. Amblard ; J. Amboise ; A. A. Arcizet ; E. Ardin-Delteil ; L. Aulagnier ; A. Ballé ; A. Baras ; L. Barberot ; P. Barroué ; Bayor ; de Bersaucourt ; A. Bertrand ; L. Bigot ; L. Bois ; R. Bonnefont-Pédufau ; V. Bourquin ; M. Boutaud ; Boutignon ; M. Boutry ; A. Bouzy ; G. Brets ; E. Brière ; Burgat ; F. Chuberre ; A. Cormerois ; A. Cremer ; L. Cussenot ; G. Decoux ; E. Delacommune ; G. Delahaye ; N. Delhotel ; J. Delpont ; Devallon ; G. Digne ; C. Dobrovici ; P. Dupuis ; G. Dupuy ; R. Durand ; Feintuch ; P. Ferrier ; P. Fournel ; L. Fournier ; M. Fréchou ; Geltzenlichter ; Gernez-Pfanmatter ; A. Giraud ; J. Gonnet ; L. Gourdet ; A. Gourdin ; P. Herrmann ; H. Janois ; A. Jeannel ; Latterrade ; B. Lachenaud ; A. Larue ; E. Laudat ; E. Le Maigre ; X. Lhommelin ; L. Magne ; A. Maître ; J. Méhu ; H. Michel ; A. Mirc ; F. Montaland ; F. Morel ; L. P. à A. ; F. Pégorier ; L. Perret ; A. Piérard ; J. Pillard ; P. Plisson ; G. Pommeron ; J. Rasse ; M. Rebeix ; Robin ; P. Rolley ; E. Rousset ; P. de Sabbathier ; M. Saget ; P. Sarrassat ; A. Sarteel ; E. Sevin ; J. Sire ; C. Szabo ; A. Smântanescu ; A. Terrebonne ; Tiret ; P. Tribier ; R. Van Cauwenberghe ; H. Varinot ; A. Vergnole ; J. E. Villemagne ; Watrin ; A. Wiart, à Houplines ; A. Wiart, à Cambrai ; J. Wittner ; L. Wollaire ; M. Zimine.]

TRIGONOMÉTRIE

4209. — *On donne un angle droit* XOY *et un point* A *situé sur* OX *à une distance de* O *égale à l'unité. Par le point* A, *on mène les deux sécantes* AB, AC *telles que les angles* OAB, OCA *soient égaux à* x *degrés :* $\widehat{OAB} = \widehat{OCA} = x$.

1° *Trouver l'équation à laquelle doit satisfaire x pour que la somme des longueurs AB, AC soit égale à une longueur donnée m:* $AB + AC = m$.

2° *Former les équations qui déterminent les valeurs des angles inconnus y et z définis par les équations*

$$y = \frac{\pi}{4} - x, \qquad z = 2x.$$

3° *Indiquer la marche à suivre pour calculer x.*

Discussion.

(*Bacc. lettres-math., Toulouse, juillet 1897.*)

1° En considérant successivement les triangles rectangles OAB et OAC, on a

$$AB \cos x = OA, \quad \text{d'où} \quad AB = \frac{1}{\cos x};$$

$$AC \sin x = OA, \quad \text{d'où} \quad AC = \frac{1}{\sin x}.$$

L'équation du problème est donc

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = m. \qquad (1)$$

2° Remplaçons dans (1) x par sa valeur en fonction de y. Il vient

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - y\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - y\right)} = m,$$

ou

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos y + \sin y)} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos y - \sin y)} = m,$$

ou, en chassant les dénominateurs et réduisant,

$$2\sqrt{2}\,.\cos y = m(\cos^2 y - \sin^2 y).$$

On déduit de là, en observant que $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$,

$$2m \cos^2 y - 2\sqrt{2} \cos y - m = 0. \qquad (2)$$

Remplaçons maintenant dans (1), x par $\frac{z}{2}$. Nous aurons

$$\frac{1}{\cos\frac{z}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{z}{2}} = m;$$

ou

$$\sin\frac{z}{2} + \cos\frac{z}{2} = m \sin\frac{z}{2} \cos\frac{z}{2}.$$

Elevons les deux membres de (3) au carré; il vient

$$\sin^2\frac{z}{2} + \cos^2\frac{z}{2} + 2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2} = m^2 \sin^2\frac{z}{2}\cos^2\frac{z}{2},$$

ce qui peut s'écrire, en vertu de formules connues,

$$1 + \sin z = \frac{m^2 \sin^2 z}{4},$$

ou

$$m^2 \sin^2 z - 4 \sin z - 4 = 0. \qquad (3)$$

3° Pour calculer x, il suffit de porter dans l'une des formules

$$x = \frac{\pi}{4} - y \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{z}{2},$$

la valeur de y ou z fournie par l'une des équations (2) ou (3).

Discussion de l'équation (2). — L'angle x devant être aigu, on doit avoir

$$0 < \frac{\pi}{4} - y < \frac{\pi}{2},$$

ou

$$-\frac{\pi}{4} < y < \frac{\pi}{4},$$

et par suite,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos y < 1.$$

Désignons par $f(\cos y)$ le premier membre de l'équation (2) et remplaçons $\cos y$ successivement par $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et 1. Il vient

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2,$$

$$f(1) = m - 2\sqrt{2};$$

m étant positif, et $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ étant négatif, l'équation (2) a nécessairement ses racines réelles et distinctes, et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est compris entre ces racines. Donc une seule racine de l'équation peut convenir, la positive. Pour qu'elle convienne en effet, il faut et il suffit que $f(1)$ soit positif, ce qui donne

$$m > 2\sqrt{2}.$$

D'ailleurs, à cette valeur de $\cos y$ correspondent deux valeurs de y égales et de signes contraires inférieures en valeur absolue à $\frac{\pi}{4}$, donc deux valeurs pour x.

La valeur acceptable de $\cos y$ est

$$\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2m}\left(1 + \sqrt{1 + m^2}\right),$$

ou, sous forme logarithmique, en posant $m = \operatorname{tg}\varphi$,

$$\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2m}\left(1 + \frac{1}{\cos\varphi}\right) = \frac{\sqrt{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{m \cos\varphi}.$$

Discussion de l'équation (3). — Pour que x soit aigu, il faut et il suffit que z soit compris entre 0 et π, et par suite $\sin z$ entre 0 et 1.

En représentant par $f_1(\sin z)$ le premier membre de l'équation (3), remplaçons successivement $\sin z$ par 0 et 1; il vient

$$f_1(0) = -4,$$
$$f_1(1) = m^2 - 8.$$

On voit comme précédemment que les racines sont réelles et distinctes; la positive convient seule si

$$m > 2\sqrt{2}.$$

A cette valeur de $\sin z$ correspondent deux valeurs de l'angle z, l'une entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, l'autre entre $\frac{\pi}{2}$ et π, d'où deux valeurs acceptables pour $x = \frac{z}{2}$.

La valeur acceptable de $\sin z$ est

$$\sin z = \frac{2\left(1 + \sqrt{1 + m^2}\right)}{m^2}$$

ou, sous forme logarithmique, en posant $m = \operatorname{tg}\varphi$,

$$\sin z = \frac{2}{m^2}\left(1 + \frac{1}{\cos\varphi}\right) = \frac{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}{m^2\cos\varphi}.$$

(J. BORDAS, à Tulle.)

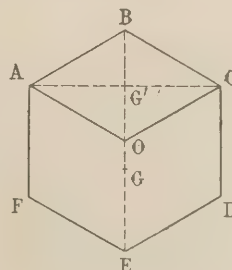
[Ont résolu la même question : MM. H. Beucler, à Bourogne ; A. Maitre ; P. Ségala, à Saint-Céré ; L. Vignes, à Boussan.]

MÉCANIQUE

4210. — *Déterminer le centre de gravité de l'aire* OCDEFA *obtenue en supprimant dans un hexagone régulier donné* ABCDEF, *de centre* O, *le quadrilatère* OABC. *Calculer la distance de ce centre de gravité au point* O.

(*Bacc. lettres-sciences, Toulouse, juillet 1897.*)

Première solution. — Par raison de symétrie, le centre de gravité cherché, G, est situé sur la diagonale BE.



Concevons que, au lieu d'enlever le losange OABC, on applique en son centre de gravité G' une force F égale et directement opposée au poids du losange; ce poids étant ainsi neutralisé par la force F, tout se passe comme si le losange avait été réellement enlevé.

On peut donc considérer le point G comme le point d'application de la ré-

sultante du poids P de l'hexagone, appliqué en O, et de la force parallèle F, appliquée en G', et de sens contraire à la direction de P. On a alors

$$\frac{OG}{GG'} = \frac{F}{P},$$

ou, comme F et P sont dans le rapport des aires OABC et ABCDEF,

$$\frac{OG}{GG'} = \frac{1}{3}.$$

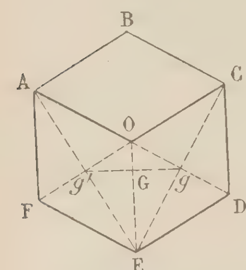
En retranchant les numérateurs des dénominateurs correspondants, on en déduit

$$\frac{OG}{OG'} = \frac{1}{2},$$

d'où $$OG = \frac{1}{2} OG' = \frac{1}{4} OE.$$

(A. NAYEL, à Thouars.)

Seconde solution. — Le centre de gravité de l'aire AOCDEF se trouve à l'intersection G de l'axe de symétrie OE avec la droite g', g, qui joint les centres de gravité des losanges OAFE et OEDC.



Dans le triangle OEg, rectangle en g, on a, en observant que gG est une hauteur,

$$OG.OE = \overline{Og}^2,$$

d'où, en remplaçant Og par $\frac{OE}{2}$ (propriété des triangles rectangles qui ont un angle de 60°),

$$OG = \frac{OE}{4}.$$

(E. SEVIN, collège Chaptal.)

[Ont résolu la même question : Mlle L. Noël; MM. P. Aymard; A. Bertrand; G. Blondin; J. Bordas; Ch. Bourdet; Bourgogne; A. Bouzy; Brodbeck; Carteron; Cazemajou; J. Chalvin; B. Conrads; H. Crozemarie; L. Curt; L. Debrun; L. Delavergnas; J. Delpont; F. Fontaine; E. Foucart; Th. Gramain; E. Garès; M. Georgi; A. Gourdin; P. Guarnieri; J. Guillaume; E. Héteau; G. Hiernaux; H. Janois; L. Lassence; Letessier; E. Le Maigre; A. Liron; A. Maitre; C. Marie; J. Maury; J. Menéchal; A. Mirc; F. Pégorier; Raynaud; A. Rongier; P. Ségala; H. Séjour; C. Szabo; T. Taralon; Teulade; L. Vignes; P. Vincent.]

PHYSIQUE

4275. — *Un aérostat, de forme sphérique, ayant* 10^m *de diamètre, est rempli d'hydrogène de densité* 0,069 *par rapport à l'air. L'enveloppe pèse* 365^{gr} *par mètre carré. Le poids des aéronautes, des agrès et des accessoires est de* 375^{kg}. *La température est* 18° *et la pression atmosphérique* 758^{mm}. *Calculer :*

1° *Le poids de l'hydrogène que renferme l'aérostat ;*

2° *La force ascensionnelle au départ ;*

3° *La hauteur dont s'élèvera l'aérostat pendant la première seconde.*

On donne :

1° *Le poids du litre d'air sous la pression* 760^{mm} *et à* 0° : $1^{gr},293$;

2° *Le coefficient de dilatation des gaz* $\alpha = \frac{1}{273}$;

3° *L'accélération de la pesanteur* $g = 9^m,8$.

(*Bacc. lettres-sciences, Marseille, novembre 1896.*)

1° Le volume de l'aérostat est

$$\frac{4}{3} \times 3,1416 \times 125 = 523^{mc},6.$$

Le poids P de l'hydrogène que renferme l'aérostat s'obtient en appliquant la formule générale qui donne le poids d'un gaz dans des conditions déterminées de température et de pression :

$$P = 523\,600 \times 1,293 \times 0,069 \times \frac{758}{760} \times \frac{1}{1 + \frac{18}{273}}$$

$$= 43^{kg},7.$$

2° La surface de l'aérostat étant égale à

$$4 \times 3,1416 \times 25 = 314^{mq},16,$$

le poids de l'enveloppe a pour valeur

$$314,16 \times 0,365 = 114^{kg},668,$$

et le poids total de l'aérostat,

$$43,7 + 114,668 + 375 = 533^{kg},368.$$

La poussée subie par l'aérostat est égale au poids de l'air qu'il déplace. Cet air étant dans les mêmes conditions que l'hydrogène et occupant le même volume, on peut écrire, en désignant par x la poussée,

$$\frac{43,7}{x} = \frac{0,069}{1},$$

d'où l'on tire

$$x = 633^{kg},466.$$

La force ascensionnelle F est donc égale à

$$633,466 - 533,368 = 100^{kg},098.$$

3° L'aérostat est sollicité par deux forces : la pesanteur et sa force ascensionnelle. Il faut supposer que la force ascensionnelle reste constante, au moins pendant la première seconde. Deux forces constantes agissant sur une même masse sont proportionnelles aux accélérations qu'elles lui impriment. On a donc

$$\frac{F}{P} = \frac{\gamma}{g},$$

d'où $$\gamma = \frac{9,8 \times 100,098}{533,368} = 1^m,84.$$

En appliquant la formule $e = \frac{1}{2}\gamma t^2$ et remarquant que $t = 1$, il vient

$$e = \frac{1,84}{2} = 0^m,92.$$

Telle est la hauteur à laquelle s'élèvera l'aérostat pendant la première seconde.

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil; Baudoin; F. Beynas; Boutignon; M. Boutry; J. Coupat; M. Deschamps; E. Dugas; E. Edme; Feintuch; P. Ferrier; F. Geltzenlichter; A. Jeannel; L. Lassence; E. Layes; F. Leulliot; De Loncey; E. Madet; Le Maigre; A. Mirc; F. Montaland; F. Morel; E. Roncaglia; E. Sinturel; A. Vergnole; J. Villemagne; H. Zwaenépoel.]

4283. — *Un vase cylindrique en verre est gradué en parties d'égale capacité. Il contient du mercure qui, à la température de* 0°, *arrive à la division* 1150. *A quelle température faut-il porter l'appareil pour que le mercure arrive à la division* 1151? *Coefficient de dilatation cubique du verre,* 0,000026; *coefficient de dilatation absolue du mercure,* 0,00018.

(*Bacc. lettres-sciences, Paris, octobre 1897.*)

Désignons par x la température à laquelle il faut porter l'appareil pour que le mercure arrive à la division 1151, par K le coefficient de dilatation cubique du verre et par m le coefficient de dilatation absolue du mercure.

Le vase étant cylindrique, les volumes peuvent être représentés par les longueurs qu'ils occupent.

Ecrivons qu'à la température x le volume du contenu est égal à la capacité du contenant :

$$1150(1 + mx) = 1151(1 + Kx).$$

En résolvant cette équation par rapport à x, il vient

$$x = \frac{1}{1150m - 1151K}.$$

Application : K = 0,000026; m = 0,00018.

$$x = \frac{1}{1150 \times 0,00018 - 1151 \times 0,000026} = 5°,65.$$

(H. LÉVY.)

[Ont résolu la même question : MM. A. D. Arcizet ; Ardin-Delteil ; L. Aulagnier ; H. Auterbe ; L. Barberot ; A. Baudot ; Benbacite ; L. Bigot ; L. Bois ; V. Bourquin ; A. Bouzy ; Burgat ; F. Chuberre ; J. Coupat ; Delacommune ; N. Delhotel ; J. Delpont ; M. Deschamps ; G. Dupuy ; R. Durand ; P. Ferrier ; L. Florentin ; J. Fourestier ; P. Fournel ; L. Fournier ; P. Frescal ; G. Gaucher ; Geltzenlichter ; A. Giraud ; J. Gonnet ; Grzybowski ; P. Guillemin ; H. Janois ; A. Jeannel ; E. Joyer ; B. Lachenaud ; F. Ladevèze ; L. Lassence ; E. Layes ; G. Leclerc ; E. Léotard ; F. Leulliot ; De Loncey ; L. M. ; E. Madet ; Le Maigre ; Massip ; J. Maury ; A. Mirc ; F. Montaland ; F. Morel ; A. Pavard ; L. Pernet ; J. Quilichini ; M. Rebeix ; Robin ; Rottey ; P. Sickler ; A. Smântanescu, à Jassy ; M. Teulié ; P. Tribier ; J. Trouillé ; L. Vaulet ; A. Vergnole ; Vidal-Naquet ; J. Villemagne ; Watrin ; J. Wittner ; E. Fourneau ; L. Larsonneur.]

CONCOURS DE 1897 (*Suite*).

ADMISSION A L'EMPLOI D'ÉLÈVE-MÉCANICIEN DE LA MARINE

—

TOULON (1er juin).

Algèbre.

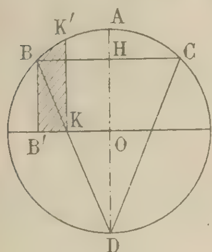
I. — Un croiseur et un cuirassé partent au même moment : l'un d'Alger pour Toulon, l'autre de Toulon pour Alger. Quand ils se rencontrent, le croiseur a fait 54 milles de plus que le cuirassé. A partir de ce moment, ils mettent, l'un 9^h, l'autre 16^h pour arriver à destination. Trouver en milles marins la distance des points de départ et la vitesse à l'heure de chacun des deux navires.

Le mille marin vaut 1852^m.

II. — Résoudre l'équation $\left(\dfrac{m+x}{m-x}\right)^2 = 1 + \dfrac{px}{mn}$.

Géométrie.

I. — Dans une circonférence de grand cercle d'une sphère de 1^m de rayon, on mène BC, côté du carré inscrit. Par BC, on fait passer un plan perpendiculaire à l'apothème HO, on enlève la calotte sphérique supérieure BAC ; on creuse ensuite le restant de cette sphère suivant un cône ayant pour base le cercle de diamètre CB et pour sommet le point D, enfin on mène BB′ et KK′ parallèles à AO. On demande :



1° La surface totale de la portion de sphère ainsi creusée ;

2° Le volume engendré par la partie hachée tournant autour de B′K.

II. — Déterminer la surface engendrée par une corde oblique par rapport à un diamètre en tournant autour de ce diamètre.

BREST (1er juin).

Algèbre.

I. — Deux navires ont parcouru en 48^h, le 1er une certaine distance inconnue et le 2e 72 milles de plus ; or le 2e met $1^h\,30^m$ de moins que le 1er pour parcourir 115 milles.

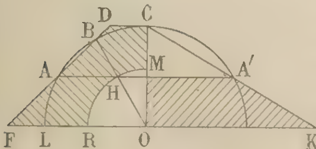
Trouver d'après cela, en milles marins, la distance parcourue par chaque navire et la vitesse à l'heure de chacun.

II. — Résoudre l'équation

$$\frac{(m-n)x^2}{m+n} - (m-n)^2x + m - n = \frac{x}{m+n}.$$

Géométrie.

I. — L'arc CBAL du quadrant COL étant divisé en 3 parties égales par les points A et B, on tire AB qu'on prolonge jusqu'à la rencontre des parallèles OF et CD. On mène AA′ parallèle à ces droites, puis CA′, qu'on prolonge jusqu'en K, ainsi que BO et l'on trace le quadrant de rayon HO ; on demande :



1° La surface de la partie hachée à gauche de la figure (FDCMHR) ;

2° Le volume engendré par le trapèze MA′KO tournant autour de MO.

II. — Dans tout quadrilatère inscrit, le rectangle des deux diagonales est égal à la somme des rectangles des côtés opposés.

CHERBOURG (18 juin).

Algèbre.

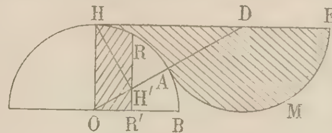
I. — Un marchand a deux pièces de vin ; la contenance de la 1re est à celle de la 2e comme 5 est à 4. Le litre de la 1re coûte autant de demi-centimes qu'il y a de litres dans la pièce ; le litre de la 2e coûte $0^{fr},25$ de moins que le litre de la 1re. La valeur totale des deux pièces monte à $430^{fr},10$. Combien contient chaque pièce ?

II. — Effectuer l'opération

$$\frac{a^2x - ax^2}{a^2 - x^2} + \frac{a^3 + a^2x}{(a+x)^2} - \frac{a^2 - 2ax}{a - x} =$$

Géométrie.

I. — L'angle HOA inscrit dans une circonférence de 1^m de rayon valant 60°, on mène HE perpendiculaire à HO, et l'on trace l'arc AME de rayon AD ; on abaisse ensuite HH′ perpendiculaire sur OA, et RR′ perpendiculaire sur OB. On demande :



1° La surface de la partie hachée de gauche à droite ;

2° Le volume engendré par la surface HOR′R tournant autour de OR′.

II. — Connaissant le côté d'un polygone régulier inscrit dans un cercle et le rayon du cercle, calculer le côté du polygone régulier inscrit d'un nombre double de côtés.

ROCHEFORT (18 juin)

Algèbre.

I. — Trois ouvriers A, B, C ont à faire un ouvrage. A et B travaillant ensemble pendant 4 jours feraient les 2/3 de l'ouvrage ; B et C travaillant ensemble pendant 8 jours en feraient les 14/15 ; A et C travaillant ensemble pendant 5 jours en feraient les 3/4.

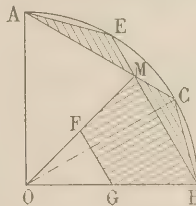
On occupe A seul pendant 2 jours, B seul pendant 6 jours ; combien de jours C, travaillant seul, mettra-t-il à terminer l'ouvrage ?

II. — Résoudre l'équation

$$\frac{1-mx}{1+mx}\sqrt{\frac{1+px}{1-px}} = 1.$$

Géométrie.

I.— L'arc du quadrant AOB d'un cercle de 1^m de rayon étant divisé en trois parties égales, on mène AC, EB, AE, CB et OM ; par le point G, milieu de OB, on mène GF parallèle à MB ; on demande :



1° La surface des deux triangles AEM et MCB ;

2° Le volume engendré par GFMB tournant autour de GB.

II. — Deux angles dièdres sont dans le même rapport que leurs angles plans.

ADMISSION AU COURS DES APPRENTIS-ÉLÈVES MÉCANICIENS DE LA MARINE

—

TOULON (1er juin).

Arithmétique.

De Paris à Marseille, il y a 863^{km}. A $8^h\,45^m$ du soir un train rapide part de Paris à l'allure de 70^{km} par heure ; mais peu après son départ, il a une avarie de machine qui lui fait perdre 1^h. On sait de plus qu'il a de Paris à Marseille, 5 arrêts de 10^m également espacés.

A 10^h du soir, un train mixte part de Marseille pour Paris à l'allure de 40^{km} par heure. Sachant qu'il s'arrête 5^m à 12 stations également espacées, on demande à quelle heure et à quelle distance de Paris les deux trains se croiseront.

Géométrie.

Les cordes CD et AB étant les côtés de l'hexagone régulier et du triangle équilatéral inscrits dans un cercle de 1^{m} de rayon, on mène OF bissectrice de l'angle droit YOX, on tire MT et OA qu'on prolonge jusqu'en G. On demande :

1° La surface du trapèze GFAM;

2° Le volume engendré par le triangle TOM tournant autour de TO.

BREST (1er juin)

Arithmétique.

Une personne ayant emprunté 2400^{fr} le 1er juillet 1897, signe un billet de 2528^{fr}, payable le 1er novembre 1898. Mais elle préfèrerait payer 1 °/₀ d'intérêt de plus par chaque année de retard à partir de l'échéance et rembourser 800^{fr} le 1er janvier 1899, 900^{fr} le 1er juillet 1899 et le reste le 1er novembre 1900. On demande quel est ce reste, à 5 centimes près.

Géométrie.

Par le point K, milieu du rayon OA d'une circonférence de rayon $R = 1^{m}$, on mène une corde perpendiculaire BC; on tire OB, BA, AC, OC et on inscrit une circonférence dans le quadrilatère ainsi formé; on trace ensuite la circonférence de rayon R″ tangente aux deux autres. On demande :

1° La surface des cercles de rayon R′ et R″ ;

2° Le volume engendré par la partie hachée tournant autour de BC.

CHERBOURG (18 juin).

Arithmétique.

Un bâtiment a 3 soutes à charbon ayant pour dimensions $31^{mc},2$, $111^{mc},724$, $69^{mc},1/3$. Le charbon de la 1re a coûté 25^{fr} la tonne, celui de la 2me, $22^{fr},50$ et celui de la 3me, 20^{fr}. Après avoir brûlé les 2/3 des 5/6 de la 1re, le 1/4 de la 2me et les 5/7 de la 3me, on réunit le reste en tas.

Combien faut-il en vendre le kilo, à 0,001 près, pour gagner 10 °/₀ sur le prix d'achat de ce reste, sachant que le mètre cube de charbon pèse 950^{kg} ?

Géométrie.

Les cordes parallèles AB, CD étant les côtés du triangle équilatéral et de l'hexagone régulier inscrits dans une circonférence de 1^{m} de rayon, on mène AD, CB et DB; on demande :

1° La surface des deux triangles hachés ;

2° Le volume engendré par le triangle MDB tournant autour de DB.

ROCHEFORT (18 juin).

Arithmétique.

Une entreprise a donné $24\,000^{fr}$ de bénéfice. Le conseil d'administration en prend 1/8 ; il met le 1/3 des 5/7 du reste à la réserve, distribue les 59/64 du nouveau reste aux actionnaires et partage la somme restante entre 4 employés, en raison directe de leurs années de services et en raison inverse de leurs appointements :

Le 1er a 30	années de services et	$3\,000^{fr}$	d'appointements	;
Le 2° a 18	—	2600	—	;
Le 3° a 15	—	2200	—	;
Le 4° a 10	—	1800	—	.

On demande la gratification allouée à chacun d'eux, à 5 centimes près.

Géométrie.

Les cordes parallèles AB, CD étant les côtés du triangle équilatéral et de l'hexagone régulier inscrits dans une circonférence de 1^{m} de rayon, on mène AO, OC, OD. On demande :

1° La surface du trapèze haché CDMN ;

2° Le volume engendré par le triangle AMO tournant autour de AO.

QUESTIONS PROPOSÉES

4294. — Trouver la somme des exposants des facteurs premiers qui figurent dans les diviseurs du nombre $N = a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$.

(*Une abonnée de Tournon.*)

4295. — Résoudre l'équation

$$\frac{(a-x)^4+(x-b)^4}{(a-x)^2+(x-b)^2} = \frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}.$$

4296. — Par deux points donnés A et B sur un cercle, mener deux cordes parallèles, connaissant leur somme ou leur différence ; les cordes peuvent être parallèles et de même sens, ou parallèles et de sens contraire. (J. Vidaillet.)

Traiter le même problème par l'algèbre, dans les cas où on donne le rapport ou le produit des cordes.

4297. — On donne un triangle ABC. Soient r le rayon du cercle inscrit et O son centre ; M étant le milieu du côté BC, démontrer que que MO coupe la hauteur AH en un point I, tel que $AI = r$.

(G. Decoux, lycée de Bordeaux.)

4298. — Si, dans un triangle ABC, les carrés des côtés AB et AC, supposés inégaux, sont entre eux comme leurs projections sur le côté BC, ou encore si la hauteur issue du sommet A est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur le côté BC, la somme ou la différence des angles B et C est égale à un droit.

Dans le cas où $B - C = 1^{dr}$, trouver la relation qui existe entre les côtés a, b, c, du triangle ABC. (A. Goulard.)

4299. — On donne une circonférence O et un point A et on considère les circonférences O′ passant par le point A et coupant orthogonalement la circonférence O.

1° Trouver le lieu du point de rencontre de la tangente en A à la circonférence O′ avec la tangente à cette même circonférence perpendiculaire à la tangente en A.

2° Trouver le lieu des points de contact de la circonférence O′ avec les tangentes perpendiculaires à la tangente en A.

4300. — On considère un cercle fixe O et deux points fixes P, P′ pris sur un diamètre. On joint les points P, P′ aux extrémités A, B d'un diamètre variable par deux droites qui coupent le cercle O en deux seconds points C, D. Lieu du second point de rencontre des cercles AOC et BOD. (M. Rebeix, lycée du Puy.)

4301. — On mélange, à la température de 0°, 10^{gr} d'oxygène et $3^{gr},776$ d'azote ; le volume total étant de 20^{lit} et la température restant à 0°, on demande quelle est, en centimètres de mercure, la pression du mélange.

Poids du litre d'air à 0° et à la pression de 76^{cm} de mercure : $1^{gr},293$.

Densité de l'oxygène par rapport à l'air dans les mêmes conditions : 0,972. (*Bacc. lettres-math., Toulouse, mars 1897.*)

4302. — Deux points lumineux A et B, de même intensité lumineuse, éclairent une très petite surface S ; ces points peuvent se déplacer sur deux droites SA et SB également inclinées sur la surface S.

Etablir la relation qui doit exister entre les distances $SA = x$ et $SB = y$ pour que la petite surface considérée conserve un éclairage constant.

(*Bacc. lettres-math., Constantine, juin 1897.*)

ERRATUM. — Question **4185**, page 51. — L'équation (1) rappelée dans la discussion n'est pas $\overline{ID}^2 = x(2R - x)$, mais bien

$$R^2 + (2R - x)^2 + R(2R - x) = \frac{mx}{2}(2R - x).$$

Or, en posant $2R - x = u$, ce premier membre s'écrit $R^2 + uR + u^2$, quantité toujours positive quel que soit le signe de u, pourvu que u soit réel, — hypothèse faite.

Le Rédacteur-Gérant : Henry Vuibert.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

22e Année. — N° 10. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 15 Février 1898.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie **Nony** et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES

(1897)

Ordre des sciences mathématiques.

4220. — 1° *Résoudre les équations*

$$(24m^2+8m+1)x+(15m^2+8m+1)y+3m^2=0,$$
$$(8m+2)x+(5m+1)y-m=0.$$

dans lesquelles m désigne un nombre donné.

2° *Déterminer les valeurs de m pour lesquelles ces équations forment un système indéterminé ou impossible.*

3° *Etudier les variations de y et du produit xy lorsque m croît de $-\infty$ à $+\infty$.*

1° et 2°. Le coefficient de x dans la première équation, $24m^2+8m+1$, est un trinome du second degré en m qui n'a pas de racines réelles ; par conséquent, ce trinome n'est pas nul. Nous pouvons tirer x de la première équation,

$$x=-\frac{(15m^2+8m+1)y+3m^2}{24m^2+8m+1},$$

et remplacer x par cette valeur dans la deuxième équation. Nous obtenons ainsi

$$-\frac{(8m+2)[(15m^2+8m+1)y+3m^2]}{24m^2+8m+1}+(5m+1)y-m=0,$$

ou $$y[(24m^2+8m+1)(5m+1)-(15m^2+8m+1)(8m+2)]$$
$$=3m^2(8m+2)+m(24m^2+8m+1),$$

ou encore, en effectuant,

$$y(30m^2+11m+1)=-m(48m^2+14m+1).$$

Le trinome $30m^2+11m+1$ a pour racines $-\frac{1}{5}$ et $-\frac{1}{6}$; le trinome $48m^2+14m+1$ a pour racines $-\frac{1}{6}$ et $-\frac{1}{8}$. Par suite, cette dernière équation peut s'écrire

$$y(5m+1)(6m+1)=-m(6m+1)(8m+1).$$

Le système d'équations proposé est donc, *quel que soit* m, équivalent au système suivant :

$$x=-\frac{(15m^2+8m+1)y+3m^2}{24m^2+8m+1}, \qquad (1)$$

$$y(5m+1)(6m+1)=-m(6m+1)(8m+1). \qquad (2)$$

Premier cas. — $(5m+1)(6m+1)\neq 0$. *m n'est égal ni à* $-\frac{1}{5}$, *ni à* $-\frac{1}{6}$.

De l'équation (2), nous tirons

$$y=-\frac{m(8m+1)}{5m+1},$$

et en remplaçant y par cette valeur dans le second membre de l'équation (1), nous avons

$$x=-\frac{-(15m^2+8m+1)\dfrac{m(8m+1)}{5m+1}+3m^2}{24m^2+8m+1};$$

on peut simplifier en observant que

$$15m^2+8m+1=(5m+1)(3m+1).$$

Il vient alors

$$x=\frac{m(8m+1)(3m+1)-3m^2}{(24m^2+8m+1)}=\frac{m(24m^2+8m+1)}{24m^2+8m+1}.$$

Il en résulte que, dans ce cas, le système admet un seul ensemble de solutions

$$x=m, \qquad y=-\frac{m(8m+1)}{5m+1}.$$

Deuxième cas. — $5m+1=0$, ou $m=-\frac{1}{5}$.

L'équation (2) ne peut être vérifiée pour aucune valeur de y, le système n'a pas de solution, il est impossible.

Troisième cas. — $6m+1=0$, ou $m=-\frac{1}{6}$.

L'équation (2) est vérifiée pour toutes les valeurs de y ; le système proposé se réduit à une seule équation, l'équation (1). Dans celle-ci on peut donner à y une valeur arbitraire ; on en déduira pour x une valeur correspondante déterminée. Le système admet une infinité de systèmes de solution, il est indéterminé.

3° Nous avons

$$y=-\frac{m(8m+1)}{5m+1}.$$

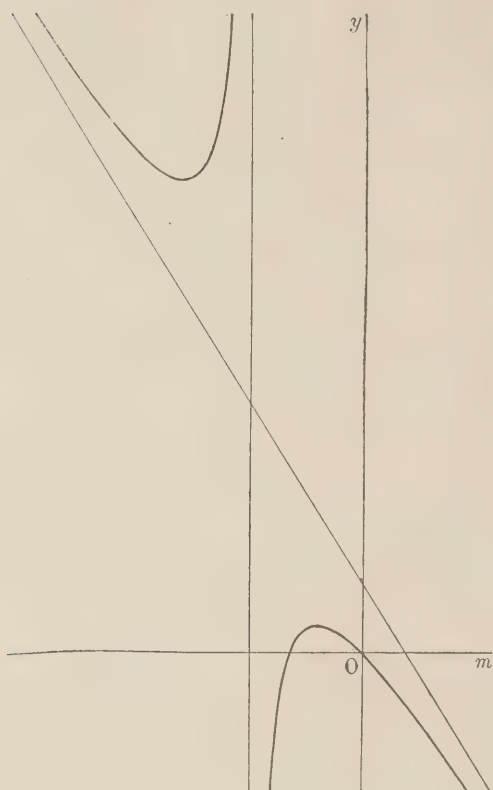
Cette fonction est continue pour toutes les valeurs de m, excepté pour $m=-\frac{1}{5}$.

Prenons la dérivée de y par rapport à m ; nous avons

$$y'=-\frac{40m^2+16m+1}{(5m+1)^2}.$$

Le numérateur admet deux racines négatives, $-\frac{4+\sqrt{6}}{20}$ et $-\frac{4-\sqrt{6}}{20}$; la dérivée sera positive lorsque m sera compris entre ces deux racines et négative lorsque m sera extérieur à ces racines. Remarquons encore que $-\frac{1}{5}$ est compris entre ces deux racines ; nous pouvons donc dresser le tableau suivant :

m	$-\infty$		$-\frac{4+\sqrt{6}}{20}$		$-\frac{1}{5}$			$-\frac{4-\sqrt{6}}{20}$		$+\infty$
y'		$-$		$+$			$+$		$-$	
y	$+\infty$	décroît	*min.* $\frac{11+4\sqrt{6}}{25}$	croît	$+\infty$	$-\infty$	croît	*max.* $\frac{11-4\sqrt{6}}{25}$	décroît	$-\infty$



On peut représenter cette variation par une courbe qui est une hyperbole dont l'une des asymptotes est la droite $m = -\frac{1}{5}$ et dont l'autre a pour équation

$$y = -\frac{8}{5}m + \frac{3}{25}.$$

Considérons maintenant le produit xy et désignons-le par u. Nous avons

$$u = -\frac{m^2(8m+1)}{5m+1}.$$

Cette fonction est continue pour toutes les valeurs de m, excepté pour $m = -\frac{1}{5}$.

En prenant la dérivée, on trouve

$$u' = -\frac{m(80m^2+29m+2)}{(5m+1)^2}.$$

Le trinome $80m^2+29m+2$ a deux racines réelles,

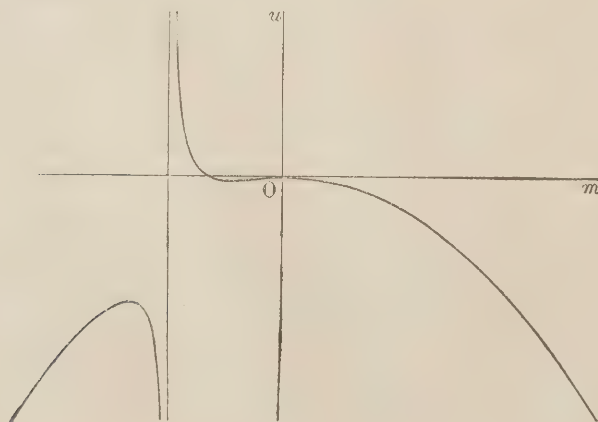
$$-\frac{29+\sqrt{201}}{160} \quad \text{et} \quad -\frac{29-\sqrt{201}}{160},$$

entre lesquelles est compris $-\frac{1}{5}$.

On en déduit le tableau de variation suivant :

m	$-\infty$		$-\frac{29+\sqrt{201}}{160}$		$-\frac{1}{5}$			$-\frac{29-\sqrt{201}}{160}$		0		$+\infty$
u'		$+$		$-$			$-$		$+$		$-$	
u	$-\infty$	croît	*max.*	décroît	$-\infty$	$+\infty$	décroît	*min.*	croît	*max.*	décroît	$-\infty$

et la courbe



La valeur du maximum correspondant à $m = 0$ est $u = 0$. Quant au maximum relatif à $m = -\frac{29+\sqrt{201}}{160}$ et au minimum relatif à $m = -\frac{29-\sqrt{201}}{160}$, on peut les obtenir directement. On peut d'ailleurs reconnaître *a priori* qu'ils sont tous deux négatifs, car la fonction u ne s'annule que pour $m = -\frac{1}{8}$ et pour $m = 0$.

[Solution à peu près satisfaisante par M. Brunet, élève à l'école normale d'Aix.]

4221. — *On considère toutes les circonférences telles que le rapport du rayon de chacune d'elles à la distance de son centre à une droite fixe* D *soit un nombre constant* m.

1° *Démontrer que deux quelconques de ces circonférences ont un de leurs centres de similitude situé sur la droite* D.

2° *Le nombre* m *étant supposé plus petit que l'unité, démontrer que toutes celles de ces circonférences qui ont leurs centres situés sur une droite donnée* D' *sont tangentes à deux droites fixes. — La proposition subsiste-t-elle quand* m *surpasse l'unité?*

3° *Chercher et discuter le lieu géométrique des centres de celles de ces circonférences qui sont tangentes à un cercle donné, de centre* O *et de rayon* r.

Construire ce lieu en supposant O *situé sur la droite* D, *et* $m = 2$: *distinguer les parties du lieu qui correspondent à un contact extérieur ou à un contact intérieur entre le cercle* O *et les circonférences variables.*

1° Soient C et C' les centres de deux des circonférences considérées ; abaissons les perpendiculaires CP, C'P' sur la droite D ; nous avons

$$\frac{CA}{CP} = \frac{C'A'}{C'P'} = m.$$

Par suite, les droites PP', AA', CC' sont concourantes. Or les rayons CA et C'A' étant parallèles, le point de rencontre des droites CC' et AA' est un des centres de similitude des deux circonférences. Ce point est situé sur la droite D, ce qui démontre la proposition.

2° Considérons deux circonférences ayant leurs centres C et C' sur la droite D'. Le point S, intersection des droites D et D', est, comme nous venons de le voir, un des centres de similitude des deux circonférences ; par suite, les tangentes issues du point S à la circonférence (C) sont également tangentes à la circonférence (C'). Comme celle-ci est arbitraire, la proposition est établie.

Cette démonstration, pour être valable, exige qu'on puisse mener des tangentes du point S à la circonférence (C) ; il faut pour cela que le point S soit à l'extérieur du cercle (C). On doit donc avoir

$$SC > CA.$$

Or, on a $CA = m.CP$; la condition devient $SC > m.CP$, ou

$$m < \frac{SC}{CP}.$$

Si m est inférieur à 1, cette condition est toujours remplie, car SC est plus grand que CP.

Si m est plus grand que 1, la propriété indiquée dans l'énoncé n'a lieu que si $m < \frac{SC}{CP}$, c'est-à-dire si m est inférieur à l'inverse du *sinus* de l'angle des droites D et D'.

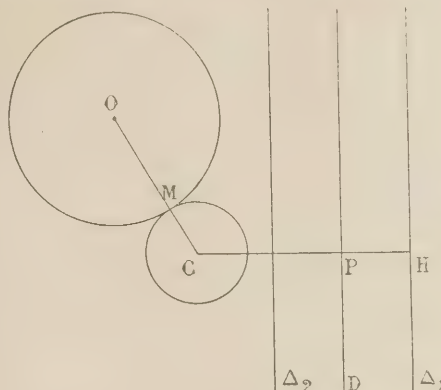
3° I. Considérons d'abord une circonférence (C) tangente *extérieurement* au cercle donné (O). Soit M le point de contact ; abaissons CP perpendiculaire sur la droite D. On a

$$\frac{CM}{CP} = m \quad \text{ou} \quad \frac{CO - R}{CP} = m ;$$

on en déduit

$$CO = m.CP + R = m\left(CP + \frac{R}{m}\right).$$

Portons sur la droite CP, à partir du point P et *dans le sens* CP, une longueur $PH = \frac{R}{m}$; nous avons $CH = CP + \frac{R}{m}$, et



par suite

$$CO = m.CH.$$

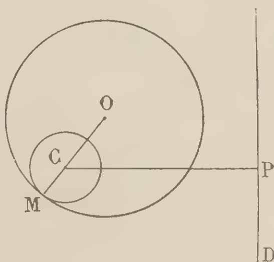
Or, le point H est situé sur une droite Δ parallèle à D et distante de Δ de la longueur $\frac{R}{m}$. On en conclut que le point C est situé sur une conique ayant pour foyer le point O, pour directrice correspondante la droite Δ et pour excentricité le nombre m.

Le point C et la droite Δ sont placés de part et d'autre de la droite D. Or cette droite divise le plan en deux régions que nous appellerons les régions (1) et (2). Soit Δ_1 la parallèle à D à la distance $\frac{R}{m}$ qui est située dans la région (1), et Δ_2 la droite analogue située dans la région (2). Désignons par (Γ_1) la conique qui a pour foyer le point O, pour directrice correspondante Δ_1 et pour excentricité m ; par (Γ_2) la conique qui a pour foyer le point O, pour directrice correspondante Δ_2 et pour excentricité m.

Il résulte de ce qui précède que tout point du lieu qui correspond à un contact extérieur est situé sur la conique (Γ_1) ou sur la conique (Γ_2), selon que ce point est situé dans la région (2) ou dans la région (1).

II. Considérons maintenant un point du lieu relatif à un contact *intérieur*.

Supposons d'abord que le rayon du cercle variable soit inférieur à celui du cercle fixe. Nous avons



$$\frac{CM}{CP} = m, \quad \text{et} \quad CM = R - CO ;$$

nous en tirons

$$CO = m\left(\frac{R}{m} - CP\right).$$

Portons sur la droite CP, à partir du point P et *dans le sens* PC, une longueur $PH = \frac{R}{m}$. Le point H tombe en dehors de CP puisque $\frac{R}{m} - CP$ est positif, et il se trouve sur la droite Δ_1 si le point C est dans la région (1), ou sur Δ_2 si le point C est dans la région (2).

On a les mêmes conclusions si le rayon de la circonférence variable est plus grand que R.

En conséquence, tout point du lieu relatif à un contact intérieur appartient à la conique (Γ_1) ou à la conique (Γ_2) suivant que ce point est situé dans la région (1) ou dans la région (2).

Réciproquement, tout point de la conique (Γ_1) est un point du lieu relatif à un contact extérieur ou intérieur suivant que ce point est dans la région (2) ou dans la région (1) et tout point de la conique (Γ_2) est un point du lieu relatif à un contact extérieur

ou intérieur suivant que ce point est situé dans la région (1) ou dans la région (2).

La démonstration ne présente aucune difficulté; soit par exemple C un point de la conique (Γ_1) situé dans la région (2). Menons de ce point une perpendiculaire à D qui rencontre D au point P et Δ_1 au point H. Nous avons par hypothèse

$$CO = m.CH.$$

Or, $CH = CP + PH = CP + \frac{R}{m}$,

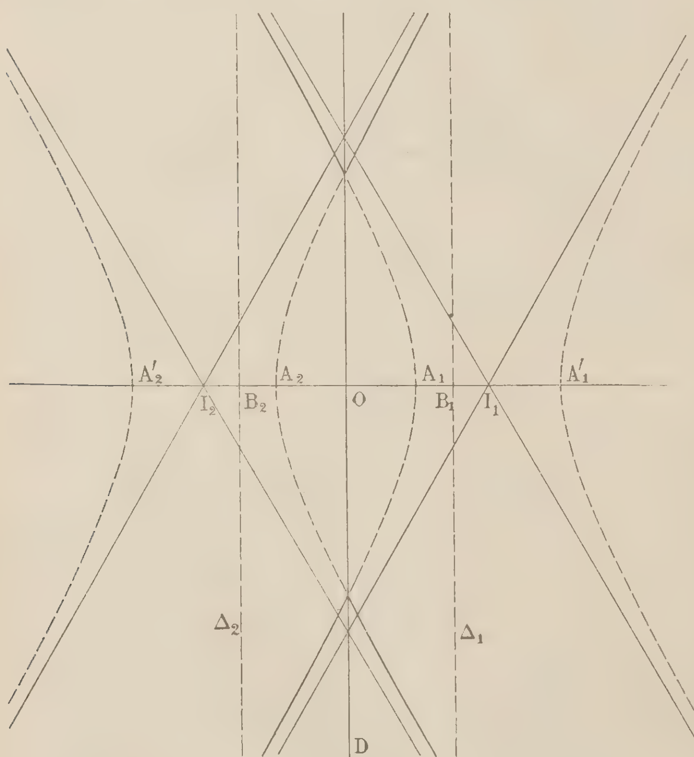
d'où $CO = m.CP + R$;

ce qui montre que le cercle de centre C et de rayon $m.CP$ est tangent extérieurement au cercle fixe (O).

Démonstration analogue pour les autres cas.

Il résulte de cette discussion que le lieu demandé se compose des deux coniques (Γ_1) et (Γ_2). Les points de Γ_1 situés dans la région (2) et les points de Γ_2 situés dans la région (1) sont les centres relatifs à un contact extérieur. Les points de Γ_1 situés dans la région (1) et les points de (Γ_2) situés dans la région (2) sont les centres relatifs à un contact intérieur.

Supposons maintenant le point O situé sur la droite D et $m = 2$. Les coniques Γ_1 et Γ_2 sont des hyperboles symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite D. Construisons l'hyperbole Γ_1. La distance du foyer O à la directrice Δ_1 est $\frac{R}{2}$ et l'excentricité est égale à 2.



Or, si on désigne par $2a$ la longueur de l'axe transverse et par $2c$ la distance focale d'une hyperbole, on sait que l'excentricité est égale à $\frac{c}{a}$ et que la distance d'un foyer à la directrice correspondante est $\frac{c^2 - a^2}{c}$; on a donc

$$\frac{c}{a} = 2 \qquad \text{et} \qquad \frac{c^2 - a^2}{c} = \frac{R}{2}.$$

On en déduit $a = \frac{R}{3}$, $c = \frac{2R}{3}$. Abaissons du point O la perpendiculaire OB_1 sur Δ_1, et prenons sur cette droite, à partir du point O, dans le sens OB_1, la longueur $OI_1 = \frac{2R}{3}$. Le point I_1 est le centre de l'hyperbole Γ_1; le milieu A_1 de OI_1 est l'un des sommets.

On peut remarquer en outre que les asymptotes font avec la droite OI_1 un angle de 60°, car le cosinus de cet angle est égal à $\frac{a}{c}$ c'est-à-dire à $\frac{1}{2}$.

L'hyperbole (Γ_2) est symétrique de (Γ_1) par rapport à la droite D.

Nous avons représenté en trait plein les portions de courbes correspondant à un contact extérieur et en traits discontinus celles qui correspondent à un contact intérieur.

(A. MAITRE.)



Ordre des sciences physiques et naturelles.

4222. — *Dans un tube eudiométrique qui plonge dans une cuve à mercure, on mélange 20^cc d'oxyde de carbone, mesurés sous la pression de 76^cm de mercure et à 0°, avec 50^cc d'oxygène, mesurés sous la pression de 38^cm et à 0°. On fait passer dans le mélange une étincelle électrique, puis on amène le résidu gazeux à occuper un volume de 35^cc. Quelle sera la pression finale du mélange?*

Si l'on fait passer ensuite dans le résidu gazeux une solution de potasse, en quantité suffisante pour absorber tout l'acide carbonique, à quelle hauteur s'élèvera le mercure dans le tube eudiométrique?

(*8 juillet, de 8 h. 1/2 à midi 1/2.*)

50^{cc} d'oxygène mesurés sous la pression de 76^{cm} occupent un volume deux fois moindre que sous la pression de 38^{cm}, c'est-à-dire 25^{cc}.

Le passage de l'étincelle détermine la combinaison de l'oxyde de carbone et de l'oxygène d'après l'équation

$$CO + O = CO^2.$$

Cette équation montre que 2 vol. d'oxyde de carbone s'unissent à 1 vol. d'oxygène, considéré sous la même pression. Les 20^{cc} d'oxyde de carbone s'unissent donc à 10^{cc} d'oxygène sous la pression de 76^{cm}, et la combinaison produit 20^{cc} de gaz carbonique sous la même pression.

Le résidu de gaz carbonique et d'oxygène, mesuré sous la pression de 76^{cm}, est $20 + 15 = 35^{cc}$. Comme ce volume est précisément celui qu'on veut faire occuper au résidu, la pression finale du mélange est 76^{cm}.

Appelons x la hauteur finale du mercure au-dessus du niveau libre dans la cuve lorsque tout le gaz carbonique est absorbé. L'oxygène qui reste occupe dans le tube eudiométrique une longueur de $(35 - x)^{cm}$ sous une pression de $(76 - x)^{cm}$. La loi de Mariotte donne

$$\frac{35}{35 - x} = \frac{76 - x}{76 \times \frac{15}{35}},$$

d'où l'on tire l'équation

$$x^2 - 111x + 1\,520 = 0.$$

La plus petite racine est seule acceptable; elle a pour valeur

$$x' = \frac{111 - 79}{2} = 16^{cm}.$$

Telle est la hauteur à laquelle le mercure s'élèvera dans le tube eudiométrique.

(M. OGER.)

[Ont résolu la même question : MM. C. Brunet ; M. Georgi ; R. Henry ; Le Hénaff ; A. Maitre ; E. Ménissier.]

ARITHMÉTIQUE

4259. — *Trouver un carré parfait de quatre chiffres, sachant que le nombre formé par les deux derniers chiffres est multiple du nombre formé par les deux premiers.*

Soit a le nombre formé par les deux premiers chiffres du nombre ; celui formé par les deux derniers doit être ma, m étant entier. Le nombre cherché est donc.

$$a \times 100 + m\,a = a(100 + m).$$

Le nombre cherché devant avoir quatre chiffres, a en aura certainement deux et par suite est supérieur ou au moins égal à 10. D'autre part, am est un nombre plus petit que 100; donc m est au plus égal à 9.

Le nombre $100 + m$ ne peut donc être que l'un des nombres

$$101,\ 102,\ 103,\ 104,\ 105,\ 106,\ 107,\ 108,\ 109.$$

Si on décompose ces nombres en leurs facteurs premiers, à l'exception de 104 et de 108, on trouve que ces facteurs ont tous pour exposant 1.

Si donc on prenait $m = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9,$ le produit $a(100+m)$ ne pourrait être carré parfait que si a était divisible par $100+m$; ce qui est impossible, puisque a est inférieur à 100 par hypothèse.

Prenons donc $m = 4$. On a

$$104 = 2^3.13;$$

pour que le produit $a \times 104$ soit carré parfait, il faut que a soit divisible par 2 et 13 ; donc

$$a \geqslant 2 \times 13 = 26.$$

Mais alors $$ma \geqslant 4 \times 26 = 104,$$

ce qui est impossible, puisque ma doit être plus petit que 100.

Reste donc la seule hypothèse $m = 8$. Si l'on décompose 108 en facteurs premiers, il vient

$$108 = 2^2.3^3;$$

pour que le produit $a \times 108$ soit carré parfait, il faut et il suffit que a soit le produit de 3 par un carré parfait ; donc $a = 3b^2$.

D'autre part, il faut que

$$ma = 8.3b^2 = 24b^2$$

soit inférieur à 100; on ne peut donc prendre pour b^2 qu'un carré, inférieur ou au plus égal au quotient entier de la division de 100 par 24; ce quotient est 4; le seul carré acceptable est donc

$$b^2 = 4.$$

Dans ces conditions,

$$ma = 24 \times 4 = 96 = 8 \times 12,$$
$$m = 8,$$

et le nombre cherché est

$$108 \times 12 = 1\,296.$$

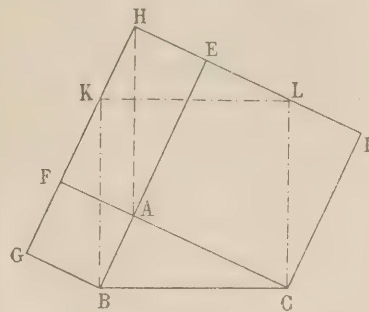
(M. DROVIN, école normale de Châlons.)

[Ont résolu la même question : Mme L. Ségala; MM. E. Bernardini ; A. Bertrand ; F. Beynas ; H. Bosc ; Burgat ; G. Charpentier ; E. Clément ; Coste ; L. Curt ; L. Cussenot ; N. Delhotel ; Douménach ; P. Gervaiseau ; L. Gourdet ; R. Henry ; G. Hiernaux ; Laguarigue de Survilliers ; Layes ; Legrand ; L. Magne ; A. Maitre ; F. Morel ; F. Pégorier ; J. Peyret ; Pihier ; P. Plisson ; Raynaud ; P. Rolley ; M. Saget ; E. Sinturel ; C. Szabo ; H. Valdenaire.]

GÉOMÉTRIE

Démonstration du théorème de Pythagore par M. Leone **Orsini**, professeur à l'école technique de Caserta.

Soit ABC un triangle rectangle, ACDE, ABGF les carrés construits sur les côtés de l'angle droit. Prolongeons DE et FG jusqu'à leur intersection, en H, et tirons AH. Les triangles rectangles AFH, AEH sont évidemment égaux au triangle ABC. Donc :



Si de la figure totale on retranche les trois triangles ABC, AFH, AEH, *égaux à* ABC, *on obtient la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit.*

Elevons BK et CL perpendiculaires à BC en B et C. Les triangles BGK, CLD sont égaux à ABC; ils sont en effet équiangles, et BG = AB, CD = CA. Donc la figure BCLK est un carré et KL = BC; donc enfin le triangle KHL est égal à ABC. Par suite :

Si de la figure totale, on retranche les trois triangles BGK, KHL, LCD, *égaux à* ABC, *il reste le carré construit sur l'hypoténuse.*

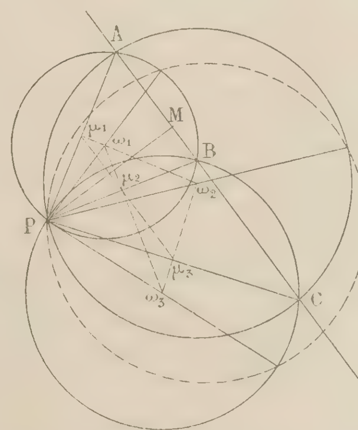
Puisque dans les deux cas on a retranché de la figure totale des aires égales, les aires restantes le sont aussi ; c.q.f.d.

4272. — *Étant donné un cercle, on sait que les trois cercles décrits sur trois cordes issues d'un de ses points,* P, *se coupent suivant trois points* A, B, C *en ligne droite. Démontrer :*

1° *Que si on décrit des cercles sur* PA, PB, PC *comme diamètres, ces cercles se coupent en un même point de la droite* AB;

2° *Que si* $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ *désignent les centres des trois premiers cercles et* μ_1, μ_2, μ_3 *ceux des trois derniers, ces centres sont en ligne droite trois à trois.*

1° Abaissons la perpendiculaire PM sur AB. L'angle PMA étant droit, son sommet M est situé sur le cercle μ_1, décrit sur PA comme diamètre; pour la même raison le point M appartient aux cercles μ_2 et μ_3, ce qui justifie la première partie.



2° Les trois cercles μ_1, μ_2, μ_3 ayant une corde commune PM, ont leurs centres en ligne droite. Il en est de même des systèmes de cercles $\mu_1, \omega_1, \omega_2$; $\mu_2, \omega_1, \omega_3$; $\mu_3, \omega_2, \omega_3$, qui admettent respectivement pour corde commune PA, PB, PC.

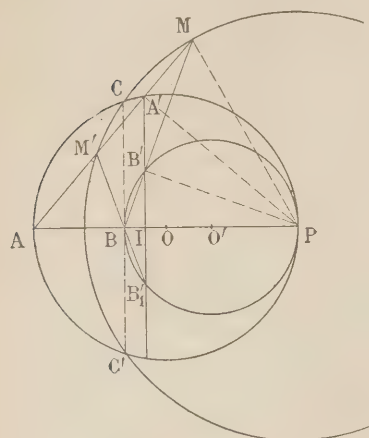
(G. DOBROVICI, lycée de Berlad.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Audibert ; P. Barroué ; F. Beynas ; M. Boucly ; R. Van Cauwenberghe ; A. Creuser ; L. Cussenot ; G. Digne ; Feintuch ; E. Foucart ; L. Gourdet ; A. Gourdin ; L. Grillet ; Ch. Gumet ; G. Hiernaux ; H. Jouanneau ; E. Layes ; P. Leduc ; H. Lévy ; A. Maitre ; A. Mire ; J. Pillard ; M. Rebeix ; E. Rousselot ; G. Sarrassat ; C. Szabo ; H. Thouvenot ; A. Tuinerelle ; H. Varinot ; C. Bourdet ; J. Méhu.]

4273. — *On considère deux cercles* O, O′ *tangents intérieurement en* P *et qui coupent leur diamètre commun* OO′ *en* A *et* B. *Une droite variable perpendiculaire à* OO′ *rencontre les cercles* O, O′ *en* A′, B′.

Lieu du point d'intersection des droites AA′ *et* BB′.

Joignons les points M, A′, B′ au point P. Le quadrilatère MA′B′P est inscriptible, car les angles en A′ et B′ sont droits comme inscrits chacun dans un demi-cercle ; donc



$$\widehat{PMB'} = \widehat{PA'B'}.$$

Or $\widehat{PA'B'} = \widehat{PAA'}$

(côtés perpendiculaires).

Par suite,

$$\widehat{PMB} = \widehat{PAA'}.$$

Les triangles PMB, PAM ayant ainsi un angle commun et un angle égal sont semblables, et l'on a

$$\frac{PM}{PB} = \frac{PA}{PM},$$

d'où $$\overline{PM}^2 = PA.PB = \text{const.}$$

Ce résultat montre que le lieu de M est un cercle de centre P et de rayon égal à $\sqrt{PA.PB}$. En faisant varier la droite A′B′, on voit que lorsque cette droite touche le cercle O′ en B, elle coupe le cercle O en deux points du lieu, C et C′, de sorte que M décrit seulement l'arc du cercle P extérieur au cercle O.

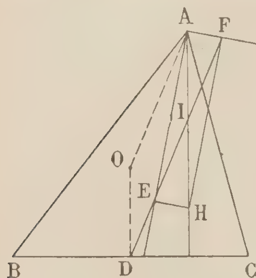
L'arc intérieur CC′ est décrit par le point d'intersection M de AA′ et BB'_1, B'_1 étant le second point de rencontre de la droite variable et du cercle O′.

(C. SARRASSAT.)

[Ont résolu la même question : MM. J. Amboise ; E. Bourrienne ; L. Cussenot ; E. Edme ; Feintuch ; E. Foucart ; L. Grillet ; R. Guillemin ; G. Hiernaux ; H. Jouanneau ; A. Larue ; A. Maître ; Manceaux de Ronchonnot ; R. Manen ; Mathieu ; A. Nayel ; J. Pastour ; E. Rousselot ; E. De Rycker ; H. Thouvenot.]

4278. — *Dans un triangle* ABC, *on projette le point de concours* H *des hauteurs en* E, F *sur les deux bissectrices de l'angle* A. *Démontrer que le milieu* D *de* BC *et les deux points* E, F *sont en ligne droite.*

Le quadrilatère HEAF ayant les angles en A, E, F droits est un rectangle ; donc la diagonale EF passe par le milieu I de AH, et est, comme nous allons le montrer, parallèle à la droite OA, qui joint le centre O du cercle circonscrit au sommet A.



En effet, on sait que la bissectrice de l'angle A est en même temps bissectrice de l'angle OAH formé par la droite OA avec la hauteur AH ; par suite

$$\widehat{OAE} = \widehat{EAH}$$

ou, comme $\widehat{EAH} = \widehat{AEF}$,

$$\widehat{OAE} = \widehat{AEF},$$

ce qui établit le parallélisme de OA et EF.

D'ailleurs, on sait que

$$OD = \frac{AH}{2} \text{ ou } AI,$$

de sorte que la figure ODIA ayant deux côtés égaux et parallèles est un parallélogramme.

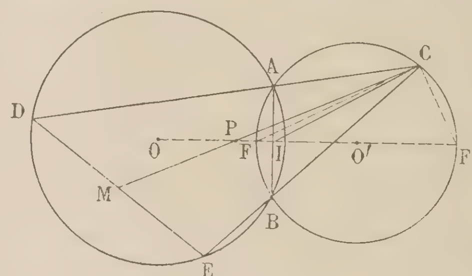
Il en résulte que la droite DI se confond avec la parallèle EF à OA issue du point I, ce qui justifie l'énoncé.

(J. MÉHU, lycée de Brest.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Baudot ; Bayor ; M. Boutry ; Burgat ; H. Carpentier ; S. Coudanne ; A. Cremer ; L. Cussenot ; E. Delacommune ; Feintuch ; E. Fourmon ; P. Fournel ; A. Gourdin ; G. Hiernaux ; Jacques ; P. Leduc ; A. Maître ; Manceaux de Ronchonnot ; A. Mirc ; P. Plisson ; M. Rebeix ; P. Sarrassat ; A. Tumerelle ; H. Valdenaire ; H. Varinot ; A. Wiart, à Cambrai.]

4279. — *On considère deux cercles* O, O′ *se coupant en* A *et* B. *On joint* A *et* B *à un point quelconque* C *du cercle* O′ *par deux droites qui rencontrent le cercle* O *en* D *et* E. *Démontrer que la médiane du triangle* CDE *issue de* C *passe par un point fixe.*

Première solution. — Le quadrilatère ABED étant inscriptible, les triangles CDE, CBA sont semblables. Par suite les médianes CM, CI de ces triangles font des angles égaux avec les côtés homologues CD, CB. Il en résulte que la médiane CM est symétrique de la médiane CI par rapport à la bissectrice CF de l'angle ACB.



Soit P le point de rencontre de MC avec OO′. Le faisceau formé par les côtés de l'angle PCI et ses deux bissectrices CF, CF′ est harmonique ; donc la division PFIF′ l'est aussi, et P est le conjugué harmonique de I par rapport à F, F′, c'est-à-dire le pôle de la droite AB par rapport au cercle O′. La médiane passe ainsi par le point fixe P.

(M. REBEIX, lycée du Puy.)

Seconde solution. — Transformons la figure par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour pôle le point C et pour module la puissance du point C par rapport au cercle O.

Dans ces conditions, l'inverse du cercle O est ce cercle lui-même ; le cercle ABC qui contient le pôle C a pour réciproque la droite DE qui joint les inverses D et E des points A et B. Par conséquent la droite CO′ est perpendiculaire à DE, c'est-à-dire parallèle à OM, perpendiculaire à DE.

D'autre part, l'angle constant ACB intercepte sur le cercle O deux arcs AB et DE dont la différence DE — AB est constante, comme ayant même mesure que le double de l'angle ACB ; AB étant constant, DE est aussi constant. Le milieu M de la corde constante DE décrit alors un petit cercle O tangent à cette corde.

La droite CM joint ainsi les extrémités de deux rayons parallèles (et de sens inverse) du cercle O′ et du petit cercle O ; elle passe donc par le centre de similitude interne P de ces deux cercles.

(L. MAGNE, école primaire supérieure de Belvès.)

[Ont résolu la même question : MM. Bayor ; Burgat ; H. Carpentier ; S. Coudanne ; A. Cremer ; L. Cussenot ; G. Decoux ; Dobrovici ; E. Fourmon ; L. Gourdet ; A. Gourdin ; G. Hiernaux ; P. Leduc ; A. Maître ; P. Mathieu ; Saget ; J. Sire ; Vial.]

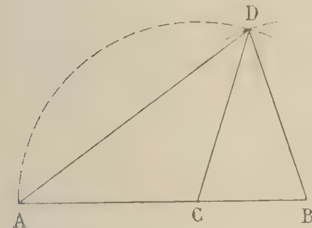
4280. — *Sur une droite* AB *on prend un point* C *tel que*

$$AB.BC = \overline{CA}^2;$$

de B *et* C *comme centres, avec* AC *pour rayon, on décrit deux cercles qui se coupent en* D. *Démontrer que le triangle* ABD *est isocèle, les angles à la base étant égaux au double de l'angle au sommet.*

En remplaçant CA par son égal BD, la relation énoncée peut s'écrire

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC}.$$



Donc les triangles ABD et DBC, qui ont un angle commun compris entre côtés proportionnels, sont semblables, et comme le second triangle est isocèle, il en est de même du premier triangle, ABD.

En considérant successivement les triangles isocèles BCD et CAD, on a

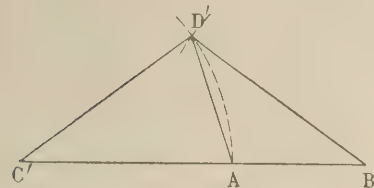
$$\widehat{ABD} = \widehat{BCD} = 2\widehat{BAD};$$

l'angle à la base du triangle isocèle ABD est ainsi le double de l'angle au sommet. Si l'on désigne par x la valeur de ce dernier angle, on aura alors

$$x + 2 \times 2x = 180^\circ, \qquad \text{d'où} \qquad x = 36^\circ.$$

La figure considérée est donc celle qui sert à déterminer le côté du décagone régulier convexe, inscrit dans le cercle de rayon AB.

Remarque. — Le point C considéré ici n'est autre que le point qui partage AB en moyenne et extrême raison. On sait qu'il existe un second point analogue, C', situé sur le prolongement de BA et tel que



$$AB.BC' = \overline{C'A}^2.$$

On démontre comme plus haut que le triangle ABD' est isocèle, et que l'angle à la base est la moitié du supplément de l'angle au sommet, BAD'.

(J. SIRE, collège de Lure.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Amblard ; J. Amboise ; E. Ardin-Delteil ; G. Argellies ; A. Baras ; P. Barroué ; E. Baudot ; G. Bernard ; M. Boucly ; V. Bourquin ; Boutignon ; M. Boutry ; A. Bouzy ; Burgat ; J. Camus ; H. Carpentier ; A. Chaignaud ; J. Chantre ; F. Chuberre ; H. De Clercq ; A. Cormerois ; S. Coudanne ; A. Couly ; L. Cussenot ; G. Decoux ; E. Delacommune ; G. Delahaye ; N. Delhotel ; J. Delpont ; M. Deschamps : Dobrovici ; J. Dupin ; R. Dupland ; G. Dupuy ; Feintuch ; E. Fourmon ; G. Fournel ; L. Fournier ; Gernez-Pfanmatter ; A. Giorgio ; L. Gourdet ; A. Gourdin ; Grzybowski ; E. Guérin ; P. Herrmann ; G. Hiernaux ; H. Janois ; A. Jeannel ; E. Joyer ; H. Keefer ; B. Lachenaud ; J. M. Lagarde ; R. Larsonneur ; A. Larue ; E. Layes ; P. Leduc ; Ch. Lefebvre ; E. Le Maigre ; F. Leulliot ; H. Lévy ; E. Lézier ; L. M. ; E. Madet ; L. Magne ; A. Maître ; Manceaux de Ronchonnot ; J. Massip ; Mathieu ; P. Mathieu ; J. Maury ; J. Méhu ; de Mendiry ; A. Meynier ; A. Mirc ; F. Morel ; L. P. à A. ; L. Perret ; J. Pillard ; P. Plisson ; M. Rebeix ; Ribes ; Robin ; P. Rolley ; E. Rousset ; P. Sarrassat ; P. Sickler ; J. Sous ; C. Szabo ; Tiret ; J. Trouillé ; A. Tumerelle ; H. Valdenaire ; H. Varinot ; A. Vergnole ; Vial ; R. Vidal-Naquet ; J. E. Villemagne ; Watrin ; A. Wiart.]

PHYSIQUE

4292. — *Calculer la distance focale d'une lentille, sachant qu'elle donne une image de* $0^{mm},8$ *de hauteur d'un homme ayant* $1^m,76$ *et qu'un coureur faisant* 63^{km} *en* $5^h\,20^m$, *et partant de la lentille, rencontre cet homme au bout de* $1^h\,31^m\,15^s$.

(*Bacc. lettres math., Toulouse, juillet 1896.*)

Calculons d'abord la distance p de l'homme à la lentille. Le coureur fait 63000^m en $5^h\,20^m$, c'est-à-dire en 19200^s ; en une seconde il fait $\frac{63000}{19200}$ mètres, et en $1^h\,31^m\,15^s$ ou 5475^s,

$$\frac{63000 \times 5475}{19200} = 17964^m,843.$$

Désignons par f la distance focale de la lentille ; nous savons que le rapport des dimensions linéaires de l'image et de l'objet est

$$\frac{i}{o} = \frac{p'}{p}. \qquad (1)$$

Dans le cas du problème, $p > f$. La formule ordinaire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ donne

$$p' = \frac{pf}{p - f}.$$

Remplaçant p' par sa valeur tirée de (1), il vient

$$\frac{i}{o} = \frac{f}{p - f},$$

d'où

$$f = \frac{ip}{i + o}.$$

Application. — $i = 0,8$; $o = 1760$; $p = 17964843$:

$$f = \frac{0,8 \times 17964843}{1760,8} = 816^{cm},21.$$

(A. LE MAIGRE.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Ardaillon ; Ardin-Delteil ; Baras ; L. Barberot ; E. Baudot ; F. Beynas ; G. Bocquet ; L. Bois ; Boutignon ; M. Boutry ; A. Bouzy ; F. Bréthous-Guichot ; J. Chantre ; F. Chuberre ; J. Camus ; E. Clément ; J. Coupat ; P. Courbière ; L. Curt ; M. Deschamps ; Delavergnas ; R. Durand ; J. Fourestier ; L. Fournier ; Geltzenlichter ; E. Guérin ; E. Layes ; Lhuissier ; E. Madet ; A. Maillon ; A. Maniez ; Maubeuche ; F. Montaland ; Morel ; Nicolas ; A. Pavard ; G. Perdrizet ; L. Potin ; Proust ; Raynaud ; Robin ; A. Smàntanescu ; L. Séguenot ; Sickler ; Sinturel ; L. Vaulet ; G. Vente ; J. Villemagne ; E. Sevin.]

4293. — *On donne* n *éléments de pile identiques dont la résistance intérieure est* r. *Quelle doit être la résistance extérieure* R *pour qu'il n'y ait aucun avantage à les associer en série ou en batterie ?*

On donne $r = 2$ *ohms*, $R = 10$ *ohms*. *Quelle est la disposition la plus avantageuse ?*

(*Bacc. lettres-sciences, Alger, juin 1897.*)

1° Désignons par e la force électro-motrice d'un élément. Dans le cas du groupement en série, la force électro-motrice totale est ne et la résistance intérieure totale, nr. On a donc, en appliquant la formule d'Ohm,

$$I = \frac{ne}{nr + R}. \qquad (1)$$

Dans le cas du groupement en batterie, la force électro-motrice totale est égale à celle d'un élément, la résistance intérieure totale est $\frac{r}{n}$, et la formule générale devient

$$I' = \frac{e}{\frac{r}{n} + R} = \frac{ne}{r + nR}. \qquad (2)$$

Pour qu'il n'y ait aucun avantage à associer les éléments en série ou en batterie, il faut que l'on ait

$$\frac{ne}{nr + R} = \frac{ne}{r + nR},$$

ou

$$\frac{1}{nr + R} = \frac{1}{r + nR},$$

ou

$$R(n - 1) = r(n - 1),$$

d'où l'on tire

$$R = r.$$

La résistance extérieure doit donc être égale à la résistance intérieure.

2° Si l'on fait $r = 2^{\text{ohms}}$, $R = 10^{\text{ohms}}$, les formules (1) et (2) deviennent

$$I = \frac{ne}{2n+10} \qquad \text{et} \qquad I' = \frac{ne}{2+10n}.$$

De deux fractions qui ont le même numérateur, la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur. Or, on a $2n + 10 < 2 + 10n$; donc c'est le groupement en série qui est le plus avantageux.

(F. CHUBERRE, à Rennes.)

[Ont résolu la même question : Mlle J. Parisot; MM. J. Ar; E. Baudot; F. Beynas; Bigot; L. Bois; M. Boutry; Cabrol; Chaineau; Cussenot; Durand; Fargeton; J. Fourestier; Fournier; P. Frescal; Gonnet; E. Guérin; Guillemin; G. Hiernaux; G. Jarreton; Layes; Leulliot; E. Le Maigre; Lhuissier; Madet; Maître; Maniez; Méry de Montigny; Mirc; Le Moingt; F. Morel; Orsini; Raynaud; Rebeix; G. Réveillon; Valdenaire; L. Vaulet; E. Sevin.]

QUESTIONS PROPOSÉES

4303. — Si $a + b + c = 0$, on a les deux identités

$$(a^2+b^2-ab)(b^2+c^2-bc)(a^2+c^2-ac)+8a^2b^2c^2+3(ab+bc+ac)^3=0,$$
$$50(a^7+b^7+c^7)^2 = 49(a^4+b^4+c^4)(a^5+b^5+c^5)^2.$$

(E. SINTUREL, collège de Cusset.)

4304. — Deux circonférences égales se coupent au point M. Mener par ce point une droite rencontrant les circonférences en deux points A et B tels que l'on ait

$$\frac{1}{MA} \pm \frac{1}{MB} = \frac{1}{l},$$

l étant une longueur donnée.

4305. — Si dans un tétraèdre les arêtes opposées sont égales et orthogonales deux à deux, le tétraèdre est régulier.

(M. REBEIX, lycée du Puy.)

4306. — Soit un cercle de surface 104; on admet que l'aire du triangle équilatéral inscrit soit 43.

1° Démontrer que cette hypothèse revient à supposer

$$\pi = \sqrt{\frac{18\,252}{1\,849}} = 3{,}1418\ldots$$

2° Dans la figure ci-contre on a représenté le cercle de centre A, de diamètre CS et de surface 104; le triangle équilatéral inscrit CLF, de surface 43; les demi-cercles de diamètres CA et AS; la perpendiculaire MN au milieu de CL, la corde LS et l'arc CF de centre L. Prouver que les aires des différentes sections de la figure sont représentées par les nombres qui y sont écrits.

(*Cyclometria*, composée par l'éditeur Georgius Ludovicus *Frebonius*, Hambourg, 1627.)

(G. MAUPIN.)

4307. — Par un point O du plan d'un angle XAY, on mène une sécante ONP. Lieu du quatrième sommet M du parallélogramme ANMP.

Démontrer que les tangentes en M et A au lieu trouvé se coupent sur la sécante ONP.

(F. BOULAD, école des Ponts et Chaussées.)

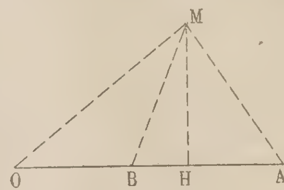
4308. — Trouver la limite de l'expression

$$\frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2}$$

lorsque x tend vers a.

(J. MÉHU, lycée de Brest.)

4309. — Dans un plan vertical donné, une source lumineuse (assimilée à un point M) doit éclairer les trois points connus O, A, B, situés sur une même horizontale, de manière que les éclairements en ces trois points soient respectivement proportionnels aux trois nombres $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{4}$, 1; on demande de déterminer la position M de la source, en calculant l'abscisse $OH = x$ et l'ordonnée $MH = y$ du point M projeté en H sur l'horizontale.



Données : $OA = a = 200^{m}$; $OB = b = 100^{m}$.

On sait que l'éclairement produit par une même source lumineuse à une distance variable est inversement proportionnel au carré de cette distance.

(*Bacc. lettres-sciences, Rennes, novembre 1897.*)

4310. — Dans un plan vertical, on donne une droite fixe OA qui fait un angle α avec l'horizontale OX. L'extrémité C d'une barre pesante et homogène BC, de longueur a, glisse sans frottement sur la droite OA, tandis que l'autre extrémité B de cette barre est attachée à un fil OB dont la longueur est égale à BC et qui est fixé en O.

On néglige la pesanteur de ce fil.

En désignant par x l'angle que fait le fil OB avec la droite OA, on demande :

1° de montrer que la distance du centre de gravité de BC à l'horizontale OX est égale à

$$a \sin(\alpha + x) + \frac{a}{2}\sin(\alpha - x);$$

2° de déterminer par sa tangente l'angle x qui correspond au maximum de cette distance et d'examiner le cas particulier où $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$;

3° de trouver la position d'équilibre de la barre BC.

(*Bacc. lettres-math., Marseille, novembre 1897.*)

4311. — De l'air, saturé de vapeur d'eau, à la température 10°, pour laquelle la tension maxima de la vapeur d'eau est de $9^{mm},1$, est refoulé par une pompe de compression de 1^{lit} de capacité, dans une enceinte, primitivement privée d'air, de 2^{lit} de capacité.

Sachant que la température finale dans cette enceinte est de 15° pour laquelle la tension maxima de la vapeur d'eau est de $12^{mm},7$, on demande quelle sera la pression finale dans cette enceinte au bout de 10 coups de piston.

La pression atmosphérique est de 760^{mm} de mercure;

Le coefficient de dilatation de l'air est $\alpha = 0{,}00365$.

(*Bacc. lettres-math., Marseille, novembre 1897.*)

CONCOURS GÉNÉRAL

On n'a pas trouvé dans ce journal et on nous a réclamé quelquefois l'énoncé de la question qu'on suppose avoir été donnée en 1888 au Concours général de Mathématiques élémentaires. Nous avons l'honneur d'informer nos lecteurs que cette année-là, par suite de la suppression d'une partie des crédits affectés au Concours général, ce concours n'a pas eu lieu dans la classe de Mathématiques élémentaires.

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

22e Année. — N° 11. JOURNAL Paris, le 1er Mars 1898.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie **Nony** et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

SUR LA PARABOLE

CONSIDÉRÉE COMME LIMITE D'UNE ELLIPSE OU D'UNE HYPERBOLE

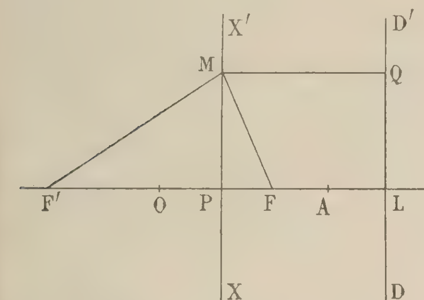
Par M. **A. Lagrange**, professeur au lycée de Brest.

On démontre dans tous les cours de géométrie élémentaire le théorème suivant :

Théorème. — *La limite d'une ellipse (ou d'une hyperbole) dont un sommet et le foyer voisin restent fixes tandis que l'autre foyer s'éloigne indéfiniment, est une parabole qui a pour sommet et pour foyers le sommet et le foyer fixes.*

Mais la démonstration qu'on en donne est en général peu rigoureuse. Voici comment on peut, élémentairement et avec toute la rigueur désirable, établir cette propriété.

Soit une ellipse de centre O, de foyers F et F′. Cherchons d'abord l'expression des rayons vecteurs d'un point M de la courbe en fonction de la projection de OM sur le grand axe. Si A est le sommet voisin de F, P la projection de M, et si nous prenons sur FF′ la direction OF comme direction positive, on a, entre les deux rayons vecteurs MF, MF′, les deux relations suivantes :



$$MF' + MF = 2OA, \qquad (1)$$

$$\overline{MF'}^2 - \overline{MF}^2 = 2FF' \times \overline{OP}.$$

La seconde relation peut s'écrire

$$(MF' - MF)(MF' + MF) = 4OF \times \overline{OP},$$

ou, en tenant compte de (1),

$$MF' - MF = 2\,\frac{OF}{OA} \times \overline{OP}. \qquad (2)$$

Des égalités (1) et (2) on tire

$$MF' = OA + \frac{OF}{OA} \times \overline{OP}, \qquad MF = OA - \frac{OF}{OA} \times \overline{OP}. \qquad (3)$$

Cela posé, considérons une droite fixe XX′ perpendiculaire à FF′ en P et cherchons vers quelle limite tend un point d'intersection M de cette droite avec l'ellipse quand le centre O s'éloigne à l'infini.

Il suffit de chercher à l'aide de l'égalité (3) la limite de MF. Or, quel que soit O à gauche de F, on a

$$OF = OA - AF, \qquad \overline{OP} = OA - AP,$$

d'où $\quad OF \times \overline{OP} = \overline{OA}^2 - OA(AF + AP) + AF \times AP,$

d'où $\quad MF = OA - \dfrac{OF \times \overline{OP}}{OA} = AF + AP - \dfrac{AF \times AP}{OA}.$

Soit L le symétrique de F par rapport à A, et menons par ce point DD′ perpendiculaire à FF′, puis MQ perpendiculaire sur DD′. On a $AF + AP = AL + AP = PL = MQ$,

d'où $$MF = MQ - \frac{AF \times AP}{OA},$$

ce qui montre que lorsque O s'éloigne indéfiniment, on a limite MF = MQ. Le point M a donc pour limite un point de la parabole de foyer F et de sommet A.

On ferait une démonstration analogue en considérant une hyperbole. On aurait dans ce cas

$$MF = \frac{OF}{OA} \times \overline{OP} - OA.$$

On en déduit comme précédemment, en appelant L le symétrique de F par rapport à A,

$$MF = PL + \frac{AF \times AP}{OA},$$

d'où lim. MF = PL ; l'une des branches de l'hyperbole a pour limite une parabole, l'autre s'éloigne à l'infini.

NOTE RELATIVE AU PROBLÈME DU

CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (1897)

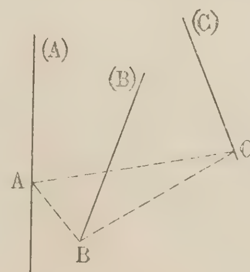
par M. **C. Hugon**, professeur au lycée de Nîmes.

Nous nous proposons de donner une nouvelle démonstration de la deuxième partie du problème du Concours général, dont la solution a été publiée dans le numéro du 1er février :

Existe-t-il un plan coupant les trois droites (A), (B) *et* (C) *en des points* A, B, C *tels que les droites* BC, CA, AB *soient rectangulaires avec les droites* (A), (B), (C) ?

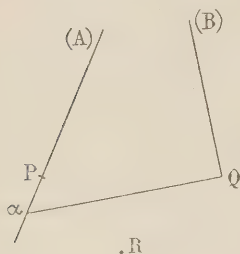
S'il existe un pareil plan, il en existe une infinité.

Je dis que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un pareil plan, est que la longueur du segment Q′R′ soit nulle.



1° *La condition est nécessaire.* — En effet, si AB est perpendiculaire à la droite (C), le plan mené par B perpendiculairement à la droite (C) contiendra AB, et par suite coupera (A) au point A. De même le plan mené par C perpendiculairement à (B) coupera (A) au même point A.

2° *La condition est suffisante.* — En effet, supposons R'Q' nul et soit α le point où se confondent R' et Q'. Le plan mené par Q perpendiculairement à (C) coupe (A) au point α, donc αQ est perpendiculaire à (C). De même αR est perpendiculaire à (B). Du reste, RQ est évidemment perpendiculaire à (A), puisque R et Q sont dans un plan ϖ perpendiculaire à (A). Donc le plan QRα répond bien à la question.



Ainsi, dans le cas où R'Q' est nul, il existe un plan répondant à la question. Il en existe évidemment une infinité, puisque, quel que soit le plan ϖ perpendiculaire à (A), R'Q' est constant.

Il est du reste facile de voir qu'on peut choisir les trois droites (A), (B) et (C) de façon que R'Q' = 0. On se donnera arbitrairement deux d'entre elles, (A) et (B) ; par un point quelconque R d'un plan ϖ perpendiculaire à (A) par exemple, on mènera un plan perpendiculaire à (B) ; il coupera (A) au point α. On choisira alors la droite (C) passant par R et située dans un plan perpendiculaire à la droite αQ.

ÉCOLE NORMALE DE SÈVRES (1897)

4153. — *Déterminer un nombre entier sachant :*

1° *Qu'il admet seulement deux facteurs premiers différents ;*

2° *Que le nombre total des diviseurs du nombre (en y comprenant l'unité et le nombre lui-même) est* 6 ;

3° *Que la somme de tous ces diviseurs est* 28.

En désignant par x et y les deux facteurs premiers différents du nombre cherché N, ce nombre est de la forme

$$N = x^{\alpha} y^{\beta}.$$

Le nombre des diviseurs de N est donc égal à $(\alpha+1)(\beta+1)$; d'où l'équation

$$(\alpha+1)(\beta+1) = 6.$$

On est alors conduit à décomposer 6 en deux facteurs différents de l'unité (α et β ne pouvant être nuls). En supposant $\alpha < \beta$, ce qui est toujours permis, cette décomposition n'est possible qu'en prenant

$$\alpha + 1 = 2 \qquad \text{et} \qquad \beta + 1 = 3,$$

d'où
$$\alpha = 1 \qquad \text{et} \qquad \beta = 2.$$

Ecrivons maintenant que la somme des diviseurs du nombre xy^2 est 28 ; nous aurons

$$(x+1)(y^2+y+1) = 28.$$

Le facteur y^2+y+1 est toujours impair puisque y^2+y est pair, comme produit des deux nombres consécutifs y et $y+1$. Or le seul facteur impair, autre que 1, contenu dans 28 est le nombre premier 7 ; donc

$$y^2 + y + 1 = 7,$$

et par suite
$$x + 1 = 4.$$

On déduit facilement de là

$$y = 2, \qquad x = 3.$$

Le nombre $3.2^2 = 12$ satisfait ainsi à la question, et c'est le seul.

(Ernest Foucart.)

[Ont résolu la même question : MM. P. Barroué ; A. Bastet ; R. Cayrol ; H. Crozemarie ; L. Curt ; J. Delpont ; P. Gervaiseau ; R. Henry ; G. Hiernaux ; H. Janois ; A. Maitre ; J. Ménéchal ; A. Noyelle ; M. Oger ; F. Pégorier ; P. Plisson ; L. Quillery ; F. Riesz ; L. Sylvestre ; P. Tribier ; P. Vincent.]

4154. — *Étant donnée l'équation du deuxième degré*

$$x^2 + px + q = 0$$

dont les racines sont x' *et* x'', *on demande de calculer* P *et* Q *en fonctions de* p *et* q, *de façon à former une équation*

$$X^2 + PX + Q = 0$$

dont les racines X' *et* X'' *sont liées à* x' *et* x'' *par les relations*

$$X' = \frac{x'}{x'-1}, \qquad X'' = \frac{x''}{x''-1}.$$

Que doivent être p *et* q *pour que l'équation en* X *soit identique à l'équation en* x ?

I. On sait que dans une équation du second degré de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

la somme des racines est égale à $-\frac{b}{a}$ et leur produit à $\frac{c}{a}$. On peut donc écrire

$$x' + x'' = -p, \qquad x'x'' = q, \tag{1}$$

$$X' + X'' = -P, \qquad X'X'' = Q. \tag{2}$$

Remplaçons dans (2), X' et X'' par les valeurs données. Il vient

$$-P = \frac{x'}{x'-1} + \frac{x''}{x''-1} = \frac{2x'x'' - (x'+x'')}{x'x'' - (x'+x'') + 1},$$

$$Q = \frac{x'x''}{(x'-1)(x''-1)} = \frac{x'x''}{x'x'' - (x'+x'') + 1},$$

ou, en tenant compte de (1),

$$P = -\frac{2q+p}{q+p+1}, \qquad Q = \frac{q}{q+p+1}. \quad (*)$$

II. Pour que l'équation en X devienne identique à l'équation en x, il faut et il suffit qu'on ait

$$P = p, \qquad Q = q,$$

c'est-à-dire

$$-\frac{2q+p}{q+p+1} = p, \tag{3}$$

$$\frac{q}{q+p+1} = q. \tag{4}$$

En supprimant le facteur commun q, supposé différent de zéro, l'équation (4) devient

$$1 = q + p + 1 \qquad \text{ou} \qquad q = -p ;$$

cette valeur de q vérifie identiquement l'équation (3).

Lorsque $q = 0$, l'équation (4) est satisfaite, quel que soit p, et l'équation (3) lorsque

(*) Ce raisonnement n'est valable que si aucune des racines x' ou x'' n'est égale à 1. Si x', par exemple, était égal à 1, X' serait infini ; il n'y aurait plus lieu de former une équation du second degré : il suffirait de calculer x'' et d'en déduire X''. La condition pour que ce cas particulier se produise est $q + p + 1 = 0$.

$$-\frac{p}{p+1}=p, \qquad \text{d'où} \qquad p=0 \qquad \text{ou} \qquad p=-2.$$

Les seules valeurs de p et q qui entraînent la condition imposée sont donc

p quelconque, $q=-p$; $p=q=0$; $p=-2$, $q=0$.

(L. TARRIN, à Moulins.)

Autre solution de la première partie.

Considérons le système des équations

$$\left.\begin{aligned} x^2+px+q&=0,\\ X&=\frac{x}{x-1}.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Pour le résoudre, on peut supposer qu'on tire de la première équation x' et x'', et qu'on porte ces valeurs dans la seconde, ce qui donne pour X les deux valeurs X′ et X″. Il n'y a pas d'autre valeur de X qui puisse vérifier le système (1).

Remplaçons le système (1) par un système équivalent, obtenu en tirant x de la deuxième équation du système, et portant cette valeur dans la première ; le système devient ainsi

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{X}{X-1},\\ X^2+pX(X-1)+q(X-1)^2&=0.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

La seconde équation ne renferme plus que X ; d'après la remarque faite plus haut, elle ne peut admettre d'autres racines que X′ et X″; elle est d'ailleurs du second degré; c'est donc l'équation cherchée. En la développant, on trouve

$$X^2(1+p+q)-(p+2q)X+q=0. \qquad (3)$$

Remarque. — Si l'une des racines de l'équation proposée est égale à 1, c'est-à-dire si

$$q+p+1=0,$$

le coefficient de X^2 dans l'équation (3) devient nul, elle se réduit au premier degré. On sait que, dans ce cas, l'une des racines de l'équation devient infinie. Il devait en être ainsi, puisque, si x' est égal à 1, X′ est évidemment infini.

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil ; P. Barroué ; L. Curt ; E. Foucart ; G. Hiernaux ; H. Janois ; M. Legras ; A. Noyelle ; F. Pégorier ; P. Plisson ; E. Roncaglia ; J. Wittner.]

4155. — *Etant donnés, dans un plan, deux cercles de centres* O *et* O′ *et de rayons* R *et* R′, *déterminer, dans ce plan, le lieu géométrique des points* M *d'où l'on voit sous des angles égaux les rayons* OP *et* O′P′ *menés dans les deux cercles perpendiculairement aux droites* MO *et* MO′ :

$$\widehat{OMP}=\widehat{O'MP'}.$$

Ce lieu peut-il couper les deux circonférences données? Peut-il couper leur axe radical?

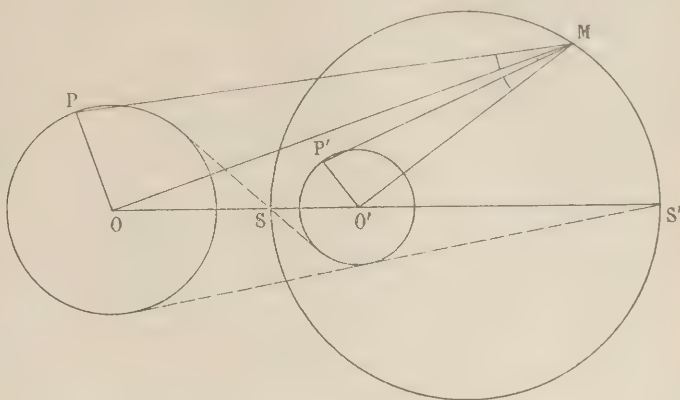
Les triangles rectangles OMP, O′MP′ ayant un angle égal sont semblables.

Par suite,

$$\frac{MO}{MO'}=\frac{R}{R'}. \qquad (1)$$

Réciproquement, si un point M vérifie cette condition, les triangles rectangles MOP, MO′P′ sont semblables; ce point est donc un point du lieu.

Le lieu de M se confond ainsi avec celui des points dont le rapport des distances aux deux points fixes O, O′ est constant et égal à $\frac{R}{R'}$. Ce dernier lieu est, comme on sait, une circonférence de diamètre SS′, S et S′ étant les centres de similitude ou d'homothétie des cercles O, O′.



Tout point commun au cercle O et au cercle SS′ appartient nécessairement au cercle O′, car MO = R entraîne MO′ = R′ en vertu de l'égalité (1). Donc le lieu ne peut couper l'un des cercles O, O′ qu'en leurs points communs, ce qui exige que ces cercles soient sécants.

Pour que le cercle SS′ puisse couper l'axe radical des cercles O, O′, il faut et il suffit que le point de rencontre soit d'égale puissance par rapport aux deux cercles, ce qui revient à poser

$$\overline{MO}^2-R^2=\overline{MO'}^2-R'^2.$$

Or l'égalité (1) donne

$$\frac{MO}{R}=\frac{MO'}{R'}=\lambda,$$

d'où $\qquad MO=\lambda R, \qquad MO'=\lambda R',$

et, en portant dans (2)

$$R^2(\lambda^2-1)=R'^2(\lambda^2-1),$$

ou $\qquad (R^2-R'^2)(\lambda^2-1)=0.$

On en conclut, si R est différent de R′,

$$\lambda=1$$

et par suite

$$MO=R, \qquad MO'=R';$$

ce qui montre que l'axe radical ne peut couper le cercle SS′ qu'aux points communs aux deux cercles O, O′, qui devront alors être sécants.

Lorsque R = R′, le cercle SS′ devient une droite confondue avec l'axe radical des cercles O, O′, perpendiculaire au milieu de OO′.

Remarque. — Le lieu considéré est également celui des points du plan d'où l'on voit les cercles O, O′ sous des angles égaux, à condition pourtant que les deux cercles soient entièrement extérieurs l'un à l'autre. Lorsqu'ils sont sécants, une partie du cercle SS′ est intérieure aux deux cercles, et on ne peut plus dire que des points de l'arc correspondant on voit les deux cercles sous des angles égaux. La même remarque s'applique au cercle SS′ tout entier quand les deux cercles donnés sont intérieurs l'un à l'autre.

(A. MAITRE.)

[Ont résolu la même question : MM. P. Barroué ; Carteron ; E. Foucart ; X. Lacreuse ; M. Legras ; A. Mirc ; A. Noyelle ; M. Oger ; P. Plisson ; F. Riesz ; L. Tarrin ; L. Vignes ; P. Vincent.]

4156. — *Etant donné un dièdre droit, déterminer les plans passant par un point fixe* A *de l'arête de ce dièdre et coupant les deux faces du dièdre suivant deux droites rectangulaires.*

Quel est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un autre point fixe B *de l'arête sur ces plans?*

Soient AX et AY les deux droites rectangulaires situées dans les faces P, Q du dièdre droit.

L'angle XAY étant droit, la droite AY est située dans un plan perpendiculaire à AX en A; ce plan perpendiculaire en A au plan P coupe généralement le plan Q perpendiculaire au plan P suivant la droite AY perpendiculaire au plan P; tous les plans perpendiculaires au plan P menés par le point A satisfont ainsi à la question. Mais ils ne sont pas les seuls, car il peut arriver que le plan perpendiculaire à AX se confonde avec le plan Q, de sorte que la position de AY, intersection de ces deux plans, devient indéterminée; dans ce cas, tous les plans menés par la droite AX perpendiculaire au plan Q conviennent également.

En résumé, les plans demandés s'obtiennent en élevant au point A les perpendiculaires à l'arête, situées dans les deux faces du dièdre; un plan quelconque, mené par l'une de ces perpendiculaires, répond à la question.

La perpendiculaire abaissée de B sur l'un des plans perpendiculaires au plan P est située dans ce dernier plan et a son pied M sur AX. Comme l'angle AMB est droit, il en résulte que le lieu de M est un cercle de diamètre AB, situé dans le plan P.

En considérant les plans XAY perpendiculaires au plan Q, on verrait de même que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de B sur ces plans est un second cercle de diamètre AB contenu dans le plan Q.

[Ont résolu la même question : MM. L. Curt; E. Foucart; G. Hiernaux; A. Maitre; A. Noyelle; M. Oger; M. Rebeix; L. Tarrin; P. Vincent; J. Wittner.]

4157. — *Un corps isolé, de très petites dimensions* A, *est électrisé négativement; sa charge est de* 3924 *unités.*

A quelle distance d, au-dessous de A *et sur la verticale passant par ce point, doit-on placer un autre corps, également très petit,* B, *d'une masse égale à un décigramme et chargé de l'unité de quantité d'électricité positive, pour que ce corps semble ne plus rien peser?*

Quel serait le poids apparent de B *si on le plaçait à une distance* $\frac{d}{2}$ *au-dessus de* A?

On prend comme unité de quantité d'électricité la quantité qui, placée à 1 *centimètre d'une quantité égale, la repousse avec une force égale à la fraction* $\frac{1}{981}$ *du poids de* 1 *gramme à l'endroit où se fait l'expérience.*

1° Le poids de la masse égale à 1 décigramme est de

$$0{,}1 \times 981 = 98^{\text{dynes}}{,}1.$$

D'après les lois de Coulomb, l'attraction f du corps A sur le corps B, exprimée en dynes, a pour valeur

$$f = \frac{3924}{d^2}.$$

Comme cette attraction doit être égale et contraire à l'action de la pesanteur, on a

$$98{,}1 = \frac{3924}{d^2}$$

d'où $\qquad d^2 = \dfrac{3924}{98{,}1} = 40 \qquad$ et $\qquad d = 6^{\text{cm}}{,}32.$

2° Les forces attractives électriques étant inversement proportionnelles aux carrés des distances auxquelles elles s'exercent, à la distance $\frac{d}{2}$ la force f devient 4 fois plus grande, c'est-à-dire $392^{\text{dynes}}{,}4$. Comme B est placé au-dessus de A, cette force s'ajoute au poids de B. Donc le poids apparent de B est égal à la force qui sollicite à tomber une masse de 5 décigrammes; exprimé en dynes, il a pour valeur $0{,}5 \times 981 = 490^{\text{dynes}}{,}5$.

(CROZEMARIE.)

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil; A. Bastet; Ch. Bourdet.]

ARITHMÉTIQUE

4161. — *α désignant la base d'un système quelconque de numération et* A, B, *a, b, c des nombres entiers, si l'expression*

$$a\alpha^2 + b\alpha + c$$

est divisible par $A\alpha + B$, *l'expression*

$$cA^2 - bAB + aB^2$$

l'est aussi.

Première solution. — Effectuons la division de

$$cA^2 - bAB + aB^2 \qquad \text{par} \qquad A\alpha + B,$$

en supposant les deux polynomes ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de B. Il vient

$$aB^2 - bAB + cA^2 = (B + A\alpha)(aB - bA - a\alpha A) + A^2(a\alpha^2 + b\alpha + c).$$

Comme $a\alpha^2 + b\alpha + c$ est par hypothèse divisible par $A\alpha + B$ le second membre de cette égalité est divisible par $A\alpha + B$, ce qui justifie l'énoncé.

(Ch. PELLION, lycée de Brest.)

Seconde solution. — Supposons que a, b, c, A, B soient des entiers tels que $a\alpha^2 + b\alpha + c$ soit divisible par $A\alpha + B$, quel que soit α. Il faudra alors que le premier polynome soit nul, quand on y remplace α par $-\frac{A}{B}$, ce qui donne, après multiplication par A^2,

$$aB^2 - bAB + cA^2 = 0. \qquad (1)$$

On démontre d'autre part que, lorsque le dividende et le diviseur ont des coefficients entiers, il en est de même du quotient supposé exact. Donc, la condition précédente étant remplie,

$$a\alpha^2 + b\alpha + c$$

est divisible par $A\alpha + B$, tant au point de vue algébrique qu'au point de vue arithmétique.

Or, ce résultat montre que, si les nombres a, b, c, A, B sont tels que $a\alpha^2 + b\alpha + c$ soit divisible par $A\alpha + B$, quel que soit α, l'expression est nulle; on peut donc dire qu'elle est divisible par tout nombre que l'on voudra.

Ce raisonnement suppose $A \neq 0$; si A était nul, l'expression (1) se réduirait à aB^2 et la divisibilité serait évidente.

(BOUZY, instituteur, école primaire supérieure de Vervins.)

Remarque sur la première solution. — Cette solution repose sur une identité de la forme

$$aB^2 - bAB + cA^2 \equiv (A\alpha + B)f(\alpha) + K(a\alpha^2 + b\alpha + c).$$

Si l'on choisissait arbitrairement la fonction entière $f(\alpha)$, et qu'on calcule une autre fonction $\varphi(\alpha)$ par l'identité

$$aB^2 - bAB + cA^2 - (A\alpha + B)f(\alpha) \equiv \varphi(\alpha)$$

on pourrait énoncer la proposition suivante :

Si les nombres a, b, c, α, A, B sont tels que les entiers $\varphi(\alpha)$ et $A\alpha + B$ aient un facteur commun, ce facteur divise aussi

$$aB^2 - bAB + cA^2.$$

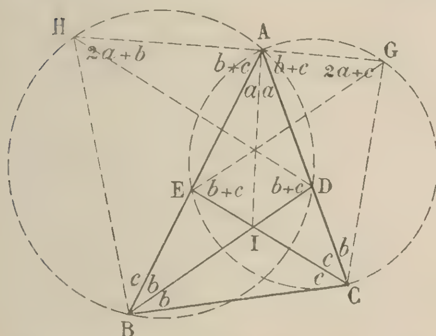
[Ont résolu la même question : MM. E. Ardin-Delteil, à Montpellier ; P. Barroué, lycée de Brest; E. Foucart ; H. Janois, ecole normale du Mans; A. Maitre; M. Oger; P. Plisson, instituteur à Sens ; F. Riesz, à Gyor, Hongrie ; P. Vincent, école pratique d'industrie de Saint-Etienne.]

GÉOMÉTRIE

Théorème. — *Si dans un triangle deux bissectrices sont égales, le triangle est isocèle.*

Soit ABC un triangle quelconque, dont nous désignerons les angles par $2a$, $2b$, $2c$, de sorte que

$$a + b + c = 90°.$$



Traçons les cercles circonscrits aux triangles ADB, ACE, les droites CE et BD étant les bissectrices des angles en C et B. Soit AI la bissectrice de l'angle A; élevons-lui la perpendiculaire en A, et soient G et H les points où cette perpendiculaire rencontre à nouveau les deux cercles.

GH étant la bissectrice extérieure de l'angle A, la figure donne

$$\widehat{CAG} = 90° - a = b + c;$$

l'angle AEC extérieur au triangle EBC vaut $2b + c$; donc, puisque le quadrilatère AGCE est inscriptible,

$$\widehat{AGC} = 180° - \widehat{AEC} = 2a + 2b + 2c - (2b + c) = 2a + c;$$

il en résulte enfin

$$\widehat{ACG} = 180° - (b+c) - (2a+c) = 2a + 2b + 2c - (2a + b + 2c) = b.$$

Mais les angles AEG et ACG ont même mesure que la moitié de l'arc AG ; donc $\widehat{AEG} = b$; par suite

$$\widehat{GEC} = \widehat{AEC} - \widehat{AEG} = 2b + c - b = b + c.$$

On en conclut que le triangle GEC est isocèle, son angle à la base étant $b + c$.

En répétant identiquement les mêmes raisonnements pour le second cercle, et remarquant que b s'échange avec c, on prouve que le triangle BHD est isocèle, son angle à la base étant encore $b + c$.

D'ailleurs le quadrilatère HGCB est toujours inscriptible, puisque

$$\widehat{HBC} + \widehat{HGC} = c + 2b + 2a + c = 2(a + b + c) = 180°.$$

Supposons maintenant l'égalité des bissectrices BD et CE; on en conclut l'égalité des triangles isocèles ECG et BHD, donc l'égalité de BH et CG. Puisque le quadrilatère HGCB est toujours inscriptible et qu'il a deux côtés opposés égaux, c'est un trapèze isocèle. Donc

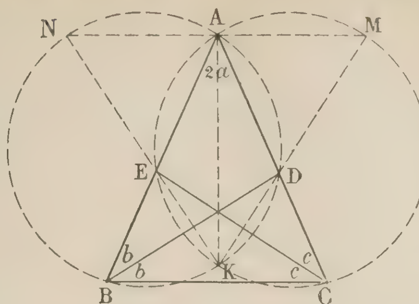
$$\widehat{HBC} = \widehat{GCB},$$

c'est-à-dire

$$b = c. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

On peut présenter cette démonstration d'une autre manière, en s'appuyant sur cette remarque à peu près évidente : si l'on décrit deux segments capables du même angle sur deux droites de même longueur, les circonférences auxquelles appartiennent ces segments sont égales.

Soit donc ABC un triangle dans lequel les bissectrices BD et CE sont égales ; d'après la remarque faite, les cercles circonscrits aux triangles AEC, ABD sont égaux ; soit K le second point de rencontre de ces deux cercles. Tirons KD qui rencontre le cercle AEC en M, et KE qui rencontre le cercle ABD en N.



Les deux angles EKA et ECA, ayant même mesure que la moitié de l'arc AE, sont égaux ; donc $\widehat{EKA} = c$; on verrait de même que $\widehat{DKA} = c$; d'où

$$\widehat{EKM} = b + c.$$

Donc

$$\widehat{EAM} = 180° - \widehat{EKD} \quad \text{(quadrilatère inscrit EKMA)}$$
$$= 2a + 2b + 2c - (b + c) = 2a + b + c,$$

et finalement

$$\widehat{DAM} = \widehat{EAM} - 2a = b + c.$$

On montrerait de même que

$$\widehat{EAN} = b + c;$$

donc $\widehat{EAN} + \widehat{EAD} + \widehat{DAM} = 2a + 2b + 2c = 180°$,

ce qui prouve que les trois points N, A, M sont en ligne droite.

Rien, dans ce qui précède, ne suppose $BD = CE$. Si l'on fait maintenant cette hypothèse, on en conclut

$$\text{arc ADK} = \text{arc AEK},$$

donc

$$\widehat{KNA} = \widehat{KMA};$$

le triangle KMN est donc isocèle. Les cercles étant égaux, il en résulte que les arcs NBK et MCK sous-tendus par les cordes égales NK et KM sont égaux; donc

$$\widehat{NAK} = \widehat{MAK} = 90°.$$

La droite AK étant ainsi hauteur du triangle isocèle NKM est aussi bissectrice de l'angle au sommet K; donc

$$\widehat{EKA} = \widehat{AKD},$$

ou bien

$$b = c. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

(H. LE RENARD, école d'hydrographie, Saint-Brieuc.)

4271. — *Par le point de concours* O *des bissectrices d'un triangle* ABC *on mène des perpendiculaires à chacune de ces bissectrices :* B'C'' *à* AO (B' *sur* AB, C'' *sur* AC), C'A'' *à* OB *et* A'B'' *à* OC. *Démontrer que :*

1° *L'hexagone* A'A''B'B''C'C'' *est circonscriptible et composé de six triangles* A'OA'', A''OB', ... *semblables et égaux deux à deux ;*

2° *Le rayon du cercle inscrit dans le triangle* ABC *égale la somme des rayons des cercles inscrits dans les triangles* AA'A'', BB'B'', CC'C''. *Même relation pour les rayons des cercles circonscrits à ces mêmes triangles.*

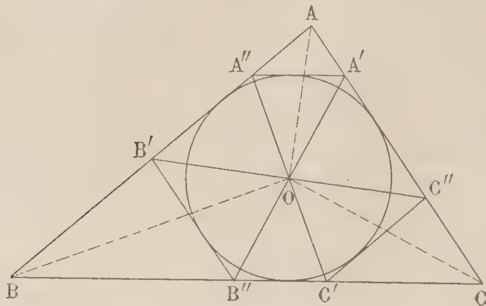
1° Les triangles rectangles AOB', AOC'' ayant un côté commun et un angle égal sont égaux ; donc $OB' = OC''$. On verrait de même que le point O divise en deux parties égales les droites A'B'' et C'A''.

Par suite les triangles OA'A'' et OB''C' sont égaux, et les côtés A'A'' et B''C' sont tangents au cercle inscrit O du triangle ABC ; il en est de même des triangles OB'B'' et OC''A', OC'C'' et OA''B', de sorte que l'hexagone est circonscrit au cercle O.

Le triangle $OA''B'$ a ses angles en A'' et B' complémentaires des angles OBA et OAB ; les trois angles de ce triangle sont donc égaux à

$$\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2},\qquad \frac{\pi}{2}-\frac{B}{2},\qquad \frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}.$$

Ces valeurs représentent également les angles des triangles analogues $OB''C'$ et $OC''A'$.



L'hexagone est donc bien composé de six triangles semblables et égaux deux à deux.

2° Les triangles $AA'A''$, $BB'B''$, $CC'C''$ sont semblables au triangle ABC et tels que la somme de trois côtés homologues est égale au côté homologue du triangle ABC. En effet, en observant que $A''B' = C''C'$, on peut écrire

$$AA'' + C''C' + B'B = AB.$$

Comme les rayons des cercles inscrits (ou circonscrits) sont proportionnels aux côtés homologues des triangles correspondants, il en résulte que la somme des rayons relatifs aux trois premiers triangles est égale au rayon relatif au triangle ABC, ce qui justifie l'énoncé.

(Ernest FOUCART).

M. L. Cussenot fait la remarque suivante :

Les triangles $OA'A''$, $B'B''O$ étant semblables, on a

$$\frac{OA'}{A'A''}=\frac{B'B''}{B''O}\qquad \text{ou}\qquad \overline{OA'}^2 = A'A''.B'B'' ;$$

de même $\overline{OB'}^2 = B'B''.C'C''$, $\qquad \overline{OC'}^2 = C'C''.A'A''$,

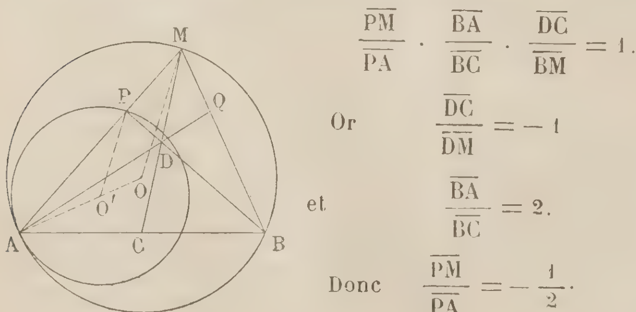
d'où, en multipliant membre à membre et extrayant les racines carrées,

$$OA'.OB'.OC' = A'A''.B'B''.C'C''.$$

[Ont résolu la même question ; MM. L. Bolzinger ; Boutignon ; R. Van Cauwenberghe ; L. Cussenot ; G. Dobrovici ; Feintuch ; L. Gourdet ; A. Gourdin ; Grzybowski ; R. Guillemin ; G. Hiernaux ; H. Janois ; A. Jeannel ; E. Layes ; P. Leduc ; E. Le Maigre ; H. Lévy ; Manceaux de Ronchonnot ; R. Manen ; A. Mire ; M. Rebeix ; P. Rolley ; C. Sarrassat ; J. Sire ; H. Thouvenot ; H. Varinot ; L. Curt ; Mehmet, lycée ottoman de Salonique ; J. Méhu.]

4281. — *Les droites joignant les extrémités* A *et* B *d'une corde fixe* AB *d'une circonférence au milieu* D *de la droite qui joint le milieu* C *de la corde à un point quelconque* M *de la circonférence rencontrent* MA *et* MB *en* P *et* Q. *Lieux des points* P *et* Q.

Dans le triangle AMC coupé par la transversale PDB, on a



$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}\cdot\frac{\overline{DC}}{\overline{BM}}=1.$$

Or
$$\frac{\overline{DC}}{\overline{DM}}=-1$$

et
$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}=2.$$

Donc
$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PA}}=-\frac{1}{2}.$$

On déduit de là

$$\frac{\overline{AP}+\overline{PM}}{\overline{AP}}=\frac{2+1}{2}$$

ou

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AP}}=\frac{3}{2}.$$

Le lieu du point P est donc un cercle homothétique du cercle O, A étant le centre et $\frac{2}{3}$ le rapport d'homothétie. Ce cercle a son centre en un point O' de AO tel que $\overline{AO'}=\frac{2}{3}\overline{AO}$, et son rayon est égal à $\frac{2}{3}\,OA = O'A$. Les deux cercles O, O' sont ainsi tangents intérieurement en A.

On verrait de même que le lieu du point Q est un cercle égal, tangent intérieurement en B au cercle O.

Remarque. — On généraliserait facilement le lieu précédent en supposant que les points C et D divisent respectivement AB et CM dans des rapports donnés.

(E. LAUDAT, lycée Saint-Louis.)

Autre solution. — Menons CN parallèle à BP. Dans le triangle ABP, la parallèle CN au côté BP étant issue du milieu C de AB passe par le milieu de AP, et $AN = NP$; de même, dans le triangle MCN, $NP = PM$. Le point P est donc aux $\frac{2}{3}$ de AM à partir de A.

Dès lors, si l'on joint P au point P' situé aux $\frac{2}{3}$ de AB à partir de A, la droite PP' est parallèle à MB, et l'angle APP' est égal à l'angle constant AMB ; la même propriété est d'ailleurs vraie quand M décrit le second segment ayant pour corde AB. Il en résulte que le lieu de P se compose des deux segments capables de l'angle AMB et de son supplément décrits sur AP' comme corde. Lorsque M parcourt le cercle donné, le point P décrit toute la circonférence formée par ces deux segments. Les deux segments AMB et APP', étant d'ailleurs capables du même angle, admettent au point A de leur base commune même tangente, c'est-à-dire que ces cercles se touchent en A.

Le lieu du point Q s'obtiendrait d'une manière analogue.

On traiterait de même le cas général où le point C est quelconque sur AB, le point D divisant CM dans un rapport donné.

(DE MENDIRY.)

[Ont résolu la même question : MM. J. Amboise ; Bayor ; L. Bigot ; V. Bourquin ; M. Boutry ; E. Brière ; Burgat ; H. Carpentier ; S. Coudanne ; A. Cremer ; L. Cussenot ; E. Delacommune ; Dobrovici ; F. Dupin ; Feintuch ; E. Fourmon ; P. Frescal ; A. Giraud ; Gondy ; L. Gourdet ; A. Gourdin ; G. Hiernaux ; H. Keefer ; F. Ladevèze ; H. Lévy ; P. Leduc ; L. Magne ; A. Maître ; Manceaux de Ronchonnot ; A. Mirc ; J. Pastour ; Ph. Plisson ; M. Rebeix ; Ribes ; Saget ; P. Sarrassat ; A. Terrebonne ; Tiret ; H. Varinot ; Vial ; L. Vollaire ; A. Wiart.]

4287. — *Trouver le lieu des points d'un plan tels que leur distance à un point* A *soit moyenne proportionnelle entre leur distance à une droite* XY *et une longueur donnée* k.

Menons par A la perpendiculaire AO sur XY, et adoptons OA comme sens positif des segments que nous aurons à compter sur cette droite.

Deux cas sont à distinguer suivant que le point M et le point A sont d'un même côté ou de part et d'autre de la droite XY.

I. M *et* A *sont d'un même côté par rapport à* XY.

La relation supposée

$$\overline{MA}^2 = k.MD,$$

dans laquelle k et MD sont des longueurs, s'écrit, en projetant M sur AO en P, sous la forme

$$\overline{MA}^2 = k.\overline{OP},$$

ou bien (*fig.* 1).

$$\overline{MA}^2 = k(\overline{AP} - \overline{AO})\,; \qquad (1)$$

cette formule convient, quelle que soit la position de P par rapport à A.

Fig. 1

Joignons M à un point arbitraire C de AO ; le triangle MAC donne, pour toutes les positions de P,

$$\overline{MC}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AC}.\overline{AP}, \qquad (2)$$

d'où, en remplaçant $\overline{MA}^2$ par sa valeur tirée de (1),

$$\overline{MC}^2 = \overline{AC}^2 - k.\overline{AO} + \overline{AP}(k - 2\overline{AC}). \qquad (3)$$

M variant, AP est seul variable dans le second membre de (3). Si donc on détermine C par la condition

$$\overline{AC} = \frac{k}{2}, \qquad (4)$$

$\overline{MC}^2$ devient constant,

$$\overline{MC}^2 = \overline{AC}^2 - k.\overline{AO} = \frac{k^2}{4} + kh, \qquad (5)$$

en désignant par h la *longueur* OA. Le point M se trouve donc sur un cercle de centre C et de rayon égal à $\sqrt{\dfrac{k^2}{4} + kh}$. La formule montre d'ailleurs que $\overline{AC}$ est positif ; donc le point C se trouve sur le prolongement de OA, à une distance de A égale à $\frac{k}{2}$. Pour construire le rayon ρ de ce cercle, on remarque que

$$\rho^2 = \frac{k^2}{4} + kh = \left(\frac{k}{2} + h\right)^2 - h^2 = \overline{CO}^2 - \overline{OA}^2.$$

On décrira donc un cercle de diamètre CO, de O comme centre un arc de cercle de rayon OA, qui rencontre le précédent en E ; CE est évidemment le rayon cherché.

Réciproquement, tout point de ce cercle est un point du lieu. D'abord il vérifie la relation (5) et par suite, en tenant compte de (4), la relation (3). On élimine $\overline{AC}$ de cette relation à l'aide de (2), et on retombe finalement sur (1).

II. M *et* A *sont de part et d'autre de* XY.

Projetons encore M en P sur XY ; la relation de longueurs

$$\overline{MA}^2 = k.MD$$

s'écrit maintenant (*fig.* 2)

$$\overline{MA}^2 = k.\overline{PO} = k(\overline{AO} - \overline{AP}). \qquad (1)$$

Joignons encore M à un point quelconque C de AO ; le triangle MAC fournit encore l'équation

$$\overline{MC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AM}^2 - 2\overline{AC}.\overline{AP}, \qquad (2)$$

d'où, en tenant compte de (1),

$$\overline{MC}^2 = \overline{AC}^2 + k.\overline{AO} - \overline{AP}(k + 2\overline{AC}). \qquad (3)$$

Fig. 2

On détermine le point C par la condition

$$\overline{AC} = -\frac{k}{2}\,; \qquad (4)$$

il vient alors

$$\overline{MC}^2 = \overline{AC}^2 + k.\overline{AO} = \frac{k^2}{4} - kh, \qquad (5)$$

quantité positive à condition que

$$k > 4h. \qquad (6)$$

La condition (6) étant remplie, on déterminera le point C, en portant à partir de A un segment négatif égal à $-\frac{k}{2}$. Comme par hypothèse $k > 4h$, ce point C et le point A seront de part et d'autre de XY ; et le point M sera sur un certain cercle de centre C.

Le rayon ρ' de ce cercle est donné par la relation

$$\rho'^2 = \frac{k^2}{4} - hk = \left(\frac{k}{2} - h\right)^2 - h^2 = \overline{CO}^2 - \overline{OA}^2.$$

On décrira donc un cercle de diamètre CO, et on prendra son intersection E avec un autre cercle de centre O et de rayon OA. Le cercle de rayon CE est le cercle cherché. On démontrera, comme précédemment, que tout point de ce cercle est un point du lieu.

En résumé :

Si $k > 4h$, le lieu cherché se compose de deux cercles, dont les centres sont situés sur OA, à une distance de A égale à $\frac{k}{2}$. Ils sont de part et d'autre de XY.

Si $k < 4h$, le lieu se réduit à un seul cercle, situé du même côté de XY que le point A.

[Ont résolu la même question : MM. V. Bourquin ; Burgat ; L. Cussenot ; Feintuch ; L. Gourdet ; A. Maître ; H. Michel ; F. Morel ; J. Pastour ; J. Pillard ; F. Riesz ; E. Rosenberg ; E. Sinturel.]

PHYSIQUE

4301. — *On mélange à la température de* 0°, 10^{gr} *d'oxygène et* $3^{gr},776$ *d'azote ; le volume total étant de* 20^{lit} *et la température restant à* 0°, *on demande quelle est, en centimètres de mercure, la pression du mélange.*

Poids du litre d'air à 0° *et à la pression de* 76^{cm} *de mercure :* $1^{gr},293$.

Densité de l'oxygène par rapport à l'air dans les mêmes conditions : 1,105 ; *de l'azote :* 0,972.

(*Bacc. lettres-math., Toulouse, mars 1897.*)

La force élastique du mélange est égale à la somme des forces élastiques de chacun des gaz considéré comme occupant seul le volume total.

La force élastique de l'oxygène est donnée par la formule

$$10^{gr} = 20 \times 1,293 \times 1,105 \times \frac{h}{76},$$

d'où

$$h = \frac{760}{20 \times 1,293 \times 1,105} = 26^{cm},6.$$

On trouverait de même que la force élastique de l'azote est

$$h' = \frac{76 \times 3,776}{20 \times 1,293 \times 0,972} = 11^{cm},4.$$

La force élastique du mélange a pour valeur

$$H = h + h' = 38^{cm}.$$

(F. LEULLIOT.)

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil ; E. Baudot ; L. Bigot ; L. Bois ; L. Florentin ; G. Hiernaux ; R. Larsonneur ; E. Layes ; J. Martin ; A. Mirc ; P. Le Moingt ; L. P. à A. ; V. Parizet ; Remondet ; A. Ballé ; Gauchet ; Geltzenlichter ; Jouanneau ; F. Morel ; E. Sevin ; E. Vaicle ; Vial.]

4302. — *Deux points lumineux* A *et* B, *de même intensité lumineuse, éclairent une très petite surface* S ; *ces points peuvent se déplacer sur deux droites* SA *et* SB *également inclinées sur la surface* S.

Etablir la relation qui doit exister entre les distances $SA = x$ *et* $SB = y$ *pour que la petite surface considérée conserve un éclairage constant.*

(*Bacc. lettres-math., Constantine, juin 1897.*)

Soient α l'angle des deux droites avec la surface, I l'intensité lumineuse des deux points A et B.

La surface S reçoit du point A une quantité de lumière égale à

$$\frac{I}{x^2}\cos(90^\circ - \alpha), \qquad \text{ou} \qquad \frac{I}{x^2}\sin\alpha.$$

Elle reçoit du point B une quantité de lumière égale à

$$\frac{I}{y^2}\sin\alpha.$$

On doit avoir

$$\frac{I}{x^2}\sin\alpha + \frac{I}{y^2}\sin\alpha = \text{constante},$$

ou, en divisant par $I\sin\alpha$, qui est constant,

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \text{constante}.$$

Telle est la relation qui doit exister entre $SA = x$ et $SB = y$ pour que la petite surface considérée conserve un éclairage constant.

(A. MIRC.)

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil ; E. Baudot ; L. Bois ; A. Broutin ; G. Hiernaux ; R. Larsonneur ; F. Leulliot ; V. Parizot ; Rebeix ; Ribes ; Feintuch ; Jouanneau ; E. Layes ; E. Sevin.]

QUESTIONS PROPOSÉES

4312. — Trouver la valeur de la somme

$$\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+k)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+k+1)} + \ldots + \frac{1}{(x+n-1)(x+n)\ldots(x+k+n-1)}.$$

Vers quelle limite tend cette somme lorsque n croît indéfiniment ?

(Fréd. RIESZ, École polytechnique de Zurich.)

4313. — Construire un triangle ABC, connaissant le côté AB, l'angle A et le rapport m du côté BC à la médiane relative à ce côté.

Conditions de possibilité du problème.

(H. MICHEL, lycée de Douai.)

4314. — *Propriétés des triangles dont les côtés sont en progression arithmétique.*

Soient a, b, c les côtés d'un triangle supposés en progression arithmétique $(a > b > c)$. Appelons : M le milieu du côté moyen AC, K son point de contact avec le cercle inscrit, H et D les pieds de la hauteur et de la bissectrice intérieure relatives à ce côté ; h la hauteur BH, r et r_b les rayons des cercles inscrit et ex-inscrit dans l'angle B ; démontrer les relations

$$\frac{MK}{MH} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{MD}{MH} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{r}{h} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{r_b}{h} = 1.$$

Réciproquement, si une des quatre relations précédentes est vérifiée, les côtés du triangle sont en progression arithmétique et b est le côté moyen.

Applications :

I. Construire toute la série des triangles variables dont les côtés forment une progression arithmétique de raison connue d.

II. Construire le triangle lorsqu'il est entièrement déterminé par une des conditions suivantes :

1° On donne la hauteur h ;
2° Le rayon r du cercle inscrit ;
3° Le rayon r_b du cercle ex-inscrit dans l'angle B ;
4° Le rayon R du cercle circonscrit ;
5° La différence $A - C = \delta$ des angles A et C ;
6° La longueur de la bissectrice BD ;
7° La longueur de la médiane BM, etc.

(J. GIROD, professeur au lycée de Versailles.)

4315. — Une pyramide SABCDE a pour base un pentagone régulier dont le côté est a ; les autres arêtes de la pyramide sont aussi égales à a. On demande de calculer :

1° Le volume de la pyramide ;
2° Le rayon de la sphère circonscrite ;
3° Les lignes trigonométriques de l'angle plan du dièdre SA.

(*Bacc. lettres-math., Clermont, novembre 1897.*)

4316. — Résoudre un quadrilatère inscrit connaissant sa surface, deux côtés opposés et le rayon du cercle circonscrit.

(F. MOREL, à Cusset.)

4317. — Un losange dont la grande diagonale est double de la petite tourne autour de sa grande diagonale et engendre un solide formé de deux cônes en contact par leurs bases. Ce solide repose par sa pointe inférieure sur un plan horizontal et son axe est vertical. On le suppose éclairé par des rayons de lumière parallèles et dont les projections font des angles de 45° avec la ligne de terre. Construire :

1° Les lignes de séparation d'ombre et de lumière ;
2° L'ombre sur le plan horizontal.

(*Bacc. lettres-sciences, Bordeaux, novembre 1897.*)

4318. — Réduire les forces appliquées à un solide à deux : l'une passant par un point donné A, l'autre située dans un plan donné (P).

4319. — Un baromètre est enfermé dans un large tube de verre scellé à la lampe. A l'instant de la fermeture, la hauteur de la colonne est 76^{cm}, et la température est 15°.

Calculer la hauteur de la colonne lorsque la température est 40°.

Coefficient de dilatation du mercure . . . . $\frac{1}{5550}$.
Coefficient de dilatation de l'air . . . . 0,00366.

On ne tiendra pas compte de la dilatation du verre.

(*Bacc. lettres-math., Alger, juin 1897.*)

4320. — On donne 50 éléments de Daniell, dont la force électro-motrice est de 1 volt et la résistance de 1 ohm, montés en série.

On demande combien on pourra alimenter de lampes à incandescence montées en dérivation, ces lampes étant de 50 volts, ayant une résistance, à chaud, de 50 ohms et exigeant pour leur fonctionnement un courant de $\frac{1}{2}$ ampère.

(*Bacc. lettres-sciences, Nancy, novembre 1897.*)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

22e Année. — No 12. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES PARIS, le 15 Mars 1898.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements .... Librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

SUR LA GRANDEUR RELATIVE DES RACINES DE DEUX ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ (*)

par M. **P. Valot**, professeur au lycée de Périgueux.

Soient

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (1)$$
$$a'x^2 + b'x + c' = 0 \qquad (2)$$

deux équations ayant leurs racines réelles, et supposons que a et a' ne soient pas nuls. Désignons

par $f(x)$ le trinome $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$,

— $f'(x)$ — $x^2 + \frac{b'}{a'}x + \frac{c'}{a'}$,

et par α et β, α' et β' les racines des deux équations. La place du nombre α par rapport aux racines de l'équation (2) dépend du signe de

$$f'(\alpha) = \alpha^2 + \frac{b'}{a'}\alpha + \frac{c'}{a'}.$$

Retranchons $\alpha^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$, qui est nul par hypothèse :

$$f'(\alpha) = \left(\frac{b'}{a'} - \frac{b}{a}\right)\alpha + \frac{c'}{a'} - \frac{c}{a};$$

de même

$$f'(\beta) = \left(\frac{b'}{a'} - \frac{b}{a}\right)\beta + \frac{c'}{a'} - \frac{c}{a}.$$

I. $ab' - ba' = 0$. $f'(\alpha)$ et $f'(\beta)$ se réduisent tous deux à

$$\frac{c'}{a'} - \frac{c}{a}.$$

On aura de même

$$f(\alpha') = f(\beta') = \frac{c}{a} - \frac{c'}{a'}.$$

Les deux différences $\frac{c'}{a'} - \frac{c}{a}$, $\frac{c}{a} - \frac{c'}{a'}$ sont de signes contraires.

Soit $$\frac{c'}{a'} - \frac{c}{a} < 0.$$

Les deux nombres α et β donnent des résultats de signes contraires au premier terme de $f'(x)$; les deux nombres α et β sont compris entre α' et β'.

II. $ab' - ba' \neq 0$. On peut écrire

$$f'(\alpha) = \frac{ab' - ba'}{aa'}\left(\alpha + \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}\right),$$
$$f'(\beta) = \frac{ab' - ba'}{aa'}\left(\beta + \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}\right).$$

Posons $$x_0 = -\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Ce nombre x_0 est le nombre qui annule la différence

$$f'(x) - f(x) = \frac{1}{aa'}[(ab' - ba')x + ac' - ca'].$$

Les résultats de substitution deviennent

$$f'(\alpha) = \frac{ab' - ba'}{aa'}(\alpha - x_0),$$
$$f'(\beta) = \frac{ab' - ba'}{aa'}(\beta - x_0),$$

d'où

$$f'(\alpha).f'(\beta) = \frac{(ab' - ba')^2}{a^2a'^2}(\alpha - x_0)(\beta - x_0) = \frac{(ab' - ba')^2}{a^2a'^2}f(x_0);$$

on aurait de même

$$f(\alpha').f(\beta') = \frac{(ab' - ba')^2}{a^2a'^2}f'(x_0),$$

et on sait que $f(x_0) = f'(x_0)$.

1° $f(x_0) = f'(x_0) < 0$. — Le nombre x_0 donne dans les deux trinomes des résultats de signe contraire au premier terme ; donc les deux équations ont leurs racines réelles.

Le produit $f'(\alpha).f'(\beta)$ étant négatif, les deux nombres α et β substitués à x dans $f'(x)$ donnent des résultats de signes contraires ; donc entre α et β, il y a une racine de l'équation (2) et une seule.

Les racines sont donc dans l'ordre

$$\alpha,\ \alpha',\ \beta,\ \beta'$$

ou $$\alpha',\ \alpha,\ \beta',\ \beta.$$

Dans le premier cas, α n'étant pas compris entre α' et β',

$$f'(\alpha) = \left(\frac{b'}{a'} - \frac{b}{a}\right)(\alpha - x_0)$$

est positif ; mais x_0 est compris entre α et β; donc

$$\alpha - x_0 < 0,$$

d'où $$\frac{b'}{a'} - \frac{b}{a} < 0$$

ou $$\left(-\frac{b}{2a}\right) - \left(-\frac{b'}{2a'}\right) < 0,$$

et réciproquement.

La plus petite des quatre racines appartient à l'équation ayant la plus petite demi-somme.

2° $f(x_0) = f'(x_0) > 0$. — Les racines étant supposées réelles, le nombre x_0 n'est pas compris entre α et β, ni entre α' et β'. Pour trouver la place de x_0 par rapport aux racines, il faut le comparer aux demi-sommes.

1) x_0 compris entre $-\frac{b}{2a}$ et $-\frac{b'}{2a'}$.

Soit $$-\frac{b}{2a} < x_0 < -\frac{b'}{2a'}.$$

(*) Voir à ce sujet deux notes de MM. Bonnefoy et Antomari, 17e année, p. 97 et 105.

Les deux racines α et β sont plus petites que x_0 ; les deux racines α' et β' sont plus grandes que x_0 ; donc entre les racines de l'une quelconque des équations il n'y a aucune racine de l'autre.

II) x_0 non compris entre $-\frac{b}{2a}$ et $-\frac{b'}{2a'}$. Pour connaître le signe commun à $f'(\alpha)$ et $f'(\beta)$, formons la somme

$$f'(\alpha)+f'(\beta)=\left(\frac{b'}{a'}-\frac{b}{a}\right)(\alpha+\beta-2x_0)=\left(\frac{b'}{a'}-\frac{b}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}-2x_0\right);$$

on a de même

$$f(\alpha')+f(\beta')=\left(\frac{b}{a}-\frac{b'}{a'}\right)\left(-\frac{b'}{a'}-2x_0\right).$$

x_0 n'étant pas compris entre $-\frac{b}{2a}$ et $-\frac{b'}{2a'}$, les deux différences $-\frac{b}{a}-2x_0$ et $-\frac{b}{a'}-2x_0$ ont le même signe; mais les différences

$$\frac{b'}{a'}-\frac{b}{a}, \qquad \frac{b}{a}-\frac{b'}{a'}$$

ont des signes contraires ; donc l'une des deux sommes

$$f(\alpha')+f(\beta'), \qquad f'(\alpha)+f'(\beta)$$

est positive, l'autre négative; donc entre les deux racines de l'une se trouvent les deux racines de l'autre. Si l'on a

$$x_0<-\frac{b}{2a}<-\frac{b'}{2a'},$$

on a

$$f'(\alpha)+f'(\beta)<0,$$
$$f(\alpha')+f(\beta')>0.$$

Les deux nombres α et β sont compris entre les racines α' et β' de l'autre équation.

Calcul de $f(x_0)$.

$$f(x_0)=\frac{(ac'-ca')^2}{(ab'-ba')^2}-\frac{b}{a}\,\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}+\frac{c}{a}$$
$$=\frac{(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')}{(ab'-ba')^2},$$

qui a le signe du numérateur.

Résumé.

1° $(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')<0$.

Les deux équations ont leurs racines réelles, et entre les racines de l'une quelconque se trouve une racine et une seule de l'autre.

Si $-\frac{b}{2a}<-\frac{b'}{2a'}$, les racines sont dans l'ordre

$$\alpha,\ \alpha',\ \beta,\ \beta'.$$

2° $(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')>0$.

Les racines étant supposées réelles,

(A) si $-\frac{b}{2a}<-\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}<-\frac{b'}{2a'}$,

les racines sont dans l'ordre

$$\alpha,\ \beta,\ \alpha',\ \beta';$$

(B) si $-\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}<-\frac{b}{2a}<-\frac{b'}{2a'}$,

les racines sont dans l'ordre

$$\alpha',\ \alpha,\ \beta,\ \beta'.$$

3° $(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')=0$.

On a $f(x_0)=f'(x_0)=0$.

Les deux équations ont une racine commune,

$$x_0=-\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

Cas où l'un des coefficients a ou a' *est nul.*

Si $a=0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet la seule racine

$$x=-\frac{c}{b}.$$

La place de cette racine par rapport à α' et β' dépend du signe de $f\left(-\frac{c}{b}\right)$ et de la grandeur relative de $-\frac{c}{b}$ et $-\frac{b'}{2a'}$.

Mais pour $a=0$, x_0 devient $-\frac{c}{b}$;

la quantité $(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')$ se réduit à

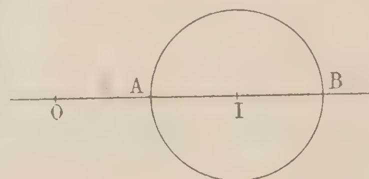
$$c^2a'^2+ba'(bc'-cb')$$

ou

$$b^2a'^2\left(\frac{c^2}{b^2}-\frac{c}{b}\cdot\frac{b'}{a'}+\frac{c'}{a'}\right)$$
$$b^2a'^2f\left(-\frac{c}{b}\right);$$

par conséquent les résultats trouvés précédemment s'appliquent encore au cas où l'un des coefficients, a par exemple, est nul.

Interprétation géométrique. — Portons sur une droite X'X, à partir d'un point O, des segments OA et OB mesurés par α et β, et prenons la circonférence C ayant AB pour diamètre.



Faisons de même pour α et β'.

1° $ab'-ba'=0$. — On a

$$-\frac{b}{2a}=-\frac{b'}{2a'},$$
$$\frac{OA+OB}{2}=\frac{OA'+OB'}{2},$$
$$OI=OI';$$

les deux circonférences sont concentriques, l'une est intérieure à l'autre.

$$\frac{c'}{a'}-\frac{c}{a}<0$$

donne $OA'.OB'<OA.OB$;

mais $OA.OB=$ puissance de O par rapport à circonférence C $=\overline{OI}^2-R^2$;

on a donc

$$\overline{OI}^2-R'^2<\overline{OI}^2-R^2,$$

d'où $R<R'$:

la circonférence C est intérieure à l'autre ; les points A et B sont entre A' et B'.

2° $ab'-ba'\neq 0$. — Soit M un point quelconque de la droite, et x le nombre qui mesure le segment OM.

$$f(x)=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-\alpha)(x-\beta)$$
$$=(OM-OA)(OM-OB)$$
$$=MA.MB.$$

$f(x)$ est la puissance du point M par rapport à la circonférence C.

De même $f'(x)$ est la puissance par rapport à C'.

Soit D le point tel que $OD=x_0$; on sait que $f(x_0)=f'(x_0)$; donc D est d'égale puissance par rapport aux deux circonférences ; c'est le pied de l'axe radical.

La quantité

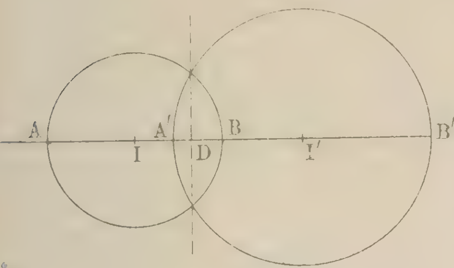
$$(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb'),$$

qui est égale à

$$(ab' - ba')^2 f(x_0),$$

est de même signe que la puissance commune de D par rapport aux deux circonférences.

I. $(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') < 0$.



La puissance de D est négative, le pied de l'axe radical est à l'intérieur de chaque circonférence. Les deux circonférences sont sécantes; entre A et B il y a un des points A' et B' et un seul.

Si

$$-\frac{b}{2a} < -\frac{b'}{2a'},$$

les points sont dans l'ordre

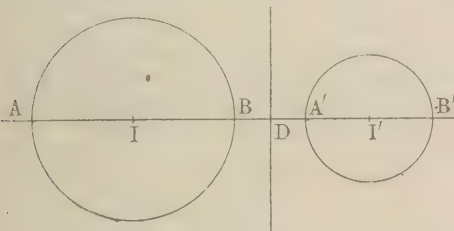
A, A', B, B'.

II. $(ac' - ca') - (ab' - ba')(bc' - cb') > 0$.

Le point D est extérieur à chaque circonférence puisque sa puissance est positive ; les circonférences ne sont pas sécantes.

$$-\frac{b}{2a} < x_0 < -\frac{b'}{2a'};$$

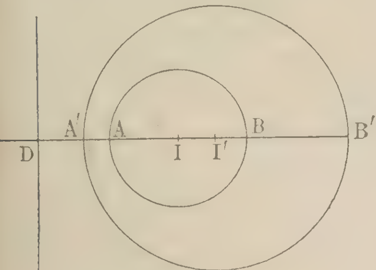
le point D est entre I et I', les deux circonférences sont de part et d'autre de l'axe radical, elles sont extérieures l'une à l'autre; les points sont dans l'ordre



A, B, A', B'.

$$x_0 < -\frac{b}{2a} < -\frac{b'}{2a'};$$

les deux circonférences sont d'un même côté de l'axe radical, l'une d'elles est intérieure à l'autre ; mais l'axe radical est plus rapproché du centre de la circonférence de plus petit rayon, donc dans l'hypothèse précédente, la circonférence C est intérieure à l'autre, les points sont dans l'ordre



A', A, B, B'.

III. $(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') = 0$.

La puissance de D est nulle, le point D se trouve sur chacune des circonférences, les deux circonférences sont tangentes; et l'un des points A ou B se confond avec un des points A' ou B'.

CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (1897)

PHYSIQUE (Paris).

Solution par M. **G. Mauris**, élève du lycée Carnot,
Lauréat du concours (1er Prix).

4190. — *Un tube de verre cylindrique, ouvert aux deux bouts, plonge verticalement dans un vase cylindrique complètement fermé contenant de l'eau et de l'air. La température étant 0° et la pression extérieure 76cm, l'eau s'élève dans le tube à une hauteur h. On demande :*

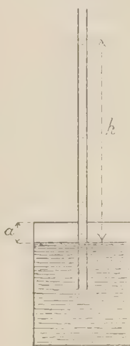
1° Quelle sera la variation x de niveau dans le tube si la colonne barométrique intérieure varie de 1cm, la température restant constante ;

2° Quelle serait la variation de température qui donnerait la même variation de niveau, la pression restant constante et égale à 76cm.

On ne tiendra compte ni de la dilatation du verre, ni de celle de l'eau. On fera le calcul avec les données suivantes :

Section du tube	$\sigma = 4^{cq}$;
Section du vase	$S = 100^{cq}$;
Hauteur de l'air	$a = 10^{cm}$;
Hauteur de la colonne d'eau . . .	$h = 100^{cm}$;
Poids spécifique de l'eau	$= 1$;
Poids spécifique du mercure . . .	$= 13,6$.

Avant la variation de pression, le vase contient le volume $(S - \sigma)a$ d'air sous la pression $h + 76d$, en appelant d le poids spécifique du mercure et en exprimant les pressions en grammes.



Supposons que la pression extérieure augmente de 1cm. La pression de l'air dans le vase augmente, son volume diminue, une certaine quantité d'eau passe du tube dans le vase et il s'établit un nouvel état d'équilibre. Soit x^{cm} la hauteur dont l'eau a baissé dans le tube, y^{cm} celle dont elle a monté dans le vase. Le volume de l'air est maintenant

$(S-\sigma)(a-y)$, sa pression $h - x - y + 77d$

et, en appliquant la loi de Mariotte,

$$(S-\sigma)a(h+76d) = (S-\sigma)(a-y)(h-x-y+77d)$$

ou, en supprimant le facteur commun $S - \sigma$ et en développant,

$$y^2 + xy - ax - y(a + h + 77d) + ad = 0. \qquad (1)$$

Remarquons que la quantité d'eau entrée dans le vase est égale à celle qui est sortie du tube. Le volume de l'eau entrée dans le vase est $(S - \sigma)y$; elle occupait dans le tube le volume σx. D'où

$$\sigma x = (S - \sigma)y,$$

$$y = x\frac{\sigma}{S - \sigma}. \qquad (2)$$

Remplaçons y par sa valeur dans l'équation (1) ; elle devient

$$x^2\left(\frac{\sigma}{S-\sigma}\right)^2 + x^2\frac{\sigma}{S-\sigma} - ax - x\frac{\sigma}{S-\sigma}(a + h + 77d) + ad = 0,$$

$$x^2\left[\left(\frac{\sigma}{S-\sigma}\right)^2 + \frac{\sigma}{S-\sigma}\right] - x\frac{\sigma}{S-\sigma}\left[\frac{a(S-\sigma)}{\sigma} + a + h + 77d\right] + ad = 0,$$

et, en remplaçant les lettres par leur valeur,

$$\frac{25x^2}{24^2} - \frac{x}{24} \times 1397,2 + 136 = 0,$$

$$\frac{25}{24}x^2 - 1397,2x + 3264 = 0,$$

$$x = \frac{698,6 \pm \sqrt{(698,6)^2 - \frac{25}{24} \times 3264}}{\frac{25}{24}},$$

$$x = \frac{698,6 \pm 696,18}{\frac{25}{24}}.$$

La plus grande solution ne convient évidemment pas ; l'autre

convient seule. On a donc

$$x = 2^{cm},34.$$

En portant cette valeur de x dans l'équation (2), on a

$$y = 2,34 \times \frac{1}{24} = 0,097.$$

Donc, quand la pression extérieure augmente de 1^{cm}, l'eau baisse dans le tube de $2^{cm},34$ et monte dans le vase de $0^{cm},097$.

Cherchons quelle serait la variation de température capable de produire le même effet, la pression extérieure restant fixe.

D'abord il y a dans le vase $a(S-\sigma)^{cc}$ d'air, sous la pression $h+76d$ et à 0°.

Supposons que la température varie de t^{o}. Par hypothèse, l'eau monte dans le vase de y^{cm} et le volume de l'air devient $(a-y)(S-\sigma)$. Sa température est alors t^{o} et sa pression $h-x-y+76d$.

Appliquons à cette masse d'air l'équation des gaz

$$V_0H_0 = \frac{VH}{1+\alpha t}\ ; \quad \text{il vient}$$

$$a(S-\sigma)(h+76d) = \frac{(a-y)(S-\sigma)(h-x-y+76d)}{1+\alpha t}$$

ou

$$1+\alpha t = \frac{(a-y)(h-x-y+76d)}{a(h+76d)}$$

et, en remplaçant les lettres par leur valeur,

$$1+\frac{t}{273} = \frac{9,903 \times 1131,163}{10 \times 1133,6},$$

d'où

$$t = -3,4.$$

Un abaissement de température de $3^{o},4$ produirait donc le même effet qu'une augmentation de pression de 1^{cm}.

ALGÈBRE

3832. — *On considère un segment circulaire* ACB *appartenant à un cercle de rayon donné* R. *Calculer la corde* AB *de ce segment sachant que la somme* $AB + nCD = 2R$, n *désignant un nombre donné quelconque et* CD *étant la distance du milieu* C *de l'arc à la corde. Indiquer le nombre des solutions suivant la valeur attribuée à* n. *Interpréter les solutions négatives.*

(*Bacc. lettres-math., Nancy, novembre 1895.*)

Posons $AB = 2x$, $CD = y$. L'énoncé fournit l'équation

$$2x + ny = 2R. \qquad (1)$$

La figure donne une seconde équation,

$$x^2 = y(2R-y). \qquad (2)$$

Pour qu'une solution de ces équations puisse fournir une solution du problème, il faut que x et y soient positives :

$$x > 0, \qquad y > 0.$$

Ces inéquations de condition, nécessaires, sont aussi suffisantes. Si en effet les équations (1) et (2) sont vérifiées par des valeurs positives des inconnues, y sera tel que l'on ait

$$y(2R-y) = x^2 > 0\ ;$$

donc

$$0 < y < 2R.$$

On pourra donc porter sur un diamètre CE une longueur CD égale à y ; la perpendiculaire élevée en D rencontrera donc le cercle en deux points A et B tels que

$$\overline{AD}^2 = y(2R-y) = x^2\ ;$$

donc

$$AD = x.$$

Enfin, on aura

$$AB + nCD = 2R,$$

puisque les valeurs de x et y vérifient l'équation (1).

Pour résoudre le système, on tire de la première équation

$$x = \frac{2R-ny}{2}\ ; \qquad (3)$$

on porte dans la seconde, qui devient

$$(2R-ny)^2 - 4y(2R-y) = 0 \qquad (4)$$

ou

$$(n^2+4)y^2 - 4R(n+2)y + 4R^2 = 0. \qquad (5)$$

Le problème est résolu par les équations (5) et (3).

La condition $x > 0$ équivaut à

$$y < \frac{2R}{n}\ ;$$

comme il faut déjà $y > 0$, le problème a autant de solutions que l'équation en y a de racines comprises entre 0 et $\frac{2R}{n}$.

En désignant par $f(y) = 0$ le premier membre de (5), on trouve

$$f(0) = 4R^2,$$

$$f\left(\frac{2R}{n}\right) = \frac{16R^2(1-n)}{n^2}.$$

Ce dernier résultat se forme aisément à l'aide de (4).

Pour que le problème admette une seule solution, il faut et il suffit que $f(0)$ et $f\left(\frac{2R}{n}\right)$ soient de signes contraires, ce qui donne

$$n > 1.$$

Cette condition étant remplie, la plus petite racine de l'équation en y convient seule ; l'autre fournit pour x une valeur négative.

Pour que le problème admette deux solutions, il faut et il suffit :

1° que $f(0)$ et $f\left(\frac{2R}{n}\right)$ soient de même signe que le coefficient de y^2 ;

2° que la demi-somme des racines soit comprise entre 0 et $\frac{2R}{n}$;

3° que le discriminant $b^2 - 4ac$ soit positif.

La première condition donne

$$n < 1\ ;$$

la seconde,

$$\frac{2R}{n} > \frac{2R(n+2)}{n^2+4},$$

ou

$$n^2 + 4 > n^2 + 2n,$$

ou

$$n < 2,$$

vérifiée du moment que $n < 1$.

Enfin la troisième s'écrit

$$4(n+2)^2 - 4(n^2+4) > 0,$$

ou

$$4n > 0, \qquad n > 0,$$

condition supposée par l'énoncé et par les calculs faits.

En résumé :

$n > 1$ une seule solution, la plus petite racine ;

$n < 1$ deux solutions.

Dans le cas limite $n = 1$, $\frac{2R}{n}$ est égal à 2R, $f\left(\frac{2R}{n}\right) = f(2R)$ est nul ; 2R est racine de l'équation en y ; la valeur correspondante de x est nulle. L'équation en y devient alors

$$5y^2 - 12Ry + 4R^2 = 0.$$

Elle admet les deux racines 2R et $\frac{2R}{5}$. La première donne la tangente en C ; la valeur de x correspondant à la seconde est $\frac{3R}{10}$.

Valeurs négatives de x. Elles se produisent dans le cas de $n > 1$, quand on prend pour y la plus grande racine. Soit $-x'$ cette valeur ; elle vérifie les équations

$$ny - 2x' = 2R,$$
$$x'^2 = y(2R - y),$$

et convient par suite au cas où l'on demande de déterminer AB de telle sorte que

$$nCD - AB = 2R.$$

[Ont résolu cette question : MM. P. Adrian ; P. Bresson ; F. Mazoyer, à Saint-Etienne ; Brugerolle, école normale de Draguignan ; H. Ducassé, à Aubin ; Ferrand, à Cognac ; H. Julien, à Hirson ; G. Larcher, au Creusot ; E. Montagut ; F. Ricci, à Florence ; Thomas, école primaire supérieure d'Elbeuf ; M. Vachon, pensionnat St-Louis, St-Etienne.]

GÉOMÉTRIE

A propos de la question 4070.

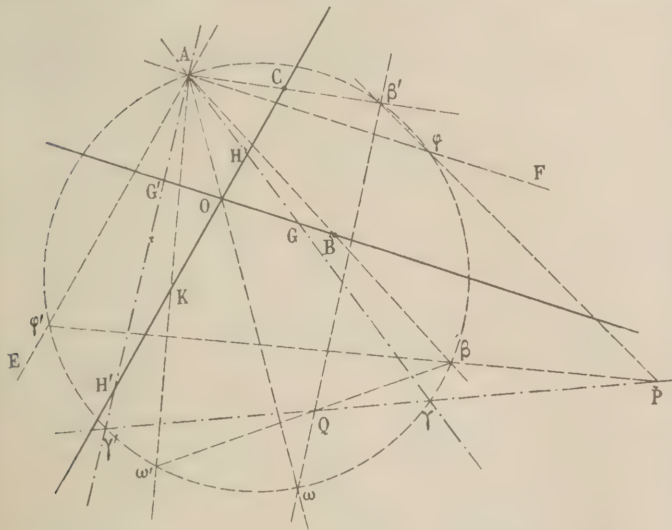
Mener une droite parallèle à un plan donné rencontrant trois droites données.

Dans la solution indiquée (p. 57, 22e année), l'auteur ramène le problème proposé au suivant :

Etant données dans un plan deux droites OB et OC, mener par un point A de ce plan une droite rencontrant OB en G et OC en H, tel que le rapport $\frac{BG}{CH}$ soit égal à un rapport donné λ.

La solution se termine ensuite algébriquement par la résolution d'une certaine équation du second degré.

Or, on peut achever le problème géométriquement à condition



de se servir des premières constructions qui se présentent dans la théorie de l'homographie (figure 1).

Le rapport $\frac{BG}{CH}$ étant égal à λ, on considère sur les droites OB et OC tous les couples de points G et H, vérifiant la condition

$$\frac{BG}{CH} = \lambda. \qquad (1)$$

Ces points tracent sur OB et OC deux divisions homographiques ; les faisceaux ayant ces divisions pour bases et pour sommet commun A sont donc eux-mêmes homographiques. Dans le cas particulier où G et H sont sur une droite passant par A, la droite AGH (c'est la droite inconnue) appartient à la fois aux deux faisceaux ; c'est un de leurs *rayons doubles*.

Pour construire ces derniers, on cherche d'abord trois couples de rayons homologues. A cet effet, on remarque : 1° que BG et CH s'annulent simultanément, donc AB et AC forment un de ces couples ; 2° que BG et CH deviennent simultanément infinis ; donc les parallèles AF à OB et AE à OC forment un autre couple. Prenons enfin sur OC un point K tel que

$$\frac{BO}{CK} = \lambda ; \qquad (2)$$

AO et AK forment le troisième couple.

On fait passer ensuite par A un cercle arbitraire, qui rencontre AB, AF, AO en β, φ, ω ; AC, AE, AK en β', φ', ω' ; on marque P, intersection de $\beta\varphi'$ et $\beta'\varphi$; Q intersection de $\beta\omega'$ et $\beta'\omega$; on tire PQ ; si cette droite rencontre le cercle en γ et γ', $A\gamma$ et $A\gamma'$ sont les rayons doubles ; ils rencontrent les deux droites en des points G, H, G', H' tels que

$$\frac{BG}{CH} = \frac{BG'}{CH'} = \lambda.$$

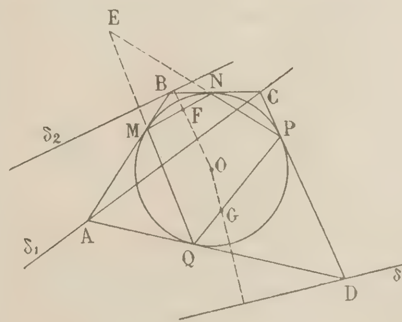
Le problème peut donc admettre deux solutions ; une seule, si la droite PQ est tangente au cercle ; aucune, si elle ne le rencontre pas.

On voit même comment on pourrait discuter le problème en laissant fixes les points A, O, B, C et faisant varier le rapport λ. Tous les points de la figure seront fixes, sauf ω' et Q. Les positions limites de Q seront les points d'intersection de $\beta'\omega$ avec les tangentes issues de P au cercle (si toutefois ces tangentes existent). Des positions limites de Q, on déduira les positions limites de ω', par suite celles de K, et enfin les valeurs limites du rapport $\frac{BO}{CK} = \lambda$.

Pour la démonstration de ces constructions, nous ne pouvons que renvoyer nos jeunes lecteurs au traité de géométrie de MM. Rouché et de Comberousse, Appendice du Livre VII, divisions homographiques et involution. Ces notions sont très simples, et tout élève d'Elémentaires devrait les posséder ; elles lui seraient assurément plus utiles que le calcul de π par la méthode des isopérimètres, par exemple. L'étude et l'emploi de l'homographie sont courants chez nos voisins d'Allemagne et d'Italie.

4145. — *On donne dans un plan un cercle* O *et trois droites* δ_1, δ_2, δ_3. *Circonscrire au cercle un quadrilatère ayant les sommets opposés* A, C *sur* δ_1, *le sommet* B *sur* δ_2 *et le sommet* D *sur* δ_3.

Supposons le problème résolu. Soient M, N, P, Q les points de contact des côtés du quadrilatère ABCD et du cercle donné O.



On sait que les polaires par rapport à un cercle de tous les points d'une droite passent par le pôle de cette droite par rapport au même cercle. Donc les polaires MQ et NP des points A et C de la droite δ_1 passent par le pôle E de cette droite ; de même la polaire MN du point B passe par le pôle F de la droite δ_2 et la polaire PQ de D passe par le pôle G de la droite δ_3. On est ainsi ramené au problème suivant :

Dans un cercle O, inscrire un quadrilatère MNPQ connaissant le point de rencontre de deux côtés opposés et un point de

chacun des deux autres côtés. Ce problème a déjà été traité ici (*V. 21e année, 3954, p. 30*).

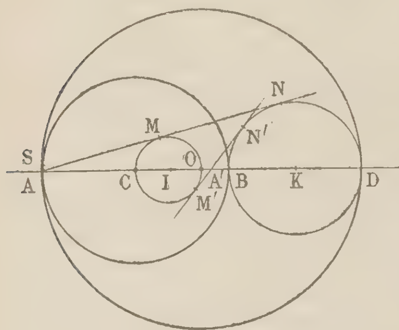
(E. MONTAGUT, à Périgueux.)

[Ont résolu la même question : MM. Bayor ; Ch. Bourdet ; E. Foucart ; J. Gilles ; Loïc ; J. Pastour ; M. Rebeix ; A. Rongier ; L. Weisz.]

4286. — *Etant donnés deux cercles O et C tangents intérieurement au point A, on considère les points de rencontre B et D de ces cercles avec le diamètre commun. Démontrer que :*

1° Le point A appartient à la tangente commune extérieure aux deux cercles décrits sur CO et BD comme diamètres ;

2° Si M et N sont les points de contact respectifs de la tangente commune, on a AN = 2AM. Déterminer en outre le point de rencontre A′ des tangentes communes intérieures. Conditions de réalité.



Soient R le rayon du cercle O, R′ celui du cercle C ; ce dernier est, par hypothèse, tangent intérieurement au cercle O en A ; on peut toujours supposer qu'il lui est intérieur ; d'où $R > R'$.

1° La figure donne immédiatement, en appelant I et K les centres des cercles de diamètres CO et BD,

$$AI = \frac{1}{2}(AO + AC) = \frac{R + R'}{2},$$

$$AK = \frac{1}{2}(AB + AD) = R + R',$$

$$CO = R - R' = 2\rho,$$

$$BD = 2(R - R') = 2\rho';$$

donc $$\frac{AI}{AK} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{CO}{BD} = \frac{1}{2} = \frac{\rho}{\rho'};$$

le point A étant évidemment sur le prolongement de IK, c'est par suite le centre d'homothétie direct des cercles de centres I et K ; le rapport d'homothétie est $\frac{1}{2}$.

2° AMN étant une des tangentes communes issues de A, M et N sont deux points homologues ; donc

$$\frac{AM}{AN} = \frac{1}{2}.$$

3° Le centre d'homothétie inverse se trouve entre I et K, en un point A′ tel que

$$\frac{A'I}{A'K} = \frac{1}{2}.$$

Or $$IK = AK - AI = \frac{R + R'}{2};$$

donc $$\frac{A'I}{1} = \frac{A'K}{2} = \frac{IK}{3} = \frac{R + R'}{6},$$

égalités qui déterminent A′.

Pour que les tangentes communes intérieures soient réelles, il faut et il suffit que les cercles I et K soient extérieurs l'un à l'autre ; donc

$$AO < AB \qquad \text{ou} \qquad R < 2R'.$$

[Ont résolu cette question : Melles C. David ; J. Parizot ; MM. G. Bacquet ; E. Baudot ; L. Bigot ; L. Bois ; G. Boucher ; V. Bourquin ; Boutignon ; A. Bouzy ; E. Brière ; L. Cabrol ; B. Carriere ; C. Carteron ; R. Van Cauwenberghe ; L. Curt ; L. Cussenot ; Gustaud ; G. Damien ; G. Delahaye ; G. Dupuy ; G. Fauvernier ; Feintuch ; L. Fournier ; P. Frescal ; Gauthier ; F. Geltzenlichter ; A. Giansilj ; L. Gourdet ; G. Hiernaux ; H. Janois ; G. Jarreton ; E. Kornis ; J. M. Lagarde ; R. Larsonneur ; E. Layes ; C. Lefebvre ; A. Lescure ; E. Lézier ; X. Lhommelin ; L. Magne ; A. Maître ; J. Martin ; J. Méhu ; A. Mirc ; Montaland ; F. Morel ; J. Orsini ; L. P. à A. ; G. Perdrizet ; J. Pillard ; G. Réveillon ; M. Rebeix ; B. Ribes ; E. De Rycke ; P. Sickler ; Ohannis Tarikian ; J. Trouillé ; Vial ; Villemagne ; A. Wiart.]

4298. — *Si, dans un triangle ABC, les carrés des côtés AB et AC, supposés inégaux, sont entre eux comme leurs projections sur le côté BC, ou encore si la hauteur issue du sommet A est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur le côté BC, la somme ou la différence des angles B et C est égale à un droit.*

Dans le cas où $B - C = 1^{dr}$, trouver la relation qui existe entre les côtés a, b, c du triangle ABC.

Démontrons d'abord que la seconde hypothèse est une conséquence de la première. En effet, en désignant par AD la hauteur issue du sommet A, l'égalité

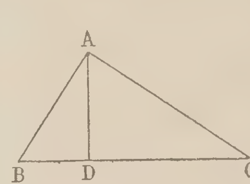


Fig. 1

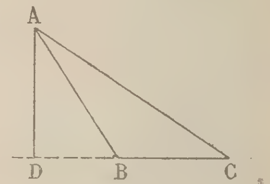


Fig. 2

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{BD}{CD}$$

peut s'écrire $$\frac{\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2}{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2} = \frac{BD}{CD},$$

d'où $$\overline{AD}^2(CD - BD) = BD.CD(CD - BD).$$

Mais la différence CD — BD est supposée différente de zéro ; donc

$$\overline{AD}^2 = BD.CD.$$

Cette dernière égalité peut s'écrire

$$\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD},$$

ce qui montre que les triangles ABD et ACD sont semblables ; donc $\widehat{ABD} = \widehat{CAD}$.

Si les angles B et C sont aigus, le point D est entre B et C, et l'égalité précédente donne (*fig.* 1)

$$B = 1^{dr} - C, \qquad \text{ou} \qquad B + C = 1^{dr}.$$

Si l'angle B est obtus, le point D est sur le prolongement de BC du côté de B, et la même égalité donne (*fig.* 2)

$$2^{dr} - B = 1^{dr} - C, \qquad \text{ou} \qquad B - C = 1^{dr}.$$

Les réciproques sont vraies. Ainsi, dans un triangle où $B - C = 1^{dr}$, on a, comme dans un triangle rectangle en A,

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{BD}{CD}, \qquad \text{et} \qquad \overline{AD}^2 = BD.CD.$$

Cela étant, de la proportion $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{BD}{CD}$, on déduit (*fig.* 2)

$$\frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2} = \frac{CD - BD}{CD + BD}.$$

Mais $\overline{CD}^2 - \overline{BD}^2$ ou $BC(CD + BD) = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$.

Donc $$\frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2},$$

ou $$(b^2 - c^2)^2 = a^2(b^2 + c^2).$$

La réciproque est vraie. En effet, on déduit d'abord de l'égalité précédente, en supposant $b > c$, que l'angle B est obtus ; car cette égalité peut s'écrire

$$b^2(b^2 - c^2 - a^2) = c^2(a^2 + b^2 - c^2),$$

d'où $$b^2 - c^2 - a^2 > 0.$$

On remonte alors facilement à la proportion $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{BD}{CD}$, d'où l'on conclut $B - C = 1^{dr}$.

(A. GOULARD, professeur au lycée de Marseille.)

Solution trigonométrique. — On doit avoir

$$\frac{c^2}{b^2} = \pm \frac{c \cos B}{b \cos C},$$

le signe — s'appliquant au cas où l'un des angles B et C est obtus.

En remplaçant b, c par les quantités proportionnelles sin B, sin C et supprimant les facteurs communs, il vient

$$\frac{\sin C}{\sin B} = \pm \frac{\cos B}{\cos C}$$

ou $$2 \sin B \cos B = \pm 2 \sin C \cos C$$

ou $$\sin 2B = \pm \sin 2C.$$

Les angles 2B et 2C ont ainsi même sinus en valeur absolue ; par suite, comme ces angles sont supposés inégaux, il faut qu'ils soient supplémentaires ou bien que l'un d'eux surpasse l'autre de π. On peut donc écrire, suivant le cas,

$$B + C = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \pm (B - C) = \frac{\pi}{2}.$$

On verrait facilement que la condition $\overline{AD}^2 = BD.DC$, se ramène à

$$\text{tg } B = \pm \text{tg} \left(\frac{\pi}{2} - C\right).$$

Les angles B et $\frac{\pi}{2} - C$ ayant ainsi même tangente en valeur absolue sont égaux ou supplémentaires :

$$B = \frac{\pi}{2} - C, \quad \text{d'où} \quad B + C = \frac{\pi}{2};$$

$$B + \frac{\pi}{2} - C = \pi, \quad \text{d'où} \quad B - C = \frac{\pi}{2}.$$

Lorsque $\pm (B - C) = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\frac{c^2}{b^2} = - \frac{c \cos B}{b \cos C},$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

En éliminant cos B et cos C, on obtient

$$\frac{c^2}{b^2} = - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{a^2 + b^2 - c^2}$$

ou $$a^2c^2 + b^2c^2 - c^4 = - a^2b^2 - c^2b^2 - b^4$$

ou $$a^2(b^2 + c^2) = (b^2 - c^2)^2.$$

(E. ARDIN-DELTEIL, à Montpellier.)

REMARQUE. — On peut encore ramener la condition

$$\overline{AD}^2 = BD.DC$$

à celle-ci :

$$\sin B \sin C = \pm \cos B \cos C$$

ou $$\cos (B \pm C) = 0,$$

d'où $$B \pm C = \frac{\pi}{2}.$$

(E. LAYES, à Saint-Didier.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Amblard ; J. Amboise ; L. Barberot ; E. Baudot ; H. Bosc ; V. Bourquin ; Burgat ; L. Cussenot ; Feintuch ; F. Geltzenlichter ; L. Gourdet ; G. Hiernaux ; F. Morel ; M. Rebeix ; E. Sevin ; J. Trouillé ; E. Vaicle.]

MÉCANIQUE

3782. — *Le rayon d'un contour polygonal plan, régulier, de trois côtés, ABCD, est égal à 1 ; l'angle au centre AOB vaut 2α ; les côtés, parcourus dans un même sens de circulation, représentent des forces appliquées à un corps solide.*

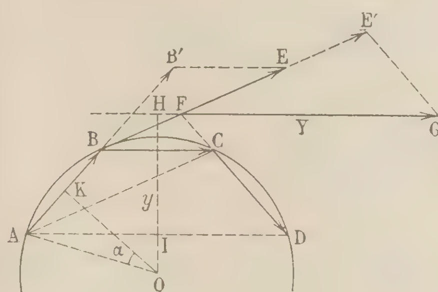
1° *Démontrer que ces forces se réduisent à un couple ou à une résultante unique, égale et parallèle à AD selon que le contour est fermé ou ouvert.*

2° *Calculer cette résultante, ainsi que sa distance au centre O.*

3° *Étudier les variations de ces deux grandeurs quand α varie de 0 à 60°.*

(*Bacc. lettres-sciences, Constantine, juillet 1895.*)

1° En transportant la force AB en BB′ le long de sa direction, et menant la droite B′E, égale et parallèle à BC, on obtient en BE la résultante des deux forces AB et BC ; en opérant de même sur les forces BE et CD supposées concourantes en F, on obtient en FG la résultante des trois forces considérées.



D'après cette construction, les triangles BB′E et ABC sont égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux ; donc BE est égal et parallèle à AC, de sorte que les deux triangles FE′G et ACD sont égaux à leur tour pour la même raison. Dès lors, la résultante FG est bien égale et parallèle à AD.

Nous avons supposé les forces BE et Cl concourantes en F. Lorsque ces forces sont parallèles, c'est-à-dire lorsque CD se confond avec CA, la force BE devient égale et de sens contraire à la force parallèle CD. Ces deux forces forment alors un couple.

2° Calculons maintenant la résultante $FG = Y$ et sa distance $OH = y$ au point O.

On a d'abord, en observant que $\widehat{AOI} = 3\alpha$,

$$Y = AD = 2AI = 2 \sin 3\alpha.$$

D'ailleurs, en appliquant le théorème de Varignon, on a, en prenant le point O pour centre des moments,

$$Yy = m^t FE' + m^t CD,$$

$$m^t FE' = m^t BE = 2\, m^t AB,$$

$$m^t CD = m^t AB;$$

on déduit de là, par addition,

$$Yy = 3\, m^t AB = 3AB \times OK,$$

d'où $$y = \frac{3AB \times OK}{Y} = \frac{3 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin 3\alpha}.$$

3° Lorsque α croît de 0 à 30°, la quantité

$$Y = 2 \sin 3\alpha$$

croît évidemment de 0 à 2 ; α croissant de 30° à 60°, Y décroît de 2 à 0.

Pour $\alpha = 30°$, Y atteint son maximum, 2, et le contour ABCD prend la forme d'un demi-hexagone régulier ; pour $\alpha = 60°$, Y ou AD est nul (cas du couple).

Il reste à étudier la variation de la fonction

$$y = \frac{3 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin 3\alpha}.$$

Comme $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$, cette fonction peut s'écrire

$$y = \frac{3 \cos \alpha}{3 - 4 \sin^2 \alpha}$$

ou $$y = \frac{3 \cos \alpha}{4 \cos^2 \alpha - 1}$$

ou enfin $$y = \frac{3}{4 \cos \alpha - \frac{1}{\cos \alpha}}.$$

Lorsque α varie de 0 à 60°, $\cos \alpha$ décroît de 1 à $\frac{1}{2}$; la différence du dénominateur diminue visiblement depuis 3 jusqu'à 0, et par suite y augmente constamment de 1 à $+\infty$.

(J. POIRIER, à Neuilly-le-Réal.)

[Ont résolu la même question : MM. L. Bousquet, à Celleneuve ; J. Delpont, à Moissac ; H. Ducassé, à Agen ; G. Guiot, à Courouvre.]

PHYSIQUE

4257. — *Un ballon renferme de l'air sec à 10° et sous la pression de 756mm. Le poids de cet air est de 6gr,32. On demande quel serait le poids d'acide carbonique qui remplirait le même ballon à la température de 0° et sous la pression de 760mm.*

On donne la densité de l'acide carbonique 1,526 ; *le coefficient de dilatation cubique du verre* $\frac{1}{38700}$, *celui du gaz* $\frac{1}{273}$.

(*Bacc. lettres-math., Lyon, nov. 1897.*)

Appelons a la masse d'un litre d'air dans les conditions normales, V_0 le volume du ballon à 0°.

La masse de l'air sec que renferme le ballon à 10° et sous la pression de 756mm est donnée par la formule

$$6{,}32 = V_0 \times a \times \frac{756}{760} \times \frac{1 + kt}{1 + \alpha t}.$$

La masse x du gaz carbonique qui remplirait le même ballon à 0° et sous la pression de 760mm a pour valeur

$$x = V_0 \times a \times 1{,}526.$$

Divisant les deux équations l'une par l'autre, il vient

$$\frac{6{,}32}{x} = \frac{756(1 + kt)}{1{,}526 \times 760(1 + \alpha t)},$$

d'où l'on tire $$x = 10^{gr}{,}047.$$

(P. BONNOT.)

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil ; L. Barberot ; Bayor ; L. Bigot ; A. Broutin ; Burgat ; L. Cabrol ; M. Chapron ; E. Clément ; P. Colin ; L. Curt ; N. Delhotel ; G. Digne ; R. Durand ; G. Dupuy ; P. Fournel ; P. Frescat ; Gernez-Pfaumatter ; M. Georgi ; Gervaiseau ; H. Grzybowski ; P. Guillemin ; R. Henry ; E. Joyer ; E. Layes ; Laguarigue de Survilliers ; H. Lefèvre ; H. Levy ; E. Madet ; E. Le Maigre ; A. Maître ; J. Maury ; J. Ménéchal ; A. Mirc ; V. Parizet ; Raynaud ; M. Rebeix ; P. Rolley ; P. Sickler ; L. Sylvestre ; P. Tarnier ; L. Tarrin ; P. Tribier ; J. Trouillé ; H. Valdenaire ; Veyret ; Vial.]

QUESTIONS PROPOSÉES

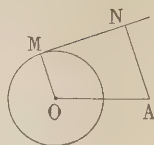
4321. — Quelle valeur faut-il donner à y dans l'équation du second degré en x

$$(4 - y)x^2 - 9x - 12 = 0$$

pour que la somme de l'une des racines et du quadruple de l'autre se réduise à zéro ?

(*Bacc. lettres-math., Dijon, juillet 1897.*)

4322. — On donne un cercle de rayon R et un point A à une distance d de son centre. Déterminer sur le cercle un point M tel, qu'en menant la tangente MN en ce point et abaissant du point A la perpendiculaire AN sur cette tangente, on ait



$$MN + AN = l.$$

Discuter. — Quelle doit être la longueur l pour que le cercle de diamètre MN soit tangent à la droite OA ?

(*Bacc. lettres-math., Clermont, juillet 1897.*)

4323. — Étant donné un triangle rectangle isocèle, on demande de déterminer les rayons de trois cercles, dont chacun est tangent à deux côtés du triangle et en outre tangent aux deux autres cercles.

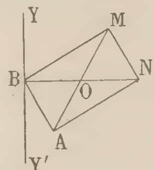
(*Bacc. lettres-math., Dijon, juillet 1897.*)

4324. — Étant donnés une circonférence de rayon R et un point A à une distance $OA = a$ du centre O, mener par le point A une droite AMN, faisant avec OA un angle φ, telle que, si on désigne par M et N les points de rencontre de cette droite et de la circonférence, le volume engendré par le secteur circulaire OMN en tournant autour de OA, ait une valeur déterminée.

Discussion.

(*Bacc. lettres-math., Bordeaux, juillet 1897.*)

4325. — On considère une droite YY' et un point A situé en dehors de cette droite. On joint le point A à un point quelconque B de YY', puis on construit un rectangle ABMN dont AB soit un côté et dont la diagonale BN soit perpendiculaire à YY'. On demande de trouver, lorsque le point B se déplace sur YY' :



1° Le lieu géométrique du point d'intersection O des diagonales ;

2° Le lieu géométrique du sommet M du rectangle opposé au point A ;

3° Le lieu géométrique du sommet N.

(*Bacc. lettres-sciences, Bordeaux, juillet 1897.*)

4326. — Un triangle ABC, rectangle en A, se meut dans un plan, de manière que le côté AB reste tangent à une parabole donnée et que le côté AC passe toujours par le foyer de cette courbe.

Déterminer, pour une position quelconque du triangle, son centre instantané de rotation O.

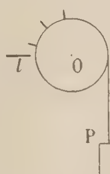
Dire quel est le lieu décrit par le point A, quand le triangle se déplace et en conclure que AO est parallèle à l'axe de la parabole. Enfin, déterminer le lieu décrit par le point O sur le plan fixe.

(*Bacc. lettres-sciences, Caen, juillet 1897.*)

4327. — Une sphère de platine, pesée dans le mercure, perd de son poids 50 grammes à 0°, et 49gr,5415 à 60°. Trouver le coefficient de dilatation cubique du platine, le coefficient de dilatation absolue du mercure étant $\frac{1}{5550}$, sa densité à 0° : 13,6.

(*Bacc. lettres-math., Caen, juillet 1897.*)

4328 — Une roue de Savart de masse négligeable a 10cm de rayon et porte 10 dents. Elle se meut autour d'un axe horizontal O, grâce au poids P qui tombe verticalement, et fait vibrer une lame l. On demande :



1° De déterminer l'accélération de la pesanteur au lieu d'observation, sachant qu'après trois secondes de chute le son rendu par l a une hauteur de 470 vibrations doubles ;

2° L'espace parcouru par P quand le son est à l'octave grave du précédent.

(*Bacc. lettres-math., Rennes, juillet 1897.*)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

22e Année. — N° 13. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 1er Avril 1898.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX HABITUEL DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

SUR LA RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DES TRIANGLES

par M. J. **Girod**, professeur au Lycée de Versailles.

Chaque année, parmi les sujets de compositions écrites donnés au baccalauréat dans les diverses Facultés des sciences, apparaissent des discussions de triangles déterminés par trois conditions quelconques. Un problème du même genre est proposé *régulièrement* aux candidats à l'Ecole centrale, et très souvent aux candidats à Saint-Cyr.

La principale difficulté de ces questions est le choix de l'inconnue et la détermination des conditions nécessaires et suffisantes que doit remplir cette inconnue pour qu'on soit assuré de l'existence du triangle qui en dépend.

Nous nous proposons de définir quelques catégories dans lesquelles rentrent un grand nombre de cas signalés un peu au hasard dans la plupart des traités, d'indiquer pour chaque groupe de cas analogues quelle est l'inconnue préférable, et enfin de préciser les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles on doit assujettir cette inconnue.

Nous rangerons les *principaux* cas qui peuvent se présenter en quatre catégories :

1re *Catégorie* : On donne les angles et une longueur quelconque liée au triangle.

2e *Catégorie* : On donne un angle, un des deux côtés qui *le comprennent* et une condition relative à des longueurs.

3e *Catégorie* : On donne un angle et deux autres conditions telles qu'on puisse en déduire une relation symétrique par rapport aux deux autres angles inconnus.

4e *Catégorie* : On donne trois longueurs quelconques.

Première catégorie. — Par raison de symétrie, on ne spécifie pas en général dans la résolution théorique quels sont les *deux* angles qui sont donnés et on considère indistinctement comme tels les trois angles A, B, C. Evidemment ces trois angles doivent au préalable vérifier la relation $A + B + C = 180°$.

Les inconnues sont les côtés a, b, c. Une seule condition suffit : c'est qu'on puisse trouver pour l'un des côtés une valeur réelle et positive. Les deux autres côtés auront alors des valeurs réelles et positives, puisque la résolution complète se ramène à celle d'un triangle dont on connait un côté et les deux angles adjacents, dans des conditions où cette résolution est toujours possible.

Si la donnée linéaire joue un rôle particulier par rapport à l'un des côtés, a par exemple, on calculera d'abord ce côté a. Un procédé souvent commode pour trouver la relation entre a et les données consiste à évaluer de deux manières la surface du triangle ABC : 1° à l'aide de a et des angles, par la formule $2S = \dfrac{a^2 \sin B \sin C}{\sin A}$; 2° en fonction de la donnée linéaire, et d'égaler les résultats.

Exemple. — Résoudre un triangle connaissant les angles et la bissectrice β de l'angle A.

On sait que l'angle de la bissectrice et de la hauteur issues du sommet A est égal à $\dfrac{B - C}{2}$ (en supposant $B > C$).

La hauteur AH est donc donnée par la formule

$$AH = \beta \cos \frac{B - C}{2}.$$

En évaluant de deux manières la surface du triangle ABC, on a

$$\frac{a^2 \sin B \sin C}{\sin A} = a\beta \cos \frac{B - C}{2},$$

d'où résulte
$$a = \frac{\beta \sin A \cos \dfrac{B - C}{2}}{\sin B \sin C}.$$

La construction graphique d'un triangle défini par les angles A, B, C et une donnée linéaire l peut être formulée pour tous les cas. On construit d'abord un triangle A'B'C' ayant ses angles égaux aux angles A, B, C. On détermine la longueur l' de la ligne qui, dans le triangle A'B'C', est homologue de la ligne l associée au triangle ABC. On peut alors construire le côté a du triangle ABC, puisque entre a et le côté homologue a' du triangle A'B'C' existe la relation $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{l}{l'}$.

La disposition des constructions pour obtenir cette quatrième proportionnelle varie évidemment avec les particularités de la figure ; ce qui précède n'est qu'une indication générale, montrant que l'unique condition algébrique imposée à a est toujours vérifiée (sauf absurdité manifeste dans les données) et que le problème n'a qu'une solution. Aussi, dans les concours, cette catégorie ne fournit guère que des exercices numériques, relatifs à quelques cas dont la théorie est exposée dans la plupart des traités. Les discussions appartiennent aux catégories suivantes.

Deuxième catégorie. — On donne un des angles, un des deux côtés qui le comprennent, par exemple A et b, et une longueur quelconque autre que c.

On pourrait calculer c ; on connaîtrait alors deux côtés b, c et l'angle compris A. Le côté c n'est assujetti qu'à la condition d'être réel et positif : la discussion est par conséquent très simple.

Mais en général la formule qui détermine c n'est pas calculable par logarithmes. Si l'on doit terminer par une application numérique, il est souvent préférable de calculer l'angle C adjacent au côté b donné. On connaîtra alors un côté b et les deux angles adjacents A et C. Les conditions nécessaires et suffisantes imposées à C sont évidemment $C > 0$ et $A + C < 180°$, ce qui donne la suite d'inégalités

$$0 < C < 180° - A.$$

Un exemple remarquable de cette catégorie est le cas de résolution dit cas douteux, où l'on donne A, b et a.

La discussion connue de ce cas montre quelles précautions

on doit prendre pour traduire la suite d'inégalités

$$0 < C < 180^\circ - A$$

lorsque l'angle C est déterminé par son sinus.

Si l'angle $180^\circ - A$ est aigu, à la suite $0 < C < 180^\circ - A$ correspond la suite $0 < \sin C < \sin A$, et après avoir calculé une valeur de $\sin C$ satisfaisant à ces conditions, on devra attribuer à C uniquement la détermination fournie par les tables.

Mais supposons que l'angle $180^\circ - A$ soit obtus, et faisons croître C de zéro à $180^\circ - A$. On voit que $\sin C$ commence par croître, atteint son maximum 1 lorsque C traverse la valeur 90°, puis décroît de 1 à $\sin A$. Donc $\sin C$ passe une seule fois par les valeurs comprises entre zéro et $\sin A$, deux fois par les valeurs comprises entre $\sin A$ et 1. On exprimera donc que le problème a une solution unique en imposant à $\sin C$ les conditions $0 < \sin C < \sin A$, et en prenant pour valeur de C l'angle aigu des tables qui correspond à la valeur de $\sin C$ remplissant ces conditions.

On exprimera que le problème a deux solutions en imposant à $\sin C$ les conditions $\sin A < \sin C < 1$, et en faisant correspondre à chaque valeur acceptable de $\sin C$ l'angle aigu des tables et son supplément.

La discussion est plus simple lorsque C est donné par son cosinus. A la suite d'inégalités $0 < C < 180^\circ - A$ on peut toujours substituer la suite $1 > \cos C > -\cos A$, et chaque valeur acceptable de $\cos C$ ne fournit qu'une valeur de l'angle C.

Enfin, si C est déterminé par sa tangente, il faut encore distinguer deux cas. Si l'angle $(180^\circ - A)$ est aigu, les conditions deviennent $0 < \operatorname{tg} C < \operatorname{tg}(180^\circ - A)$, et à $\operatorname{tg} C$ ne correspond qu'un seul angle C, compris entre 0° et 90°.

Si l'angle $180^\circ - A$ est obtus, on voit, en faisant croître C de 0° à $180^\circ - A$, que $\operatorname{tg} C$ prend toutes les valeurs positives, et les valeurs négatives comprises entre $-\infty$ et $-\operatorname{tg} A$. On devra donc exclure les valeurs de $\operatorname{tg} C$ qui sont comprises entre $-\operatorname{tg} A$ et zéro, et à chaque valeur acceptable de $\operatorname{tg} C$ ne correspond qu'un angle, aigu si $\operatorname{tg} C > 0$, obtus si $\operatorname{tg} C < -\operatorname{tg} A$.

Mais il arrive très souvent que les équations conduisent à calculer $\frac{C}{2}$ plutôt que C. Alors à la suite $0 < \frac{C}{2} < 90^\circ - \frac{A}{2}$ on peut toujours substituer, selon la nature de la ligne qui détermine $\frac{C}{2}$, l'une des trois suites

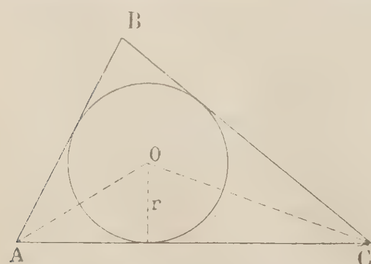
$$0 < \sin\frac{C}{2} < \cos\frac{A}{2},$$

$$1 > \cos\frac{C}{2} > \sin\frac{A}{2},$$

$$0 < \operatorname{tg}\frac{C}{2} < \operatorname{cotg}\frac{A}{2}.$$

Exemple. — Résoudre un triangle connaissant A, b *et le rayon* r *du cercle inscrit.*

Soit O le centre du cercle inscrit. Evaluons de deux manières la surface du triangle BOC. On a



$$br = \frac{b^2 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{C}{2}}{\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)},$$

d'où résulte

$$r \sin\left(\frac{A+C}{2}\right) = b \sin\frac{A}{2} \sin\frac{C}{2},$$

ou, en développant $\sin\frac{A+C}{2}$,

$$\sin\frac{C}{2}\left[b \sin\frac{A}{2} - r\cos\frac{A}{2}\right] = r \sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$$

d'où enfin
$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r\sin\frac{A}{2}}{b\sin\frac{A}{2} - r\cos\frac{A}{2}}.$$

La condition $0 < \frac{C}{2} < 90^\circ - \frac{A}{2}$ devient, par substitution des tangentes aux angles,

$$0 < \frac{r\sin\frac{A}{2}}{b\sin\frac{A}{2} - r\cos\frac{A}{2}} < \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

La première inégalité nous donne $b\sin\frac{A}{2} - r\cos\frac{A}{2} > 0$ ou $r < b \operatorname{tg}\frac{A}{2}$. Cette condition étant supposée remplie, on peut chasser dans la deuxième inégalité le dénominateur positif $b\sin\frac{A}{2} - r\cos\frac{A}{2}$, et on obtient

$$r\sin^2\frac{A}{2} < \cos\frac{A}{2}\left[b\sin\frac{A}{2} - r\cos\frac{A}{2}\right]$$

ou
$$r < b\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2},$$

$$r < \frac{b\sin A}{2}.$$

Il est évident que l'on a toujours $b\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} < b\operatorname{tg}\frac{A}{2}$.

Donc la seule condition qui subsiste est $r < \frac{b\sin A}{2}$.

La formule qui donne $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ n'est pas calculable par logarithmes ; mais pour la rendre calculable, il suffit de poser $\frac{b}{r} = \operatorname{cotg}\varphi$, et d'effectuer des transformations faciles.

On arrive à
$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{\sin\frac{A}{2}\sin\varphi}{\sin\left(\frac{A}{2} - \varphi\right)}.$$

La construction graphique, qui est évidente, conduit aisément à la condition de possibilité : $2r < b\sin A$, puisque la circonférence de diamètre maximum est celle qui est tangente à la parallèle AB menée par le point C.

Signalons, parmi les cas qui rentrent dans cette catégorie, les exemples suivants :

On donne A, b et l'une des relations :

$$a + c = k, \qquad a - c = k, \qquad c - a = k,$$

$$a^2 + c^2 = k^2, \qquad a^2 - c^2 = k^2, \qquad \frac{a}{c} = k,$$

ou l'une des quantités :

$$S,\ r,\ r_a,\ r_b,\ r_c,\ R,\ h_a,\ h_b,\ \text{etc.}$$

Les trois premiers cas sont résolus dans la plupart des traités.

Troisième catégorie. — On donne un angle A, avec deux longueurs autres que b ou c, ou deux relations entre des longueurs. On suppose expressément que les données conduisent à des équations symétriques par rapport aux angles inconnus B et C. Dans cette catégorie rentrent le triangle rectangle en A, et les triangles dont les angles sont en progression arithmétique, puisque l'angle moyen a pour mesure 60°.

La somme $B + C$ étant connue, on prend comme inconnue $B - C = x$. On peut toujours obtenir une équation à une seule inconnue x, puisqu'une relation symétrique par rapport à B et C se transforme en une équation ne contenant plus que

$B+C$ et $B-C$, comme nous allons le montrer sur des exemples.

Cherchons entre quelles limites doit être compris x. Les angles B et C ne sont assujettis qu'à la condition d'être positifs, puisque des angles positifs A, B, C qui vérifient la relation $B+C=180^\circ - A$ ou $A+B+C=180^\circ$ permettent de construire un triangle semblable au triangle inconnu.

On pourrait même construire un triangle égal, si a figurait parmi les données.

Il est permis de supposer que B désigne le plus grand des angles B et C, et par suite, pour simplifier la discussion, nous poserons $x \geqslant 0$. Or, des égalités $B+C=\alpha$ et $B-C=x$ résulte $B=\frac{\alpha+x}{2}$, $C=\frac{\alpha-x}{2}$. L'angle B est positif d'après les hypothèses faites sur α et sur x ; pour que C soit positif, il faut et suffit que l'on ait $x<\alpha$.

Ainsi les conditions qui expriment que B et C sont des angles positifs, et que B est supérieur à C, sont

$$0 \leqslant x < B+C, \qquad \text{ou} \qquad 0 \leqslant x < 180^\circ - A.$$

Comme dans la catégorie précédemment étudiée, cette suite d'inégalités se traduit de diverses manières suivant la ligne trigonométrique qui donne x.

Mais très souvent l'équation à résoudre contient $\frac{x}{2}$. Alors à la suite d'inégalités $0<\frac{x}{2}<90^\circ-\frac{A}{2}$, on substitue, suivant les cas, l'une des trois suites

$$0<\sin\frac{x}{2}<\cos\frac{A}{2},$$

$$1>\cos\frac{x}{2}>\sin\frac{A}{2},$$

$$0<\operatorname{tg}\frac{x}{2}<\operatorname{cotg}\frac{A}{2}.$$

Exemple. — Résoudre un triangle, étant donnés A, a *et la relation* $\frac{b-c}{h}=k$.

On a $b=\frac{a\sin B}{\sin A}$, $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$, et si l'on évalue de deux manières la surface du triangle ABC, l'équation

$$ah=\frac{a^2\sin B\sin C}{\sin A} \qquad \text{nous donne} \qquad h=\frac{a\sin B\sin C}{\sin A}.$$

Après avoir remplacé b, c, h par ces valeurs dans la relation $b-c=kh$, on arrive à l'équation

$$\sin B-\sin C=k\sin B\sin C,$$

qui devient, par des transformations connues,

$$4\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}=k[\cos(B-C)-\cos(B+C)]$$

ou
$$4\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}=k[\cos(B-C)+\cos A].$$

Prenons pour inconnue

$$\sin\frac{B-C}{2}, \qquad \text{en posant} \qquad \sin\frac{B-C}{2}=y.$$

On a $\cos(B-C)=1-2y^2$, et par suite l'équation devient

$$ky^2+2\sin\frac{A}{2}\cdot y-k\cos^2\frac{A}{2}=0. \qquad (1)$$

La suite d'inégalités $0<\frac{B-C}{2}<90^\circ-\frac{A}{2}$, par la substitution des sinus aux angles, nous donne les conditions

$$0<y<\cos\frac{A}{2}.$$

Soit $f(y)$ le premier membre de l'équation (1). On a

$$f(0)=-k\cos^2\frac{A}{2}, \qquad \text{et} \qquad f\left(\cos\frac{A}{2}\right)=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\sin A.$$

Puisque $f(0)$ et $f\left(\cos\frac{A}{2}\right)$ sont toujours de signes contraires, les racines de l'équation (1) vérifient la suite d'inégalités

$$y'<0<y''<\cos\frac{A}{2}.$$

Donc le problème a toujours une solution unique, que l'on détermine en posant $\sin\frac{B-C}{2}=y''$.

Il faut rendre y'' calculable par logarithmes.

Il y a divers procédés pour arriver à ce résultat, mais celui qui semble le plus simple consiste à poser

$$y'=-\cos\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\varphi, \qquad y''=\cos\frac{A}{2}\operatorname{tg}\varphi,$$

et à déterminer φ par la condition

$$y'+y''=-\frac{2\sin\frac{A}{2}}{k}.$$

On arrive ainsi à

$$\cos\frac{A}{2}(\operatorname{cotg}\varphi-\operatorname{tg}\varphi)=\frac{2\sin\frac{A}{2}}{k}$$

$$\operatorname{cotg}2\varphi=\frac{1}{k}\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2},$$

ou
$$\operatorname{tg}2\varphi=k\operatorname{cotg}\frac{A}{2}.$$

Autre exemple. — Résoudre un triangle, connaissant A, *et sachant que* $a+b=\beta$, $a+c=\gamma$. *On suppose* $\beta>\gamma$.

Des relations données on déduit $2R(\sin A+\sin B)=\beta$ et $2R(\sin A+\sin C)=\gamma$. D'où résulte

$$\frac{\sin A+\sin B}{\beta}=\frac{\sin A+\sin C}{\gamma}=\frac{2\sin A+\sin B+\sin C}{\beta+\gamma}$$
$$=\frac{\sin B-\sin C}{\beta-\gamma},$$

et par suite

$$(\beta-\gamma)[2\sin A+\sin B+\sin C]-(\beta+\gamma)[\sin B-\sin C]=0.$$

Par des transformations connues on obtient

$$(\beta-\gamma)\left[\sin A+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right]-(\beta+\gamma)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}=0. \quad (1)$$

Posons $\operatorname{tg}\left(\frac{B-C}{4}\right)=t$. On sait que $\cos\frac{B-C}{2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, et $\sin\frac{B-C}{2}=\frac{2t}{1+t^2}$. Après avoir chassé le dénominateur $1+t^2$, on arrive à l'équation

$$(\beta-\gamma)\left[\sin A(1+t^2)+\cos\frac{A}{2}(1-t^2)\right]-2(\beta+\gamma)\sin\frac{A}{2}\cdot t=0$$

ou

$$\left.\begin{aligned}&(\beta-\gamma)\left(\sin A-\cos\frac{A}{2}\right)t^2-2(\beta+\gamma)\sin\frac{A}{2}\cdot t\\ &\qquad+(\beta-\gamma)\left(\sin A+\cos\frac{A}{2}\right)=0.\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Les conditions $\quad 0<B-C<B+C$

ou
$$0<\frac{B-C}{4}<45^\circ-\frac{A}{4}$$

se traduisent par $\quad 0<t<\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{A}{4}\right)$.

Soit $f(t)$ le premier membre de l'équation (2). On a

$$f(0)=(\beta-\gamma)\left[\sin A+\cos\frac{A}{2}\right],$$

quantité positive par hypothèse.

Au lieu de calculer directement $f\left[\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{A}{4}\right)\right]$, on peut remplacer dans le premier membre de l'équation (1) $\frac{B-C}{2}$ par $90^\circ - \frac{A}{2}$. Le résultat R a le même signe que

$$f\left[\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{A}{4}\right)\right],$$

puisqu'on a déduit l'équation (2) de l'équation (1) en chassant un dénominateur positif, $(1 + t^2)$.

On obtient ainsi

$$R = \sin A\,(\beta - 2\gamma).$$

Puisque $f(0)$ garde le signe $+$, le problème aura une solution unique si $\beta - 2\gamma < 0$.

Pour que le problème admette deux solutions, il faut que le coefficient de t^2 et R aient le signe de $f(0)$, que la demi-somme des racines ou leur moyenne géométrique soit comprise entre zéro et $\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{A}{4}\right)$, et enfin que le discriminant soit positif.

La première condition nous donne $\sin A - \cos\frac{A}{2} > 0$, ou $\cos\frac{A}{2}\left(2\sin\frac{A}{2} - 1\right) > 0$. Elle équivaut à $\sin\frac{A}{2} > \frac{1}{2}$, d'où $\frac{A}{2} > 30^\circ$.

Cette condition étant remplie, la somme et le produit des racines de l'équation (2) sont positifs. Au lieu d'écrire que la demi-somme est inférieure à $\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{A}{4}\right)$, considérons le produit des racines,

$$\frac{\sin A + \cos\frac{A}{2}}{\sin A - \cos\frac{A}{2}}, \quad \text{ou} \quad \frac{2\sin\frac{A}{2} + 1}{2\sin\frac{A}{2} - 1}$$

(qui est indépendant de β et de γ), et écrivons qu'il est inférieur à $\operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{A}{4}\right)$.

On arrive à

$$\frac{2\sin\frac{A}{2} + 1}{2\sin\frac{A}{2} - 1} < \frac{\left(\cos\frac{A}{4} - \sin\frac{A}{4}\right)^2}{\left(\cos\frac{A}{4} + \sin\frac{A}{4}\right)^2},$$

ou

$$\frac{2\sin\frac{A}{2} + 1}{2\sin\frac{A}{2} - 1} < \frac{1 - \sin\frac{A}{2}}{1 + \sin\frac{A}{2}}.$$

Cette inégalité est manifestement impossible, donc le problème n'a jamais deux solutions. Il en a une seule à condition que $\beta < 2\gamma$. Cherchons, dans ce cas, quelle est la racine qu'il faut choisir.

Lorsque $A < 60^\circ$, le coefficient de t^2 est négatif, et puisqu'on a toujours $f(0) > 0$, les racines t' et t'' vérifient la suite

$$t' < 0 < t'' < \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{A}{4}\right),$$

donc t'' convient.

Lorsque $A > 60^\circ$, on a la suite

$$0 < t' < \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{A}{4}\right) < t'',$$

et alors la plus petite racine fournit la solution. Lorsque A traverse en croissant la valeur 60°, la racine négative de l'équation devient positive en passant par l'infini; par suite la racine de l'équation du premier degré que l'on obtient en faisant $A = 60^\circ$ est acceptable.

On pourrait aussi, dans les problèmes de cette catégorie, chercher à calculer les côtés b et c qui comprennent l'angle donné A; il suffirait d'imposer à b et c la condition d'être réels et positifs. Mais, si la discussion est généralement simple, les coefficients des équations ou de l'équation relative à b et c sont des polynomes dont le degré est presque toujours supérieur à 1, et ils se prêtent mal au calcul logarithmique.

Il est naturel de rattacher à cette catégorie les triangles où l'on donne la différence des angles B et C. Soit $B - C = 2\alpha$. Si les autres données conduisent à une équation présentant une certaine symétrie par rapport à B et C, on peut calculer $B + C$. Il suffit que B et C soient positifs et que leur somme soit inférieure à 180°. Si donc on pose $B + C = x$, l'inconnue x doit vérifier la suite d'inégalités $2\alpha < x < 180^\circ$.

La première de ces inégalités exprime, comme on l'a vu, que B et C sont positifs. Comme dans les catégories précédentes, on déduit de ces conditions des limites pour la ligne trigonométrique dont x dépend.

Exemple. — Résoudre un triangle, sachant que $A - C = 2\alpha$ *et que les trois rayons des cercles exinscrits* r_a, r_b, r_c *forment une progression arithmétique décroissante, de raison connue.*

On a $r_a = p\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $r_b = p\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $r_c = p\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

La condition qui exprime que les trois rayons forment une progression arithmétique est $2r_b = r_a + r_c$.

D'où résulte l'équation $2\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}$,

ou $$2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

Posons $\frac{B+C}{2} = x$. L'équation devient

$$2\cos x.\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \sin^2 x,$$

ou $$\cos x[\cos\alpha + \cos x] = \sin^2 x.$$

Finalement, on a

$$2\cos^2 x + \cos\alpha.\cos x - 1 = 0,$$

ou, en posant $\cos x = y$,

$$2y^2 + y\cos\alpha - 1 = 0. \qquad (1)$$

La suite d'inégalités $\alpha < x < 90^\circ$ fournit les conditions $\cos\alpha > y > 0$. Soit $f(y)$ le premier membre de l'équation (1). On a $f(0) = -1$; et $f(\cos\alpha) = 3\cos^2\alpha - 1$. Pour que le problème ait une solution unique, il faut que l'on ait

$$3\cos^2\alpha - 1 > 0;$$

d'où résulte, puisque l'angle α est nécessairement aigu,

$$\cos\alpha > \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Le problème ne peut évidemment avoir deux solutions, puisque l'équation (1) a ses racines de signes contraires.

Les problèmes de cette troisième catégorie sont peut-être ceux qui apparaissent le plus souvent dans les concours. Les divers traités en énoncent un très grand nombre.

Quatrième catégorie. — On donne trois longueurs, ou trois conditions entre des longueurs.

Un premier groupe est celui où l'on donne deux côtés, b et c, et une troisième condition. Evidemment, on doit calculer l'angle compris A. Les seules conditions imposées à A sont exprimées par les inégalités $0 < A < 180^\circ$, qui se traduisent de diverses manières suivant la ligne trigonométrique qui figure dans l'équation. On pourrait aussi calculer a, mais en général l'équation a des coefficients moins simples; dans ce cas les limites de a sont

$b-c$ et $b+c$. (On suppose $b>c$). Citons quelques exemples: On donne b et c, avec l'une des quantités β_a, h_a, m_a ou l'une des relations $a=\lambda h_a$, $a=\lambda\beta_a$, $a=\lambda m_a$, etc.

Dans le cas général, nous supposerons que l'une des longueurs données joue un rôle particulier par rapport à l'un des côtés, a par exemple. (Ce qui exclut les cas où l'on donne les trois hauteurs, ou les trois rayons des cercles exinscrits, etc., qui doivent être traités à part.) Alors on cherchera à calculer l'angle opposé A, et la différence $B-C$ des deux autres. Il revient au même de calculer $B+C$ et $B-C$. Si l'on suppose $B>C$, les seules conditions que doivent remplir B et C s'expriment par la suite d'inégalités

$$0<B-C<B+C<180^\circ.$$

Fréquemment, on est conduit à prendre comme inconnues $\frac{B-C}{2}$ et $\frac{B+C}{2}$. Les conditions sont alors

$$0<\frac{B-C}{2}<\frac{B+C}{2}<90^\circ.$$

Elles se traduisent aisément à l'aide des lignes trigonométriques lorsque $\frac{B-C}{2}$ et $\frac{B+C}{2}$ sont exprimés par la même ligne. Mais si, comme il arrive en général, $\frac{B-C}{2}$ et $\frac{B+C}{2}$ ne sont pas exprimés par la même ligne, on fera choix d'une ligne trigonométrique commune pour transformer cette suite d'inégalités.

Exemple. — Dans un triangle on donne le périmètre $2p$, le rayon r du cercle inscrit et la distance du sommet A *au centre* I *du cercle inscrit*: $AI=d$.

On a d'abord

$$r=d\sin\frac{A}{2},\qquad \text{d'où}\qquad \sin\frac{A}{2}=\frac{r}{d}. \tag{1}$$

Soit S la surface du triangle ABC. On sait que

$$S=pr \qquad \text{et} \qquad S=p^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

D'où résulte

$$r=p\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

ou

$$\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{r\cos\frac{A}{2}}{p\sin\frac{A}{2}}.$$

On en déduit

$$\frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{p\sin\frac{A}{2}+r\cos\frac{A}{2}}{p\sin\frac{A}{2}-r\cos\frac{A}{2}}$$

et par suite

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}\left(p\sin\frac{A}{2}+r\cos\frac{A}{2}\right)}{p\sin\frac{A}{2}-r\cos\frac{A}{2}}. \tag{2}$$

Cette formule devient aisément calculable par logarithmes si l'on pose $\frac{r}{p}=\operatorname{tg}\varphi$. On arrive à

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\left(\frac{A}{2}+\varphi\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}-\varphi\right)}.$$

Discussion. — La formule $\sin\frac{A}{2}=\frac{r}{d}$ est équivalente à $\cos\frac{B+C}{2}=\frac{r}{d}$, et, par conséquent, la suite d'inégalités $0<\frac{B-C}{2}<\frac{B+C}{2}<90^\circ$ devient, lorsqu'on remplace tous les angles par leurs cosinus,

$$1>\frac{\sin\frac{A}{2}\left(p\sin\frac{A}{2}+r\cos\frac{A}{2}\right)}{p\sin\frac{A}{2}-r\cos\frac{A}{2}}>\frac{r}{d}>0.$$

Une première conséquence est la condition

$$p\sin\frac{A}{2}-r\cos\frac{A}{2}>0.$$

Si cette condition est remplie et si l'angle $\frac{A}{2}$ existe, c'est-à-dire si $\frac{r}{d}<1$, la seconde et la troisième inégalité dans l'ordre où elles sont écrites sont toujours vérifiées. Car la seconde revient à

$$\frac{p\sin\frac{A}{2}+r\cos\frac{A}{2}}{p\sin\frac{A}{2}-r\cos\frac{A}{2}}>1,\quad \text{puisque}\quad \frac{r}{d}=\sin\frac{A}{2};$$

et cette dernière inégalité est évidente lorsque le dénominateur $p\sin\frac{A}{2}-r\cos\frac{A}{2}$ est positif. Il ne reste donc plus que la première inégalité, qui devient, lorsqu'on chasse ce dénominateur positif,

$$p\sin\frac{A}{2}-r\cos\frac{A}{2}>\sin\frac{A}{2}\left(p\sin\frac{A}{2}+r\cos\frac{A}{2}\right)$$

ou

$$p\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)>r\cos\frac{A}{2}\left(1+\sin\frac{A}{2}\right).$$

Cette inégalité entraîne l'inégalité précédente

$$p\sin\frac{A}{2}-r\cos\frac{A}{2}>0,$$

le facteur positif $1-\sin\frac{A}{2}$ étant inférieur au facteur $1+\sin\frac{A}{2}$.

En définitive, il ne reste plus que les conditions $\frac{r}{d}<1$ et

$$p>\frac{r\cos\frac{A}{2}\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)}.$$

Remplaçons dans cette dernière $\sin\frac{A}{2}$ par $\frac{r}{d}$ et $\cos\frac{A}{2}$ par $\frac{\sqrt{d^2-r^2}}{d}$, on arrive à

$$p>\frac{\sqrt{d^2-r^2}\,(d+r)}{d-r},\qquad \text{ou}\qquad p>\sqrt{\frac{(d+r)^3}{d-r}}.$$

Autre exemple. — Résoudre un triangle connaissant la hauteur h, la médiane m et la bissectrice intérieure β issues du sommet A.

L'angle de la bissectrice intérieure et de la hauteur étant égal à $\frac{B-C}{2}$ (dans l'hypothèse $B>C$), on a d'abord

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{h}{\beta}. \tag{1}$$

Soit φ l'angle aigu de la médiane et de la base. On a

$$\sin\varphi=\frac{h}{m}. \tag{2}$$

Transformons la formule connue $\operatorname{cotg}\varphi=\frac{1}{2}(\operatorname{cotg}C-\operatorname{cotg}B)$. Elle devient successivement

$$\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}=\frac{\sin(B-C)}{2\sin B\sin C},$$

$$\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\sin(B-C)}{\cos(B-C)-\cos(B+C)},$$

d'où enfin

$$\cos(B+C) = \frac{\cos(B-C+\varphi)}{\cos\varphi}. \qquad (3)$$

Les formules (1), (2) et (3) permettent de calculer les angles.

Discussion. — Les conditions nécessaires et suffisantes sont

$$0 < B-C < B+C < 180^\circ.$$

Si l'on remplace les angles par leurs cosinus, on a la suite d'inégalités

$$1 > \cos(B-C) > \frac{\cos(B-C+\varphi)}{\cos\varphi} > -1.$$

Résolvons ces trois inégalités dans l'ordre où elles se succèdent. Remplaçons dans la première $\cos(B-C)$ par sa valeur en fonction de $\cos\frac{B-C}{2}$, qui est connu. On a $1 > \frac{2h^2}{\beta^2} - 1$, ou $h > \beta$. La deuxième inégalité est toujours vérifiée, pourvu que φ existe, car elle revient à

$$\cos(B-C) > \cos(B-C) - \operatorname{tg}\varphi.\sin(B-C).$$

La troisième inégalité, en admettant l'existence de l'angle aigu φ, équivaut à

$$\cos(B-C+\varphi) + \cos\varphi > 0$$

ou

$$2\cos\frac{B-C}{2}\cos\left(\frac{B-C}{2}+\varphi\right) > 0.$$

Puisque $\cos\frac{(B-C)}{2}$ est égal à $\frac{h}{\beta}$, elle revient à $\cos\left(\frac{B-C}{2}+\varphi\right) > 0$, d'où résulte $\frac{B-C}{2}+\varphi < 90^\circ$, ou enfin $\frac{B-C}{2} < 90^\circ - \varphi$. Si l'on remplace dans cette inégalité les angles par leurs cosinus, on obtient $\frac{h}{\beta} > \frac{h}{m}$, d'où $\beta < m$. Cette condition entraîne l'existence de l'angle φ. Ainsi les conditions nécessaires et suffisantes sont $h < \beta < m$, et lorsqu'elles sont remplies, le problème n'a qu'une solution.

VARIÉTÉ

A propos du postulatum d'Euclide.

Les journaux de mathématiques reçoivent de temps à autre, paraît-il, des essais de démonstration du principe connu sous le nom de postulatum d'Euclide ; il n'est donc peut-être pas inutile de montrer pourquoi ces essais sont nécessairement infructueux.

On admet au commencement de la géométrie, implicitement ou explicitement, un certain nombre de vérités qu'on ne démontre pas ; parmi ces dernières, la plus célèbre est sans conteste l'axiome des parallèles : *Par un point on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite.* Beaucoup de chercheurs ont essayé de le prouver en s'appuyant sur les vérités précédemment admises ou démontrées ; aucun n'y est parvenu. L'impossibilité de sa démonstration a été établie au commencement de ce siècle par les recherches, indépendamment poursuivies, de plusieurs géomètres : Lobatschefsky, un Russe ; Bolyai, un Hongrois ; Gauss et Riemann, deux Allemands. Il en résulte que le postulatum doit être considéré comme une vérité expérimentale, empruntée au monde dans lequel nous vivons.

Si en effet le postulatum était une conséquence nécessaire des premiers principes, sa suppression ou sa modification devraient conduire dans la suite des raisonnements à des conclusions contradictoires. Or, il n'en est rien. On peut admettre, avec Lobatschefsky, que par un point on peut mener plus d'une droite *non sécante* à une droite donnée ; avec ce nouveau postulatum on construit une géométrie dont toutes les propositions s'enchaînent logiquement les unes aux autres ; seulement elles sont bien différentes de celles de la géométrie ordinaire dite *euclidienne*. Pour ne prendre que l'exemple le plus simple, la somme des angles d'un triangle est maintenant inférieure à deux angles droits, et cette somme diffère d'autant plus de deux angles droits que le triangle est plus grand.

C'est ici que l'expérience intervient pour montrer que notre monde est certainement construit sur la base de la géométrie euclidienne ; dans les triangles les plus considérables que l'astronomie ait envisagés, toutes les observations ont toujours fourni deux droits pour somme des angles du triangle.

Les géomètres ne se sont pas contentés de construire logiquement ces nouvelles géométries ; certains d'entre eux ont même imaginé les conditions physiques dans lesquelles il faudrait placer des êtres *raisonnables* pour qu'ils ne pussent pas concevoir la possibilité de la géométrie euclidienne.

Riemann suppose des êtres infiniment plats, sans épaisseur, assujettis à demeurer sur la surface d'une sphère, et ne pouvant connaître par leurs organes que ce qui se passe sur cette sphère ; il suppose que ces êtres raisonnent et font de la géométrie.

D'abord, comme dimensions, ils ne connaîtront que la longueur et la largeur. S'ils appellent ligne droite le plus court chemin d'un point à un autre, ce sera l'arc de grand cercle. On sait que deux arcs de grand cercle se coupent toujours ; ces êtres ne pourront donc même pas concevoir la notion de droites parallèles, puisque deux quelconques de leurs droites ont toujours un point de rencontre. Bien plus, il y aura des cas où ils admettront que, par deux points, on peut faire passer plus d'une droite ; ce sera le cas de deux points diamétralement opposés.

On voit que la géométrie de ces animaux imaginaires serait précisément notre géométrie sphérique.

M. Poincaré a imaginé une autre fiction au moins aussi curieuse que celle de Riemann. Il conçoit des êtres intelligents placés dans un milieu sphérique, dont l'indice de réfraction et la température sont variables, la température décroissant à partir du centre. Ces êtres ont des mouvements assez lents et sont assez petits pour être toujours à la même température que le point de leur monde où ils se trouvent. De plus, ils se dilatent proportionnellement à leur longueur, et toutes les substances se dilatent de même.

Ces êtres ne s'apercevraient jamais d'un changement de température, puisque le liquide et l'enveloppe du thermomètre se dilatent l'un et l'autre de la même quantité. Ils croiraient leur sphère infinie ; car, à mesure qu'ils s'en approchent, le froid augmente, leur taille diminue et de même la longueur de leur pas. Ils ne s'en apercevront pas, puisque tous les objets qui les entourent diminuent dans le même rapport ; ils ne pourront jamais atteindre la surface sphérique qui les enveloppe.

Après avoir montré ce que de tels êtres appelleraient une droite (leur plus court chemin entre deux points donnés), M. Poincaré fait voir qu'ils se verraient obligés d'admettre que par un point il passe une infinité de parallèles à une droite donnée. C'est précisément l'hypothèse de la géométrie de Lobatschefsky.

Les travaux des géomètres cités et les fictions ingénieuses dont nous venons de parler, prouvent la possibilité rationnelle et matérielle des géométries dites *non euclidiennes*. Le postulatum d'Euclide n'est pas une nécessité de notre raison, comme

l'égalité de deux nombres égaux à un troisième. C'est du monde extérieur que nous l'avons tiré.

Tel que ce monde est constitué, il nous impose le postulatum. Mais s'il avait été créé sur d'autres bases, si la loi d'attraction de la matière avait été différente de celle que nous connaissons, nos sciences expérimentales seraient peut-être toutes changées. Le nouveau milieu eût donné à notre esprit d'autres habitudes, qui l'auraient empêché de concevoir la possibilité matérielle de la géométrie euclidienne, et lui auraient peut-être fait trouver très rationnelle une des géométries non euclidiennes.

J. GRIESS, professeur au Lycée Charlemagne.

Bibliographie.

Lobatschefsky. Nouveaux principes de géométrie (Mémoires de l'université de Kasan et Courrier de Kasan, 1826, 1829, 1836, 1838.) Géométrie imaginaire (Journal de Crelle 1837). — Pangéométrie (en français). Kasan 1855.

Bolyai. La science absolue de l'espace, trad. Hoüel. Paris 1868.

Riemann. Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie.

Beltrami. Théorie des espaces à courbure constante (tous deux traduits par Hoüel.)

Klein. Sur la géométrie non euclidienne, Bulletin des Sciences Mathématiques, 1871, p. 341.

P. Tannery. La géométrie imaginaire et la notion d'espace ; Revue philosophique, novembre 1876 et juin 1877.

L. Gérard. Thèse (1892).

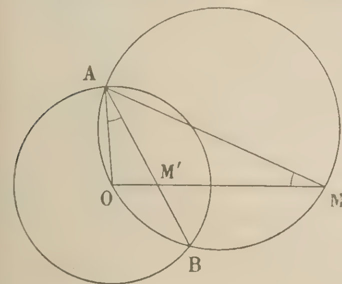
Poincaré. (Revue générale des sciences).

CONCOURS GÉNÉRAL DE TROISIÈME MODERNE (1897)

4194. — *On donne un cercle* (C) *de centre* (O) *et de rayon* R *et un point* M. *On fait passer un cercle* (C′) *par les deux points* O *et* M. *La corde commune aux cercles* (C) *et* (C′) *coupe* OM *en un point* M′. *Prouver que* M′ *est déterminé, quel que soit le cercle variable* (C′).

Trouver le lieu de M′ *quand le point* M *se meut sur une droite donnée ou sur un cercle donné.*

Tirons le rayon OA. Les angles inscrits OAB, OMA sous-tendant des arcs égaux sont égaux. Par suite, les triangles OMA, OAM′ sont semblables comme ayant un angle commun et un angle égal, et l'on a

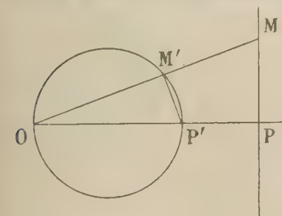


$$\frac{OM}{OA} = \frac{OA}{OM'}$$

ou $OM.OM' = \overline{OA}^2$,

relation qui montre que le point M′ ne dépend que du cercle O et du point M.

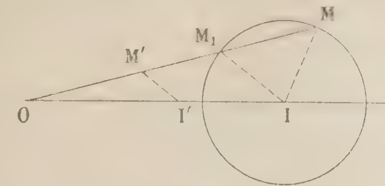
Lieu du point M′ *lorsque* M *décrit une droite.* — Abaissons sur la droite la perpendiculaire OP, et en M′ élevons une perpendiculaire à OM qui rencontre OP en P′. Le quadrilatère MPP′M′ étant inscriptible, on a



$$OP'.OP = OM'.OM\,;$$

comme le second membre de cette égalité est constant par hypothèse, il en est de même du premier membre, et par suite de OP′, c'est-à-dire que le point P′ est fixe. Le lieu de M′ est donc un cercle de diamètre OP′.

Lieu du point M′ *lorsque* M *décrit un cercle.* — Joignons le centre I du cercle donné au second point de rencontre M_1 de la sécante OM avec le cercle.



On a par hypothèse

$$OM'.OM = k^2\,; \quad (1)$$

d'ailleurs

$$OM_1.OM = |d^2 - R^2|, \quad (2)$$

en posant

$$OI = d \quad \text{et} \quad IM = R.$$

En divisant (1) par (2), il vient

$$\frac{OM'}{OM_1} = \frac{k^2}{|d^2 - R^2|}.$$

Le point M′ est donc l'homothétique du point M_1 ; ce dernier décrivant le cercle donné I, le point M′ décrit un cercle homothétique dont le centre I′ s'obtient en menant M′I′ parallèle à M_1I.

Ce centre est d'ailleurs déterminé par la relation

$$\frac{OI'}{d} = \frac{OM'}{OM_1},$$

d'où

$$OI' = \frac{dk^2}{|d^2 - R^2|}.$$

Lorsque $d = R$, cette valeur devient infinie ; le cercle I′ ayant son centre à l'infini se réduit à une droite. On peut d'ailleurs déduire directement ce résultat du premier lieu établi plus haut en échangeant simplement dans la démonstration les lettres M et M′, P et P′.

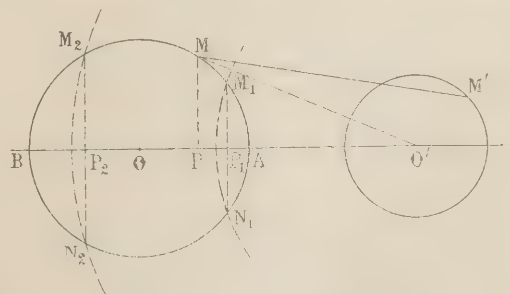
(FEINTUCH.)

[Ont résolu la même question : MM. G. Blondin ; J. Bordas ; C. Bourdet ; Brodbeck ; Carteron ; Cazemajou ; H. Crozemarie ; L. Curt ; L. Debrun ; P. Dégeilh ; L. Delavergnas ; J. Delpont ; E. Foucart ; Fréchet ; G. Hiernaux ; A. Mirc ; M. Oger ; P. Plisson ; E. Sevin ; L. Vignes.]

4195. — *On donne un cercle* (C) *de centre* O *et de rayon* R *et un cercle* (C′) *de centre* O′ *et de rayon* R′. *On prend sur le cercle* (C) *un point* M. *Peut-on trouver sur le cercle* (C′) *un point* M′ *tel que la distance* MM′ *soit égale à* l, l *étant une longueur donnée ?*

Entre quelles limites doit se trouver le pied P *de la perpendiculaire* MP *abaissée du point* M *sur la ligne des centres* OO′ ? *Dans quel cas le problème est-il possible, quelle que soit la position du point* M *sur le cercle* (C) ? *On posera* $OO' = d$.

Soit R le rayon du cercle O sur lequel on prend le point M, R′ le rayon du cercle O′ ; le point cherché M′ est évidemment à



la rencontre du cercle O′ et d'un cercle de centre M et de rayon l.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que ces deux cercles se coupent, ce qui exige que le point M soit choisi de manière à vérifier les conditions

$$|\, l - R' \,| < MO' < l + R'\,; \quad (1)$$

par suite il faut et il suffit que le point M soit compris entre

deux cercles de centre O′ et de rayons $|l - R'|$ et $l + R'$. Supposons que ces cercles coupent le cercle O en des points M_1 et N_1, M_2 et N_2 ; les cordes M_1N_1 et M_2N_2 rencontrent la ligne des centres en des points P_1 et P_2 ; pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que la projection P de M sur OO′ soit comprise entre P_1 et P_2.

Si le point P_1 se place entre A et O′, il n'y a qu'un point limite P_2 ; le point M pourra être pris en un point quelconque de l'arc M_2AN_2 ; si P_2 se place au-delà de B, on pourra prendre M en un point quelconque de l'arc M_1BN_1 ; si les deux conditions sont réalisées simultanément, le problème est possible pour tout point M du cercle O ; ce cercle est alors tout entier dans la couronne comprise entre les deux cercles de rayons $l + R'$ et $|l - R'|$.

Enfin, si P_1 et P_2 sont tous deux entre A et O′, ou tous deux au-delà de B, le problème est impossible.

Cherchons maintenant les conditions que doivent vérifier l, d, R, R′ pour que le problème soit possible, quelle que soit la position de M sur C, c'est-à-dire pour que le cercle O soit tout entier dans l'intervalle compris entre les deux cercles de centre O′ et de rayons $l + R'$ et $|l - R'|$.

Il faut en premier lieu qu'il soit intérieur au plus grand de ces deux cercles ; cela exige d'abord que

$$R < l + R',$$

puis

$$d < l + R' - R\,; \tag{2}$$

la condition (2) supposée remplie entraîne évidemment la précédente.

Deux cas peuvent se présenter ensuite :

1° le cercle O peut être extérieur au cercle O′, de rayon $|l - R'|$; ce qui donne

$$d > R + |l - R'|\,; \tag{3}$$

2° ou bien le cercle O peut comprendre dans son intérieur ce cercle ; ce qui donne

$$d < R - |l - R'|\,. \tag{4}$$

Il suffit naturellement que l'une ou l'autre de ces conditions soit remplie.

Remarquons qu'on peut les écrire

$$|l - R'| < d - R$$

et

$$|l - R'| < R - d\,;$$

une de ces conditions étant remplie, on a nécessairement

$$(l - R')^2 < (d - R)^2\,; \tag{5}$$

et réciproquement, cette dernière condition étant vérifiée, l'une des précédentes l'est nécessairement. Or, cette condition (5) peut s'écrire

$$(l - R')^2 - (d - R)^2 < 0,$$

ou

$$(l - R' + d - R)(l - R' - d + R) < 0\,;$$

elle exprime donc que l doit être compris entre

$$R' + R - d \quad \text{et} \quad R' - R + d.$$

En résumé, le problème sera possible pour tout point M du cercle O si l'on a

$l > R - R' + d$ [condition (2) résolue par rapport à l]

et l compris entre $R' + R - d$ et $R' - R + d$.

Résolvons maintenant la question par le calcul, ce qui nous fournira les limites de $\overline{OP}$ et doit naturellement conduire aux mêmes conditions que précédemment. La condition (1) peut s'écrire

$$(l - R')^2 < \overline{MO}'^2 < (l + R')^2. \tag{6}$$

Projetons M en P sur OO′ ; la figure donne

$$\overline{MO}'^2 = R^2 + d^2 - 2d.OP\,;$$

elle suppose P sur OO′ ; si P était sur le prolongement de OO′, on aurait

$$\overline{MO}'^2 = R^2 + d^2 + 2d.OP\,;$$

on ramène ces deux formules l'une à l'autre en désignant par $\overline{OP}$ la longueur OP affectée du signe + ou du signe —, suivant qu'elle est dirigée dans le sens OO′ ou en sens inverse ; on a ainsi la formule unique

$$\overline{MO}'^2 = R^2 + d^2 - 2d.\overline{OP}.$$

Portant dans (6), on trouve

$$(l - R')^2 < R^2 + d^2 - 2d.\overline{OP} < (l + R')^2\,;$$

d'où

$$\frac{R^2 + d^2 - (l + R')^2}{2d} < \overline{OP} < \frac{R^2 + d^2 - (l - R')^2}{2d}. \tag{7}$$

ou

$$\alpha < \overline{OP} < \beta. \tag{7'}$$

Le point M étant pris sur le cercle O, la grandeur $\overline{OP}$ est en valeur absolue inférieure à R ; elle est donc comprise entre — R et + R. Les conditions (7) ne fourniront donc deux limites pour $\overline{OP}$, que si

$$\alpha > -R \quad \text{et} \quad \beta < R.$$

Si on avait $\alpha < -R$ et $\beta < R$, on aurait une seule limite β ; si $\alpha > -R$ et $\beta < R$, une seule limite α ; enfin, si on a simultanément

$$\alpha < -R, \qquad \beta > R,$$

les conditions (7) sont remplies pour tout segment $\overline{OP}$ compris entre — R et + R ; le problème est possible pour toute position de M sur le cercle O.

On est donc conduit à examiner le signe des différences

$$\alpha - (-R) = \alpha + R, \qquad \beta - R.$$

En se reportant aux valeurs de α et de β, on trouve

$$\alpha + R = \frac{(R + d)^2 - (l + R')^2}{2d} = \frac{(R + d + l + R')(R + d - R' - l)}{2d}$$
$$= \frac{(R + d + l + R')(a - l)}{2d},$$

$$\beta - R = \frac{(R - d)^2 - (l - R')^2}{2d} = \frac{(R - d + R' - l)(l - R' + R - d)}{2d}$$
$$= \frac{(b - l)(l - c)}{2d},$$

en posant

$$\left.\begin{aligned} a &= R + d - R', \\ b &= R + R' - d, \\ c &= R' - R + d. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Pour que le problème soit possible pour toute position du point M sur le cercle O, il faudra donc que

$$a - l < 0 \quad \text{et} \quad (b - l)(l - c) > 0,$$

c'est-à-dire $l > R - R' + d$ et l compris entre $R + R' - d$ et $R' - R + d$.

Ce sont bien les conditions trouvées précédemment.

Remarque. — Resterait à voir si ces conditions sont compatibles; lorsqu'elles le sont, il faudrait reconnaître les inégalités nécessaires et suffisantes, ainsi que la position relative des deux cercles. Pour cela, il faut connaître le signe des quantités a, b, c auxquelles on doit comparer la quantité positive l, ainsi que l'ordre de grandeur de ces quantités. Un procédé méthodique consiste à calculer les différences deux à deux des quatre quantités $a, b, c, 0$; ces différences contiennent d, R, R′; on y met en évidence les valeurs de d qui les font changer de signe ; ces valeurs sont elles-mêmes des fonctions de R et R′, qu'on doit classer suivant la grandeur relative de R et R′.

Une discussion aussi complète ne pouvait évidemment être exigée d'élèves de Troisième moderne.

Le quadrilatère OMM′O′ étant considéré comme un quadrilatère articulé, le pivot O sera à révolution complète lorsque le point M peut être

pris en un point quelconque du cercle O. On lira avec intérêt une discussion complète du quadrilatère articulé dans la *Cinématique* de M. Kœnigs, page 246.

[M. M. Oger, soldat au 66e de ligne, a résolu cette question.]

ALGÈBRE

4010. — *Résoudre le système d'équations*

$$(x+y)(x^3+y^3)=a,$$
$$(x-y)(x^3-y^3)=b.$$

Première solution. — Développons les équations proposées ; elles s'écrivent

$$x^4+x^3y+xy^3+y^4=a,$$
$$x^4-x^3y-xy^3+y^4=b\,;$$

d'où, par addition et soustraction,

$$2(x^4+y^4)=a+b, \qquad (1)$$
$$2xy(x^2+y^2)=a-b. \qquad (2)$$

Prenons pour inconnues auxiliaires

$$(x^2+y^2)^2=u,$$
$$(x^2-y^2)^2=v.$$

Tenant compte des équations (1) et (2), il vient

$$u+v=a+b,$$
$$(u-v)u=(a-b)^2.$$

La première donne

$$v=a+b-u\,; \qquad (3)$$

portant dans la seconde, on voit que u est racine de l'équation du second degré

$$2u^2-(a+b)u-(a-b)^2=0\,; \qquad (4)$$

on en tire $\quad u=\dfrac{a+b\pm\sqrt{(a+b)^2+8(a-b)^2}}{4}, \qquad (5)$

et par suite $\quad v=\dfrac{3(a+b)\mp\sqrt{(a+b)^2+8(a-b)^2}}{4}. \qquad (6)$

Il en résulte

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=\pm\sqrt{\frac{a+b\pm\sqrt{(a+b)^2+8(a-b)^2}}{4}}\\ x^2-y^2&=\pm\sqrt{\frac{3(a+b)\mp\sqrt{(a+b)^2+8(a-b)^2}}{4}}\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

d'où enfin

$$\left.\begin{aligned} 4x^2&=\pm\sqrt{(a+b)\pm\sqrt{(a+b)^2+8(a-b)^2}}\\ &\quad\pm\sqrt{3(a+b)\mp\sqrt{(a+b)^2+8(a-b)^2}}\\ 4y^2&=\pm\sqrt{a+b\pm\sqrt{(a+b)^2+8(a-b)^2}}\\ &\quad\mp\sqrt{3(a+b)\mp\sqrt{(a+b)^2+8(a-b)^2}}.\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Dans les équations (6), il faut prendre les signes devant les radicaux aux mêmes places ; dans les formules (7), on peut prendre arbitrairement les signes devant les grands radicaux ; ces équations (7) fournissent donc *huit* systèmes de valeurs pour x^2 et y^2, ce qui donne huit systèmes d'équations de la forme (8). Par extraction des racines carrées, chacun de ces systèmes fournit quatre systèmes de valeurs pour x et y; on a donc en tout 32 systèmes de valeurs pour x et y.

Or, d'après le théorème de Bezout, le nombre des solutions d'un système de deux équations à deux inconnues, l'une de degré m, l'autre de degré p, ne peut être supérieur à mp. Le système proposé admet donc seize solutions au plus.

Le nombre double des solutions trouvées provient de ce que, pour écrire l'équation

$$(u-v)u=(a-b)^2,$$

nous avons dû élever au carré les deux membres de l'équation

$$2xy(x^2+y^2)=a-b\,;$$

cette équation du quatrième degré a donc été remplacée par une équation du huitième ; d'où naturellement les trente-deux solutions. On distinguera donc les solutions acceptables, en choisissant, parmi les systèmes trouvés pour x et y, ceux qui satisfont à l'équation

$$2xy(x^2+y^2)=a-b\,;$$

les autres satisferaient à l'équation

$$2xy(x^2+y^2)=-(a-b).$$

(R. NITZESCO et A. ILIOVICI, à Jassy.)

Deuxième solution. — Les binomes x^3+y^3, x^3-y^3 sont respectivement divisibles par $x+y$ et $x-y$; les équations proposées s'écrivent donc

$$\left.\begin{aligned}(x+y)^2(x^2-xy+y^2)&=a,\\ (x-y)^2(x^2+xy+y^2)&=b.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Posons $\qquad (x+y)^2=\alpha, \qquad xy=\beta\,;$

les équations (1) deviennent

$$\left.\begin{aligned}\alpha^2-3\alpha\beta-a&=0,\\ \alpha^2-5\alpha\beta+4\beta^2-b&=0.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

De la première de ces équations, on tire

$$\beta=\frac{\alpha^2-a}{3\alpha}\,; \qquad (3)$$

portant dans la seconde, on voit que α est racine de l'équation bicarrée

$$2\alpha^4-(7a-9b)\alpha^2-4a^2=0. \qquad (4)$$

Cette équation donne

$$\alpha=\pm\sqrt{\frac{7a-9b\pm\sqrt{(7a-9b)^2+32a^2}}{4}}\,;$$

à ces quatre valeurs de α correspondent quatre valeurs de β fournies par l'équation (3) ; enfin chaque système tel que

$$(x+y)^2=\alpha,$$
$$xy=\beta$$

peut s'écrire $\qquad x+y=\pm\sqrt{\alpha},$

$$x-y=\pm\sqrt{\alpha-4\beta}$$

et fournit quatre systèmes de valeurs pour x et y ; on a donc en tout 16 solutions.

Les valeurs de β fournies par (3) seraient embarrassées de radicaux et longues à simplifier ; cherchons à les calculer directement.

A cet effet, retranchons membre à membre les équations (2) ; il vient

$$4\beta^2-2\alpha\beta+(a-b)=0,$$

d'où $\qquad \alpha=\dfrac{4\beta^2+(a-b)}{2\beta}\,;$

portant dans la première des équations (2), on trouve que β est racine de l'équation

$$8\beta^4+2(a+b)\beta^2-(a-b)^2=0.$$

Les valeurs de β sont donc

$$\beta=\pm\sqrt{\frac{-(a+b)\pm\sqrt{(a+b)^2+8(a-b)^2}}{8}}.$$

Il n'est pas évident que les quantités sous radical dans les

valeurs de α^2 et de β^2 soient les mêmes; on vérifie aisément par un calcul direct que

$$(7a-9b)^2+32a^2=9, \qquad [(a+b)^2+8(a-b)^2].$$

(J. BERTRAND, à Azillanet.)

Troisième solution. — Soient

$$(x+y)(x^3+y^3)=a, \tag{1}$$
$$(x-y)(x^3-y^3)=b \tag{2}$$

les équations proposées. En les divisant membre à membre, il vient

$$\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}=\frac{a}{b}.$$

Le premier membre ne dépend que du rapport $\frac{x}{y}=z$; il ne change pas quand on y permute x avec y, c'est-à-dire quand on change z en $\frac{1}{z}$; cette équation est donc réciproque en z. Elle s'écrit

$$b(z+1)(z^3+1)=a(z-1)(z^3-1),$$

ou bien

$$(b-a)z^4+(b+a)z^3+(b+a)z+b-a=0.$$

z étant une racine de cette équation, faisons $x=yz$ dans l'équation (1); il vient

$$y=\pm\sqrt[4]{\frac{a}{(z+1)(z^3+1)}},$$

$$x=\pm z\sqrt[4]{\frac{a}{(z+1)(z^3+1)}}.$$

(G. DELAHAYE, à Roye.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Ardin-Delteil ; Bayor ; E. Bernardini ; A. Bertrand ; E. Bordas ; Boulan ; C. Bourdet ; P. Bresson ; V. Cambureanu ; H. Clérian ; H. de Coincy ; H. Crozemarie ; Eldin ; Ferrand ; L. Fineuse ; L. Ganel ; H. Janois ; A. Lochard ; Marcenet ; H. Marty ; N. Mollon ; Nicotz ; N. Ohotnikoff ; F. Pégorier ; G. Picou ; P. Plisson.]

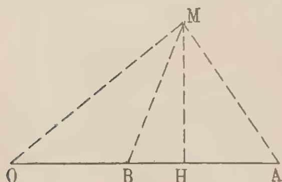
4309. — *Dans un plan vertical donné, une source lumineuse (assimilée à un point* M*) doit éclairer les trois points connus* O, A, B, *situés sur une même horizontale, de manière que les éclairements en ces trois points soient respectivement proportionnels aux trois nombres* $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{4}$, 1 ; *on demande de déterminer la position* M *de la source, en calculant l'abscisse* $OH=x$ *et l'ordonnée* $MH=y$ *du point* M *projeté en* H *sur l'horizontale.*

Données : $OA=a=200^m$; $OB=b=100^m$.

On sait que l'éclairement produit par une même source lumineuse à une distance variable est inversement proportionnel au carré de cette distance.

(*Bacc. lettres-sciences, Rennes, novembre 1897.*)

Les éclairements aux points O, A, B étant respectivement proportionnels aux nombres $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{4}$, 1, et inversement proportionnels aux carrés des distances MO, MA, MB, on doit avoir



$$\frac{\overline{MO}^2}{9}=\frac{\overline{MA}^2}{4}=\frac{\overline{MB}^2}{1}.$$

Calculons MO, MA, MB en fonction de a, b, x et y. On a, quelle que soit la position de M,

$$\overline{MO}^2=x^2+y^2,$$
$$\overline{MA}^2=(a-x)^2+y^2,$$
$$\overline{MB}^2=(x-b)^2+y^2.$$

Les équations du problème sont donc

$$\frac{x^2+y^2}{9}=\frac{(a-x)^2+y^2}{4}=\frac{(x-b)^2+y^2}{1},$$

ou, en retranchant terme à terme chacun des deux derniers rapports du premier,

$$\frac{x^2+y^2}{9}=\frac{x^2-(a-x)^2}{5}=\frac{x^2-(x-b)^2}{8}.$$

De la seconde équation on tire facilement

$$x=\frac{8a^2-5b^2}{2(8a-5b)};$$

connaissant x, on déduit y de l'équation

$$\frac{x^2+y^2}{9}=\frac{x^2-(a-x)^2}{5},$$

qui donne $\quad y=\pm\sqrt{-x^2+\frac{18}{5}ax-\frac{9}{5}a^2}.$

Pour que y soit réel, il faut et il suffit qu'on ait

$$x^2-\frac{18}{5}ax+\frac{9}{5}a^2<0$$

ou

$$\frac{3}{5}a<x<3a.$$

Pour comparer x à $\frac{3}{5}a$ et $3a$, calculons les différences $x-\frac{3}{5}a$ et $x-3a$.

On trouve

$$x-\frac{3}{5}a=\frac{-8a^2+30ab-25b^2}{10(8a-5b)}=\frac{-(2a-5b)(4a-5b)}{10(8a-5b)},$$

$$x-3a=\frac{-5(8a^2-6ab+b^2)}{2(8a-5b)}=\frac{-5(2a-b)(4a-b)}{2(8a-5b)}.$$

La différence $x-\frac{3}{5}a$ change de signe lorsque b passe par l'une des trois valeurs suivantes :

$$\frac{2}{5}a, \qquad \frac{4}{5}a, \qquad \frac{8}{5}a;$$

comme cette différence est négative pour $b=0$, il en résulte qu'elle est positive dans l'un des deux intervalles

$$\frac{2}{5}a, \quad \frac{4}{5}a \qquad \text{et} \qquad \frac{8}{5}a, \quad +\infty.$$

On verrait de même que la différence $x-3a$ est négative dans l'un des deux intervalles

$$-\infty, \quad \frac{8}{5}a \qquad \text{et} \qquad 2a, \quad 4a.$$

En résumé, les deux conditions précédentes, ou la condition de réalité de y, sont remplies si l'on a

$$\frac{2}{5}a<b<\frac{4}{5}a \qquad \text{ou} \qquad 2a<b<4a.$$

Application numérique. — On a

$$x=\frac{8(200)^2-5(100)^2}{2(8\times200-5\times100)}=\frac{1350}{11}=122^m,72\ldots$$

$$y=\sqrt{-\left(\frac{1350}{11}\right)^2+\frac{18}{5}\times200\times\frac{1350}{11}-\frac{9}{5}(200)^2}=36^m,07.$$

(LOUIS GRILLET, à Mortain.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Ardin-Delteil ; E. Baudot ; F. Beynas ; Bigot ; L. Bois ; J. Boitel ; M. Boutry ; G. Charpentier ; F. Chuberre ; R. Dautry ; Geltzenlichter ; A. Grandguillotte ; H. Jouanneau ; A. Larue ; F. Leulliot ; E. Lézier ; A. Maître ; L. Patin ; F. Pégorier ; Remondet ; Robin ; A. Smântanescu ; H. Thouvenot ; A. Vergnole ; J. E. Villemagne.]

Dans les solutions reçues, le calcul numérique a été généralement effectué en prenant pour x la valeur $122^{m},72$, approchée à un centième près. Il faut bien se rendre compte que, dans ces conditions, on n'est nullement certain d'obtenir aussi pour y une valeur approchée à un centième près. [1]

La formule à calculer est

$$y = \sqrt{-(x-3a)\left(x-\frac{3a}{5}\right)} = \sqrt{(600-x)(x-120)} = \sqrt{mp}.$$

La valeur de x étant 122,7272 ..., on commet donc sur x une erreur dont la limite supérieure est 0,008; ce même nombre est aussi une limite supérieure des erreurs commises sur les facteurs m et p. En désignant par u le produit mp, par Δu une limite supérieure de l'erreur de ce produit, par m' et p' des valeurs approchées *par excès* de m et p, on sait que

$$\Delta u = m' \times 0,008 + p' \times 0,008 = 480 \times 0,008 + 3 \times 0,008 = 3,864.$$

Δu étant une limite supérieure de l'erreur de la quantité sous radical, on sait qu'une limite supérieure de l'erreur Δy du radical est

$$\Delta y = \frac{1}{2y'}\Delta u,$$

y' étant une valeur approchée par défaut de ce radical. On peut prendre $y' = 30$; d'où

$$\Delta y = \frac{1}{60} \times 3,864 < \frac{4,2}{60} = 0,07.$$

On peut donc simplement affirmer que l'erreur faite sur y ne dépasse pas 0,07 ; on n'est certain que du chiffre des *dixièmes*.

Soient donc $y = \sqrt{u}$, $u = mp$; Δm et Δp les limites supérieures des erreurs commises sur m et p ; Δu et Δy les mêmes limites pour u et y ; on a

$$\Delta u = m'\Delta p + p'\Delta u,$$

$$\Delta y = \frac{1}{2y'}\Delta u ;$$

m', p' sont approchées en nombres ronds par excès, y' par défaut.

On veut par hypothèse la valeur de y à 0,01 près ; on doit donc y supprimer les chiffres qui suivent ceux des centièmes ; en forçant d'une unité le dernier chiffre conservé, si le premier chiffre supprimé est plus grand que 5, on peut donc commettre ainsi une nouvelle erreur, au plus égale à 0,005 ; il faut donc que le radical soit calculé à moins de $0,01 - 0,005 = 0,005$.

Pour que

$$\Delta y = \frac{1}{2y'}\Delta u < 0,005,$$

il suffit, en prenant $y' = 30$, que

$$\Delta u < 0,005 \times 60 = 0,3.$$

Il suffit donc que le produit mp soit évalué à moins de 0,3. Or dans ce produit, on devra supprimer les chiffres qui suivent celui des dixièmes en forçant au besoin d'une unité le dernier chiffre conservé, si le premier chiffre supprimé est plus grand que 5 ; il faudra donc *calculer* mp avec une erreur au plus égale à 0,25. Il suffit donc que

$$\Delta u = m'\Delta p + p'\Delta m < 0,25.$$

m' étant au moins 100 fois plus grand que p', prenons pour $m'\Delta p$ la plus grande partie de l'erreur ; choisissons donc Δm et Δp, de manière que

$$m'\Delta p < 0,2,$$

et

$$p'\Delta m < 0,05 ;$$

on peut prendre $m' = 500$, $p' = 3$; d'où

$$\Delta p < 0,0004, \qquad \Delta m < 0,02.$$

Il suffit donc de prendre p avec 4 et m avec deux décimales exactes ; on trouve ainsi

$$p = 122,7272 - 120 = 2,7272 \quad \text{par défaut},$$

$$m = 600 - 122,73 = 477,27 \quad \text{par défaut}.$$

Le produit de ces nombres est 1301,610744 ; on y conserve seulement le chiffre des dixièmes, et on extrait à $\frac{1}{100}$ près la racine carrée de 1301,6 ; on trouve ainsi pour y la valeur 36,07... ; on reconnaît aisément que le chiffre suivant de la racine est plus grand que 5 ; on doit donc forcer le dernier chiffre conservé d'une unité ; la valeur cherchée est donc

$$y = 36,08.$$

---

[1] Consulter à ce sujet la brochure *Approximations numériques*, par J. Griess.

GÉOMÉTRIE

4072. — *On considère dans un même plan deux points fixes* A, B *et une droite* L *se déplaçant parallèlement à elle-même. Lieu du point* M *de la droite* L *tel que* AM + MB *soit minimum.*

Si L est parallèle à AB, il est évident que le lieu est la perpendiculaire élevée au milieu de AB. Si L est perpendiculaire à AB, le lieu est la droite AB elle-même.

Occupons-nous maintenant du cas général où la droite L fait un angle quelconque avec AB.

Lorsque L coupe AB, le point M décrit évidemment la droite *limitée* AB, laquelle fait donc partie du lieu.

Supposons enfin L extérieur à AB, plus près de B que de A. On sait, d'après une propriété connue, que le point M s'obtient en joignant B au symétrique A' de A par rapport à la droite L. Il en résulte l'égalité des angles HMA, MKB et par suite la similitude des triangles rectangles MAH, MBK ; donc on peut écrire

$$\frac{MK}{MH} = \frac{BK}{AH};$$

mais, par hypothèse, $BK < AH$;

donc $MK < MH$;

par suite le point I est entre H et M, et on a

$$MK = IK - IM, \qquad MH = IM + IH = IM + IK ;$$

donc enfin

$$\frac{IK - IM}{IM + IK} = \frac{BK}{AH};$$

d'où $IK(BK - AH) = IM(BK + AH) = 2.IM.OI = 2.IM.MP$; mais le premier membre est constant, donc il en est de même du produit MI.MP.

Le point M est donc tel que le produit de ses distances aux deux droites fixes Ox et Oy, menées par le milieu de AB et respectivement parallèle et perpendiculaire à L, est constant. Il se trouve donc sur une hyperbole ayant Ox et Oy comme asymptotes. D'après les hypothèses faites, il décrit la branche d'hyperbole limitée en B et s'étendant du côté de Oy.

En supposant la droite L de l'autre côté du point A, on trouverait comme seconde partie du lieu la branche de la même hyperbole, limitée en A et s'étendant du côté de Oy'.

(LOCHARD, lycée Janson.)

[Ont résolu la même question : MM. Bayor ; Benoist-Daubray ; C. Bourdet ; L. Debrun ; A. Lochard ; Loïc ; R. Manen ; A. Marcenet ; L. Ollié ; L. Orlando.]

4299. — *On donne une circonférence* O *et un point* A *et on considère les circonférences* O' *passant par le point* A *et coupant orthogonalement la circonférence* O.

1° *Trouver le lieu du point de rencontre de la tangente en* A *à la circonférence* O' *avec la tangente à cette même circonférence perpendiculaire à la tangente en* A.

2° *Trouver le lieu des points de contact de la circonférence* O' *avec les tangentes perpendiculaires à la tangente en* A.

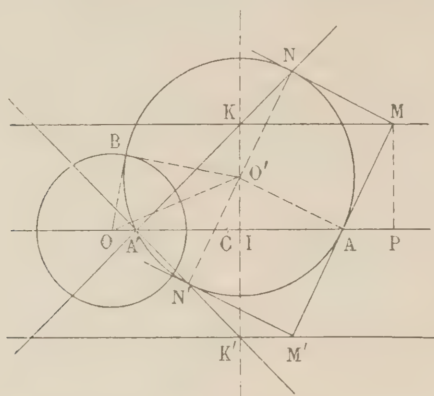
Le cercle O′ étant orthogonal au cercle O, le triangle OBO′ est rectangle en B, et l'on a

$$\overline{OO'}^2 = \overline{O'B}^2 + \overline{OB}^2$$

ou, comme $O'B = O'A$,

$$\overline{OO'}^2 - \overline{O'A}^2 = \overline{OB}^2 = \text{const.}$$

Le lieu de O′ est donc une droite perpendiculaire à OA en un point I tel que $CI = \frac{\overline{OB}^2}{2OA}$. Cette droite est d'ailleurs l'axe radical du cercle O et du point A (cercle de rayon nul).



1° Soit M le point de rencontre de la tangente en A avec la tangente perpendiculaire MN. Abaissons MP perpendiculaire sur OA, et tirons O′A, O′N. La figure O′AMN est un carré ; donc AM = AO′. Les triangles rectangles AMP, AO′I ont alors l'hypoténuse égale et les angles en A complémentaires ; ils sont égaux et MP = AI, ce qui montre que le lieu de M est une parallèle à OA. La réciproque est évidente, car à tout point M projeté en P répond un cercle O′ dont le centre est tel que $\overline{IO'} = \overline{AP}$.

En considérant la seconde tangente M′N′ perpendiculaire à la tangente en A, on voit que le lieu complet est un système de deux droites symétriques par rapport à OA.

2° Le cercle variable O′ coupe OA en un second point fixe A′, symétrique de A par rapport à I. L'angle inscrit AA′N étant la moitié de l'angle au centre AO′N, est égal à $\frac{90°}{2}$ ou 45°, de sorte que le lieu de N est une droite passant par A′ et inclinée à 45° sur OA ; cette droite rencontre IO′ en un point K appartenant au lieu précédent, puisque IK = A′I = AI. Tout point N de la droite répond au lieu, puisque le cercle AA′N existe toujours.

L'ensemble du lieu de N est formé de deux droites rectangulaires admettant OA comme bissectrice.

(Ernest LAVADOUX, institution du Sacré-Cœur, Moulins.)

Remarques. — 1° Tous les cercles passant par A et orthogonaux au cercle O rencontrent OA en un point fixe A′, qui n'est autre que le conjugué harmonique de A par rapport aux extrémités D et E du diamètre OA. C'est ce qui résulte de la relation

$$OA' \times OA = \overline{OB}^2 = \overline{OE}^2.$$

Donc le lieu de O′ est la perpendiculaire élevée au milieu de AA′.

2° Après avoir remarqué que O′A = AM et que l'angle MAO′ est droit, on en conclut de suite que le lieu de M s'obtient en faisant tourner le lieu de O′ d'un angle droit autour de A. Comme la rotation peut se faire dans deux sens, le nouveau lieu se compose de deux droites parallèles à OA, dont la distance à OA est égale à AI.

3° De même $\frac{AN}{AM} = \sqrt{2}$; l'angle MAN est égal à 45° ; donc le lieu de N se déduit de celui de M en faisant tourner ce dernier de 45° et amplifiant les rayons vecteurs tels que AM dans le rapport de $\sqrt{2}$ à 1. Au point S, pied de la perpendiculaire abaissée de A sur KM, correspond ainsi le point K ; comme la nouvelle droite fait 45° avec KM, elle passe par A′. On retrouverait de même la seconde droite.

[Ont résolu la même question : MM. P. Barroué ; P. Boutroux ; L. Cussenot ; L. Gourdet ; G. Hiernaux ; Jouanneau ; Martin ; J. Méhu ; de Mendiry ; F. Morel ; J. Orsini ; M. Rebeix ; Ribes.]

4305. — *Si dans un tétraèdre les arêtes opposées sont égales et orthogonales deux à deux, le tétraèdre est régulier.*

Première solution. — L'arête SC étant orthogonale à l'arête opposée AB, on peut mener par SC un plan perpendiculaire à AB en H ; ce plan coupe les faces SAB et ABC suivant les droites SH, CH, perpendiculaires à AB.

Mais les faces SAB et ABC sont égales comme ayant un côté commun et deux côtés égaux : SA = BC et SB = CA. Donc les hauteurs SH, CH, relatives au même côté AB, sont égales, ce qui entraîne l'égalité des triangles rectangles SAH et CAH. On peut alors écrire

$$SA = AC \qquad \text{ou} \qquad BC = BS.$$

En considérant l'arête SB perpendiculaire à AC, on démontre de même que

$$SA = AB \qquad \text{ou} \qquad BC = CS.$$

Ainsi, les trois arêtes issues de A sont égales, ainsi que les arêtes qui leur sont opposées dans la face SBC ; le tétraèdre est donc régulier.

(FEINTUCH.)

Deuxième solution. — Les points S et B appartenant par hypothèse à un plan perpendiculaire à AB, on a

$$\overline{SA}^2 - \overline{SB}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2.$$

Or $\qquad SA = CB \qquad$ et $\qquad SB = CA$;

donc

$$\overline{CB}^2 - \overline{CA}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2$$

ou

$$CA = CB.$$

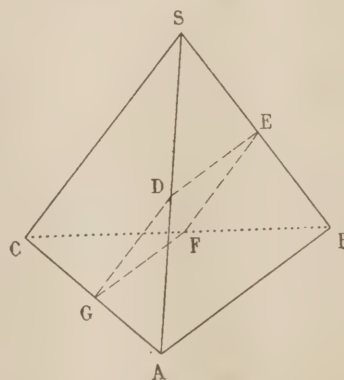
On établit de même que

$$BA = BC.$$

La base ABC du tétraèdre, ou toute autre face, est donc un triangle équilatéral...

(M. REBEIX, lycée du Puy.)

Troisième solution. — Soient D, E, F, G les milieux des quatre arêtes. Dans le triangle SAB, la droite DE qui joint les milieux de deux côtés est parallèle au troisième AB et égale à sa moitié ; de même pour FG.



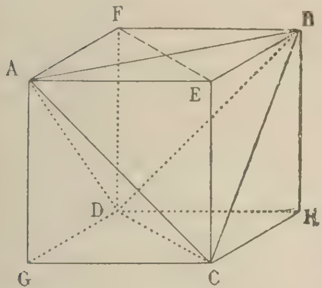
La figure DEFG ayant ainsi ses côtés opposés parallèles aux arêtes AB et SC est un parallélogramme dont les côtés sont égaux à la moitié de AB et SC ; comme on suppose les arêtes AB et SC égales et perpendiculaires, il en résulte que le parallélogramme DEFG est un carré (côtés égaux et perpendiculaires).

Aux arêtes opposées SB et CA, SA et BC correspondent deux autres carrés analogues. Ces trois carrés ayant deux à deux une

diagonale commune sont nécessairement égaux, de sorte que les triangles obtenus en joignant les milieux des côtés de chaque face du tétraèdre sont tous équilatéraux. Par suite, les faces du tétraèdre sont également des triangles équilatéraux.

(M. REBEIX.)

Quatrième solution.— Par les arêtes AB, CD du tétraèdre, on mène deux plans parallèles AEBF, DGCH. De même, par les arêtes opposées AD, BC, les plans parallèles AGDF, BECH. Enfin, les plans parallèles AECG, DFBH par les arêtes AC, BD. On forme ainsi un parallélépipède.



Mais la diagonale EF est égale et parallèle à CD, à cause du parallélogramme DCEF. Donc, le parallélogramme AEBF, ayant ses deux diagonales égales et perpendiculaires, est un carré. Il en est de même de toutes les autres faces, et le parallélépipède est un cube.

Dès lors, les diagonales des faces, qui forment les arêtes du tétraèdre ABCD, sont toutes égales, et ce tétraèdre est régulier.

(A. THORIN, à Tours.)

[Ont résolu la même question : MM. Bigot; Burgat; G. Damien ; L. Gourdet ; A. Gourdin ; E. Layes ; L. Magne ; C. Marie ; L. P. à A. ; H. Thouvenot ; P. Tribier ; V. R. T. ; R. Vidal-Naquet.]

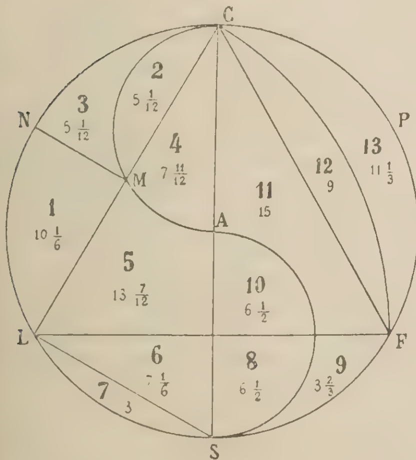
4306. — *Soit un cercle de surface* 104 ; *on admet que l'aire du triangle équilatéral inscrit soit* 43.

1° *Démontrer que cette hypothèse revient à supposer*

$$\pi = \sqrt{\frac{18252}{1849}} = 3{,}1418\ldots$$

2° *Dans la figure ci-dessous on a représenté le cercle de centre* A, *de diamètre* CS *et de surface* 104 ; *le triangle équilatéral inscrit* CLF, *de surface* 43 ; *les demi-cercles de diamètres* CA *et* AS ; *la perpendiculaire* MN *au milieu de* CL, *la corde* LS *et l'arc* CF *de centre* L. *Prouver que les aires des différentes sections de la figure sont représentées par les nombres qui y sont écrits.*

(*Cyclometria*, composée par l'éditeur Georgius Ludovicus *Frebonius*, Hambourg, 1627.)



1° Appelons R le rayon du cercle ; nous pouvons écrire

$$\text{surf. CLF} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = 43. \quad (1)$$

D'autre part,

$$\pi R^2 = 104,$$

d'où $R^2 = \dfrac{104}{\pi}$.

Portons cette valeur dans (1) ; il vient

$$\frac{312\sqrt{3}}{4\pi} = 43,$$

d'où

$$\pi = \frac{78\sqrt{3}}{43} = \sqrt{\frac{18252}{1849}} = 3{,}1418\ldots$$

2° Numérotons les diverses sections de la figure ci-dessus et cherchons leurs différentes surfaces en fonction de la surface du cercle, S = 104, et de celle du triangle équilatéral, $s = 43$.

Nous avons :

Section 1 = 1/2 segment CNL = $\dfrac{S - s}{6} = \dfrac{104 - 43}{6}$
= .... $10\ \dfrac{1}{6}$

— 2 = segment d'un cercle de rayon $\dfrac{R}{2}$ et dont la corde est le côté du triangle équilatéral inscrit dans ce cercle ; sa surface est donc 1/4 surf. seg. CNL = ... $5\ \dfrac{1}{12}$

— 3 = MNC — section 2 = $10\dfrac{1}{6} - 5\dfrac{1}{12}$ = . . $5\ \dfrac{1}{12}$

— 4 = 1/2 cercle AMC — section 2 = $\dfrac{104}{8} - 5\dfrac{1}{12}$
= .... $7\ \dfrac{11}{12}$

— 5 = 1/2 CLF — section 4 = 21 1/2 — 7 $\dfrac{11}{12}$ = $13\ \dfrac{7}{12}$

— 6 $\dfrac{\text{section 6}}{1/2\ \text{CLF}} = \dfrac{R^2}{(R\sqrt{3})^2}$; section 6 = $\dfrac{\text{CLF}}{2 \times 3}$
= $\dfrac{43}{6}$ = ... $7\ \dfrac{1}{6}$

— 7 = 1/2 segment LSF — section 6 = $10\dfrac{1}{6} - 7\dfrac{1}{6}$
= 3

— 8 = 1/4 cercle AS = $\dfrac{104}{4 \times 4}$ = ... $6\ \dfrac{1}{2}$

— 9 = 1/2 segment LSF — section 8 = $10\dfrac{1}{6} - 6\dfrac{1}{2}$
= .... $3\ \dfrac{2}{3}$

— 10 = section 8 = ... $6\ \dfrac{1}{2}$

— 11 = 1/2 CLF — section 10 = 21 1/2 — 6 1/2 = 15

— 12 = secteur CLF — triangle CLF
= $\dfrac{104 \times 3}{6} - 43$ = ... 9

— 13 = segment CPF — section 12 = $20\dfrac{1}{3} - 9$ = $11\ \dfrac{1}{3}$

Vérification. — Surface cercle A, total égal......... 104

(L. DELAVERGNAS, à Eymoutiers.)

[Ont résolu la même question : MM. d'Abreu ; A. Amblard ; E. Ardin-Delteil ; G. Bacquet ; A. Ballé ; R. Basset ; E. Baudot ; L. Bellour ; F. Beynas ; L. Bigot ; J. Boitel ; M. Boutry ; A. Bouzy ; V. Cambureanu ; E. Chaineau ; G. Charpentier ; F. Chuberre ; E. Clément ; J. Coupat ; L. Curt ; M. Deschamps ; Douménach ; Feintuch ; Galeb ; A. Gourdin ; A. Grandguillotte ; L. Grillet ; A. Jeannel ; L. Jolly ; Jouanneau ; E. Joyer ; M. Lagarde ; R. Larsonneur ; A. Larue ; E. Layes ; F. Leulliot ; C. Marrot ; Melin ; J. Ménéchal ; L. Midière ; L. P. à A. ; F. Pégorier ; L. Perret ; J. Quilichini ; M. Rebeix ; P. Reboul ; Remondet ; Robin ; E. Sevin ; E. Sinturel ; H. Thouvenot ; V. R. T.; L. Vacelot ; A. Vergnole ; Vial ; R. Vidal-Naquet ; E. Villemagne.]

TRIGONOMÉTRIE

4282. — *Calculer les trois côtés d'un triangle, connaissant l'angle* A, *le périmètre* 2p *et la surface* S.

(*Baccalauréat, Marseille.*)

On a à résoudre le système

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \quad (1)$$

$$a + b + c = 2p, \quad (2)$$

$$bc \sin A = 2S. \quad (3)$$

L'équation (1) peut s'écrire

$$a^2 = (b + c)^2 - 4bc\cos^2\frac{A}{2};$$

on en tire, en tenant compte de (2) et (3),

$$a = p - \frac{S}{p} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}. \qquad (4)$$

Les côtés b et c sont alors les racines de l'équation

$$x^2 - \left(p + \frac{S}{p} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}\right)x + \frac{2S}{\sin A} = 0,$$

ou, en remplaçant $\sin A$ par $\dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}$,

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} px^2 - \left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} p^2 + S\right)x + \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}\right)pS = 0. \qquad (5)$$

Discussion. — Il faut et il suffit : 1° que la valeur de a donnée par l'équation (4) soit positive ; 2° que les racines de l'équation (5) soient réelles, car alors elles sont positives.

On obtient ainsi les conditions

$$p > \frac{S}{p} \operatorname{cotg} \frac{A}{2},$$

$$\left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} p^2 + S\right)^2 - 4 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}\right)p^2 S \geqslant 0.$$

En posant, pour abréger,

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \lambda, \qquad \frac{S}{p^2} = m,$$

ces conditions deviennent

$$m < \lambda, \qquad (6)$$

$$m^2 - 2\lambda(1 + 2\lambda^2)m + \lambda^2 \geqslant 0. \qquad (7)$$

La substitution de λ à m dans le trinome (7) donne un résultat négatif ; donc ce trinome a deux racines réelles et distinctes, séparées par λ.

Comme, à cause de la condition (6), m ne peut pas être supérieur à la plus grande, il faut que m soit inférieur à la plus petite, et alors la condition (6) est vérifiée *a fortiori*. L'unique condition de possibilité du problème est donc

$$m \leqslant \lambda(1 + 2\lambda^2 - 2\lambda\sqrt{1 + \lambda^2}),$$

ou, après quelques calculs faciles,

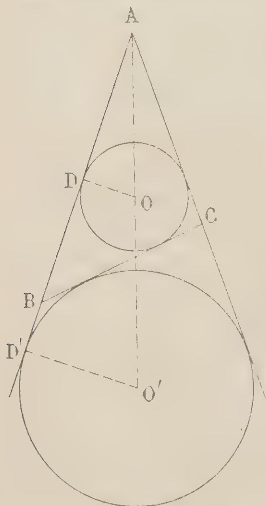
$$S \cos^3 \frac{A}{2} \leqslant p^2 \sin \frac{A}{2}\left(1 - \sin \frac{A}{2}\right)^2,$$

ou encore $\qquad S \leqslant p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi - A}{4}.$

(A. Goulard.)

Solution géométrique.

Supposons le problème résolu. Traçons le cercle inscrit O et le cercle exinscrit O′, ces cercles touchant le côté AB ou son prolongement en D, D′. On sait que



$$AD' = p$$

et $S = p.OD$, d'où $OD = \dfrac{S}{p}$.

De là cette construction :

Sur l'un des côtés de l'angle donné A, on prend $AD' = p$, et en D′ on élève à ce côté une perpendiculaire qui coupe en O′ la bissectrice de l'angle A ; sur cette bissectrice on détermine ensuite le point O au moyen d'une parallèle à AB menée à la distance connue $\dfrac{S}{p}$. Il ne reste plus qu'à mener la droite BC tangente commune intérieure aux cercles connus O et O′.

Pour que le triangle fourni par cette construction existe, il faut et il suffit que le cercle O soit plus petit que le cercle O′ et extérieur à ce dernier, ou, ce qui revient au même, que l'on ait

$$OD < O'D' \qquad \text{et} \qquad OO' > OD + O'D'.$$

Comme $O'D' = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}$, la première condition revient à

$$S < p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}. \qquad (1)$$

En remarquant que

$$OO' = AO' - AO = \frac{p}{\cos \frac{A}{2}} - \frac{\frac{S}{p}}{\sin \frac{A}{2}},$$

la seconde condition s'écrit

$$\frac{p}{\cos \frac{A}{2}} - \frac{S}{p \sin \frac{A}{2}} \geqslant \frac{S}{p} + p \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

ou $\qquad S \leqslant p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \dfrac{1 - \sin \frac{A}{2}}{1 + \sin \frac{A}{2}}$

ou mieux $\qquad S \leqslant p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi - A}{4}\right). \qquad (2)$

L'inégalité (1) est comprise dans l'inégalité (2), puisque

$$\operatorname{tg} \frac{\pi - A}{4} < \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \quad \text{ou } 1.$$

(C. Bourvéau, instituteur à Kernével.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Amblard ; A. Baras ; L. Barberot ; Bayor ; L. Bigot ; G. Brets ; E. Brière ; F. Chuberre ; A. Cormerois ; G. Digne ; G. Dupuy ; R. Durand ; F. Geltzenlichter ; P. Guillemin ; E. Layes ; L. M. ; L. Magne ; A. Maitre ; H. Michel ; F. Morel ; A. Nayel ; P. Plisson ; Robin ; Tiret ; H. Valdenaire ; Vial.]

MÉCANIQUE

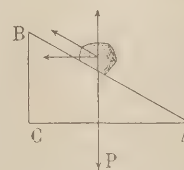
4097. — *Un poids* P *est maintenu en équilibre sur un plan incliné par l'action de trois forces égales à* $\frac{P}{3}$ *et dirigées l'une en sens contraire de la pesanteur, l'autre dans la direction* AB *et la troisième suivant l'horizontale* AC. *On demande de trouver l'inclinaison du plan sur l'horizon.*

(*Examens d'élève de 1*re *classe de la marine marchande, 1897.*)

Pour que le corps soit en équilibre, il faut que les forces données qui le sollicitent admettent une résultante normale au plan et dirigée vers le plan.

La première de ces conditions s'exprimera en écrivant que la somme des projections des forces sur la direction $\overline{AB}$ est nulle ; et il viendra, en appelant x l'angle du plan avec l'horizon,

$$P \sin x - \frac{P}{3} \sin x - \frac{P}{3} - \frac{P}{3} \cos x = 0,$$



ou bien $\quad 2 \sin x - 1 - \cos x = 0,$

ou encore, après suppression du facteur $\cos \frac{2}{x}$ qui donne $x = 180°$,

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2},$$

d'où $\qquad x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2}.$

Quant à la pression exercée par le solide sur le plan, c'est pré-

cisément la somme des projections des forces sur la normale au plan, c'est-à-dire la résultante de ces forces. Il viendra donc, en représentant cette pression par Q,

$$Q = P\cos x - \frac{P}{3}\cos x + \frac{P}{3}\sin x = \frac{P}{3}(2\cos x + \sin x)$$

ou

$$Q = \frac{P}{3}\left[2\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + 2\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right]$$

ou enfin, en remplaçant $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ par $\frac{1}{2}$,

$$Q = \frac{2P}{3}.$$

[Ont résolu cette question : MM. Cayrol, à Condé ; P. Cornélis, lycée Janson ; J. Courtinat, à Cusset ; Franqueville, à Rouen ; Ganel, pensionnat de Valbenoîte, à Saint-Etienne ; H Hamel, à Caen ; Henry, à Maizières ; J. Juquelier, à Condé ; J. Lebel, au Quesnoy ; P. Leboucher, à Yvetot ; Legras, lycée d'Orléans ; de Mendiry ; Mollon, à Saint-Etienne ; Niculescu ; Pégorier, à Cette ; Peyrache, à Saint-Etienne ; Raynaud, à Escande.]

PHYSIQUE

4311. — *De l'air, saturé de vapeur d'eau, à la température 10°, pour laquelle la tension maxima de la vapeur d'eau est de* $9^{mm},1$, *est refoulé par une pompe de compression de* 1^{lit} *de capacité, dans une enceinte, primitivement privée d'air, de* 2^{lit} *de capacité.*

Sachant que la température finale dans cette enceinte est de 15°, pour laquelle la tension maxima de la vapeur d'eau est de $12^{mm},7$, *on demande quelle sera la pression finale dans cette enceinte au bout de 10 coups de piston.*

La pression atmosphérique est de 760^{mm} *de mercure ;*

Le coefficient de dilatation de l'air est $\alpha = 0,00365$.

(*Bacc. lettres-math., Marseille, novembre 1897.*)

La masse des 10^{lit} d'air saturé de vapeur d'eau, refoulés par la pompe de compression, a pour valeur

$$m = 10 \times 1,293 \times \frac{1}{1+\alpha t} \times \frac{H - \frac{3}{8}\times 9,1}{760}.$$

L'enceinte qui les reçoit ayant une capacité de 2^{lit}, on a aussi

$$m = 2 \times 1,293 \times \frac{1}{1+\alpha t'} \times \frac{X - \frac{3}{8}\times 12,7}{760}.$$

En égalant les seconds membres et supprimant les facteurs communs, il vient

$$\frac{5\left(760 - \frac{3}{8}\times 9,1\right)}{1+10\alpha} = \frac{X - \frac{3}{8}\times 12,7}{1+15\alpha},$$

d'où l'on tire $X = 3854^{mm},3$.

Telle est la pression finale demandée.

(ARDIN-DELTEIL.)

[Ont résolu la même question : MM. L. Barberot ; Baudot ; Bayor ; F. Beynas ; Bigot ; M. Boutry ; L. Curt ; Delpont ; R. Duffranc ; J. Fourestier ; A. Granguillotte ; Grillet ; E. Layes ; F. Ladevèze ; R. Larsonneur ; F. Leulliot ; P. Le Moingt ; Ménissier ; Perret ; J. Quilichini ; Remondet ; Tribier ; A. Vergnole ; Vial.]

4319. — *Un baromètre est enfermé dans un large tube de verre scellé à la lampe. A l'instant de la fermeture, la hauteur de la colonne est* 76^{cm}, *et la température est 15°.*

Calculer la hauteur de la colonne lorsque la température est 40°.

Coefficient de dilatation du mercure . . . . $\frac{1}{5550}$.

Coefficient de dilatation de l'air . . . . 0,00366.

On ne tiendra pas compte de la dilatation du verre.

En ne tenant compte tout d'abord que de la dilatation qu'éprouve le mercure dans le tube barométrique en passant de 15° à 40°, on a

$$h = \frac{76\left(1+\frac{40}{5550}\right)}{1+\frac{15}{5550}} = \frac{76\times 5590}{5565}.$$

Mais, dans le tube scellé, la force élastique de l'air augmente dans le rapport de $(1+40\times 0,00366)$ à $(1+15\times 0,00366)$; par conséquent, la hauteur de la colonne de mercure doit augmenter dans le même rapport. On a donc finalement

$$h = \frac{76\times 5590(1+40\times 0,00366)}{5565(1+15\times 0,00366)} = 82^{cm},966.$$

(A. SUGNOTTE, lycée de Bourges.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Ardaillon ; L. Barberot ; M. Boutry ; L. Brindamour ; F. Chuberre ; L. Curt ; L. Cussenot ; Decourtye ; R. Duffrac ; L. Florentin ; L. Fontaine ; Gauchet ; Jouanneau ; A. Jupeau ; E. Layes ; L. Lassence ; P. Le Moingt ; F. Leulliot ; D. Limongelli ; E. Madet ; F. Morel ; J. Patou ; L. Perret ; Raynaud ; Remondet ; P. Robin ; L. Seguenot ; E. Sinturel ; A. Smântanescu ; R. Sudre ; L. Tarrin ; Vial ; J. Villemagne.]

4320. — *On donne 50 éléments de Daniell, dont la force électromotrice est de 1 volt et la résistance de 1 ohm, montés en série.*

On demande combien on pourra alimenter de lampes à incandescence montées en dérivation, ces lampes étant de 50 volts, ayant une résistance, à chaud, de 50 ohms et exigeant pour leur fonctionnement un courant de $\frac{1}{2}$ *ampère.*

Appelons x le nombre des lampes. Chaque lampe exigeant pour son fonctionnement un courant de $\frac{1}{2}$ ampère, le courant principal devra avoir pour intensité $x\times\frac{1}{2}$ ampères. D'un autre côté, la résistance extérieure a pour valeur $\frac{50}{x}$ ohms ; la résistance totale des 50 éléments montés en série est de 50 ohms, leur force électro-motrice de 50 volts.

En appliquant la formule d'Ohm, il vient

$$x\times\frac{1}{2} = \frac{50}{50+\frac{50}{x}},$$

d'où l'on tire $x = 1$.

Les 50 éléments Daniell ne pourront donc alimenter qu'une lampe, qui sera forcément placée dans le circuit principal.

(G. HIERNAUX, école normale de Châlons.)

[Ont résolu la même question : MM. Decourtye ; F. Leulliot ; P. Le Moingt ; Roure ; Seguenot ; E. Sevin ; L. Tarrin.]

BACCALAURÉATS

SESSION D'AVRIL 1898

LYON

Baccalauréat lettres-mathématiques.

I. — *1er sujet*.— Lieu des points dont le rapport des distances à deux points donnés est constant.

I. — 2e *sujet.* — Lieu des points dont la différence des carrés des distances à deux points donnés est constante.

I. — 3e *sujet.* — Démontrer que par un point pris dans un plan on peut toujours élever une perpendiculaire à ce plan et qu'on n'en peut élever qu'une.

II. — **4329**. — Etant donné un rectangle ABCD, déterminer sur le côté CD, entre C et D, un point M tel que, si l'on mène AM, le volume engendré par le trapèze ABCM tournant autour de AB soit dans un rapport donné m avec le volume engendré par le triangle ADM tournant autour de AD.

Discussion. — Montrer que, pour que le problème soit possible, m doit rester supérieur à un certain minimum. — Interprétation des solutions négatives.

On désignera les côtés AB et AD du rectangle par a et b et on prendra pour inconnue la longueur $DM = x$.

I. — 1er *sujet.* — Loi et mesure des intensités lumineuses.

I. — 2e *sujet.* — Spectroscopie.

I. — 3e *sujet.* — Lunette terrestre.

II. — 100gr de cuivre à 100°, plongés dans 500gr d'eau à 5°,1, ont porté la température de cette masse liquide à 6°,8. La même expérience étant répétée avec 800gr d'essence de térébenthine à 6°, la température de l'essence s'est élevée à 8°,5.

On demande quelle est la chaleur spécifique de l'essence.

Il n'y a pas eu de candidats au baccalauréat lettres-sciences.

PARIS

Baccalauréat lettres-sciences.

I. — **4330**. — Trouver et construire les limites des intervalles dans lesquels l'arc x, pris sur le cercle trigonométrique, doit avoir son extrémité libre, pour que le sinus de cet arc vérifie l'inégalité suivante :

$$\frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sin x - \sqrt{6} + 1}{4\sin^2 x - 1} < 1.$$

II. — 1er *sujet.* — Réduction d'un nombre quelconque de forces appliquées à un corps solide, d'abord à trois forces, puis à deux.

II. — 2e *sujet.* — Mouvement uniformément varié. Loi des espaces. Loi des vitesses.

II. — 3e *sujet.* — Frottement, ses lois. Travail des résistances passives. Rendement d'une machine.

I. — Un corps solide pèse dans le vide 2kg,100 ; plongé dans l'eau, il ne pèse plus que 2kg, et dans l'alcool 2kg,020 ? Quelle est la densité du corps ? Quelle est la densité de l'alcool ?

II. — 1er *sujet.* — Densité des gaz.

II. — 2e *sujet.* — Bobine de Ruhmkorff.

II. — 3e *sujet.* — Éclairage électrique. — Galvanoplastie.

QUESTIONS PROPOSÉES

4260 (énoncé rectifié). — Résoudre l'équation

$$(m+2a)\sqrt[n]{(a+x)^p} + (n-2a)\sqrt[n]{(a-x)^p} = mna\sqrt[2n]{(a^2-x^2)^p}.$$

4331. — Calculer les trois côtés d'un triangle, connaissant la hauteur h et la médiane m relatives au côté a, ainsi que le rayon du cercle circonscrit.

Discuter. Conditions de possibilité.

Construire géométriquement le triangle et discuter à nouveau.

(J. G.)

4332. — Considérons sur une droite quatre points A, B, C, D ; soient I le milieu de AB, I' le milieu de CD ; la condition nécessaire et suffisante pour que les points C et D soient conjugués harmoniques par rapport à A et B est

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 4\overline{II'}^2.$$

En déduire que, si x_1, x_2, x_3, x_4 sont les abscisses des points A, B, C, D par rapport à une origine arbitraire O prise sur la droite, on a

$$2(x_1x_2 + x_3x_4) = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4).$$

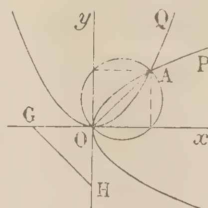
(J. G.)

4333. — Soient S et S' les centres d'homothétie de deux circonférences quelconques O et O ; d'un point M de la circonférence de diamètre SS' on mène la tangente MA au cercle O et la tangente MA' au cercle O'.

1° Démontrer que la sécante AA' intercepte dans les deux circonférences des cordes égales.

2° Réciproquement, si une sécante AA', rencontrant en A le cercle O et en A' le cercle O', détermine dans ces deux cercles des cordes égales, les tangentes en A et A' se coupent sur le cercle de diamètre SS'.

(C. Hugon, professeur au lycée de Nimes.)



4334. — On considère deux paraboles P et Q, égales, de même sommet O ; l'axe Ox de la parabole P est perpendiculaire à l'axe Oy de la parabole Q ; ces deux paraboles se coupent encore au point A.

Par un point M de leur plan on mène la parallèle MC à Ox, rencontrant P en C, la parallèle MD à Oy rencontrant Q en D.

Prouver que le lieu des points M, tels que $MC = MD$, se compose

1° Du cercle de diamètre OA ;

2° De la droite limitée OA ;

3° De la droite limitée GH, telle que $OG = OH = 2p$, double du paramètre des paraboles données.

(H. Michel, lycée de Douai.)

4335. — Dans tout triangle, on a

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} < \frac{1}{8}.$$

(E. Sinturel, collège de Cusset.)

4336 (Épure proposée en vue des candidats à Saint-Cyr et au *Borda*). — On donne, sur une horizontale de cote 112mm, deux points B et D, distants de 96mm ; par la droite BC on mène un plan de pente 1, de manière que sa trace horizontale se trouve à droite du grand axe de la feuille. Dans ce plan on construit le carré ABCD, de diagonale BD, A étant le sommet de plus grande cote.

Ce carré sert de base à un parallélépipède droit de 96mm de hauteur, situé au-dessous du plan P. Construire sa projection.

Par le centre O de ce parallélépipède on mène une horizontale H, parallèle à BC, et on y prend, de part et d'autre de O, les longueurs OS = 78mm, OE = 47mm. Par E on mène le plan vertical perpendiculaire à OS, et on y projette A en F.

Déterminer les génératrices de contour apparent du cône de révolution ayant OS pour axe, SF pour génératrice, ce cône étant limité au plan vertical EF.

Trouver l'intersection de la surface du cône avec celle du parallélépipède, et représenter sur l'épure l'ensemble des deux corps supposés solides.

Représenter aussi, par des croquis réduits :

1° le solide commun ;

2° la partie du parallélépipède extérieure au cône ;

3° la partie du cône extérieure au parallélépipède.

Nota : Placer BD parallèlement au grand axe de la feuille, un peu à droite de cette ligne.

L'épure paraîtra dans le n° du 15 mai. Les élèves qui voudront la graphiquer sont priés de nous envoyer leur travail avant le 1er mai.

4337. — Un bain d'argenture est traversé par un courant d'intensité 0amp,4. On demande quel est le poids d'argent déposé en 2 heures. Il faut 96 600 coulombs pour mettre en liberté 1gr d'hydrogène. Poids atomique de l'argent, 108.

(*Bacc. lettres-sciences, Besançon, juillet 1897.*)

4338. — On considère un système de deux lentilles convergentes ayant même distance focale f et dont les centres sont écartés de d. Quelle sera la grandeur et la position de l'image d'un objet AB de longueur l placé devant le système ?

(E. Sinturel.)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

22e Année. — N° 14. **JOURNAL** PARIS, le 15 Avril 1898.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL..............	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie **Nony** et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS.

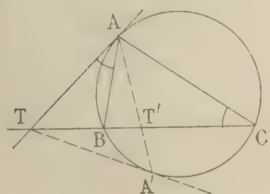
Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

A PROPOS DE LA QUESTION 4298

Proposée par M. **Goulard**.

Il se présente dans cette question une occasion d'appliquer un théorème très simple, que les traités de géométrie citent dans leurs collections d'énoncés, mais qui mériterait d'être proposé en meilleure place. C'est le suivant :

Considérons le cercle circonscrit au triangle ABC et soit T le point où la tangente au sommet A rencontre la droite BC. On a



$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{TB}{TC}.$$

Cette relation résulte immédiatement de la comparaison des triangles semblables TAB et TCA.

Cherchons maintenant le deuxième point de la droite BC qui divise le segment BC dans un rapport égal à $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$. C'est évidemment le point de rencontre T′ de BC avec la polaire de T par rapport au cercle.

Ces deux points sont d'ailleurs les seuls qui divisent BC dans un rapport égal à $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$.

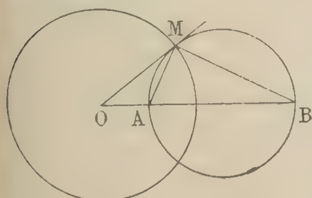
Si donc la projection H de A sur BC possède la même propriété, c'est que la hauteur AH se confond avec AT′ ou avec AT.

Dans le premier cas, la droite BC étant perpendiculaire sur la polaire de l'un de ses points, passe par le centre du cercle, et par conséquent l'angle BAC est droit.

Pour conclure dans le deuxième cas, remarquons que l'angle ATB demeure égal à $B - C$ (en supposant $B > C$); si donc AT et BC sont rectangulaires, on a $B - C = 90°$.

Le même théorème cité fournit une solution simple du problème donné à l'Institut agronomique en 1897.

On considère sur une droite trois points O, A, B, *tels que* $\frac{\overline{OA}^2}{\overline{OB}^2} = k^2$; *on construit la circonférence de centre* O *et de rayon égal à* $\sqrt{\overline{OA}.\overline{OB}}$; *prenant un point arbitraire* M *de ce cercle, on demande d'évaluer le rapport* $\frac{MA}{MB}$.



Le cercle C circonscrit au triangle MAB est orthogonal au cercle O, puisque la puissance du centre du cercle O par rapport au cercle C est égale au carré de son rayon. Donc la tangente en M au cercle C passe par O. Du théorème cité résulte que

$$\frac{MA}{MB} = \sqrt{\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}} = k.$$

J. GIROD,
Professeur au lycée de Versailles.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Problème. — *Etant données deux droites* OB *et* OC, *mener par un point donné* A *une droite qui rencontre* OB *en* G *et* OC *en* H, *de telle manière que le rapport* $\frac{BG}{CH}$ *soit égal à un nombre donné* λ.

Ce problème célèbre a été posé et résolu par Apollonius dans son ouvrage *De sectione rationis*. On en trouvera, à la page 93 de ce journal, une solution fondée sur la théorie de l'homographie. En voici une autre, extraite des *Méthodes et Théories* de J. Petersen (traduction O. Chemin, p. 76).

Soit M le second point de rencontre des circonférences circonscrites aux triangles OBC et OGH.

On a $\widehat{OBM} = \widehat{OCM}$

et $\widehat{OGM} = \widehat{OHM}$;

donc les triangles MBG et MCH sont semblables, d'où

$$\frac{MB}{MC} = \frac{BG}{CH},$$

c'est-à-dire $\frac{MB}{MC} = \lambda$.

Le point M peut donc être déterminé par l'intersection de la circonférence circonscrite au triangle OBC avec la circonférence lieu des points dont le rapport des distances aux points B et C est égal à λ.

Cela fait, comme on a

$$\widehat{AGM} = 180° - \widehat{MOC},$$

on peut construire le point G.

A. GOULARD,
Professeur au lycée de Marseille.

PHYSIQUE

4327. — *Une sphère de platine, pesée dans le mercure, perd de son poids 50 grammes à 0° et* $49^{gr},5415$ *à 60°. Trouver le coefficient de dilatation cubique du platine, le coefficient de dilatation absolue du mercure étant* $\frac{1}{5550}$*, sa densité à 0° : 13,6.*

(*Bacc. lettres-math., Caen, juillet 1897.*)

Soient V le volume de la sphère à 0°, x le coefficient de dilatation cubique du platine.

Dans chaque cas, la poussée subie par la sphère est égale au poids du mercure qu'elle déplace.

A 0°, on a

$$V \times 13{,}6 = 50, \qquad \text{d'où} \qquad V = \frac{50}{13{,}6}.$$

A 60°, le volume de la sphère est $V(1 + 60x)$ et la densité du mercure, $\dfrac{13{,}6}{1 + \dfrac{60}{5550}}$. On a donc

$$49{,}5415 = V(1 + 60x)\,\frac{13{,}6}{1 + \dfrac{60}{5550}}.$$

Portant dans cette équation la valeur de V et simplifiant, il vient

$$1 + 60x = \frac{49{,}5415 \times 561}{50 \times 555},$$

d'où l'on tire $$x = 0{,}0000\,2569.$$

(G. VENTE, à Caen.)

[Ont résolu la même question : MM. X., de Bourg-de-Péage ; Ardin-Delteil ; L. Aulagnier ; L. Barberot ; E. Baudot ; Bigot ; de Bersaucourt ; A. Bertrand ; L. Bois ; Bonnet ; M. Boutry ; A. Bouzy ; L. Brindamour ; Brugerolle ; A. Buisson ; Burgat ; J. Charignon ; A. Chautemps ; F. Chuberre ; Cryé ; Cussenot ; E. Delarue ; Delpont ; L. Dumas ; Ferrier ; Fourestier ; Fournier ; P. Frescal ; Geltzenlichter , J. Gonnet ; E. Gourdon ; A. Jeannel ; A. Jupeau ; F. Ladevèze ; Laguarigue de Survilliers ; R. Larsonneur ; A. Larue ; L. Lassence ; E. Layes ; H. Lefèvre ; A. Legros ; A. Lescure ; Leulliot ; P. Marill ; E. Le Maigre ; J. Maury ; Mirc ; Perrot ; J. Pillard ; Quilichini ; Raynaud ; M. Rebeix ; Reboul ; Robin ; A. Rongier ; E. Seclin ; A. Smàntanescu ; Sudre ; Teulié ; L. Vaclet ; R. Van Cauwenberghe ; A. Vergnole ; Vial ; J. Villemagne ; P. Vincent ; J. Coupat ; Grillet , Jouanneau ; L. M., à Vic ; Méhu ; Ménissier ; Sevin ; Sinturel.]

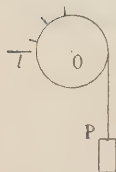
4328. — *Une roue de Savart de masse négligeable a* 10^{cm} *de rayon et porte 10 dents. Elle se meut autour d'un axe horizontal O, grâce au poids P qui tombe verticalement, et fait vibrer une lame l. On demande :*

1° De déterminer l'accélération de la pesanteur au lieu d'observation, sachant qu'après trois secondes de chute le son rendu par l a une hauteur de 470 vibrations doubles ;

2° L'espace parcouru par P quand le son est à l'octave grave du précédent.

(*Bacc. lettres-math., Rennes, juillet 1897.*)

1° Chaque fois qu'une dent heurte la lame l, il se produit une vibration double. Quand le son rendu correspond à 470^{vib} doubles, la roue fait $\frac{470}{10}$ ou 47 tours par seconde. Le poids tombe alors avec une vitesse égale à $47 \times 2\pi \times 10$, et l'on a, en appliquant la formule $v = \gamma t$,



$$47 \times 2\pi \times 10 = \gamma \times 3,$$

d'où l'on tire $$\gamma = 984^{cm},368.$$

Telle est l'accélération de la pesanteur au lieu de l'observation.

2° Quand le son est à l'octave grave du précédent, c'est-à-dire quand il correspond à 235^{vib} doubles, la roue fait $\frac{235}{10}$ tours et la vitesse du poids à cet instant est de

$$\frac{235}{10} \times 2\pi \times 10 = 1476^{cm},552.$$

En appliquant la formule $e = \dfrac{v^2}{2\gamma}$, on a pour l'espace parcouru

$$e = \frac{\overline{1476{,}552}^2}{2 \times 984{,}368} = 1107^{cm},4.$$

(A. MIRC.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Ballé ; A. Bertrand ; L. Bigot ; L. Bois ; G. Bonnet ; H. Bosc ; M. Boutry ; Brugerolle ; Burgat ; Chuberre ; Delpont ; Fournier ; E. Gourdon ; Laguarigue de Survilliers ; Lassence ; H. Lefèvre ; Magne ; A. Maillon ; P. Marill ; J. Maury ; Niel ; J. Pillard ; Raynaud ; Reboul ; Remondet ; Robin ; P. de Sabbathier ; L. Tarrin ; M. Teulié ; R. Van Cauwenberghe ; Vergnole ; Grillet ; Ménissier ; Sevin ; Vidal-Naquet.]

ARITHMÉTIQUE

4276. — *Trouver la plus petite valeur positive de* x *telle que* $x^2 - 1$ *soit divisible par 1898*

2° Pour quelles valeurs de l'exposant y le nombre $3^y - 1$ *est-il divisible par 1898 ?*

1° On a $$1898 = 2 \times 13 \times 73.$$

Pour que $x^2 - 1$ ou $(x+1)(x-1)$ soit divisible par 1898, il faut donc et il suffit que l'on ait

$$x \pm 1 = 2 \times 73u, \qquad x \pm 1 = 2 \times 13v.$$

Si l'on prend le même signe devant 1 dans les deux équations, on en déduit par soustraction

$$73u - 13v = 0,$$

équation dont toutes les solutions sont évidemment données par les formules

$$u = 13k, \qquad v = 73k.$$

Si l'on prend des signes différents devant 1 dans les deux équations, on en déduit par soustraction

$$73u - 13v = \varepsilon, \qquad \text{où} \quad \varepsilon = \pm 1.$$

En suivant la méthode indiquée dans le *Traité d'Arithmétique* de M. Humbert (p. 142-152), on trouve que toutes les solutions de cette dernière équation sont données par les formules

$$u = 13k + 5\varepsilon, \qquad v = 73k + 28\varepsilon.$$

En résumé, les plus petites valeurs positives de u et v sont

$$u = 5 \qquad \text{et} \qquad v = 28,$$

et par suite la plus petite valeur positive de x est

$$x = 2 \times 73 \times 5 - 1 = 2 \times 13 \times 28 + 1,$$

c'est-à-dire $$x = 729.$$

2° Si l'on observe que $729 = 3^6$, on voit, d'après le calcul précédent, que $3^6 = m.73 - 1$.

On vérifie d'ailleurs facilement que 3^6 est la plus petite puissance de 3 qui, divisée par 73, donne pour reste -1 ; on en conclut que 3^{12} est la plus petite puissance de 3 qui, divisée par 73, donne pour reste 1. Donc, pour que $3^y - 1$ soit multiple de 73, il faut et il suffit que y soit multiple de 12.

Or $3^y - 1$ est toujours pair. D'autre part, comme $3^3 = m.13 + 1$, $3^y - 1$ est divisible par 13 quand y est multiple de 3.

Finalement, pour que $3^y - 1$ soit divisible par 1898, il faut et il suffit que y soit multiple de 12.

Remarque. — $3^y + 1$ n'est jamais divisible par 1898.

(A. GOULARD.)

[Ont résolu la même question : MM. Benhaïm ; Burgat ; R. Van Cauwenberghe ; L. Gourdet ; G. Biernaux ; H. Janois ; A. Mirc ; A. Thorin.]

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

Concours de 1897.

On donne dans un triangle ABC *l'angle* A, *le côté* b *et le rapport* $\frac{a}{m} = k$ *du côté* a *à la médiane correspondante* m. *Calculer le côté* c. — *Discuter.*

Voir une solution algébrique et une solution géométrique dans notre numéro du 15 février 1891 (question 2544).

4130. — *On donne trois points fixes* A, B, C *en ligne droite ; on considère une circonférence variable passant par les points* B *et* C ; *on mène par le point* A *les deux tangentes* AT, AT′ *et la corde des contacts* TT′. *On demande* :

1° *Les lieux géométriques des milieux des côtés du triangle* ATT′ ;

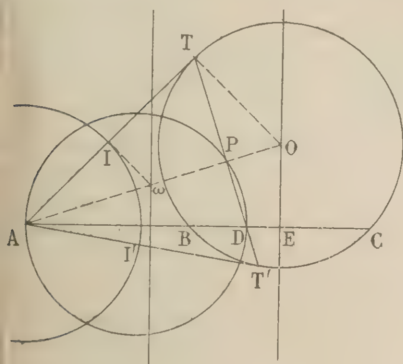
2° *Le lieu du centre du cercle circonscrit à ce triangle ;*

3° *Les lieux des points d'intersection de la tangente* AT *avec chacune des deux tangentes parallèles à la droite* ABC.

1° Soient I, I′ et P les milieux des côtés du triangle ATT′. On a

$$\overline{AT}^2 = \overline{AT'}^2 = AB.AC = \text{const.}$$

Les droites AT, AT′ ont donc une longueur invariable, de sorte que le lieu des points I, I′ est une circonférence de centre A et de rayon égal à la moitié de cette longueur.



La corde TT′, polaire du point A par rapport au cercle O, coupe BC en un point fixe D, conjugué harmonique de A par rapport à B et C ; le lieu du point P, sommet de l'angle droit APD, est donc une circonférence de diamètre AD. On peut remarquer que cette circonférence est la figure inverse de la droite fixe OE, lieu des centres des cercles passant par B et C ; en effet,

$$AP.AO = \overline{AT}^2 = \text{const.}$$

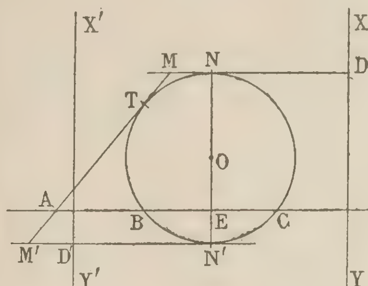
Réciproquement, si l'on prend sur le cercle A un point quelconque I, on peut toujours mener le cercle O passant par B et C et tangent à AI ; donc le cercle A est entièrement décrit par les points I et I′.

Il en est de même du cercle AD, lieu de P, puisque la droite AO peut prendre toutes les positions possibles autour de A.

2° Le centre ω du cercle circonscrit au triangle ATT′ est à l'intersection de la perpendiculaire AP au milieu P de TT′ avec la perpendiculaire à AT en son milieu I ; cette dernière étant parallèle au rayon TO coupe la première, AP, au milieu de AO. Le lieu de ω est donc homothétique de celui du point O ; c'est une droite perpendiculaire à la droite AE en son milieu.

Toute la droite appartient visiblement au lieu.

3° Soient M, M′ les points d'intersection de la tangente AT avec chacune des deux tangentes MN, M′N′ parallèles à ABC. Si l'on prolonge MN d'une longueur ND = AT, le lieu du point D est une parallèle XY à OE, et l'on a



$$MD = MN + ND$$
$$= MT + TA = MA.$$

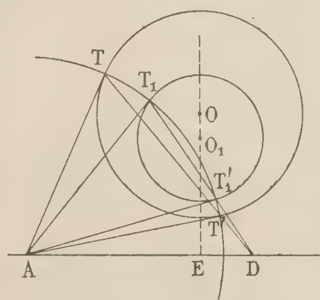
Donc le lieu de M est une parabole admettant le point A pour foyer et la droite XY pour directrice.

On verrait de même que le lieu de M′ est une autre parabole de même foyer A et dont la directrice X′Y′ est symétrique de XY par rapport à OE.

La tangente MN restant toujours au-dessus de ABC et la tangente M′N′ au-dessous, les points M, M′ décrivent seulement deux demi-paraboles ; les demi-paraboles restantes s'appliquent au cas où la tangente AT est remplacée par AT′.

Extension au cas où l'axe radical commun ne rencontre pas les cercles. — Les cercles considérés passant par deux points fixes ont même axe radical ; on peut dès lors les considérer comme un cas particulier d'un faisceau de cercles ayant un axe radical commun passant par A.

Soient O, O_1 deux de ces cercles admettant pour axe radical la droite fixe AE. Le point A étant d'égale puissance par rapport aux cercles du faisceau, les tangentes AT, AT_1 sont égales, et le lieu des points T, T_1, T′, T'_1 est une circonférence fixe orthogonale aux cercles O, O_1, ...



D'ailleurs, en considérant TT′, $T_1T'_1$ comme deux sécantes du cercle A, on a, en appelant D leur point de rencontre,

$$DT.DT' = DT_1.DT'_1 ;$$

donc le point D est d'égale puissance par rapport aux cercles O, O_1 et par suite appartient à l'axe radical AE de ces cercles.

Ces remarques faites, il est facile de voir que les lieux trouvés dans le cas particulier énoncé s'étendent au cas général.

(HENRI GLÜCK, lycée Charlemagne.)

Solution analytique. (*) — Prenons pour origine le point A, pour axe des x la droite BC, pour axe des y la perpendiculaire à BC en A ; nous ne ferons aucune distinction entre le cas où les cercles considérés coupent BC et celui où ils ne coupent pas cette droite ; nous supposerons simplement que l'origine est dans tous les cas extérieure à ces cercles, qui par hypothèse ont pour axe radical commun l'axe des x. Soit d l'abscisse *fixe* de leurs centres, λ l'ordonnée variable d'un de ces centres, k la puissance constante de A par rapport à tous les cercles. L'équation d'un de ces cercles sera

$$x^2 + y^2 - 2dx - 2\lambda y + k = 0. \qquad (1)$$

(*) Nous croyons devoir donner cette solution analytique au point de vue des aspirantes à l'agrégation et au certificat d'aptitude de l'enseignement secondaire des jeunes filles, ainsi que des élèves de Première-Sciences.

Nous admettrons qu'on a trouvé géométriquement les lieux de I et I' et nous ne nous occuperons que du second et du troisième lieu.

2° L'équation de la polaire TT' de l'origine par rapport au cercle (1) est

$$dx + \lambda y - k = 0; \qquad (2)$$

l'équation du cercle ATT' est alors de la forme

$$x^2 + y^2 - 2dx - 2\lambda y + k + \mu(dx + \lambda y - k) = 0;$$

puisqu'il passe par l'origine, il faudra que

$$k - \mu k = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mu = 1;$$

l'équation cherchée est donc

$$x^2 + y^2 - dx - \lambda y = 0. \qquad (3)$$

Le centre de ce cercle a une abscisse constante, égale à $\frac{d}{2}$; son lieu est donc la droite

$$x = \frac{d}{2},$$

perpendiculaire à $0x$ au milieu de OE.

3° Soit $y = \mu$ l'équation d'une des tangentes au cercle (1), parallèles à $0x$; l'équation aux abscisses de ses points de rencontre avec ce cercle est

$$x^2 - 2dx + \mu^2 - 2\lambda\mu + k = 0;$$

cette équation devant avoir ses racines égales, μ est racine de l'équation

$$d^2 - \mu^2 + 2\lambda\mu - k = 0.$$

On obtient donc l'équation de l'ensemble des deux tangentes parallèles à $0x$, en éliminant μ entre cette dernière condition et l'équation $y = \mu$, ce qui donne

$$y^2 - 2\lambda y + k - d^2 = 0. \qquad (4)$$

L'équation de l'ensemble des tangentes issues de l'origine A au cercle (1) est

$$(x^2 + y^2 - 2dx - 2\lambda y + k)k - (dx + \lambda y - k)^2 = 0. \qquad (5)$$

On obtiendra l'équation du lieu des points M et M' en éliminant λ entre les équations (4) et (5), ce qui donne

$$4k(x - d)^2 - (2dx + y^2 - k - d^2)^2 = 0.$$

k est positif par hypothèse; cette équation se décompose donc en un produit de deux facteurs réels

$$[2dx + y^2 - k - d^2 + 2\sqrt{k}(x - d)][2dx + y^2 - k - d^2 - 2\sqrt{k}(x - d)] = 0.$$

Une transformation facile montre qu'on obtient ainsi les deux coniques

$$x^2 + y^2 - (x - d)^2 + 2\sqrt{k}(x - d) - k = 0,$$
$$x^2 + y^2 - (x - d)^2 - 2\sqrt{k}(x - d) - k = 0,$$

ou bien

$$x^2 + y^2 - (x - d - \sqrt{k})^2 = 0,$$

et

$$x^2 + y^2 - (x - d + \sqrt{k})^2 = 0.$$

Sous cette forme on reconnaît deux paraboles ayant pour foyer commun l'origine A, et pour directrices les parallèles à $0y$ qui ont pour équation

$$x = d \pm \sqrt{k}.$$

[Ont résolu la même question : MM. P. Barroué; Benoist-Daubray; P. Carlier; Colard; P. Cornelis; J. Courtinat; M. Crye; J. Delpont; E. Foucart; G. Hiernaux; Jacquet; L. Jardin; J. Legrand; A. Marcenet; E. Montagut; A. Nayel; P. Plisson; M. Rebeix; P. Rousseau; P. Vincent; Watrin.]

4131. — *Une sphère est tangente au plan horizontal en un point* A; *elle passe par un point* B *qui a pour cote* 72mm *et qui se projette en un point* b *à une distance de* A *égale à* 96mm. (*Placer* A *et* b *sur une droite distante de* 115mm *du bord inférieur de la feuille,* A *à* 20mm *à gauche du milieu de cette droite et* b *à gauche de* A.)

Considérer le plan P *mené par le point* A *perpendiculairement au rayon* OB, *et le triangle équilatéral* CDE *inscrit à la section de cette sphère par ce plan, en plaçant horizontalement le côté* DE *de manière que sa cote soit inférieure à celle de* C. — *Sur la perpendiculaire en* C *au plan* P, *prendre un point* S *de cote égale à* 240mm.

La sphère étant supposée opaque, représenter la portion de son volume comprise dans le trièdre dont les arêtes sont les droites indéfinies SC, SD, SE.

Prenons la droite bA comme ligne de terre xy. La sphère tangente en A au plan horizontal et passant par B a pour projection verticale le cercle o' tangent en A à xy et passant par b'; on déduit de là le contour apparent horizontal o de la sphère.

Le plan P mené par A perpendiculairement à OB a sa trace verticale AP' perpendiculaire à $b'o'$; ce plan coupe la sphère suivant un cercle dont une moitié est rabattue suivant le demi-cercle Ac' sur le plan vertical; le côté DE du triangle équilatéral inscrit dans la section étant de bout, se rabat suivant une perpendiculaire à AP' qui coupe le rabattement de la section au point d_1 tel que $\mathrm{A}d_1 = \frac{\mathrm{A}c'}{2}$; le point d_1 se relève en (d, d') et $(cde, c'd'e')$ sont les projections du triangle CDE.

La perpendiculaire en C au plan P a sa projection verticale perpendiculaire en c' à AP'; le point (s, s') s'obtient en prenant sur cette perpendiculaire le point de cote 240mm. Remarquons en passant que le point le plus haut (γ, γ') de la sphère appartient aussi à l'arête SC.

Le plan vertical de projection étant un plan de symétrie de la sphère et du trièdre, il suffit de déterminer l'intersection de la sphère avec la face SDE et l'une des deux faces SCD et SCE.

Intersection par la face SDE. — Le plan de cette face étant de bout, son intersection avec la sphère est un cercle projeté verticalement suivant $p'q'$; en traçant le demi-cercle de diamètre $p'q'$, on a le rabattement d'une moitié de ce cercle sur le plan vertical. D'ailleurs, l'arête SD se rabattant autour de $p'q'$ suivant $s'd_2$, les arcs d_2p' et δ_1q' sont seuls utiles. Sur l'épure, on a relevé le point m_1 en (m, m') et la tangente m_1t' au demi-cercle $p'q'$ en $(mt, m't')$; on peut appliquer cette construction à la détermination de la tangente aux points limites (d, d') et (δ, δ'). Les points p et q sont les sommets du petit axe de la projection horizontale de cette section.

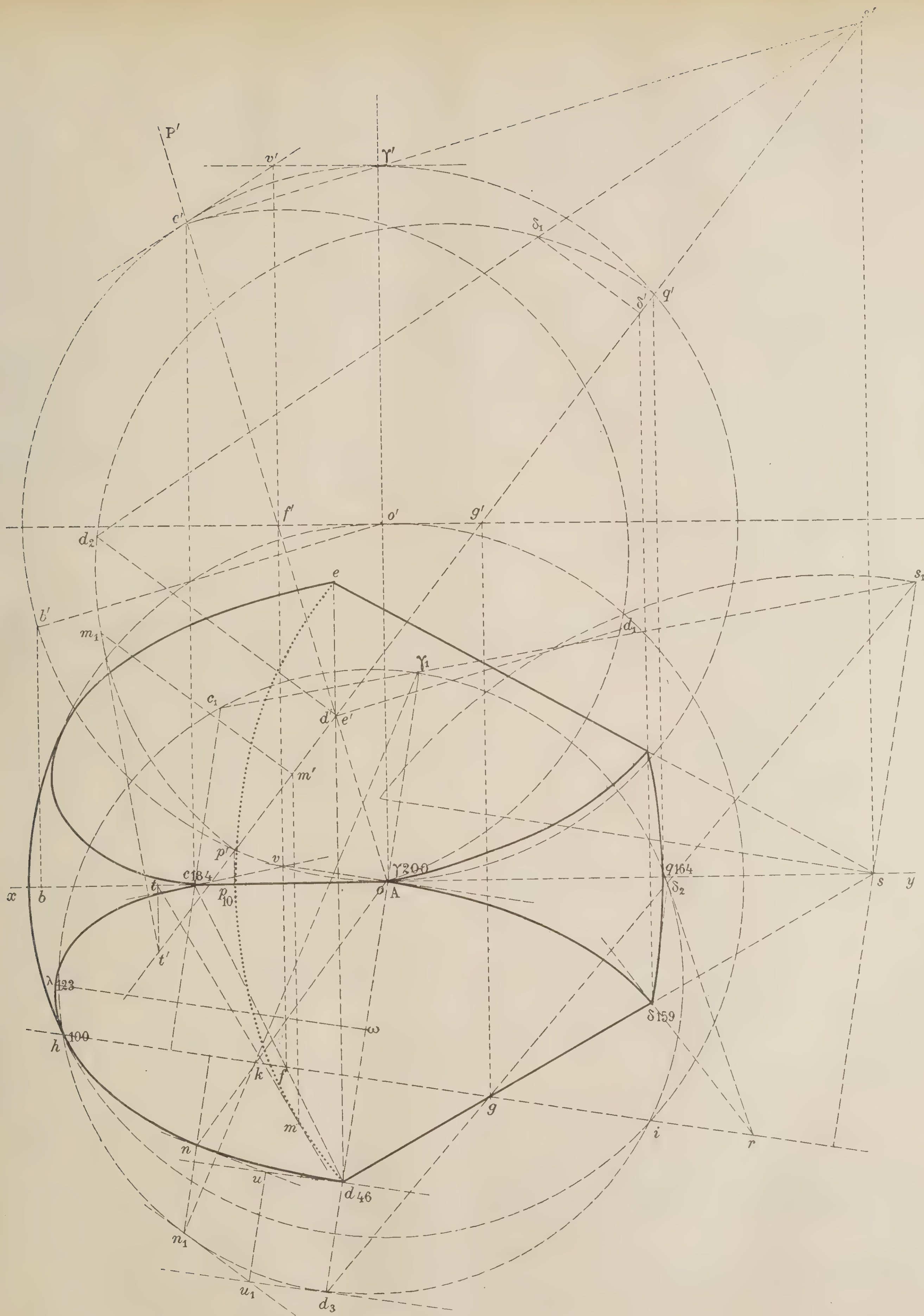
Intersection par la face SCD. — Cette face est coupée par le plan horizontal passant par (o, o') suivant l'horizontale $(fg, f'g')$. La droite fg détermine les points h et i de l'intersection situés sur le contour apparent de la sphère; un seul de ces points, h, est compris dans la face SCD. Rabattons maintenant cette face autour de fg sur le plan horizontal de (o, o'); l'arête SC se rabat suivant s_1c_1 et l'arête SD suivant s_1gd_3; d'ailleurs le rabattement de la section est représenté par le cercle c_1hi, dont il suffit de relever les arcs c_1hd_3 et $\gamma_1\delta_2$, compris dans l'angle $c_1s_1d_3$, rabattement de la face SCD.

En particulier, le point n_1 se relève en n au moyen du relèvement γk de la droite $n_1\gamma_1$; la tangente en n_1 au cercle c_1hi coupe la parallèle à fg menée par d_3 au point u_1, qui se relève en u sur la parallèle à fg issue de d: nu est donc la tangente en n à l'intersection.

Remarquons ici que les parallèles à fg issue de d et d_3 sont précisément les tangentes au point d et à son rabattement d_3. Cela résulte de ce que la droite AD étant perpendiculaire à la fois aux droites DC et DΓ de la face SCD, est perpendiculaire à cette face, de sorte que Ad est perpendiculaire à l'horizontale fg.

La tangente δ_2r au point δ_2 se relève en δr au moyen du point r situé sur la charnière. Cette construction n'étant pas applicable aux points c et γ, on remarque dans ce cas que les plans tangents à la sphère en ces points sont de bout; ces plans se coupent suivant une droite de bout projetée verticalement en v' et qui rencontre au point (v, v') l'horizontale de la face SCD issue du point (γ, γ') : vc et $v\gamma$ sont donc les tangentes cherchées.

D'ailleurs en Γ le plan tangent est horizontal, en sorte que la tangente γv est parallèle à fg. Les points γ et d sont les sommets du petit axe de l'ellipse, projection horizontale de la section, car en ces points la tangente est horizontale. Pour avoir le grand



P′
v′
Υ′
c′
δ₁
δ′
q′
f′
o′
g′
d₂
e
s₁
b′
d₁
m₁
Υ₁
c₁
d′ e′
m′
p′
v
c 184
Υ 200
q 164
x
b
t
p₁₀
o A
δ₂
s
y
t′
λ 123
δ 159
ω
h 100
k
f
g
m
i
r
n
u
d 46
n₁
u₁
d₃

axe, nous prenons le milieu ω de $d\gamma$ et menons $\lambda\omega$ parallèle à fg ; il reste à porter $\omega\lambda = \frac{d_3\gamma_1}{2}$ pour avoir le sommet λ du grand axe qui est dans la face SCD.

Toutes les lignes qui limitent le solide commun en projection horizontale sont vues, sauf l'arc d'ellipse dpe, qui est caché par les parties des faces SCD et SCE intérieures à la sphère.

(L. MESSENT.)

GÉOMÉTRIE

4314. — Propriétés des triangles dont les côtés sont en progression arithmétique.

Soient a, b, c les côtés d'un triangle supposés en progression arithmétique $(a > b > c)$. Appelons : M le milieu du côté moyen AC, K son point de contact avec le cercle inscrit, H et D les pieds de la hauteur et de la bissectrice intérieure relatives à ce côté ; h la hauteur BH, r et r_b les rayons des cercles inscrit et exinscrit dans l'angle B ; démontrer les relations

$$\frac{MK}{MH} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{MD}{MH} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{r}{h} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{r_b}{h} = 1.$$

Réciproquement, *si une des quatre relations précédentes est vérifiée, les côtés du triangle sont en progression arithmétique et b est le côté moyen.*

Applications :

I. *Construire toute la série des triangles variables dont les côtés forment une progression arithmétique de raison connue d.*

II. *Construire le triangle lorsqu'il est entièrement déterminé par une des conditions suivantes :*

1° *On donne la hauteur h ;*

2° *Le rayon r du cercle inscrit ;*

3° *Le rayon r_b du cercle exinscrit dans l'angle* B ;

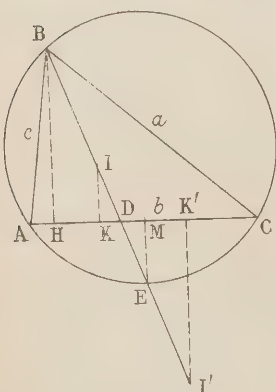
4° *Le rayon* R *du cercle circonscrit ;*

5° *La différence* $A - C = \delta$ *des angles* A *et* C ;

6° *La longueur de la bissectrice* BD ;

7° *La longueur de la médiane* BM, *etc.*

Construisons le triangle ABC répondant aux conditions imposées par l'énoncé, et marquons sur le côté moyen AC les points M, K, H, D et K'; soient I et I' les centres des cercles inscrit et exinscrit dans l'angle B.



1° La projection MH de la médiane relative au côté moyen AC sur le côté moyen est égale au double de la raison de la progression.

En effet,

$$\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 = 2.AC.MH ;$$

d'où

$$MH = \frac{(b+d)^2 - (b-d)^2}{2b} = 2d,$$

en appelant d la raison de la progression.

2° La distance MK du pied de la médiane BM au point de contact K du côté moyen avec le cercle inscrit est égale à la raison. En effet,

$$MK = CK - CM = p - c - \frac{b}{2} = \frac{2p - 2c - b}{2}$$
$$= \frac{a - c}{2} = \frac{2d}{2} = d.$$

3° La distance MD du pied de la médiane au pied de la bissectrice BD est égale à la moitié de la raison. En effet,

$$DM = CD - \frac{b}{2} ;$$

mais
$$\frac{CD}{a} = \frac{DA}{c} = \frac{b}{a+c} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2} ;$$

donc
$$CD = \frac{a}{2},$$

et
$$DM = \frac{a-b}{2} = \frac{d}{2}.$$

Il en résulte bien $\frac{MK}{MH} = \frac{1}{2}$, $\quad \frac{MD}{MH} = \frac{1}{4}$.

4° Les triangles semblables DIK, DBH donnent alors

$$\frac{DI}{DB} = \frac{DK}{DH} = \frac{MK - MD}{MH - MD} = \frac{1}{3} ;$$

donc
$$IK = \frac{BH}{3}, \qquad r = \frac{h}{3}.$$

5° On sait que le point E, milieu de AC, est équidistant des centres I et I' des cercles inscrit et exinscrit. De ce qui précède on conclut aisément

$$DH = MH - MD = MK' + MD = DK',$$

donc
$$I'K' = BH, \qquad \text{ou} \qquad r_b = h.$$

Donc, en résumé, si les côtés du triangle sont en progression arithmétique, on a

$$\frac{MK}{MH} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{MD}{MH} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{r}{h} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{r_b}{h} = 1.$$

Réciproquement, si pour un triangle ABC *une* des relations précédentes est vérifiée, les côtés du triangle sont en progression arithmétique, et b est le côté moyen.

Soit d'abord $\frac{MK}{MH} = \frac{1}{2}$. On a vu que

$$MK = \frac{a-c}{2}, \qquad MH = \frac{a^2 - c^2}{2b} ;$$

de la relation supposée, on conclut

$$\frac{b}{a+c} = \frac{1}{2}, \qquad 2b = a + c, \qquad b - c = a - b ;$$

les côtés sont donc bien en progression arithmétique.

On procèderait d'une façon analogue si on supposait $\frac{MD}{MH} = \frac{1}{4}$.

Soit maintenant $\frac{r}{h} = \frac{1}{3}$; la figure montre alors que

$$3DK = DH,$$

ou
$$3(MK - MD) = MH - MD,$$

ou
$$3MK - MH = 2MD ;$$

mais
$$MK = \frac{a-c}{2}, \qquad MH = \frac{a^2 - c^2}{2b}, \qquad MD = \frac{b(a-c)}{2(a+c)} ;$$

il vient donc
$$\frac{3(a-c)}{2} - \frac{a^2 - c^2}{2b} = \frac{b(a-c)}{a+c},$$

ou
$$(a-c)(a+c-b)(a+c-2b) = 0.$$

Or, on exclut les cas où $a = c$, $a + c = b$; il reste donc

$$a + c = 2b, \qquad a - b = b - c.$$

Ce calcul se fait encore plus simplement en remarquant que $2S = bh = 2pr$.

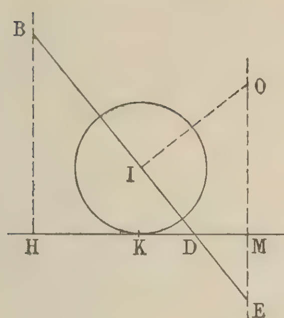
On raisonnerait d'une façon analogue pour le quatrième cas.

Applications.

I. — *Construire toute la série des triangles variables dont les côtés forment une progression arithmétique de raison connue d.*

On porte à partir d'un point M sur une droite les longueurs

$$MD = \frac{d}{2}, \qquad MK = d, \qquad MH = 2d.$$



Par D on mène une sécante quelconque rencontrant en B, I, E les perpendiculaires élevées à la droite en H, K, M. On connaît le sommet B du triangle, le cercle inscrit de centre I, le cercle circonscrit dont le centre O se trouve sur la perpendiculaire élevée au milieu de EB. On peut donc trouver les sommets A et C de trois manières, soit en menant de B les tangentes au cercle I, soit en traçant le cercle circonscrit de rayon OE, soit en décrivant de E comme centre une circonférence de rayon EI.

II. — Nous n'insisterons pas sur la construction des triangles signalés; elle se ramène toujours très simplement à la détermination du point B à l'aide des données.

[Ont résolu cette question ; MM. Perret, instituteur-adjoint à Boigé-la-Ville ; Laguarigue de Survilliers ; Barroué, lycée de Brest ; J. Sire, collège de Lure ; Remondet, instituteur à Augisey ; Hiernaux, école normale de Châlons-sur-Marne ; V. R. T., école normale de Périgueux ; J. Quilichini ; L. P., à Amiens ; P. Tribier, lycée de Guéret.]

TRIGONOMÉTRIE

4308. — *Trouver la limite de l'expression*

$$\frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2}$$

lorsque x tend vers a.

Première méthode. — Si l'on fait $x = a$ dans l'expression, elle se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Pour éviter cette forme, remarquons que le numérateur de l'expression peut s'écrire

$$\sin^2 x - \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$= \frac{\cos 2a - \cos 2x}{2} = \sin(x + a).\sin(x - a.)$$

Par suite,

$$\frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2} = \frac{\sin(x+a)}{x+a}.\frac{\sin(x-a)}{x-a}.$$

Quand x tend vers a, l'arc $x - a$ tend vers zéro, et le rapport de son sinus à l'arc, vers 1. Le produit précédent a donc dans ce cas pour limite

$$\lim.\frac{\sin(x+a)}{x+a} = \frac{\sin 2a}{2a}.$$

Seconde méthode. — On sait que pour $x = a$, l'expression a la même limite que le rapport des dérivées de ses deux termes. On a donc

$$\lim.\frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2} = \lim.\frac{2\sin x.\cos x}{2x} = \frac{\sin 2a}{2a}.$$

(G. Bernard, lycée Saint-Louis.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Amblard ; E. Ardin-Delteil ; L. Barberot ; F. Beynas ; R. Bonnefont-Pédufau ; V. Bourquin ; E. Boutaud ; M. Boutaud ; V. Cambureanu ; R. Campion ; J. Chantre ; F. Chuberre ; P. Courbière ; R. Dautry ; G. Dazier ; J. Delpont ; L. Gourdet ; G. Hiernaux ; Jenatzy ; J. Jubin ; R. Larsonneur ; A. Larue ; E. Laudat ; E. Layes ; Leulliot ; L. Magne ; A. Maitre ; J. Méhu ; E. Menissier ; F. Morel ; J. Orsini ; F. Pégorier ; G. Perdrizet ; J. Pillard ; S. Pochon ; P. Reboul ; Robin ; E. Sevin ; E. Sinturel ; E. Vaicle ; E. Villemagne.]

QUESTIONS PROPOSÉES

4339. — Trois hommes A, B, C et leurs trois femmes D, E, F (énumérés dans un ordre quelconque) vont au marché et achètent un certain nombre d'objets.

Chaque personne paie chaque objet un nombre de francs égal au nombre d'objets qu'elle achète.

Chaque mari achète pour 63fr de plus que sa femme. De plus :
A achète 23 objets de plus que D ;
B achète 11 objets de plus que E.
Trouver la femme de chaque mari.

(A. Coussat, à Lyon.)

4340. — Etant donnée l'aire d'une zone sphérique à une base, montrer comment varie le volume compris entre cette zone et le plan de la base quand on fait varier le rayon de la sphère dont fait partie ce volume.
(*Bacc. lettres-sciences, Caen, avril 1897.*)

4341. — On a un trapèze rectangle ABCD dont on connait la surface, $\frac{4}{10}$ de décimètre carré, le rapport des deux bases, $\frac{2}{3}$ et la somme de ces mêmes bases, $0^m,10$.

On fait exécuter à ce trapèze une révolution complète autour de la droite xy passant par le côté DC et l'on suppose matériel le volume qu'il engendre. Ce volume, placé à l'extrémité A d'un fléau rectiligne, est équilibré par un poids de 750gr placé à l'autre extrémité B du fléau. Si l'on place au contraire ce volume à l'extrémité B, il faut un poids de 1978gr,032 en A pour avoir l'équilibre.

Calculer d'après cela : 1° le poids du solide ; 2° sa densité ; le rapport des deux bras du fléau.

(*Concours de vérificateur-adjoint des poids et mesures, 1898.*)

4342. — On considère deux cercles O et O′ se coupant en A et B. On joint A et B à un point quelconque C du cercle O par deux droites qui rencontrent le cercle O′ en D′ et E′ :

1° Calculer la longueur D′E′ et en déduire les lieux du pôle N′ et du milieu M′ de D′E′ ;

2° En joignant de même A et B à un point quelconque C′ du cercle O′ et appelant M le point analogue à M′, démontrer que les deux cercles de centres O et O′ et de rayons OM et O′M′ ont les mêmes centres d'homothétie que les deux cercles donnés.

(Luiz Hémois.)

4343. — On considère un triangle ABC, le cercle circonscrit de centre O et les symétriques A′, B′, C′ des sommets par rapport au centre O. Démontrer que les droites qui joignent un point quelconque du cercle aux points A′, B′, C′ coupent les trois côtés du triangle ABC en trois points α, β, γ en ligne droite avec le point O.

Généraliser pour le cas d'une conique.
Réciproque.

(A. Buisson, collège d'Issoire.)

4344. — On donne l'équation

$$(2\cos\alpha - 1)x^2 - 4x + 4\cos\alpha + 2 = 0,$$

α désignant un angle aigu.
1° Pour quelles valeurs de α les racines sont-elles réelles?
2° Quels sont les signes des racines pour ces valeurs de α?
3° Rendre le produit des racines calculable par logarithmes.

(*Bacc. lettres-math., Nancy, avril 1897.*)

4345. — Un tube cylindrique de longueur L est ouvert à ses deux extrémités. Une partie, de longueur l, est plongée verticalement dans une cuve à mercure. On ferme alors et on maintient fermé avec le doigt l'orifice supérieur du tube, puis on élève verticalement le tube tout en-

tier jusqu'à ce que la partie inférieure cesse de plonger dans le mercure de la cuve. On demande de calculer la longueur x comprise entre les niveaux que le mercure occupait dans le tube dans la première et dans la seconde position. On désigne par H la hauteur du baromètre pendant l'expérience.

Application numérique. — 1° $L = 0^m,85$, $l = 0^m,32$, $H = 0^m,74$.
2° $L = 0^m,80$, $l = 0^m,60$, $H = 0^m,80$.

(*Bacc. lettres-math., Dijon, juillet 1897*)

4346. — A l'un des plateaux d'une balance hydrostatique, on suspend, par un fil de poids négligeable, un morceau de zinc plongeant dans de l'eau : le poids de ce zinc dans l'air est de 200^{gr}.

A l'autre plateau, on suspend de la même façon un morceau de platine plongeant dans du mercure.

1° Tout l'appareil étant à la température de 0°, quel doit être le poids du morceau de platine pour que la balance soit en équilibre d'elle-même, sans poids ni tare ?

2° La température de tout le système étant alors portée à 50°, quel poids doit-on mettre pour rétablir l'équilibre, et dans quel plateau de la balance ?

Données : Densité de l'eau à 0° . . . 0,999871 ;
— du mercure à 0° . . . 13,596 ;
— du zinc à 0°. . . . . 6,8 ;
— du platine à 0°. . . . 21,16 ;
— de l'eau à 50° . . . . 0,9882.

Coefficient de dilatation absolue du mercure entre 0° et 100° . . $\frac{1}{5550}$;
— — linéaire du zinc . . . . . . 0,0000294 ;
— — — platine. . . . . . 0,0000087.

(*Bacc. lettres-sciences, Marseille, novembre 1897.*)

BIBLIOGRAPHIE

Cours de Géométrie cotée à l'usage des candidats à l'École spéciale militaire de Saint-Cyr, par N. Charruit, ancien élève de l'École normale supérieure, professeur agrégé au lycée de Lyon. — Gr. in-8°. Paris, *Nony et Cie*.

Les professeurs chargés de la préparation mathématique des candidats à l'École spéciale militaire sont tenus de développer intégralement le programme des connaissances exigées pour l'admission et de n'en négliger aucun point, quelle que soit l'opinion que chacun puisse avoir, en son for intérieur, sur les récentes modifications qu'on lui a fait subir. Et s'il est permis de regretter la disparition du calcul des dérivées et des quelques notions de géométrie analytique si utiles dans l'étude de la variation des fonctions, on n'en doit pas moins continuer à enseigner avec ardeur la formule des annuités et celle des amortissements.

Nous sommes heureux cependant de pouvoir louer sans réserve certains changements apportés au nouveau programme, comme, par exemple, la suppression de la géométrie descriptive et son remplacement par la méthode des plans cotés, la seule employée en topographie.

M. Charruit, qu'il est inutile de présenter aux lecteurs de ce journal, a bien voulu écrire un livre de géométrie cotée s'adressant particulièrement aux futurs Saint-Cyriens et les faire profiter de son expérience et de son talent. L'entreprise n'était pas sans difficultés. En effet, les cours de marine exceptés, on ne consacrait jusqu'ici, dans les classes de mathématiques de nos lycées, que fort peu de temps à l'enseignement des quelques principes fondamentaux de la géométrie cotée, de sorte qu'à l'apparition du nouveau programme de Saint-Cyr, chaque professeur de mathématiques a dû songer à faire lui-même son cours de cotée. Ce m'est un plaisir de me rappeler mes entretiens avec M. Charruit sur ce sujet, alors que j'étais encore son collègue au cours de Saint-Cyr du lycée Ampère. Il m'a été permis ainsi d'assister à la genèse de ce livre, et si des voix plus autorisées que la mienne peuvent le louer comme il convient, je puis, mieux que personne, dire avec quel soin il a été composé et avec quel profond sentiment des besoins des élèves il a été écrit.

L'ouvrage débute par une brève exposition des procédés de la géométrie descriptive, destinée à faire comprendre la théorie des changements de plans de projection, dont la connaissance est indispensable dans la suite.

Après cela, l'auteur traite directement chaque question du programme, en ayant soin de montrer comment, dans chaque problème, il y a deux parties distinctes : la *solution géométrique* et la construction de cette solution par l'application de la méthode des plans cotés, c'est-à-dire la *solution graphique*.

A l'inverse de ce que font plusieurs auteurs, M. Charruit n'a presque jamais recours au calcul. Nous estimons avec lui qu'on a plus vite fait d'exécuter un rabattement pour trouver la distance de deux points que d'employer une formule où il faut faire deux élévations au carré, une addition et une extraction de racine carrée. Il y a ici un préjugé qu'il importe de déraciner. Il semble en effet que l'emploi d'une formule soit préférable quand il s'agit d'avoir un résultat exact, car on peut obtenir la valeur approchée de la racine carrée d'un nombre avec l'approximation que l'on veut, mais un tel résultat n'est intéressant que si les données sont elles-mêmes connues exactement, ce qui est rarement le cas. En effet, à quoi bon posséder la cinquième décimale d'un nombre, si les données ne permettent pas d'affirmer qu'on est sûr de la troisième ou de la seconde ? L'auteur se rencontre ici avec M. Klein. Le grand géomètre allemand a en effet exprimé cette opinion au congrès de Chicago (*), que le rapport plus ou moins intime de toute science appliquée avec les mathématiques peut être caractérisé d'après le degré de rigueur obtenu, ou qu'il est possible d'obtenir, dans les résultats numériques relatifs à cette science. De telle sorte que si l'on voulait faire reposer une classification de ces sciences sur le nombre moyen de décimales employées dans chacune d'elles, l'astronomie serait au premier rang ; la chimie se placerait à l'autre extrémité de l'échelle, et la géométrie descriptive entre ces deux extrêmes.

Après l'étude de la ligne droite et du plan, vient l'exposé des méthodes générales. M. Charruit a réuni ensuite dans un seul chapitre tous les problèmes d'angle et de distance où l'on a à utiliser les méthodes générales. Quelques claires notions sur la représentation des polyèdres, sur leurs sections planes et l'intersection des polyèdres terminent la seconde partie. Nous félicitons l'auteur d'avoir renouvelé les exemples qu'il donne et de les avoir si bien choisis. A force de voir les meilleurs ouvrages reproduire continuellement l'épure du tas de sable et celle du palier avec rampe, on finissait par croire que la géométrie avait été inventée uniquement pour résoudre ces deux respectables problèmes.

La troisième partie est consacrée à l'étude des surfaces inscrites au programme, c'est-à-dire du cône, du cylindre et des surfaces de révolution. Ce sont à peu près les seules pour lesquelles un raisonnement élémentaire permet d'établir l'existence du plan tangent en un point. Les démonstrations de l'auteur sont simples et rigoureuses. Le lecteur trouvera dans cette partie du livre tout ce qui concerne les propriétés élémentaires des surfaces et de leurs plans tangents.

La quatrième partie concerne les sections planes des surfaces. L'auteur a exposé avec un rare bonheur les méthodes générales ; nous signalerons en particulier celles qu'il donne pour la sphère et pour le cône et le cylindre de révolution. Comme applications, se trouvent quelques exemples d'intersection d'une surface et d'un polyèdre.

Les théorèmes de Dandelin sur les sections planes du cône et du cylindre de révolution sont, non seulement énoncés, mais soigneusement démontrés, ce qui est une bonne chose.

Un chapitre est réservé aux questions d'angles et de distances et à la manière dont il est possible de les résoudre par l'application des propriétés des surfaces de révolution ; il se termine par la résolution des trièdres.

Enfin deux notes complètent l'ouvrage : l'une, où M. Charruit établit par des considérations fort simples que la projection orthogonale d'une conique sur un plan est une conique de même nature, et l'autre, fort intéressante, où il détermine une section plane d'un cône de révolution en prenant pour plan de base un plan qui coupe le cône suivant une ellipse se projetant horizontalement suivant un cercle.

En terminant l'analyse rapide des matières contenues dans ce volume si bien fait, si pratique, si intéressant, et qui sera, nous en avons la conviction, si utile aux jeunes gens à qui il s'adresse, nous sommes heureux d'adresser nos sincères félicitations à notre excellent collègue.

A. MALUSKI.

(*) Conférences sur les mathématiques faites au Congrès de mathématiques à Chicago, par Félix Klein ; VIe conférence.

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet, Facdouel, Dir.

22e Année. — N° 15. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 1er Mai 1898.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

ÉCOLE NAVALE

CONCOURS DE 1897

4125. — *Déterminer la hauteur x et la base $2y$ d'un triangle isocèle, connaissant les rayons r et R des cercles inscrit et circonscrit. — Condition à laquelle doivent satisfaire $2R$ et $2r$ pour que la base du triangle soit moyenne proportionnelle entre ces quantités.*

Première solution. — On sait que dans tout triangle

$$S = \frac{abc}{4R} = pr.$$

Or ici
$$S = \frac{1}{2}x.2y = xy\,;$$

$$a = 2y,\quad b = c = \sqrt{x^2+y^2},\quad p = \frac{1}{2}(a+b+c) = y + \sqrt{x^2+y^2}.$$

Les deux équations du problème sont donc

$$2Rxy = y(x^2+y^2)\,(*), \qquad (1)$$

$$xy = (y + \sqrt{x^2+y^2})r. \qquad (2)$$

Les inéquations de condition nécessaires sont $x > 0$, $y > 0$; elles sont aussi suffisantes. Supposons en effet que le système des équations (1) et (2) fournisse pour x et y des valeurs positives; construisons le triangle ayant x et y pour côtés de l'angle droit; on en déduit aisément le triangle isocèle de hauteur x et de base $2y$. Puisque les valeurs de x et y satisfont à (1), le rayon du cercle circonscrit à ce triangle sera R; puisqu'elles satisfont à (2), le rayon du cercle inscrit sera r. Ce triangle satisfait donc aux conditions imposées.

Pour résoudre le système, on écrit la seconde équation

$$y(x-r) = r\sqrt{x^2+y^2},$$

et on élève ses deux membres au carré, ce qui donne

$$y^2(x-r)^2 = r^2(x^2+y^2)\,;$$

des solutions de cette nouvelle équation on ne devra prendre que celles qui rendent positif le produit $y(x-r)$; comme on doit déjà avoir $y > 0$, il faut donc $x > r$.

On en tire
$$y^2 = \frac{r^2x}{x-2r}\,;$$

portant cette valeur dans (1), après avoir supprimé dans les deux membres y qui ne peut être nul, il vient

$$2Rx = x^2 + \frac{r^2x}{x-2r}\,;$$

supprimant encore x qui ne peut être nul, on voit que finalement x et y sont fournies par le système des équations

$$(2R-x)(x-2r) = r^2, \qquad (3)$$

$$y^2 = \frac{r^2x}{x-2r}, \qquad (4)$$

à condition que $y > 0$, $x > r$.

La condition $y > 0$ se traduit évidemment par $x > 2r$, condition qui entraîne $x > r$.

Le problème admet donc autant de solutions que l'équation (3) a de racines supérieures à $2r$. Mais la forme de l'équation (3) montre que toute racine réelle de cette équation satisfait à la condition

$$(2R-x)(x-2r) > 0,$$

ou
$$2r < x < 2R.$$

Il en résulte que toute racine réelle de cette équation est une solution du problème.

Cette équation s'écrit $x^2 - 2(R+r)x + r(4R+r) = 0$.

La condition de réalité est

$$(R+r)^2 - r(4R+r) \geqslant 0,$$

ou bien
$$R(R-2r) \geqslant 0,$$

c'est-à-dire
$$R \geqslant 2r,$$

condition bien connue. Le problème admet alors deux solutions.

Pour $R = 2r$, on trouve $x = \frac{3}{2}R$; les deux solutions se confondent alors avec le triangle équilatéral inscrit.

La condition imposée s'écrit

$$(2y)^2 = 2R.2r \quad \text{ou} \quad y^2 = Rr\,;$$

portant cette valeur de y^2 dans (4), il vient

$$R(x-2r) = x,$$

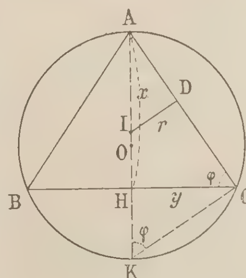
ou
$$x = \frac{2Rr}{R-r}.$$

Exprimons que cette valeur de x satisfait à l'équation (3); on trouve

$$r = R(2\sqrt{3}-3).$$

(P. Barroué, lycée de Brest.)

Deuxième solution. — Soit ABC le triangle isocèle inscrit dans le cercle de rayon R. Prenons pour inconnue l'angle à la base φ.



La figure donne immédiatement

$$AC = 2R\sin\varphi,$$

$$x = AC\sin\varphi = 2R\sin^2\varphi \qquad (1)$$

$$y = AC\cos\varphi = 2R\cos\varphi\sin\varphi\,; \qquad (2)$$

$$\frac{r}{KC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AC-CH}{AC},$$

c'est-à-dire

$$\frac{r}{2R\cos\varphi} = \frac{2R\sin\varphi - 2R\sin\varphi\cos\varphi}{2R\sin\varphi}\,;$$

ou, en supprimant haut et bas $2R\sin\varphi$ qui n'est point nul,

$$r = 2R\cos\varphi(1-\cos\varphi). \qquad (3)$$

(*) L'équation $2Rx = x^2 + y^2$ s'écrit à la simple inspection de la figure.

Le problème est résolu par les équations (1), (2) et (3) ; on démontrera, comme précédemment, que les inéquations de conditions nécessaires et suffisantes sont

$$0 < \cos\varphi < 1.$$

Or la forme de l'équation (3) montre que toute racine réelle de cette équation du second degré en $\cos\varphi$ vérifie la condition

$$\cos\varphi(1-\cos\varphi) > 0,$$

ou bien

$$0 < \cos\varphi < 1.$$

Toute racine réelle de (3) est donc une solution du problème.

Cette équation s'écrit

$$2R\cos^2\varphi - 2R\cos\varphi + r = 0.$$

Elle aura ses racines réelles si

$$R^2 - 2Rr \geqslant 0,$$

ou

$$R \geqslant 2r.$$

Pour $R = 2r$, la valeur commune des racines est $\frac{1}{2}$; donc $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ ou $\varphi = \frac{\pi}{3}$; une seule solution, le triangle équilatéral inscrit.

La condition imposée s'écrit

$$(2R\sin\varphi\cos\varphi)^2 = Rr,$$

ou

$$r = 4R\sin^2\varphi\cos^2\varphi. \qquad (5)$$

Portant cette valeur dans (3) et remplaçant $\sin^2\varphi$ par $1-\cos^2\varphi$, on trouve

$$4R\cos^2\varphi(1-\cos^2\varphi) = 2R\cos\varphi(1-\cos\varphi).$$

Supprimant les facteurs $\cos\varphi$ et $1-\cos\varphi$ qui ne peuvent être nuls, sans quoi il n'y aurait plus de triangle, il vient

$$2\cos\varphi(1+\cos\varphi) = 1,$$

ou

$$2\cos^2\varphi + 2\cos\varphi - 1 = 0.$$

La racine positive de cette équation étant seule acceptable, on trouve

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}-1}{2},$$

d'où

$$\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi = 1 - \frac{2-\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ces valeurs portées dans (5) donnent

$$r = R\sqrt{3}(2-\sqrt{3}).$$

[Ont résolu la même question : MM. A. Colard ; P. Cornelis ; Crozemarie ; L. Curt ; J. Delpont ; M. Drovin ; H. Fajon ; A. Franqueville ; G. Hiernaux ; Cl. Limouzin ; J. Méhu ; M. Oger ; A. Pavard ; F. Pégorier ; E. Roncaglia ; P. Vincent ; J. Wittner.]

4127. — *Une sphère de rayon donné* $R = 45^{mm}$ *est tangente au plan horizontal de cote zéro en un point* A. *Par ce point* A *on mène une droite* d *faisant avec le plan horizontal un angle de* 60°, *et l'on considère le cône de révolution dont cette droite* d *est l'axe et dont l'angle au sommet est égal à* 15°.

Tracer le contour apparent de ce cône et les projections de son intersection avec la sphère : 1° sur le plan horizontal ; 2° sur un plan vertical perpendiculaire à la projection de la droite d *sur le plan horizontal ; 3° sur un plan vertical parallèle à cette droite.*

On supposera dans le tracé que la sphère est un corps opaque dont on a enlevé la partie commune à la sphère et au cône.

Sur le plan horizontal de cote zéro, la sphère a pour contour apparent le cercle A de rayon $R = 45^{mm}$. Soient alors xy et x_1y_1 les lignes de terre des deux plans verticaux parallèle et perpendiculaire à la droite d ; sur chacun de ces plans, le contour apparent de la sphère est un cercle de même rayon que le cercle A et tangent en a' à xy ou en a'' à x_1y_1.

Contours apparents du cône. — La droite D étant de front par rapport au plan vertical xy a pour projection sur ce plan la droite $a'd'$ qui fait avec xy un angle de 60°. (Le point d' s'obtient immédiatement en prenant $i'd' = R$). En joignant a' au milieu b' de l'arc $i'd'$, la droite $a'b'$ est une des génératrices de contour apparent du cône, car $\widehat{b'a'd'} = \frac{30°}{2} = 15°$; de même en joignant a' au milieu c' de l'arc $i'd'a'$, on a la seconde génératrice, puisque $\widehat{c'd'} = \frac{\widehat{d'i'}}{2} = \widehat{d'b'}$.

Pour obtenir le contour apparent horizontal du cône, il faut mener à cette surface les plans tangents verticaux. A cet effet, considérons le plan de bout $P\alpha R'$ qui passe par d' et est perpendiculaire à l'axe D du cône ; ce plan coupe la verticale de A au point (i, i'), situé également sur la sphère, et il coupe le cône suivant un cercle dont une moitié est rabattue sur le plan de front passant par D. La tangente $i'e_1$ menée de i à ce cercle représente le rabattement d'une des tangentes au cône située dans un plan vertical passant par A ; par suite, le point e_1 relevé en (e, e') fournit un second point d'une des génératrices de contour apparent horizontal du cône. Comme le point e_1 est sur le cercle de diamètre $i'd'$, le point (e, e') appartient à la sphère, c'est-à-dire à l'intersection.

Pour avoir le contour apparent sur le plan vertical x_1y_1, il faut mener les plans tangents au cône perpendiculaires à ce plan vertical. Un de ces plans coupe le plan $P\alpha R'$ suivant une droite rabattue sur le plan de front passant par A suivant la tangente αf_1 à la demi-base du cône ; on en déduit l'une des génératrices $(Af, a'f', a''f'')$ de contour apparent vertical.

Le point de rencontre de cette génératrice avec la sphère s'obtient en rendant la génératrice parallèle au plan vertical x_1y_1 : $a''f''$ vient en $a''f''_1$, et le point de rencontre est en g''_1 sur le cercle o'', de sorte que (g, g') est le point cherché.

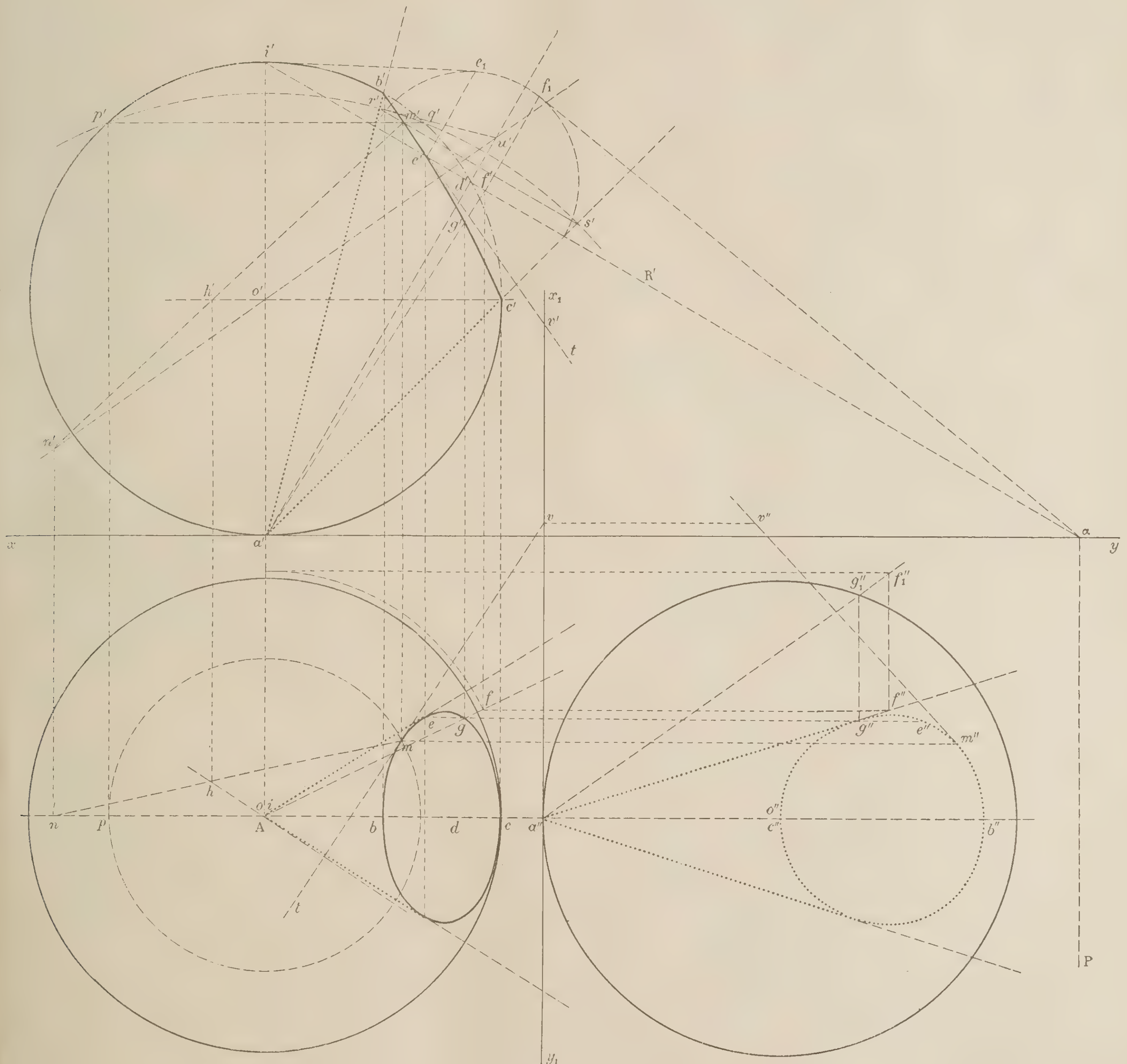
Intersection du cône et de la sphère. — Nous connaisons déjà de cette intersection les quatre points (b, b', b''), (c, c', c''), (e, e', e'') et (g, g', g'').

Cherchons maintenant un point quelconque et la tangente en ce point. Pour cela, coupons la sphère et le cône par une sphère de centre A ; les sections sont deux cercles de bout projetés verticalement en $p'q'$ et $r's'$; l'intersection m' de $p'q'$ et $r's'$ fournit la projection verticale des deux points communs à ces cercles ; en traçant le cercle A, projection horizontale du cercle $p'q'$, on en déduit la projection m de l'un des points de l'intersection.

La tangente au point (m, m'), perpendiculaire à chacune des normales en ce point à la sphère et au cône, est perpendiculaire à leur plan. La normale à la sphère est $(mo, m'o')$; la normale au cône rencontre l'axe $a'd'$ au même point u' que la normale au point r' qui est perpendiculaire à la génératrice $a'b'$. Dès lors, $o'u'$ est la trace du plan des normales sur le plan de front mené par A, et en menant $m't'$ perpendiculaire à $o'u'$, on trouve la tangente en m' à la projection verticale de l'intersection. Cette construction est applicable en particulier aux points limites b' et c', mais il convient de remarquer que dans ce cas les tangentes ainsi obtenues ne sont plus les projections verticales des tangentes aux points correspondants de l'intersection, ces dernières étant de bout. La tangente en m est perpendiculaire à l'horizon-

tale issue de (o, o) du plan des normales ; comme la normale $m'u'$ au cône a sa trace horizontale sur le plan horizontal passant par o' en dehors des limites de l'épure, on la remplace par la droite $(mn, m'n')$, située dans le plan des normales, et dont la trace sur le plan précité est (h, h'), de sorte que la tangente mt est perpendiculaire à oh. La tangente $(mt, m't')$ rencontre le plan vertical de trace x_1y_1 au point (v, v', v'') : $m''v''$ est donc la tangente en m'' à la seconde projection verticale.

Ponctuation. — L'intersection de la sphère et du cône est évidemment vue dans les deux premières projections et cachée par la sphère dans la seconde projection verticale ;



quant aux contours apparents du cône, ils sont tous cachés.

Remarque. — La sphère et le cône de révolution étant deux surfaces du second degré, on démontre analytiquement que la courbe d'intersection est une courbe gauche du 4ᵉ degré ; comme ici les deux surfaces ont un plan de symétrie commun, cette courbe se projette sur ce plan suivant une courbe de degré moitié moindre, c'est-à-dire suivant une conique, qui est, dans le cas considéré, un arc de parabole.

(L. MESSENT.)

4128. — *Calculer les valeurs de x, comprises entre zéro et 180°, satisfaisant à l'équation*

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg}^3(\varphi + x) \qquad (1)$$

pour les valeurs de φ, comprises entre zéro et 360°, données par l'équation

$$\sin^2\varphi = \operatorname{tg}^5 252°20'24'',2 \times \cos^3 278°12'13'',4. \qquad (2)$$

En désignant par a le second membre de l'équation (2), cette équation donne

$$\sin\varphi = \pm\sqrt{a}.$$

Soit α l'angle aigu dont le sinus est égal à $\sqrt{a}$; l'équation précédente donnera pour φ les quatre valeurs

$$\varphi_1 = \alpha, \qquad \varphi_2 = \pi - \alpha, \qquad \varphi_3 = \pi + \alpha, \qquad \varphi_4 = 2\pi - \alpha ;$$

on obtient donc pour $\frac{\varphi}{2}$ les quatre valeurs

$$\frac{\varphi_1}{2} = \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{\varphi_2}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{\varphi_3}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{\varphi_4}{2} = \pi - \frac{\alpha}{2}.$$

Le second membre de (1) n'admet donc que deux valeurs distinctes : $\sin\frac{\alpha}{2}$ correspondant à φ_1 et φ_4 ; $\cos\frac{\alpha}{2}$ correspondant à φ_2 et φ_3.

Remplaçant φ successivement par φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, on se trouve ramené à résoudre les quatre équations

$$\operatorname{tg}^3(\alpha + x) = \sin\frac{\alpha}{2}, \quad \operatorname{tg}^3(x - \alpha) = \cos\frac{\alpha}{2}, \quad \operatorname{tg}^3(x + \alpha) = \cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg}^3(x - \alpha) = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Les quantités $\sin\frac{\alpha}{2}$ et $\cos\frac{\alpha}{2}$ étant certainement positives, calculons les angles aigus β_1 et β_2 tels que

$$\operatorname{tg}^3\beta_1 = \sin\frac{\alpha}{2}, \qquad \operatorname{tg}^3\beta_2 = \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Les équations précédentes admettent alors pour solutions

$$x_1 = k\pi + \beta_1 - \alpha, \quad x_2 = k\pi + \beta_2 + \alpha, \quad x_3 = k\pi + \beta_2 - \alpha,$$

$$x_4 = k\pi + \beta_1 + \alpha.$$

L'angle x devant être compris entre 0 et π, on voit immédiatement qu'il faut prendre $k = 0$ dans x_2 et x_4. On prendra $k = 0$ ou 1 dans les autres valeurs, suivant que les angles $\beta_1 - \alpha$ et $\beta_2 - \alpha$ sont positifs ou négatifs.

Calcul de α.

$$2 \log \sin\alpha = 5 \log \operatorname{tg} 72°20'24'',2 + 3 \log \cos 81°47'46'',6$$

[on a ramené au premier quadrant tous les angles de l'équation (2)].

	log tg 72°20'20''	= 0,4970365	
	4''	2912	
	0,2	1456	
	log tg 72°20'24'',2	= 0,4970671	
	log cos 81°47'50''	= $\bar{1}$,1543537	146,1
	— 3'',4	496,7	3,4
	log cos 81°47'46'',6	= $\bar{1}$,1544034	
D = 9	$\bar{1}$,9742719	= log sin 70°28'20''	
	7,5	1''	
	1,5	0,2	

5 log tg 72°20'24'',2 = 2,4853355

3 log cos 81°47'46'',6 = 3,4632102

2 log sin α = $\bar{1}$,9485457

log sin α = $\bar{1}$,9742728

α = 70°28'21'',2

$\frac{\alpha}{2}$ = 35°14'10'',6

Calcul de β_1 et de β_2.

$$3 \log \operatorname{tg}\beta_1 = \log \sin\frac{\alpha}{2}, \qquad 3 \log \operatorname{tg}\beta_2 = \log \cos\frac{\alpha}{2}.$$

	log sin 35°14'10''	= $\bar{1}$,7611361
	0,6	17,8
	log sin 35°14'10'',6	= $\bar{1}$,7611379
D = 318	$\bar{1}$,9203475	= log tg 39°46'30''
	300,3	7''
	17,7	0,4
	log cos 35°14'20''	= $\bar{1}$,9120910
	— 9''	1341
	— 0,4	59
	log cos 35°14'10'',6	= $\bar{1}$,9121050
D = 327	$\bar{1}$,9706689	= log tg 43° 4'
	295,4	7''
	31 6	75

log tg β_1 = 1,9203793

β_1 = 39°46'37'',4

log tg β_2 = 1,9707016,7

β_2 = 43°4' 7'',75

Calcul de x.

β_1 et β_2 étant tous deux plus petits que α, il faudra prendre $k = 1$ dans x_2 et x_3 ; les quatre solutions sont donc

$$x_1 = 180° - (\alpha - \beta_1), \qquad x_2 = \alpha + \beta_2, \qquad x_3 = 180° - (\alpha - \beta_2), \qquad x_4 = \alpha + \beta_1.$$

On trouve, tous calculs faits

$$x_1 = 149°18'16'',2, \qquad x_2 = 113°32'28'',95, \qquad x_3 = 152°35'46'',55, \qquad x_4 = 110°14'58'',6.$$

[MM. P. Barroué, lycée de Brest, et A. Pavard, au Mans, ont envoyé des résultats exacts.]

4126. — *En mesurant deux longueurs* a *et* b *on a trouvé*

$$a = 62^m,5 \quad \text{à} \quad \pm 0,2 \text{ près},$$
$$b = 41^m,2 \quad \text{à} \quad \pm 0,1 \text{ près}.$$

A quelle approximation pourra-t-on obtenir le logarithme vulgaire du rapport $\frac{a}{b}$?

Le module de transformation des logarithmes népériens en logarithmes vulgaires est $M = 0,43429$.

Le logarithme cherché est donné par la formule

$$n = \log_{10} \frac{a}{b} = \mathrm{ML}\frac{a}{b} ;$$

ou

$$n = \mathrm{M}(\mathrm{L}a - \mathrm{L}b). \qquad (1)$$

Lorsqu'on calcule un nombre par la formule

$$n = f(a, b)$$

et que a et b sont affectés d'erreurs δa et δb, l'erreur de n est donnée par la formule

$$\delta n = f'_a(a', b').\delta a + f'_b(a'', b'').\delta b.$$

Pour obtenir une limite supérieure de δn, on remplace dans les dérivées partielles les nombres a', b', a'', b'' par des valeurs par excès ou par défaut de a et b, de manière à forcer les valeurs de ces dérivées, on remplace δa et δb par leurs limites supérieures et on prend tous les termes avec le signe + (*).

Appliquons à la formule (1); on aura

$$f'_a = \frac{M}{a}, \qquad f'_b = \frac{M}{b}.$$

Remplaçons a et b par leurs valeurs par défaut 60 et 40; M par la valeur par excès 0,45, δa et δb par leurs limites supérieures 0,2 et 0,1. La limite supérieure de δn sera

$$\frac{0,45}{60} \times 0,2 + \frac{0,45}{40} \times 0,1 = 0,045\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{40}\right) = \frac{0,045 \times 7}{120}$$

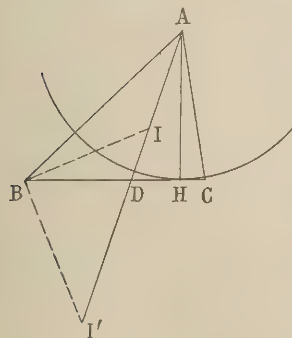
ou 0,0027 par excès.

On ne pourra donc compter dans le logarithme vulgaire de $\frac{a}{b}$ sur plus de *deux* chiffres décimaux exacts.

4129. — *Construire un triangle* ABC *connaissant* : 1° *la distance du centre* I *du cercle inscrit au centre* I′ *de l'un des cercles exinscrits ;* 2° *le rapport des rayons de ces deux cercles ;* 3° *la hauteur abaissée du sommet* A *qui appartient à la droite* II′.

Les deux premières données restant les mêmes, construire le triangle ABC *connaissant le rayon du cercle circonscrit.*

I. — Supposons le problème résolu : soit ABC un triangle dans lequel on connaît la distance $II' = d$, le rapport $\frac{r}{r'} = k$ des rayons des cercles inscrit et exinscrit de centres I, I′, et la hauteur $AH = h$.



La ligne des centres II′ des deux cercles passe par le point A commun aux deux tangentes communes extérieures, et l'on a

$$\frac{AI}{AI'} = \frac{r}{r'} ;$$

de même la tangente commune intérieure BC rencontre II′ en un point D tel que

$$\frac{DI}{DI'} = \frac{r}{r'}.$$

Ces relations permettent de déterminer facilement la position des points A et D par rapport aux points connus I, I′.

On détermine ensuite visiblement les sommets B et C en prenant l'intersection du cercle décrit sur II′ comme diamètre avec la tangente au cercle A et de rayon AH issue du point D.

Le point D étant toujours compris entre I et I′, les points B et C existent toujours, pourvu que la tangente issue de D puisse être menée, ce qui entraîne la condition

$$AD \geqslant h,$$

ou, en exprimant AD en fonction des données d et k,

$$h \leqslant \frac{2kd}{1 - k^2}.$$

Dans ce cas, le problème admet deux solutions symétriques par rapport à AD.

II. — Supposons maintenant la hauteur h remplacée par le rayon R du cercle circonscrit. On sait que ce cercle coupe la droite AII′ en un point M, milieu de l'arc BC ; en tirant MB, on a, d'une part,

$$\widehat{MBI} = \widehat{MBC} + \widehat{CBI} = \frac{A + B}{2},$$

et d'autre part,

$$\widehat{MIB} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA} = \frac{A + B}{2},$$

ce qui montre que le triangle MBI est isocèle, et, par suite, que M est le centre du cercle BIC, qui passe aussi par I′.

Il suffit alors de faire passer un cercle de rayon R par le point A, déterminé comme plus haut, et par le milieu M de II′, puis de tracer le cercle de diamètre II′ qui rencontre le premier aux points B et C.

La seule condition de possibilité est qu'on puisse décrire un cercle de rayon R sur AM comme corde, ce qui suppose

$$R \geqslant \frac{AM}{2},$$

ou, en exprimant AM en fonction des données,

$$R \geqslant \frac{d(1 + k)}{4(1 - k)}.$$

(A. PAVARD, au Mans.)

[Ont résolu la même question : MM A. M. R. P. ; Barroué ; Benoist-Daubray ; Bourdet ; A. Colard ; Crozemarie ; M. Cryé ; Dunand ; Foucart ; G. Hiernaux ; J. Legrand ; Mazars ; Mirc ; Montagut ; Nayel ; Oger ; Plisson ; Rebeix ; Thorel ; Videlaine ; Vincent.]

ALGÈBRE

4312. — *Trouver la valeur de la somme*

$$\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+k)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+k+1)} + \ldots + \frac{1}{(x+n-1)(x+n)\ldots(x+k+n-1)}.$$

Vers quelle limite tend cette somme lorsque n *croît indéfiniment ?*

(*) Voir *Approximations numériques*, par J. Griess, p. 16, 22, 23, 24.

On a

$$\frac{1}{x(x+1)\ldots\ldots(x+k-1)}-\frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+k)}=\frac{k}{x(x+1)\ldots\ldots(x+k)},$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+k)}-\frac{1}{(x+2)(x+3)\ldots\ldots(x+k+1)}=\frac{k}{(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+k+1)},$$

. . . .

$$\frac{1}{(x+n-1)\ldots\ldots(x+n-2+k)}-\frac{1}{(x+n)\ldots\ldots(x+k+n-1)}=\frac{k}{(x+n-1)(x+n)\ldots\ldots(x+k+n-1)}.$$

Additionnons membre à membre et simplifions. Le second membre de l'égalité sera précisément la somme demandée S multipliée par k ; nous aurons donc

$$\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+k-1)}-\frac{1}{(x+n)\ldots(x+k+n-1)}=k\mathrm{S},$$

d'où

$$\mathrm{S}=\frac{1}{k}\left[\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+k-1)}-\frac{1}{(x+n)\ldots(x+k+n-1)}\right].$$

Lorsque n devient infini, la fraction soustractive a pour limite zéro ; donc

$$\lim \mathrm{S}=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+k-1)}.$$

Plus généralement, soit une suite de termes de la forme

$$\frac{1}{x(x+r)\ldots(x+kr)}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{[x+(n-1)r][x+(n-1)r+r]\ldots[x+(n-1)r+kr]},$$

dans laquelle les facteurs de chaque dénominateur forment une progression arithmétique de raison r. En procédant comme précédemment, on obtient la formule

$$\mathrm{S}=\frac{1}{kr}\times$$

$$\left[\frac{1}{(xx+r)\ldots[x+(k-1)r]}-\frac{1}{(x+nr)[x+(n+1)r]\ldots[x+nr+(k-1)r]}\right].$$

(L. BOUCHARD, institution du Sacré-Cœur, à Moulins.)

[Ont résolu la même question : MM. de Mendiry, lycée de Bordeaux ; F. Pégorier, à Cette ; F. Riesz, école polytechnique de Zurich ; A. Rozier, collège de Brive.]

GÉOMÉTRIE

4315. — *Une pyramide SABCDE a pour base un pentagone régulier dont le côté est a ; les autres arêtes de la pyramide sont aussi égales à a. On demande de calculer :*

1° *Le volume de la pyramide ;*

2° *Le rayon de la sphère circonscrite ;*

3° *Les lignes trigonométriques de l'angle plan du dièdre SA.*

(*Bacc. lettres-math., Clermont, novembre 1897.*)

1° Menons la hauteur SH, l'apothème HK et le rayon AH. Le volume de la pyramide a pour expression

$$\mathrm{V}=\frac{5a.\mathrm{HK}}{2}\cdot\frac{\mathrm{SH}}{3}.$$

Or on sait que

$$a=\frac{\mathrm{R}}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

R désignant le rayon du cercle circonscrit au pentagone ; on déduit de là

$$\mathrm{R}=\frac{2a}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}},$$

puis
$$\mathrm{HK}=\sqrt{\mathrm{R}^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}$$

et
$$\mathrm{SH}=\sqrt{a^2-\mathrm{R}^2}=a\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}.$$

Donc
$$\mathrm{V}=\frac{5a^3\sqrt{9-5}}{12(5-\sqrt{5})}=\frac{5a^3}{6(5-\sqrt{5})}=\frac{a^3(5+\sqrt{5})}{24}.$$

2° Soit O le centre de la sphère circonscrite à la pyramide ; ce point est situé à l'intersection de SH et du plan perpendiculaire au milieu M de l'arête SA par exemple.

Le quadrilatère AHOM ayant deux angles opposés droits est inscriptible, et l'on a

$$\mathrm{SO.SH}=\mathrm{SM.SA}\quad\text{ou}\quad\frac{a^2}{2},$$

d'où
$$\mathrm{SO}=\frac{a^2}{2\mathrm{SH}}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}},$$

ou, en multipliant haut et bas par $\sqrt{3+\sqrt{5}}$,

$$\mathrm{SO}=\frac{a}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

3° Dans le triangle équilatéral SAB, la médiane BM est en même temps hauteur ; il en est de même de ME ; l'angle BME ayant ainsi ses deux côtés perpendiculaires à l'arête SA mesure l'angle plan α du dièdre SA. En considérant le triangle BME, on a alors

$$\overline{\mathrm{BE}}^2=\overline{\mathrm{BM}}^2+\overline{\mathrm{ME}}^2-2\mathrm{BM.ME}\cos\alpha,$$

d'où, en remarquant que $\mathrm{BM}=\mathrm{ME}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$$\cos\alpha=\frac{3a^2-2\overline{\mathrm{BE}}^2}{3a^2}.$$

Il reste à évaluer BE, côté du pentagone régulier étoilé inscrit dans le cercle de rayon R. Or

$$\mathrm{BE}=\frac{\mathrm{R}}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}=\frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{a(10+2\sqrt{5})}{4\sqrt{5}}=\frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}.$$

Par suite,

$$\cos\alpha=\frac{3a^2-\frac{a^2(\sqrt{5}+1)^2}{2}}{3a^2}=-\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Connaissant $\cos\alpha$, il est facile d'obtenir les autres lignes trigonométriques :

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{5}{9}}=\frac{2}{3},$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{2}{\sqrt{5}},\qquad \mathrm{cotg}\,\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{séc}\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = -\frac{3}{\sqrt{5}}, \qquad \text{coséc}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{3}{2}.$$

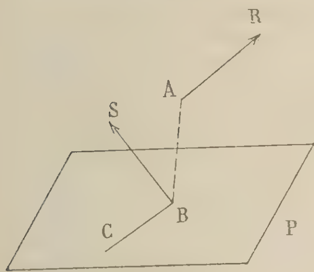
(SYLVESTRE POCHON, collège de Châtillon-sur-Seine.)

[Ont résolu la même question : MM. L. Barberot ; B. Carrière ; F. Chuberre ; L. Curt ; A. Jeannel ; F. Leulliot ; F. Morel ; L. Patin ; J. Quilichini ; Robin ; Vial ; Villemagne.]

MÉCANIQUE

4318. — *Réduire les forces appliquées à un solide à deux : l'une passant par un point donné* A, *l'autre située dans un plan donné* (P).

Réduisons les forces appliquées au solide à deux dont l'une R passe par A ; puis transportons le point d'application de la seconde S au point B d'intersection de sa droite d'action avec le plan (P). Enfin, joignons A et B et soit BC l'intersection du plan ABS et du plan (P).



Nous pouvons décomposer la force S en deux autres : l'une, Σ, dirigée suivant BA et dont le point d'application pourra être transporté en A ; l'autre, X, dirigée suivant BC.

Ceci fait, nous avons la force X située dans le plan (P) et les deux forces R et Σ qui admettent une résultante U passant par A.

Cette réduction est évidemment possible d'une infinité de manières.

(E. SEVIN, collège Chaptal.)

[Ont résolu la même question : MM. F. Chuberre ; Feintuch ; Jouanneau ; R. Larsonneur ; E. Layes ; Robin ; E. Sinturel ; Vial ; V. R. T.]

PHYSIQUE

4337. — *Un bain d'argenture est traversé par un courant d'intensité* $0^{\text{amp}},4$. *On demande quel est le poids d'argent déposé en 2 heures. Il faut* 96 600 *coulombs pour mettre en liberté* 1^{gr} *d'hydrogène. Poids atomique de l'argent*, 108.

(*Bacc. lettres-sciences, Besançon, juillet 1897.*)

Un coulomb met en liberté $\frac{1}{96\,600} = 0^{\text{milligr}},01035$ d'hydrogène et, d'après les lois de l'électrolyse, dépose

$$0,01035 \times 108 = 1^{\text{milligr}},1178 \text{ d'argent.}$$

L'ampère correspond au débit d'un coulomb par seconde ; donc la quantité d'électricité qui a traversé le bain d'argenture pendant deux heures a pour valeur $0,4 \times 2 \times 3\,600 = 2\,880$ coulombs.

Par suite, le poids de l'argent déposé est

$$1^{\text{milligr}},1178 \times 2\,880 = 3\,219^{\text{milligr}},274.$$

(E. CLÉMENT.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Ardin-Delteil ; L. Barberot ; Bertrand ; F. Beynas ; M. Boutry ; G. Dazier ; L. Florentin ; J. Fourestier ; A. Lescure ; P. Marill ; M. Oger ; M. Rebeix ; Robin ; Roure ; J. Bruyas ; A. Chapron ; F. Chuberre ; Jupeau ; A. Marius ; P. Reboul ; Remondet ; E. Sevin ; J.-E. Villemagne.]

BACCALAURÉAT

SESSION D'AVRIL 1898

PARIS

Baccalauréat lettres-mathématiques.

I. — **4347.** Dans un triangle ABC rectangle en A, on connaît l'hypoténuse a et la longueur d de la bissectrice BD de l'angle B. Calculer les côtés de l'angle droit. Discussion.

II. — *1er sujet.* — Volume du parallélépipède oblique.

II. — *2e sujet.* — Aires de la zone et de la sphère.

II. — *3e sujet.* — Volume de la sphère.

I. — Un ballon de 10^{lit} contient un gaz à 0°, sous la pression de 75^{cm} de mercure ; on fait la tare du ballon dans ces conditions.

Avec une pompe, on retire ensuite une portion du gaz, de façon qu'à 0° la pression dans l'intérieur du ballon ne soit plus équilibrée que par 25^{cm} de mercure. En reportant le ballon sur la balance, on constate que sa masse a diminué de $12^{\text{gr}},25$.

Quelle est la densité de ce gaz par rapport à l'air ?

II. — *1er sujet.* — Lois générales de l'induction électrique.

II. — *2e sujet.* — Description d'une machine dynamo-électrique. — Réversibilité de ces machines.

II. — *3e sujet.* — Téléphone.

CONCOURS DE 1898

ÉCOLE PROFESSIONNELLE SUPÉRIEURE DES POSTES ET DES TÉLÉGRAPHES (1re section)

I. — (A traiter par l'arithmétique). — Un lingot d'argent au titre de 0,840 pèse $64^{\text{kg}},200$. Combien faut-il y ajouter d'argent pur pour que le titre s'élève à 0,853 ?

II. — **4348.** Dans une équation A du second degré, on remplace x par $y+k$; on obtient ainsi une équation B où l'inconnue est y. Choisir k de manière que les racines de l'équation A et celles de l'équation B aient même produit.

Expliquer la solution $k=0$. Prouver que, si on adopte l'autre valeur de k, la somme des quatre racines des équations A et B est nulle.

L'équation A sera, à la volonté du candidat $ax^2+bx+c=0$ ou $2x^2-7x-3=0$.

III. — Définir deux polyèdres semblables.

On considère une pyramide à base triangulaire, SABC, et la pyramide $sabc$ dont les sommets sont les points de concours des médianes des faces de la première. Démontrer qu'elles sont semblables. Donner les rapports : 1° de deux arêtes homologues ; 2° des aires de deux faces homologues ; 3° des volumes des deux pyramides.

IV. — **4349.** AC et BD sont les diagonales d'un rectangle ABCD.

1° Il existe sur AC, entre A et C, deux points M et N pouvant servir de centres à des circonférences tangentes à deux côtés adjacents du rectangle. Construire ces points et calculer leur distance MN en fonction des côtés a et b du rectangle.

2° On prend sur AC, entre A et C, un point quelconque I et on décrit sur AI et sur CI comme diamètres, deux circonférences qui rencontrent les côtés du rectangle les plus voisins de leurs centres, la première en E et en F, la seconde en G et en H. Les tangentes aux points E, F, G, H rencontrent la diagonale BD respectivement en e, f, g, h. Prouver que $ef+gh=\text{AC}$.

3° Prouver que la somme $\text{E}e+\text{F}f+\text{G}g+\text{H}h$ reste invariable lorsque I se déplace sur AC et évaluer cette somme en fonction de a et b.

QUESTIONS PROPOSÉES

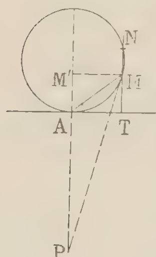
4350. — On donne, dans un plan, un cercle de centre O, et un point C, sur un diamètre AB de ce cercle. On désigne par M et N les points où une sécante CS, menée par C, rencontre le cercle; par K l'extrémité du rayon perpendiculaire à cette sécante et la rencontrant; enfin par H le point d'intersection de OK et de CS.

Cela posé, on demande de déterminer la sécante CS de manière que l'on ait la relation $\overline{CM}^2 + \overline{CN}^2 = 12 . OH \times HK$.

Discuter, en supposant que le cercle reste fixe et que le point C se déplace sur le diamètre AB.

On représentera par R le rayon du cercle et par a la distance OC. On pourra prendre pour inconnue la distance $OH = x$ ou l'angle $OCS = u$.

(*Bacc. lettres-math., Lyon, novembre 1897.*)



4351. — On donne un cercle O et une tangente AT au point A. Mener par le point de contact A une corde AM telle que AM = NT, N désignant le second point de rencontre du cercle avec la perpendiculaire menée de M sur la tangente AT.

On mène la tangente MP en M, et on la limite au diamètre passant par A; on projette M en M' sur ce diamètre; calculer AP et PM'.

(J. Vidaillet.)

4352. — On donne un point P dans le plan d'un triangle ABC. Mener par le point P une sécante qui rencontre les côtés AB, BC, CA en des points D, E, F tels que le point D soit le milieu de EF.

(E. F.)

4353. — Soit un tétraèdre SABC, CD perpendiculaire sur AB, SH perpendiculaire au plan ABC; les sens positifs sur AB, DC, HS sont tels que les trois segments $\overline{AB} = a$, $\overline{DC} = h$, $\overline{HS} = H$ soient positifs. On considère un parallélépipède rectangle inscrit ou exinscrit au tétraèdre. Trois arêtes étant OM, ON, OP, les sommets opposés à O, M, N, P sont O', M', N', P'. La face OMP'N est dans le plan ABC; la face opposée O'M'P'N' a un côté P'N' dans le plan SAB, un sommet M' dans le plan SAC, un sommet O' dans le plan SBC.

On pose $\overline{OM} = x$, $\overline{ON} = y$, $\overline{OP} = z$, et on demande d'établir, en une seule fois, la relation $\frac{x}{a} + \frac{y}{h} + \frac{z}{H} = 1$.

Calculer z en supposant $\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{1}$; faisant ensuite $\lambda = \pm 1$, $\mu = \pm 1$, on obtiendra les côtés des quatre cubes que l'on peut généralement inscrire ou exinscrire à un tétraèdre, ainsi que la disposition de ces cubes.

(Fontené.)

4354. — Un miroir plan M, passant par le foyer F d'une lentille convergente CD infiniment mince, est placé perpendiculairement à la droite OF joignant le centre optique O au foyer F.

On place, en avant de la lentille, un objet AB et on demande de construire l'image formée par les rayons qui, après avoir traversé la lentille CD, se réfléchissent sur le miroir M et repassent à travers la lentille CD. Calculer la grandeur de l'image et sa distance à CD. — Discussion.

(*Bacc. lettres-math., Clermont, juillet 1897.*)

4355. — Le courant produit par une pile de 100 éléments Bunsen passe dans un circuit extérieur dont la résistance est égale à 10 ohms. On demande quelle sera l'intensité du courant si l'on dispose les 100 éléments en 4 séries de 25 chacune, associées en batterie. Comment faudrait-il disposer les éléments pour rendre maximum l'intensité du courant? — Force électromotrice d'un élément Bunsen : 1,9 volt; résistance intérieure de cet élément : 0,1 ohm.

(*Bacc. lettres-sciences, Caen, juillet 1897.*)

BIBLIOGRAPHIE

La Mathématique, *Philosophie, Enseignement*, par C.-A. Laisant, répétiteur à l'École Polytechnique, 1 vol. in-8° carré de 296 pages avec 5 figures, cartonné à l'anglaise. Prix : 5 fr. (Georges Carré et C. Naud).

Le volume très intéressant que vient d'écrire M. Laisant sur la *Mathématique* (vocable qui pourrait trouver place dans l'usage courant aussi bien que ceux de Physique et de Botanique), n'est destiné dans son idée ni aux savants, ni aux personnes ne possédant aucune préparation mathématique. C'est un tableau d'ensemble, suffisamment détaillé pour tout ce qui se rapporte aux parties élémentaires, forcément incomplet et écourté dès qu'on aborde les parties élevées de la science, dont l'intelligence supposerait chez le lecteur des connaissances que l'auteur ne veut pas lui demander. Néanmoins, grâce à la clarté du style, il réussit à montrer que « la science mathématique mérite l'admiration des hommes, non seulement par les services directs qu'elle nous rend, mais par les perfectionnements qu'elle apporte à la culture générale de l'esprit humain, et par les satisfactions intellectuelles qu'elle donne à ses adeptes ».

Nihil est in intellectu quod non prius fuerit in sensu, toutes nos idées nous viennent des sens, les idées mathématiques aussi bien que les autres; tel est le point de départ de M. Laisant. Ceci admis, il présente successivement au lecteur les diverses branches de la Mathématique. Analyser d'une façon détaillée un livre qui est lui-même un résumé, est impossible; une énumération des titres de chapitres montrera l'intérêt très réel qu'on éprouve à le lire.

Une première partie est consacrée à la Mathématique pure : I. La Mathématique et ses subdivisions. — II. L'arithmétique et l'arithmologie. — III. L'algèbre. — IV. Le calcul infinitésimal. — V. La théorie des fonctions. — VI. La géométrie. — VII. La géométrie analytique. — VIII. La mécanique rationnelle.

La seconde partie est consacrée à la Mathématique appliquée, qui a pour objet le retour de l'abstrait au concret; l'auteur insiste à maintes reprises sur ce fait important qu'elle ne donne que des solutions approchées des problèmes qui lui sont posés, solutions d'ailleurs très suffisantes pour la pratique.

Après un premier chapitre de considérations générales, viennent : II. L'application du calcul. — III. L'application de la géométrie. — IV. L'application de la mécanique.

Une dernière partie enfin a pour objet l'enseignement mathématique et vise plus spécialement l'enseignement français : I. Vues générales. — II. Enseignement de l'arithmétique. — III. Enseignement de l'algèbre et du haut calcul. — IV. Enseignement de la géométrie. — V. Enseignement de la géométrie analytique. — Enseignement de la mécanique. — VII. Hiérarchie des enseignements.

Dans la première partie, l'auteur touche en passant à bien des sujets délicats, sur lesquels il nous sera permis de n'être pas toujours d'accord avec lui. Signalons en particulier la définition du nombre incommensurable en arithmétique, qui, à notre avis, ne peut se faire d'une manière précise et rigoureuse que si on l'affranchit entièrement de la considération de limite (*). Le formalisme que les tendances modernes cherchent à faire pénétrer dans la définition des opérations, vivement critiqué par M. Laisant, a pour raison d'être une sorte de probité mathématique; pour but, de montrer à un esprit suffisamment mûri jusqu'à quel point on peut affranchir des notions concrètes les premières données de la science mathématique, et comment on peut réduire au minimum le nombre des postulats nécessaires.

Il va de soi qu'il ne saurait être question de ces notions dans un enseignement absolument élémentaire. Dans celui-ci, toutes les parties de la science doivent être appelées à s'entr'aider; on lira avec le plus vif intérêt les pages que M. Laisant consacre à l'enseignement mathématique. On ne peut que s'associer pleinement à sa critique de la façon dont on enseigne la géométrie élémentaire; cette poussière de théorèmes, ces propositions découpées en parties aussi menues que possible, ont pour seul effet d'aveugler les commençants, tout cela « par suite de cette croyance si fausse, épave des superstitions scientifiques du passé, que tout est de perfection divine dans l'œuvre des Grecs d'il y a deux mille ans. » (Méray.)

Peut-être serait-il aussi à souhaiter de voir donner une moindre importance dans les cours de géométrie analytique à la théorie des coniques, des quadriques et de leurs propriétés les plus infimes; le temps consacré à cette étude pourrait être employé plus utilement, ainsi que M. Laisant le demande, à l'étude de quelques méthodes générales.

Les concours d'admission aux grandes écoles ont été vivement critiqués; M. Laisant ne dissimule aucun de leurs inconvénients et conclut pourtant fort justement qu'il n'y a, en dehors du concours, aucun autre procédé de sélection fournissant la même somme de garanties et de justice. Tout dépend de la manière dont l'examinateur dirige l'examen et de la largeur de vues avec laquelle il apprécie les réponses du candidat.

On nous permettra d'ajouter que ces délicates fonctions d'interrogateur devraient toujours être confiées à des maîtres éprouvés, familiarisés par la pratique de l'enseignement avec les matières de l'examen et le maniement des jeunes gens.

J. GRIESS.

(*) On lira avec intérêt le dialogue philosophique et humoristique consacré à la définition de la limite par M. G. Milhaud, dans son étude sur *Le Rationnel*.

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

22e Année. — N° 16. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 15 Mai 1898.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX HABITUEL DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

RAPPORT ANHARMONIQUE HOMOGRAPHIE, INVOLUTION (*)

par M. **J. Griess**, professeur au Lycée Charlemagne.

Nous nous proposons de résumer en ces quelques pages les notions qui nous semblent indispensables à tout bon élève de Mathématiques élémentaires sur ces trois sujets; nécessaires pour lui donner des idées générales, elles lui seront indispensables s'il doit pousser plus loin ses études mathématiques. Loin de chercher à être complet, nous avons restreint la matière autant qu'il nous a été possible; le lecteur qui désirera acquérir à ce sujet des connaissances plus approfondies pourra se reporter soit à l'Appendice de la Géométrie de MM. Rouché et de Comberousse, soit à la Géométrie supérieure et au traité des coniques de Chasles.

I. — Segments portés sur une droite.

1. Etant donnée une droite X'X et sur cette droite deux points A et B, on peut parcourir la longueur AB en marchant de A vers B ou de B vers A. Il est utile, pour la suite, de distinguer l'une de l'autre les deux distances ainsi parcourues; on y parvient en les affectant du signe *plus* ou *moins*, suivant que le sens du parcours coïncide avec un sens arbitrairement choisi sur la droite ou avec le sens opposé.

Choisir ce sens, c'est *orienter* la droite; la longueur AB, affectée du signe convenable, s'appelle un *segment;* le point de départ est l'*origine* du segment, le second point en est l'*extrémité*. Un segment se représente par la notation $\overline{AB}$ ou (AB), en ayant soin d'écrire en tête la lettre qui représente l'origine. Le nombre qui mesure la longueur AB est la valeur arithmétique du segment.

De ces définitions résulte la relation évidente

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \overline{AB} = -\overline{BA}.$$

2. Relation de Chasles. — *Etant donnés sur une droite orientée trois points quelconques* A, B, C, *on a toujours, en grandeur et en signe,*

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

Cette relation peut s'écrire de trois manières différentes, en permutant circulairement les segments $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$. Il suffit évidemment de démontrer une de ces trois relations, ou bien l'une de celles obtenues en changeant les signes de tous les segments. Comme la notation des points est arbitraire, on peut toujours supposer que le dernier segment $\overline{CA}$ est celui qui va du dernier point à droite au premier à gauche, et que le sens CA est le sens négatif. Dans ces conditions (*fig.* 1), les segments $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ sont positifs et la figure montre que



Fig. 1

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} = -\overline{CA};$$

donc

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

Usage de cette relation. — Elle sert à exprimer le segment qui sépare deux points B et C d'une droite orientée en fonction des segments qui vont d'un troisième point quelconque A de la droite aux deux premiers. Elle s'écrit en effet

$$\overline{BC} = -\overline{CA} - \overline{AB} = \overline{AC} - \overline{AB}.$$

Le segment qui sépare deux points d'une droite orientée est égal à la différence des segments qui vont d'un troisième point quelconque à l'extrémité et à l'origine du segment donné.

Dans tout ce qui va suivre, il ne sera plus question que de segments; pour simplifier l'écriture, nous supprimerons les traits.

II. — Rapport anharmonique.

3. Définition. — *Etant donnés sur une droite orientée quatre points pris dans un ordre quelconque* A, B, C, D, *on appelle rapport anharmonique de ces quatre points le quotient du rapport des segments qui vont du troisième point aux deux premiers par le rapport des segments qui vont du quatrième point aux deux premiers.*

En représentant ce rapport par la notation (ABCD), on écrit

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}.$$

4. Propriétés du rapport anharmonique.

I. — *Le rapport anharmonique ne change pas quand on intervertit deux des points, pourvu qu'on intervertisse en même temps les deux autres.*

Echangeons les deux premiers entre eux et de même les deux derniers :

$$(BADC) = \frac{DB}{DA} : \frac{CB}{CA} = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = (ABCD).$$

Echangeons un des deux premiers avec un des deux derniers :

$$(DCBA) = \frac{BD}{BC} : \frac{AD}{AC} = \frac{DB}{CB} : \frac{DA}{CA} = \frac{DB}{DA} : \frac{CB}{CA} = (BADC) = (ABCD).$$

II. — *Si dans le rapport anharmonique on intervertit les deux derniers points sans toucher aux deux premiers, le nouveau rapport est égal à l'inverse du rapport donné.*

La définition (3) donne

$$(ABDC) = \frac{DA}{DB} : \frac{CA}{CB} = \frac{1}{(ABCD)}.$$

III. — *Si dans le rapport anharmonique* (ABCD) *on intervertit les deux points du milieu sans toucher aux deux autres, la somme du nouveau rapport formé et du rapport donné est égale à* 1.

En effet

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{CA.DB}{CB.DA};$$

$$(ACBD) = \frac{BA}{BC} : \frac{DA}{DC} = \frac{BA.DC}{BC.DA} = \frac{CD.BA}{CB.DA}.$$

Mais, d'après (2),

$$\begin{aligned} CA.DB + CD.BA &= (CB + BA)DB + CD.BA \\ &= CB.DB + BA(CD + DB) = CB.DB + BA.CB \\ &= CB(DB + BA) = CB.DA. \end{aligned}$$

Donc

$$(ABCD) + (ACDB) = 1.$$

(*) Nous sommes très encouragés par les lettres que nous recevons à publier des études dans le genre de celle-ci et des notes sur des questions de cours. Pour que les élèves qui se préparent simplement au baccalauréat ou à des examens primaires trouvent cependant dans le journal ce qu'ils y cherchent, nous consacrons des feuillets supplémentaires aux études un peu étendues. A partir de la prochaine rentrée des classes, nous chercherons à donner encore davantage satisfaction à nos deux principales catégories de lecteurs, en dédoublant le journal. (*N. d. l. R.*)

5. **Valeurs différentes du rapport anharmonique de quatre points donnés.** — Les quatre lettres A, B, C, D peuvent être rangées l'une à la suite de l'autre de 24 manières différentes; on le voit en formant d'abord les 6 permutations possibles des trois lettres B, C, D, puis en écrivant dans chacune de ces permutations la lettre A aux quatre places possibles.

Dans chacun de ces 24 rapports anharmoniques on peut toujours placer la lettre A en tête, sans changer la valeur du rapport; il suffit (4, I) d'échanger A avec la première lettre et d'échanger en même temps les deux autres. Ces 24 rapports ont donc mêmes valeurs que les 6 rapports

$$(ABCD),\qquad (ACBD),\qquad (ADBC),$$
$$(ABDC),\qquad (ACDB),\qquad (ADCB),$$

obtenus en plaçant la lettre A en tête de chacune des permutations possibles des lettres B, C, D.

Les rapports qui occupent le même rang dans les deux lignes ne diffèrent que par l'échange des deux dernières lettres; donc (4, II) ils sont inverses l'un de l'autre; il suffit de calculer ceux de la première ligne. Mais (4, III)

$$(ABCD) + (ACBD) = 1,$$
$$(ADBC) + (ABDC) = 1;$$

donc, si on appelle m le rapport anharmonique (ABCD), on voit que les 24 rapports anharmoniques des quatre points ont en général 6 valeurs distinctes:

$$m,\qquad 1-m,\qquad 1-\frac{1}{m},$$
$$\frac{1}{m},\qquad \frac{1}{1-m},\qquad \frac{1}{1-\frac{1}{m}}.$$

6. **Projectivité du rapport anharmonique.** — L'importance du rapport anharmonique en géométrie dérive entièrement de la propriété que nous allons maintenant démontrer.

On appelle *faisceau* un système de droites concourant en un point S, qui est le *sommet* du faisceau; les droites en sont les rayons.

Lorsqu'un faisceau de quatre droites est coupé par deux transversales, le rapport anharmonique des quatre points déterminés par la première est égal au rapport anharmonique des quatre points correspondants déterminés par la seconde.

Fig. 2

En effet, supposons les quatre rayons du faisceau S rencontrés par les deux transversales en des points A et A′, B et B′, C et C′, D et D′ (*fig.* 2). Il s'agit de montrer que

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

Puisqu'il s'agit d'évaluer

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB},$$

menons par B la parallèle à SA et soient γ et δ les points où elle rencontre SC et SD. Les triangles CAS et CBγ sont homothétiques par rapport à B; les triangles DAS et DBδ le sont par rapport à D; il vient donc en grandeur et en signe, à condition d'écrire les sommets homologues aux mêmes places:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{SA}{\gamma B},\qquad \frac{DA}{DB} = \frac{SA}{\delta B},\qquad (ABCD) = \frac{\delta B}{\gamma B}.$$

Faisons identiquement le même raisonnement pour la seconde transversale en menant par B′ la parallèle à SA′, et en appelant δ' et γ' les points analogues à δ et γ; il viendra

$$(A'B'C'D') = \frac{\delta'B'}{\gamma'B'}.$$

Or, la figure formée par les points B, γ, δ est évidemment homothétique de celle formée par les points B′, γ', δ', le centre d'homothétie étant le point S. On en conclut, en grandeur et en signe

$$\frac{\delta B}{\gamma B} = \frac{\delta' B'}{\gamma' B'}\qquad \text{ou}\qquad (ABCD) = (A'B'C'D').$$

On peut dire que la *division* A′B′C′D′, formée sur la seconde transversale, est la projection *centrale* de la division ABCD formée sur la première, le centre de projection étant le point S. Le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite est donc une propriété *invariante*, quand on projette ces quatre points sur une autre droite; il est *projectif*.

Comme conséquence, on appelle rapport anharmonique des quatre droites SA, SB, SC, SD et on représente par la notation (S.ABCD) le rapport anharmonique constant des quatre points en lesquels une transversale quelconque rencontre les rayons du faisceau. La démonstration précédente montre qu'on peut toujours remplacer un rayon du faisceau par son prolongement sans altérer le rapport anharmonique.

Si d'un point arbitraire O on projette le faisceau (S.ABCD) sur un plan quelconque en (S′.A′B′C′D′), la transversale ABCD du premier faisceau aura pour projection une transversale A′B′C′D′ du second; et puisque

$$(ABCD) = (A'B'C'D'),$$

on en conclut que

$$(S.ABCD) = (S'.A'B'C'D').$$

7. La démonstration précédente montre aussi comment on peut remplacer le rapport anharmonique (ABCD) par un simple rapport de segments. Ayant joint un point arbitraire S aux quatre points A, B, C, D, on mène par B la parallèle au rayon SA; on a vu que

$$(ABCD) = \frac{\delta B}{\gamma B}.$$

Inversement, étant donnés sur une droite trois points A, B, C on peut demander de construire un quatrième point D tel que

$$(ABCD) = \lambda.$$

On prend en dehors de la droite ABC un point arbitraire S; on tire SA, SB, SC; par B on mène la parallèle à SA, on marque le point γ où elle rencontre SC; enfin on détermine sur Bγ le point δ tel que

$$\frac{\delta B}{\gamma B} = \lambda;$$

la droite Sδ rencontre ABC au point cherché D. (*)

8. **Cas particulier du rapport harmonique.** — Lorsque les quatre points en ligne droite A, B, C, D ont un rapport anharmonique égal à -1, on dit qu'ils forment une *division harmonique*.

Si
$$(ABCD) = -1,$$
on dit que C et D sont conjugués harmoniques par rapport à A et B. Les points C et D jouent d'ailleurs le même rôle, car (4, II)

$$(ABDC) = \frac{1}{-1} = -1;$$

enfin on sait aussi (4, I) que

$$(CDAB) = -1;$$

donc, lorsque C et D sont conjugués harmoniques par rapport à A et B, réciproquement A et B le sont aussi par rapport à C et D.

La relation harmonique $(ABCD) = -1$ peut être mise sous les deux formes remarquables:

$$OC.OD = \overline{OA}^2, \qquad (\alpha)$$

en désignant par O le milieu de AB;

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}. \qquad (\beta)$$

On obtient la forme (α) en remplaçant (ABCD) par sa valeur et exprimant tous les segments qui y figurent, en fonction de OA, OB, OC, OD; la forme (β), en exprimant tous les segments en fonction de AB, AC, AD.

Le faisceau (S.ABCD) étant harmonique (*fig.* 2), la parallèle menée par B à SA rencontre SC et SD en des points δ et γ tels que

$$\frac{\delta B}{\gamma B} = (ABCD) = -1;$$

donc B est le milieu de $\gamma\delta$; d'où cette propriété:

Toute parallèle à l'un des rayons d'un faisceau harmonique est divisée par les trois autres rayons en deux parties égales.

De là un procédé pour construire, comme au § 7, le conjugué harmonique D d'un point C par rapport à deux points A et B.

9. Trois rayons SA, SB, SC étant donnés, il n'existe donc qu'un seul rayon SD formant avec les précédents un faisceau harmonique. Donc (*fig.* 3) si par un point quelconque C de SC on mène une sécante rencontrant SA et SB en E et F, le point G où elle rencontre SD sera le conjugué harmonique de C par rapport à E et F. D'où ce théorème:

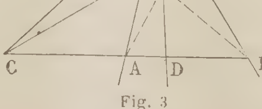


Fig. 3

Le lieu du conjugué harmonique d'un point C situé dans le plan d'un angle ASB par rapport aux points d'intersection avec les côtés de l'angle d'une sécante issue de ce point, est le rayon SD conjugué harmonique de SC par rapport à SA et SB.

(*) Il n'existe qu'un point δ, lorsqu'on a égard aux signes des segments.

On appelle *polaire* du point C le lieu ainsi trouvé ; donc :

La polaire d'un point par rapport à un angle est une droite passant par le sommet de l'angle.

Menons par C les deux sécantes CADB, CEGF (*fig.* 3), tirons EB et AF qui se coupent en S' ; la droite GD est la polaire du point C aussi bien par rapport aux côtés de l'angle ASB que par rapport à ceux de AS'B ; donc elle passe par S' et se confond avec SS'.

Cette remarque permet de construire *avec la règle seule* le point D conjugué harmonique du point C par rapport à A et B. Ayant joint A et B à un point arbitraire S, on mène par C une sécante quelconque rencontrant SA en E, SB en F ; on tire AF et EB qui se coupent en S' ; la droite SS' rencontre AB au point D conjugué harmonique de C par rapport à A et B.

Le quadrilatère ABFE, complété par les points de rencontre S et C des côtés opposés, s'appelle un *quadrilatère complet* ; AF, EB, SC sont ses trois diagonales.

AF rencontre SC en H, de telle sorte que la division HAS'F est harmonique ; ce raisonnement pouvant se répéter pour toute autre diagonale, on peut énoncer cette proposition :

Dans un quadrilatère complet, chaque diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres.

10. Deux faisceaux de quatre droites superposables ont évidemment même rapport anharmonique. Il en sera certainement ainsi lorsque les angles formés deux à deux par les rayons de l'un des faisceaux seront égaux aux angles formés par les rayons homologues de l'autre.

D'ailleurs on peut remplacer un rayon quelconque par son prolongement ; la proposition est donc encore vraie quand les angles homologues sont supplémentaires. On conclut de là deux propositions importantes.

I. — *Si on joint un point quelconque* M *d'un cercle à quatre points fixes* A, B, C, D *de ce même cercle, le rapport anharmonique du faisceau* (M.ABCD) *reste constant lorsque le point* M *décrit le cercle.*

Fig. 4

En effet, M décrivant le cercle (*fig.* 4), l'angle AMB reste constant ou bien il est remplacé par son supplément ; de même pour les autres angles AMC, etc. Donc le faisceau (M.ABCD) reste constamment superposable à lui-même.

Ce rapport anharmonique constant s'appelle le rapport anharmonique des quatre points A, B, C, D sur le cercle. Lorsqu'il est égal à -1, on dit que les quatre points A, B, C, D divisent le cercle harmoniquement. (Il a été fait usage de cette notion dans la solution du problème d'agrégation de 1897, par M. H. V., 22e a., no 5).

Lorsque sur un cercle les points C *et* D *sont conjugués harmoniques par rapport à* A *et* B, *la droite* CD *passe par le point de concours des tangentes en* A *et* B.

Fig. 5

En effet, considérons (*fig.* 5) le faisceau ayant B pour sommet et dont les rayons passent par A, B, C, D ; l'un de ses rayons sera la tangente en B ; si on le coupe par CD, la division CIDR sera harmonique par hypothèse. Si on répète le même raisonnement en prenant pour sommet du faisceau le point A et en appelant R' le point de rencontre de CD et de la tangente en A, on voit que la division CIDR' est aussi harmonique ; donc R et R se confondent. Les deux tangentes en A et B rencontrent CD au même point.

II. — *Si on coupe quatre tangentes fixes à un cercle par une cinquième tangente mobile, le rapport anharmonique des quatre points d'intersection reste constant lorsque la tangente mobile roule sur le cercle.*

Fig. 6

En effet, soient a et b (*fig.* 6) les points où les tangentes aux points fixes A et B sont rencontrées par la tangente mobile. L'angle aOb est toujours égal à la moitié de l'angle AOB ou à son supplément. Donc le faisceau ayant pour rayons les droites joignant le centre du cercle aux quatre points de rencontre de la tangente mobile et des tangentes fixes reste toujours superposable à lui-même ; son rapport anharmonique est donc constant ; et il en est de même de celui des quatre points d'intersection.

Ce rapport constant s'appelle le rapport anharmonique des quatre tangentes fixes ; il est aisé de voir qu'il est égal à celui des quatre points de contact. En effet, l'angle AMB, obtenu en joignant un point quelconque M du cercle aux points A et B, est égal à la moitié de AOB ou à son supplément ; AMB et aOb sont donc égaux ou supplémentaires. Donc, etc.

11. Quand on considère deux faisceaux ou deux divisions rectilignes ayant même rapport anharmonique, on est fréquemment conduit à envisager le cas où ces deux groupes de quatre éléments ont un élément homologue commun ; ils jouissent alors des propriétés remarquables suivantes.

I. — *Lorsque deux faisceaux de quatre droites ont un rapport anharmonique égal et un rayon homologue commun, les points de rencontre des autres rayons homologues sont en ligne droite.*

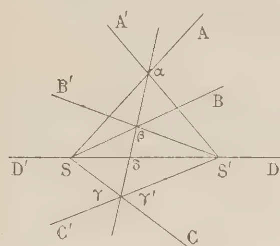


Fig. 7

Soient en effet (*fig.* 7) les deux faisceaux (S.ABCD), (S'.A'B'C'D') ayant même rapport anharmonique et tels que SD et S'D' se confondent suivant SS'. Soient α le point de rencontre de SA et S'A', β celui de SB et S'B', δ le point d'intersection de $\alpha\beta$ avec SS'. Supposons que $\alpha\beta$ rencontre SC en γ et S'C' en γ'. On pourra écrire

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (S.ABCD),$$
$$(\alpha\beta\gamma'\delta) = (S'.A'B'C'D') ;$$

donc

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (\alpha\beta\gamma'\delta),$$

ce qui prouve que γ' coïncide avec γ, c'est-à-dire que SC et S'C' se coupent sur $\alpha\beta$.

II. — *Lorsque deux séries rectilignes de quatre points ont même rapport anharmonique et un point homologue commun, les droites qui joignent deux à deux les autres points homologues sont concourantes.*

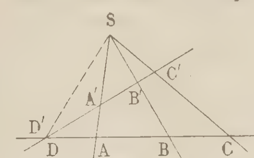


Fig. 8

Soient ABCD, A'B'C'D' deux séries rectilignes de quatre points tels que D et D' se confondent (*fig.* 8). Appelons S le point de rencontre de AA' et BB' ; menons SD, SC, SC'. On pourra écrire

$$(ABCD) = (S.ABCD),$$
$$(A'B'C'D') = (S.A'B'C'D').$$

Mais SA, SB, SD se confondent avec SA', SB', SD' ; donc SC' se confond avec SC ; donc CC' passe par S.

Remarquons en passant l'identité des deux démonstrations ; les points et droites de la première sont remplacés par les droites et points analogues de la seconde.

12. Ces deux propositions vont nous permettre de démontrer deux théorèmes remarquables d'un emploi fréquent, relatifs à 6 points et à 6 tangentes d'un cercle.

I. — **Théorème de Pascal.** — *Si on numérote* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *les côtés successifs d'un hexagone inscrit dans une circonférence, les points d'intersection des côtés opposés* 1 *et* 4, 2 *et* 5, 3 *et* 6 *sont en ligne droite.*

Considérons en effet (*fig.* 9) l'hexagone inscrit ABCDEF. Prenons deux sommets B et F, ni opposés ni consécutifs. Les faisceaux admettant ces points pour sommets et dont les rayons passent par les quatre autres sommets A, C, D, E ont même rapport anharmonique (10, I). Donc

$$(B.ACDE) = (F.ACDE).$$

Fig. 9

Coupons le premier faisceau par le côté DE séparé de B par un seul sommet C ; le second par le côté DC séparé de F par le seul sommet E ; il vient

$$(\alpha\beta DE) = (\gamma CD\delta).$$

Ces deux séries rectilignes de quatre points ont même rapport anharmonique et un point homologue commun D : donc (11, II) les droites $\alpha\gamma$, βC, $E\delta$, qui joignent deux à deux les autres points homologues, sont concourantes. Mais α est le point de rencontre des côtés 1 et 4, γ celui de 3 et 6, βC et $E\delta$ sont les côtés 2 et 5 ; le théorème est donc démontré.

Ce théorème nous permet de résoudre la question 3941 (21e année, no 1) :

Par un point quelconque P *du plan d'un cercle on mène les deux sécantes* PAP', PBP'', *puis par un autre point* Q *les sécantes* QAQ'', QBQ'. *Démontrer que les trois droites* PQ, P'Q', P''Q'' *sont concourantes.*

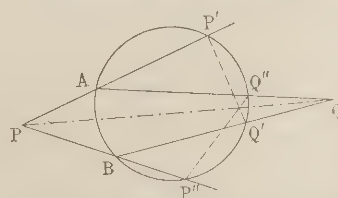


Fig. 10

Il suffit (*fig.* 10) de considérer l'hexagone inscrit AP'Q'BP''Q'' et de lui appliquer le théorème de Pascal.

II. — **Théorème de Brianchon.** — *Si on numérote* 1, 2, 3, 4,

5, 6 *les sommets successifs d'un hexagone circonscrit à une circonférence, les droites qui joignent les sommets opposés* 1 *et* 4, 2 *et* 5, 3 *et* 6 *concourent en un même point.*

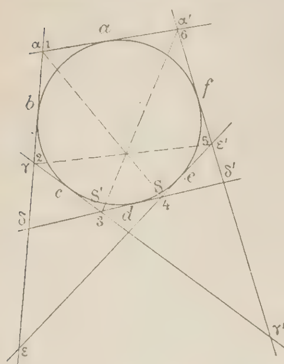


Fig. 11

Considérons en effet (*fig.* 11) l'hexagone circonscrit dont nous désignerons les côtés par a, b, c, d, e, f. Prenons deux côtés b et f, ni opposés ni consécutifs. Les séries rectilignes déterminées sur b et f par les quatre autres côtés ont même rapport anharmonique (10, II). Donc

$$(\alpha\gamma\delta\varepsilon) = (\alpha'\gamma'\delta'\varepsilon').$$

Prenons la première division comme base d'un faisceau ayant pour sommet le point de rencontre S de d et e, séparé de b par un seul côté c; la seconde comme base d'un faisceau ayant pour sommet le point de rencontre S' de d et de c, séparé de f par un seul côté e; il vient

$$(S.\ \alpha\gamma\delta\varepsilon) = (S'.\alpha'\gamma'\delta'\varepsilon').$$

D'ailleurs ces deux faisceaux ont les rayons homologues $S\delta$ et $S'\delta'$ communs : donc (11, I) les points de rencontre de $S\alpha$ et $S'\alpha'$, $S\gamma$ et $S'\gamma'$, $S\varepsilon$ et $S'\varepsilon'$ sont en ligne droite. Mais $S\alpha$ et $S'\alpha'$ sont les diagonales 1-4 et 3-6 ; $S\gamma$ et $S'\gamma'$ se coupent au sommet 2 ; $S\varepsilon$ et $S'\varepsilon'$ au sommet 5 ; donc la diagonale 2-5 passe par l'intersection de 1-4 et 3-6.

On remarquera encore ici la dualité parfaite des deux démonstrations.

13. **Extension des propriétés précédentes aux coniques** (*ellipse, hyperbole, parabole*).

Elevons par le centre d'un cercle une perpendiculaire à son plan et prenons-y un point arbitraire S ; le cône de sommet S ayant le cercle pour directrice est de révolution. On sait (théorème de Dandelin) que si on le coupe par un plan, on obtient selon la position du plan sécant une ellipse, une hyperbole ou une parabole ; inversement, étant donnée une ellipse, une hyperbole ou une parabole, on peut généralement trouver un plan coupant le cône donné suivant une courbe égale.

Une conique quelconque peut donc toujours être considérée comme la projection centrale d'un cercle sur un plan convenablement choisi. Dans cette projection, le rapport anharmonique d'un faisceau ou d'une division rectiligne restent invariables : donc toutes les propriétés du cercle qui ne sont basées que sur cette seule propriété se transportent immédiatement aux coniques.

I. — *Dans une conique, le rapport anharmonique du faisceau obtenu en joignant un point mobile de la conique à quatre points fixes de la conique est constant* (théorème de Chasles).

II. — *Dans une conique, le rapport anharmonique des quatre points où une tangente mobile rencontre quatre tangentes fixes est constant.*

III. — *Si on numérote* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *les côtés successifs d'un hexagone inscrit dans une conique, les points de rencontre des côtés opposés* 1 *et* 4, 2 *et* 5, 3 *et* 6 *sont en ligne droite* (théorème de Pascal).

IV. — *Si on numérote* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *les sommets successifs d'un hexagone circonscrit à une conique, les diagonales* 1-4, 2-5, 3-6 *qui joignent deux à deux les sommets opposés sont concourantes* (théorème de Brianchon).

III. — Homographie.

14. **Définition.** — *On dit que deux figures* F *et* F' *se correspondent homographiquement, lorsqu'à un élément donné de la première ne correspond qu'un seul élément de la seconde, et réciproquement.*

C'est ainsi, par exemple, que se correspondent les séries rectilignes de points déterminés sur deux droites L et L' par les sécantes issues d'un point S non situé sur ces droites.

Supposons que $x, y, \ldots$ soient les paramètres nécessaires pour déterminer un élément de la figure F; $x', y', \ldots$ ceux nécessaires pour déterminer l'élément correspondant de F' ; les premiers devront être liés aux seconds par des équations du premier degré, aussi bien par rapport à $x, y, \ldots$ que par rapport à $x', y', \ldots$. De plus, si n est le nombre des paramètres $x, y, \ldots$, le nombre des équations devra être égal à n, et de même celui des paramètres $x', y', \ldots$.

Supposons, par exemple, que les figures F et F' soient dans un même plan. On peut déterminer un point de l'une d'elles en se donnant la distance $OM = \rho$ de ce point à un point fixe O, et l'angle ω dont il faut faire tourner une demi-droite Ox autour de O dans un sens convenable, pour l'appliquer sur OM. En désignant par ρ' et ω' les éléments analogues pour un point M' de F', la correspondance homographique sera définie par deux équations

$$f(\rho, \rho', \omega, \omega') = 0,$$
$$f_1(\rho, \rho', \omega, \omega') = 0,$$

du premier degré en $\rho, \rho', \omega, \omega'$. Par exemple, on peut prendre

$$\omega = \omega' ;$$
$$\rho = k\rho' ;$$

les deux figures F et F' sont alors homothétiques par rapport au point O. On pourrait prendre

$$\omega = \omega', \qquad \rho\rho' = k ;$$

les deux figures F et F' sont alors inverses par rapport à O.

15. **Divisions homographiques.** — *Lorsque les points de deux droites* L *et* L' *se correspondent homographiquement, on dit que les points de ces deux droites forment deux divisions homographiques.*

Prenons sur L un point arbitraire O, sur L' un point arbitraire O' ; soit M un point quelconque de L, M' le point correspondant sur L' (*fig.* 12). On peut fixer la position des points M et M' à l'aide des segments

$$OM = x, \qquad O'M' = x'.$$

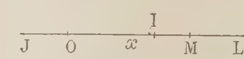


Fig. 12

L'homographie sera donc définie par une seule équation, du premier degré par rapport à x et x' ; elle sera donc en général de la forme

$$axx' + bx + cx' + d = 0. \tag{1}$$

L'homographie étant définie, les coefficients a, b, c, d ou plutôt les rapports de trois d'entre eux au quatrième sont connus et réciproquement. Il suffit donc de trois équations de condition pour déterminer ces rapports ; on les obtient par exemple en se donnant arbitrairement trois couples de valeurs correspondantes de x et x'. Donc :

La correspondance homographique de deux séries rectilignes de points est définie par la connaissance de trois couples de points homologues.

Supposons $a \neq 0$; posons $-\dfrac{b}{a} = u, \quad -\dfrac{c}{a} = v, \quad \dfrac{d}{a} = w$;

l'équation (1) prend la forme

$$xx' - ux - vx' + w = 0 ; \tag{2}$$

d'où

$$x' = \frac{ux - w}{x - v} \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{vx' - w}{x' - u}.$$

Lorsque M' s'éloigne indéfiniment sur L', x' devient infini et par suite x devient égal à v; de même, quand M s'éloigne à l'infini sur L, x devient infini et x' égal à u. Désignons par I' le point à l'infini sur L', par J le point à l'infini sur L (*fig.* 12), par I et J' leurs homologues; on aura donc

$$OI = v, \qquad O'J' = u ;$$

Si en particulier on fait coïncider O avec I et O' avec J', les coefficients u et v de l'équation (2) devront être nuls, et l'équation d'homographie prend la forme *réduite*

$$xx' + w = 0. \tag{3}$$

Elle peut toujours se réduire à cette forme, excepté si $a = 0$. Dans ce cas l'équation (1) devient

$$bx + cx' + d = 0.$$

Prenons pour origines O et O' sur L et L' deux points homologues; x et x' devront s'annuler simultanément, donc $d = 0$. L'équation devient

$$bx + cx' = 0 \qquad \text{ou} \qquad x = kx'.$$

On est donc dans le cas particulier où les segments OM et O'M' sont proportionnels.

Il est clair que si on se donne sur L trois points A, B, C, sur L' trois points A', B', C' et qu'on fasse se correspondre les points M et M' de L et L' par la condition

$$(MABC) = (M'A'B'C'),$$

les points M et M' décrivent sur L et L' deux divisions homographiques, dont (A, A'), (B, B'), (C, C') sont trois couples de points homologues.

La réciproque est vraie :

Dans deux divisions homographiques, le rapport anharmonique de quatre points quelconques de la première est égal au rapport anharmonique des quatre points correspondants de la seconde.

En effet, soient (A, A'), (B, B'), (C, C') trois couples de points homologues, M et M' deux autres points homologues quelconques et

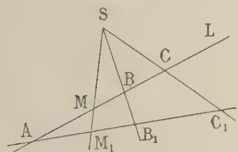
$$(MABC) = \lambda, \qquad (M'A'B'C') = \lambda'.$$

Puisque par hypothèse à une position de M ne correspond qu'une position de M', à une valeur de λ ne correspond qu'une valeur de λ' et réciproquement; donc λ et λ' sont liées par une équation de la forme

$$a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0.$$

M se confondant avec B, M′ se confond avec B′ ; donc λ et λ′ sont nuls simultanément ; par suite $d = 0$, et on peut écrire l'équation sous la forme
$$a + \frac{b}{\lambda'} + \frac{c}{\lambda} = 0.$$
M se confondant avec C, M′ se confond avec C′ ; donc λ et λ′ deviennent simultanément infinis ; donc $a = 0$ et l'équation devient
$$b\lambda + c\lambda' = 0 ;$$
enfin M se confondant avec A, M′ se confond avec A′ ; λ et λ′ deviennent simultanément égaux à 1 ; donc $b + c = 0$, et l'équation devient
$$\lambda = \lambda'.$$
Donc $(\text{MABC}) = (\text{M}'\text{A}'\text{B}'\text{C}')$.

Il résulte immédiatement de là que deux divisions homographiques d'une troisième sont homographiques entre elles.



A′ M′ B′ C′ L′

Fig. 13

Nous avons déjà remarqué qu'un faisceau de droites concourantes détermine sur deux droites L et L′ deux divisions homographiques.

Réciproquement, deux divisions homographiques étant données, on peut les mettre *en perspective*.

Prenons dans l'une trois points A, B, C, dans l'autre les points correspondants A′, B′, C′. Déplaçons L′ de façon à faire coïncider A′ avec A, et soient B_1 et C_1 les positions de B′ et C′. Traçons BB_1 et CC_1 qui se coupent en S (*fig.* 13).

Soient M et M′ deux points homologues, M_1 la nouvelle position de M′. D'après ce qui a été démontré, on peut écrire
$$(\text{MABC}) = (\text{M}'\text{A}'\text{B}'\text{C}') = (\text{M}_1\text{AB}_1\text{C}_1).$$
Les deux séries rectilignes de quatre points (M, A, B, C), (M_1, A, B_1, C_1) ont même rapport anharmonique, un point homologue A commun ; donc (11, II) MM_1 passe par le point de concours S de BB_1 et CC_1. Ainsi dans les divisions décrites par M et M_1, deux points homologues sont toujours en ligne droite avec le point S, qui est leur centre commun de perspective.

De là résulte la construction du point M′ homologue de M ; on fait coïncider A′ avec A et on détermine S par BB_1 et CC_1 ; on tire SM qui fait connaître M_1 ; enfin on prend $A'M' = AM_1$.

16. Faisceaux homographiques. — Un faisceau est le système formé par une infinité de droites concourant en un même point S, *sommet* du faisceau.

Lorsque les rayons de deux faisceaux se correspondent homographiquement, les deux faisceaux sont homographiques.

Il est évident que deux faisceaux homographiques déterminent sur deux droites quelconques des divisions homographiques ; réciproquement, les faisceaux obtenus en joignant deux points quelconques S et S′ aux points homologues de deux divisions homographiques sont eux-mêmes homographiques.

Par suite, le rapport anharmonique de quatre rayons de l'un des faisceaux est égal au rapport anharmonique des rayons correspondants de l'autre. Cette égalité des rapports anharmoniques caractérise donc deux faisceaux homographiques. On en conclut cette proposition :

Dans toute conique, les faisceaux obtenus en joignant un point variable M *de la conique à deux points fixes* S *et* S′ *sont homographiques.*

En effet, soient (*fig.* 14) A, B, C trois points fixes de la conique ; on a démontré (13, I) que
$$(\text{S.ABCM}) = (\text{S}'.\text{ABCM}).$$
Donc SM et S′M engendrent deux faisceaux homographiques.

Fig. 14

17. Divisions homographiques de même base.— Lorsque les deux *bases* L et L′ des deux divisions coïncident, on peut se demander s'il n'existe pas de point de l'une des divisions qui coïncide avec son homologue dans l'autre ; ce point s'appelle alors un *point double*.

Deux divisions homographiques de même base admettent en général deux points doubles, réels ou imaginaires.

En effet, les deux divisions étant tracées sur la même droite, rapportons-les à la même origine ; soient x et x' les segments OM et OM′, liés par la relation
$$axx' + bx + cx' + d = 0.$$
Si M est un point double, on a $OM' = OM$, donc $x' = x$; le segment x est donc racine de l'équation du second degré
$$ax^2 + (b + c)x + d = 0 ; \qquad (4)$$
d'où résulte bien l'existence des deux points doubles.

Soient encore I et J′ (*fig.* 15) les points de chaque division homologues du point à l'infini dans l'autre ; on sait (15) que
$$\text{OI} = v = -\frac{c}{a}, \qquad \text{OJ}' = u = -\frac{b}{a}.$$
Prenons le point O au milieu de IJ′ ; on devra avoir
$$\text{OI} + \text{OJ}' = 0,$$
$$b + c = 0.$$
Donc en posant $\frac{d}{a} = w$, l'équation (4) devient
$$x^2 + w = 0. \qquad (5)$$
Les points doubles sont donc *réels* quand w est négatif.

O étant considéré comme appartenant à la première division, soit O′ son homologue dans la seconde (*fig.* 15). Pour $x = 0$, on aura $x' = OO'$; l'équation d'homographie donne alors
$$c.\text{OO}' + d = 0$$
ou
$$\frac{d}{a} = -\frac{c}{a}.\text{OO}'$$
$$w = \text{OI}.\text{OO}'.$$
L'équation (5) s'écrit donc
$$x^2 = -\text{OI}.\text{OO}' = \text{OJ}'.\text{OO}'.$$

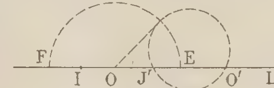


Fig. 15

On obtient donc des points doubles réels, lorsque OJ′ et OO′ sont de même sens. On les construit à l'aide d'un cercle quelconque passant par J′ et O′ (*fig.* 15).

18. Faisceaux homographiques de même sommet. — De même que deux divisions homographiques de même base admettent deux points doubles, deux faisceaux homographiques de même sommet admettent deux *rayons doubles*, c'est-à-dire deux rayons tels que chacun d'eux coïncide avec son homologue. On pourrait évidemment les construire en coupant les deux faisceaux par une droite ; les deux faisceaux y déterminent deux divisions homographiques de même base ; les rayons doubles sont les droites joignant le sommet commun aux points doubles de ces divisions.

Il est préférable d'employer une autre construction, plus directe.

Soient (SA, SA′), (SB, SB′), (SC, SC′) les trois couples de rayons homologues nécessaires pour définir les deux faisceaux homographiques (*fig.* 16); SM et SM′ deux rayons homologues quelconques.

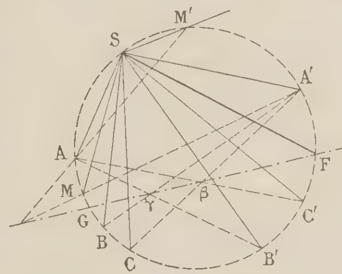


Fig. 16

Traçons un cercle quelconque passant par S, et supposons que A, A′, B, B′, C, C′, M, M′ soient les points où il rencontre les rayons considérés. *Quand on fait varier* M *et* M′, *les droites* AM′ *et* A′M *se coupent toujours sur une droite fixe.*

En effet, puisque les deux faisceaux sont homographiques, on peut écrire (16)
$$(\text{S.ABCM}) = (\text{S.A}'\text{B}'\text{C}'\text{M}') ;$$
donc (10, I)
$$(\text{A}'.\text{ABCM}) = (\text{A.A}'\text{B}'\text{C}'\text{M}').$$
Ces deux faisceaux de quatre droites ont même rapport anharmonique, les rayons homologues A′A et AA′ se confondent ; donc (11, I) les points de rencontre de A′B et AB′, A′C et AC′, A′M et AM′ sont en ligne droite.

En d'autres termes, les droites variables A′M et AM′ se coupent toujours sur la droite fixe γβ, qui joint le point de rencontre γ de A′B et AB′ au point de rencontre β de AC′ et A′C.

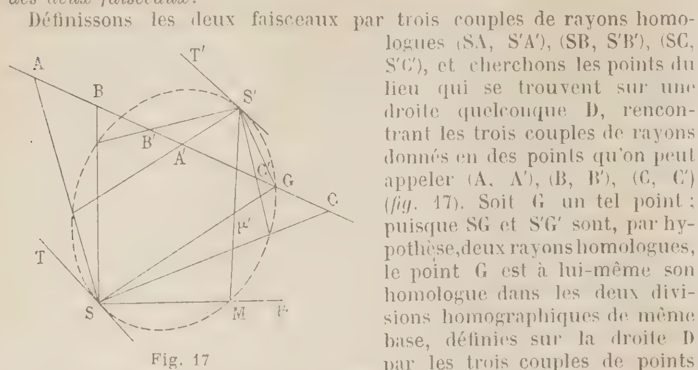
On en conclut aisément la construction du rayon SM′ homologue d'un rayon donné SM

SM sera un rayon double si M′ et M se confondent, ce qui ne peut avoir lieu que lorsque M se place en F ou G, points d'intersection de γβ et du cercle. Les rayons doubles sont donc SF et SG. Ils sont ailleurs distincts, confondus ou imaginaires suivant la position de γβ par rapport au cercle.

19. On sait que les trois coniques sont des courbes telles qu'une droite ne peut les rencontrer en plus de deux points. On démontre que, réciproquement, ce sont les seules courbes jouissant de cette propriété. Nous allons en conclure cette proposition importante :

Le lieu géométrique du point de rencontre des rayons homologues de deux faisceaux homographiques est une conique passant par les sommets des deux faisceaux.

Définissons les deux faisceaux par trois couples de rayons homologues (SA, S'A'), (SB, S'B'), (SC, S'C'), et cherchons les points du lieu qui se trouvent sur une droite quelconque D, rencontrant les trois couples de rayons donnés en des points qu'on peut appeler (A, A'), (B, B'), (C, C') (*fig.* 17). Soit G un tel point; puisque SG et S'G' sont, par hypothèse, deux rayons homologues, le point G est à lui-même son homologue dans les deux divisions homographiques de même base, définies sur la droite D par les trois couples de points (A,A'), (B,B'), (C,C'). C'est donc un point double ; or, il y a au plus deux points doubles ; donc le lieu cherché ne peut être rencontré par une droite quelconque en plus de deux points ; c'est donc une conique.



Elle passe par S et S'. En effet, soient Sμ et S'μ' deux rayons homologues se coupant en M ; lorsque Sμ se confond avec SS', S'μ' prend une certaine position S'T' ; par suite M vient en S' qui est donc un point du lieu. De plus S'T' est la position limite que prend la sécante S'M quand M vient se confondre avec S' ; c'est donc la tangente en S'. De même S est un point du lieu, et la tangente en S est le rayon ST, homologue de S'S considéré comme appartenant au second faisceau.

Deux faisceaux homographiques étant définis par leurs sommets et trois couples de rayons homologues, il résulte de ce qui précède que *par cinq points* (les deux sommets et les trois points de rencontre des rayons homologues) *on peut faire passer une conique et une seule.*

On sait que les trois coniques se distinguent par le nombre de leurs points à l'infini : l'hyperbole en a deux, la parabole un seul, l'ellipse aucun.

Les points à l'infini du lieu précédent sont évidemment fournis par les rayons parallèles des deux faisceaux ; pour les construire, il suffirait de transporter l'un des faisceaux parallèlement à lui-même au sommet de l'autre, et de construire les rayons doubles des deux faisceaux de même sommet ainsi obtenus.

Un cas particulier intéressant du théorème est celui où le rayon SS' se correspond à lui-même dans les deux faisceaux. On peut alors les définir par le rayon commun SS', et deux autres couples (SA, S'A), (SB, S'B) dont nous appellerons A et B les points de rencontre (*fig.* 18). Soient SM et S'M deux autres rayons homologues quelconques se rencontrant en M. Les faisceaux étant homographiques, on a

$$(S.ABS'M) = (S'.ABSM).$$

Ces deux faisceaux de quatre droites ont même rapport anharmonique, un rayon homologue commun ; donc (11, I) A, B, M sont en ligne droite. Le point de rencontre M de deux rayons homologues quelconques décrit donc la droite AB.

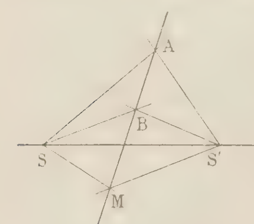


Fig. 18

Le lieu se compose alors des deux droites SS' *et* AB.

20. Pour montrer l'application de ces propositions, traitons le problème suivant :

On donne un cercle C, *une droite* D, *un point* P. *On prend un point mobile* M *sur* D, *et on demande de déterminer le lieu géométrique du point* I, *intersection de* PM *et de la polaire de* M *par rapport à* C.

Discuter la nature de ce lieu, suivant la position du point P *dans le plan* (*fig.* 19).

M étant sur D, sa polaire passe par le pôle R de D qui est un point fixe. A une position de PM ne correspond qu'un seul point M, par suite une seule polaire qu'on obtient en abaissant de R la perpendiculaire sur OM. Inversement, à une position de RI ne correspond qu'un seul point M et par suite une seule position de PM.

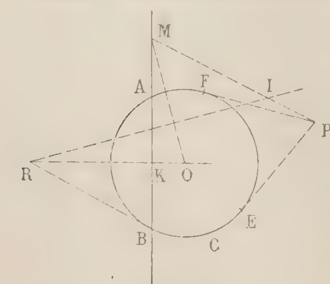


Fig. 19

Donc PM et RI se correspondent homographiquement : comme P et R sont fixes, le lieu de I est une conique, passant par P et R. Elle passe par les points A et B où D rencontre le cercle C ; il suffit, pour le voir, de supposer M en A ou B. De même elle passe par les points de contact E et F des tangentes issues de P au cercle C ; il suffit de faire coïncider PM avec une de ces tangentes pour trouver ces points.

Le genre de la conique se détermine en cherchant ses points à l'infini. Les droites PM et RI seront parallèles si OM et PM sont perpendiculaires : le point M devra donc se trouver à l'intersection de D et du cercle de diamètre OP. On est donc ramené à ce problème : Comment faut-il placer le point P pour que le cercle de diamètre OP rencontre D ou lui soit tangent ?

Prenons d'abord le cas limite. Soit Q le point de tangence du cercle de diamètre OP et de la droite D (*fig.* 20), ω le milieu de PO. La figure montre que $\omega Q = \omega O$.

Prenons

$$OK_1 = 2OK, \; OV = 2OQ\;;$$

VK_1 (droite fixe) sera parallèle à D, et VP sera parallèle à OK, par suite perpendiculaire à VK_1. Donc

$$PV = PO.$$

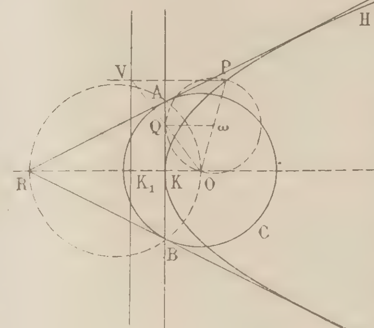


Fig. 20

Il en résulte que P se trouve alors sur la parabole H de foyer O et de directrice VK_1. Le sommet de cette parabole est K ; sa tangente au sommet est D.

Donc, lorsque P est sur H, il y a une seule position de M pour laquelle les deux rayons homologues sont parallèles ; la conique a un seul point à l'infini : le lieu de I est donc une parabole.

Lorsque le point P est extérieur à H, on a $PO > PV$, donc $\omega O > \omega Q$; le cercle de diamètre OP rencontre D en deux points distincts ; la conique, lieu de I, est une hyperbole.

Lorsque P est intérieur à H, le cercle de diamètre OP ne rencontre plus D, et par suite le lieu est une ellipse.

On peut enfin se demander dans quel cas le lieu se réduit à deux droites. Pour cela il faut et il suffit que la droite PR se corresponde à elle-même dans les deux faisceaux. Le point M se trouve alors à l'intersection de PR et de D. D'ailleurs RI, c'est-à-dire RP doit être perpendiculaire sur OM ; donc $\widehat{RMO}$ est droit, et le point M est l'un des deux points où le cercle de diamètre OR rencontre D ; c'est donc un des points A ou B. Il faut donc que P se trouve sur RA ou RB.

On peut remarquer que ces deux droites sont tangentes à la parabole H (la tangente au sommet est le lieu des projections du foyer sur toutes les tangentes).

Pour ne pas allonger la discussion, nous n'avons rien dit à propos de la réalité des points A et B.

IV. — Involution.

21. L'involution est un cas particulier de l'homographie.

On dit que deux divisions homographiques de même base sont en involution lorsque deux points homologues quelconques M *et* M' *sont réciproques, c'est-à-dire lorsqu'un point* M *considéré comme appartenant à l'une ou l'autre division a toujours le même homologue* M'.

Il en résulte que si l'équation de l'homographie est satisfaite pour $x = \alpha$, $x' = \alpha'$, elle doit l'être aussi pour $x = \alpha'$ et $x' = \alpha$; on a donc simultanément

$$a\alpha\alpha' + b\alpha + c\alpha' + d = 0,$$

$$a\alpha\alpha' + b\alpha' + c\alpha + d = 0,$$

d'où, par soustraction,

$$(b - c)(\alpha - \alpha') = 0\;;$$

comme en général $\alpha - \alpha'$ n'est pas nul, il en résulte

$$b = c,$$

et l'équation devient symétrique en x et x'. On peut donc la ramener à la forme

$$xx' - u(x + x') + w = 0.$$

Elle ne renferme plus que deux coefficients u et v ; on pourra les déterminer en se donnant *deux* couples de points homologues :

Deux couples de points homologues suffisent pour définir une involution.

En appelant I et J' les points homologues de l'infini (17), on a maintenant

$$u = OI = OJ'\;;$$

les points I et J' se confondent en un même point ω ; en prenant ce point pour origine, u est nul et l'équation de l'involution devient

$$xx' + w = 0.$$

En désignant par (M, M′), (P, P′), ... des couples de points homologues, on a donc

$$-w = \omega M . \omega M' = \omega P . \omega P' = \ldots = \text{constante}.$$

Les *points doubles* s'obtiennent en faisant $x = x'$, et sont donnés par l'équation

$$x^2 + w = 0.$$

Ils sont réels lorsque $-w$ est positif. Soit E l'un d'eux, M et M′ un couple de points homologues ; on aura

$$\overline{\omega E}^2 = \omega M . \omega M'.$$

22. Soient (A, A′,) (B, B′) les deux couples qui définissent une involution ; proposons-nous de construire : 1° le point central ; 2° les points doubles ; 3° deux points homologues quelconques (*fig.* 21).

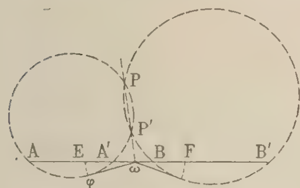


Fig. 21

Prenons un point quelconque P ; traçons les deux cercles PAA′, PBB′ et leur axe radical PP′ ; son point de rencontre ω avec la droite L qui porte l'involution est le point central ; car

$$\omega A . \omega A' = \omega B . \omega B'.$$

Lorsque les segments AA′, BB′ sont entièrement extérieurs ou entièrement intérieurs l'un à l'autre, on peut mener du point ω une tangente ωφ au cercle PAA′. En prenant ensuite sur L les longueurs

$$\omega E = \omega F = \omega \varphi,$$

E et F seront les points doubles, car

$$\overline{\omega E}^2 = \overline{\omega \varphi}^2 = \omega A . \omega A'.$$

Enfin, si par P et P′ on fait passer un cercle quelconque rencontrant L en M et M′, ce seront deux points homologues ; car

$$\omega M . \omega M' = \omega P . \omega B' = \omega A . \omega A'.$$

La relation $\overline{\omega E}^2 = \omega A . \omega A'$ prouve aussi que *les deux points doubles E et F (supposés réels) forment une division harmonique avec deux points homologues quelconques.*

23. Faisceaux en involution. — *Deux faisceaux de même sommet sont en involution lorsque deux rayons homologues quelconques sont réciproques, c'est-à-dire quand un rayon considéré comme appartenant à l'une ou l'autre division a toujours le même homologue.*

Comme pour les divisions homographiques de même base, deux faisceaux en involution ont des propriétés analogues à celles de deux divisions en involution. Ils peuvent renfermer des rayons doubles ; quand ces derniers sont réels, ils forment un faisceau harmonique avec deux rayons homologues quelconques.

Les constructions relativement à deux faisceaux en involution se font très commodément à l'aide du théorème suivant et de sa réciproque :

Lorsque plusieurs cordes AA′, BB′, ... d'un cercle concourent en un même point ω, les faisceaux qui vont d'un point du cercle aux extrémités de ces cordes sont en involution.

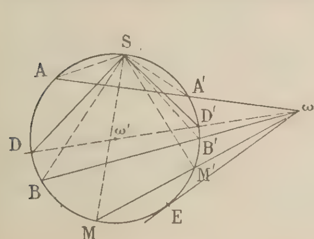


Fig. 22

En effet (*fig.* 22), le rayon SA, par exemple, considéré comme appartenant au premier faisceau ou au second a toujours pour homologue SA′ ; car par définition on considère comme rayons homologues ceux qui aboutissent aux extrémités de la même corde.

Réciproquement, si deux faisceaux sont en involution et que par le sommet commun on fasse passer un cercle quelconque, les droites qui joignent les points de rencontre des rayons homologues et du cercle concourent en un point fixe.

En effet, donnons-nous deux couples de rayons homologues nécessaires pour définir l'involution. Soient A et A′, B et B′ les points où ils rencontrent un cercle quelconque mené par le sommet S ; soit ω le point de rencontre de AA′ et BB′. Un autre rayon quelconque de l'un des faisceaux étant SM, qui rencontre le cercle en M, menons Mω qui rencontre le cercle une seconde fois en M′. D'après le théorème direct, SM et SM′ sont deux rayons homologues dans l'involution définie par le point ω, c'est-à-dire dans l'involution définie par (SA, SA′), (SB, SB′). Comme MM′ passe par ω, la réciproque est démontrée.

Le raisonnement précédent montre comment, l'involution étant définie par deux couples de rayons homologues, on détermine le point ω, et par suite le rayon SM′ homologue d'un rayon donné SM.

Un rayon sera double quand il se confondra avec son homologue ; le point M est alors l'un ou l'autre des points de contact E ou F (*fig.* 22) des tangentes issues de ω au cercle.

Deux faisceaux en involution admettent toujours un couple de rayons rectangulaires ; on les obtient en joignant le point ω au centre ω′ du cercle, ce qui donne les rayons SD et SD′. Ce couple est en général *unique*, à moins que ω ne se confonde avec ω′, auquel cas tous les couples de rayons homologues sont formés de rayons rectangulaires.

24. Les raisonnements précédents sont basés sur cette seule propriété du cercle, d'être rencontré par une droite en deux points seulement : ils s'appliquent donc à une conique quelconque.

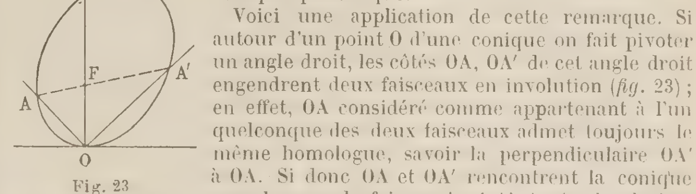


Fig. 23

Voici une application de cette remarque. Si autour d'un point O d'une conique on fait pivoter un angle droit, les côtés OA, OA′ de cet angle droit engendrent deux faisceaux en involution (*fig.* 23) ; en effet, OA considéré comme appartenant à l'un quelconque des deux faisceaux admet toujours le même homologue, savoir la perpendiculaire OA′ à OA. Si donc OA et OA′ rencontrent la conique pour la seconde fois en A et A′, toutes les droites telles que AA′ concourent en un point fixe. Supposons que OA devienne la tangente en O ; OA′ devient la normale ON et AA′ se confond avec ON ; donc le point fixe se trouve sur la normale en O : On trouve ainsi un théorème dû à *Frégier*.

Toutes les cordes d'une conique, vues d'un point O de cette conique sous un angle droit, concourent en un point situé sur la normale en O.

25. Nous allons appliquer ces résultats à la solution partielle de la question proposée en 1897 au concours d'admission à l'École Centrale.

On donne deux axes Ox et Oy, sur Oy deux points P et B, tels que $OP = p$, $OB = b$. *Par B on mène une droite arbitraire D ; par P on mène la parallèle à Ox et on y prend deux points μ et μ′, tels que* $P\mu . P\mu' = k$.

1° *Démontrer que si le point de rencontre de D et de Oμ décrit une conique tangente en O à Ox, le point de rencontre de D et Oμ′ décrit également une conique.*

En effet, soit C la conique donnée (*fig.* 24), tangente en O à Ox. A tout point μ de Px′ ne correspond qu'un seul point M de C sur Oμ, par suite une seule position de D ; de même au point μ ne correspond qu'une seule droite Oμ′ ; donc sur toute droite Oμ′ ne se trouve qu'un seul point du lieu. Le point O est d'ailleurs un point du lieu de M′. Pour que M′ vienne en O, il suffit que μ′ s'éloigne indéfiniment ; Oμ′ devient la tangente en O, μ vient en P, M en A, D se confond avec Oy : M′ se confond donc avec O. Il en résulte de plus que Ox est la tangente en O au lieu de M′, puisque c'est la position limite de OM′. Enfin O est un point simple du lieu, car aucune autre hypothèse ne peut amener M′ en O. Le lieu de M′ est donc tel que toute droite passant par O le rencontre en O et un second point ; c'est une conique C_1 tangente à Ox en O.

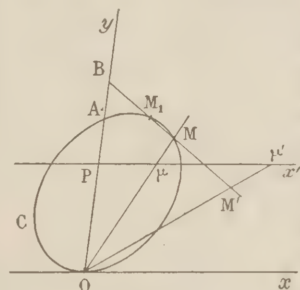


Fig. 24

Remarquons que D et Oμ′ n'engendrent pas deux faisceaux homographiques ; car à une position donnée de D correspondent sur C deux points M et M_1, donc deux points μ, et par suite deux points μ′.

2° *Condition pour que la seconde conique se confonde avec la conique C. Cette condition étant remplie, montrer qu'il existe une position de D telle que la corde interceptée par elle dans la conique C soit vue de O sous un angle droit.*

Toutes les cordes telles que MM_1 passant par un point fixe B, les droites telles que OM et OM_1 tracent sur Px′ une involution (24). M venant en A, OM_1 se confond avec Ox ; P est donc le point homologue du point à l'infini, c'est-à-dire le point central de cette involution.

Pour que C_1 se confonde avec C, il faut et il suffit que M′ se confonde toujours avec M_1 ; pour cela il suffit que l'involution dont nous venons de parler se confonde avec l'involution des points μ et μ′. Or ces deux involutions ont déjà en commun le couple (P, ∞) ; il suffit donc qu'elles aient un second couple commun, par exemple mêmes points doubles ; il suffit donc d'*une condition*.

La position cherchée de D s'obtient alors en joignant B au point de Frégier, situé sur la normale en O à la conique C.

3° *Les points P et B étant supposés sur une droite OPB mobile autour de O, chercher pour des valeurs données de p et de k (supposé positif) le lieu sur lequel on doit prendre B pour que le point M′ décrive toujours la conique C.*

Le point P supposé donné est, sur la parallèle Px' à Ox, le point central d'une involution définie par $P\mu$. $P\mu' = k$; par hypothèse les droites $O\mu$ et $O\mu'$ rencontrent la conique C en M et M' (*fig.* 25).

Prenons de part et d'autre de P

$$PJ = PJ' = \sqrt{k};$$

J et J' seront les points doubles de cette involution ; quand μ et μ' se confondent avec J ou J', les deux points M et M' se confondent avec l'un des points E ou F de rencontre de OJ ou OJ' avec C. Donc les tangentes en E et F se coupent au point cherché B, qui est ainsi déterminé.

(On vérifie aisément qu'il se trouve sur OP. En effet, P étant le milieu de JJ', la division $(J'PJ\infty)$ est harmonique ; de même le faisceau O.ESFR ; donc OP est la polaire de R par rapport à l'angle EOF ; d'ailleurs R étant sur la tangente en O, la polaire de R par rapport à la conique est OS ; donc le pôle de EF, qui passe par R, est sur OP).

Fig. 25

Du raisonnement précédent il résulte que sur toute droite OP il y a un seul point du lieu B. Ce point vient se confondre avec O lorsque P vient sur Ox ; OB se confond alors elle-même avec Ox, et O est un point simple du lieu ; on en conclut que le lieu de B est une conique C^2 tangente en O à Ox.

4° *Trouver la position de* B *et la relation entre* p *et* k, *telles que toutes les cordes interceptées par la conique* C *sur la droite mobile* D *soient vues du point* O *sous un angle droit.*

Il suffit évidemment que B vienne au point de Frégier de la conique C. relatif au point O. La normale en O est alors OB, et P se trouve sur cette normale. Les points tels que μ et μ' sont alors de part et d'autre de P (*fig.* 26), et l'involution formée par ces points ne possède pas de points doubles réels. La figure montre qu'on a alors en valeur absolue

$$P\mu . P\mu' = \overline{PO}^2, \quad p^2 = |k| .$$

C'est la relation cherchée.

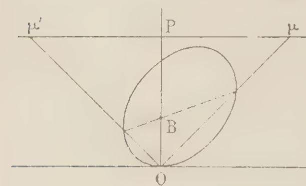


Fig. 26

ARITHMÉTIQUE

4339. — *Trois hommes* A, B, C *et leurs trois femmes* D, E, F *(énumérées dans un ordre quelconque) vont au marché et achètent un certain nombre d'objets.*

Chaque personne paie chaque objet un nombre de francs égal au nombre d'objets qu'elle achète.

Chaque mari achète pour 63^{fr} *de plus que sa femme. De plus :*

A *achète* 23 *objets de plus que* D ;

B *achète* 11 *objets de plus que* E.

Trouver la femme de chaque mari.

Soient x le nombre d'objets pris par un des trois hommes et y celui pris par sa femme.

Chaque personne payant chaque objet un nombre de francs égal au nombre d'objets qu'elle prend, pour que l'un des trois hommes paie 63^{fr} de plus que sa femme, on doit avoir

$$x^2 - y^2 = 63,$$

ou

$$(x-y)(x+y) = 63.$$

D'après cette égalité, les nombres $x - y$ et $x + y$ s'obtiendront en décomposant 63 en un produit de deux facteurs entiers. Or comme $63 = 3^2 \times 7$, cette décomposition n'est possible que des trois manières suivantes :

$$1 \times 63, \qquad 3 \times 21, \qquad 9 \times 7.$$

On déduit de là les trois solutions :

$x_1 - y_1 = 1, \quad x_1 + y_1 = 63;$ d'où $x_1 = 32, \quad y_1 = 31.$
$x_2 - y_2 = 3, \quad x_2 + y_2 = 21;$ d'où $x_2 = 12, \quad y_2 = 9.$
$x_3 - y_3 = 7, \quad x_3 + y_3 = 9;$ d'où $x_3 = 8, \quad y_3 = 1.$

Pour que l'un des trois nombres

$$x_1 = 32, \qquad x_2 = 12, \qquad x_3 = 8$$

convienne à A ou B, il faut et il suffit qu'il surpasse respectivement de 23 ou de 11 l'un des trois nombres

$$y_1 = 31, \qquad y_2 = 9, \qquad y_3 = 1.$$

En retranchant l'un des nombres y_1, y_2, y_3 de l'un des nombres x_1, x_2, x_3, on reconnaît sans peine que

$$x_1 - y_2 = 23, \qquad x_2 - y_3 = 11.$$

Donc x_1 s'applique à A et y_2 à D ; — x_2 s'applique à B et y_3 à E ; x_3 correspond alors à C et y_1 à F.

Des trois solutions x_1, y_1 ; x_2, y_2 ; x_3, y_3, il résulte que les trois hommes A, B, C ont respectivement pour femmes F, D, E.

(E. MATHIEU, école normale de Châlons.)

[Ont résolu la même question : MM. G. Bacquet ; A. Bertrand ; J. Condemine ; Feintuch ; J. Fourestier ; L. Gourdet ; G. Lemaire ; A. Mirc ; M. Saget ; A. Sineau ; Burgat ; M. Cryé ; Laguarigue de Survilliers ; L. Magne ; G. A. Nicolas ; P. Reboul.]

ALGÈBRE

3813. — *Une société anonyme fait un emprunt en émettant* 10.000 *obligations, valeur nominale* 500 *francs, rapportant* 15 *francs d'intérêts ; quelle somme doit-elle consacrer à l'amortissement de cet emprunt pour que le remboursement soit effectué en* 30 *ans, et pour quelle somme les obligations non amorties figureront-elles au passif, si cette société fait faillite au bout de 20 ans?*

(*Concours général de Belgique, 1894, Première commerc. et industr.*)

Soit C le montant de l'emprunt, r le taux de l'intérêt pour 1^{fr}, a l'annuité cherchée.

1° A la fin de la 1re année, la somme empruntée s'est accrue de ses intérêts et est devenue $C(1+r)$; mais à ce moment on prélève là-dessus une annuité a ; le capital qui reste à rembourser au commencement de la 2e année est par conséquent

$$C(1+r) - a.$$

A la fin de la 2e année, ce capital est devenu

$$[C(1+r) - a](1+r) = C(1+r)^2 - a(1+r),$$

et, l'annuité une fois payée, la somme remboursée est réduite à

$$C(1+r)^2 - a(1+r) - a.$$

On voit tout de suite la loi de formation de la formule donnant le capital dû au commencement de chaque année par la Société à ses actionnaires : au bout de la 30e année, après le versement de la dernière annuité, ce capital est

$$\begin{aligned} &C(1+r)^{30} - a(1+r)^{29} - a(1+r)^{28} - \ldots - a(1+r) - a \\ &\quad = C(1+r)^{30} - a[(1+r)^{29} + (1+r)^{28} + \ldots (1+r) + 1] \\ &\quad = C(1+r)^{30} - a\,\frac{(1+r)^{30} - 1}{r}. \end{aligned}$$

Mais, à ce moment, l'emprunt est complètement amorti :

$$C(1+r)^{30} - a\,\frac{(1+r)^{30} - 1}{r} = 0,$$

d'où

$$a = \frac{C(1+r)^{30} r}{(1+r)^{30} - 1}.$$

Remplaçons dans cette formule C par 5 000 000 et r par 0,03 ; calculant par logarithmes la valeur de $(1{,}03)^{30} = 2{,}4272581$, et effectuant ensuite, on trouve

$$a = 256508^{fr}.$$

2° Pour savoir ce que doit la Société à ses obligataires, lors de la déclaration de faillite, c'est-à-dire la somme à inscrire au passif du bilan, il faut calculer le total des valeurs actuelles, à ce moment, des annuités qui restent à servir :

20e annuité : Au moment de la faillite, la Société devrait verser la 20e annuité. La valeur exacte de cette annuité est donc $a = 256\,508^{\text{fr}}$;

21e annuité : Cette annuité devrait être versée 1 an après la faillite ; à ce moment elle vaudrait a, mais actuellement elle a une valeur a' telle que

$$a'(1+r) = a, \qquad \text{d'où} \qquad a' = a\frac{1}{(1+r)} = a(1+r)^{-1}.$$

On trouverait de même que la valeur réelle de la 22e annuité, au moment de la faillite, est $a(1+r)^{-2}$; que celle de la 23e annuité, dans les mêmes conditions, est $a(1+r)^{-3}$, et ainsi de suite, jusqu'à la 30e, qui vaut $a(1+r)^{-10}$.

Le total que nous voulons obtenir est donc égal à

$$a + a(1+r)^{-1} + a(1+r)^{-2} + \dots \quad a(1+r)^{-10}$$
$$= a\frac{(1+r) - (1+r)^{-10}}{r} = 256\,508\,\frac{1{,}03 - (1{,}03)^{-10}}{0{,}03}.$$

En se servant des logarithmes, on trouve $2\,393\,271^{\text{fr}},70$.

Remarque. — Les tables de Violeine (*) comportant une approximation plus grande, devaient, dans l'espèce, être employées de préférence aux tables de logarithmes. Leur emploi donne les résultats sensiblement différents :

pour l'annuité, $a = 255\,096^{\text{fr}},30$, au lieu de $256\,508^{\text{fr}}$;
pour le passif, $P = 2\,431\,120^{\text{fr}}$, au lieu de $2\,393\,271^{\text{fr}},70$.

(Pierre DUCLOS.)

[Ont résolu la même question ; MM. J. Delpont, à Moissac ; G. Simond.]

4321. — *Quelle valeur faut-il donner à y dans l'équation du second degré en x*

$$(4-y)x^2 - 9x - 12 = 0$$

pour que la somme de l'une des racines et du quadruple de l'autre se réduise à zéro?

(*Bacc. lettres-math., Dijon, juillet 1897.*)

On sait que dans toute équation du second degré de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

la somme des racines est égale à $-\frac{b}{a}$ et leur produit à $\frac{c}{a}$.

En désignant par x' et x'' les deux racines de l'équation proposée, on peut donc écrire

$$x' + 4x'' = 0, \qquad (1)$$

$$x' + x'' = \frac{9}{4-y}, \qquad (2)$$

$$x'x'' = \frac{-12}{4-y}. \qquad (3)$$

Retranchons (2) et (1) membre à membre ; nous aurons

$$3x'' = -\frac{9}{4-y},$$

d'où
$$x'' = \frac{-3}{4-y},$$

et
$$x' = -4x'' = \frac{12}{4-y}.$$

(*) Les *Tables de Violeine* sont des tables spéciales pour les calculs d'intérêts composés, annuités, amortissements, etc. ; elles sont en usage dans les sociétés financières, les compagnies d'assurances, de chemins de fer, etc.

En portant ces valeurs de x' et x'' dans (3), il vient

$$\frac{12}{4-y}\cdot\frac{-3}{4-y} = \frac{-12}{4-y},$$

ou, en supposant $y \neq 4$,

$$3 = 4 - y,$$

d'où
$$y = 1.$$

Pour cette valeur de y, l'équation proposée admet pour racines

$$x' = \frac{12}{4-1} = 4 \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-3}{3} = -1.$$

En examinant le cas particulier réservé, on voit que lorsque $y = 4$, l'équation n'est plus que du premier degré, et ne peut par suite remplir la condition énoncée.

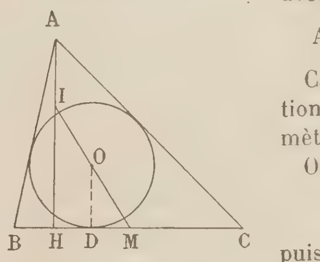
(BRUGEROLLE, instituteur à Draguignan.)

[Ont résolu la même question : MM. G. Anastasiu ; E. Ardin-Delteil ; L. Aulagnier ; L. Badoux ; A. Ballé ; P. Barroué ; R. Basset ; E. Baudot ; Bayor ; G. Beaudun ; L. Bellour ; C. Benoit ; F. Beynas ; Bigot ; H. Bosc ; E. Boutaud ; M. Boutaud ; A. Bouzy ; F. Bréthous-Guichot ; E. Brière ; A. Buisson ; J. Camus ; R. Van Cauwenbergne ; A. Chapron ; G. Charpentier ; E. Charton ; F. Chuberre ; E. Clément ; Coupat ; M. Cryé ; L. Curt ; L. Cussenot ; G. Dazier ; A. Delcung ; J. Delpont ; Donnadieu ; J. Douménach ; L. Dumas ; P. Dupuis ; Feintuch ; Ferrier ; L. Florentin ; J. Fourestier ; L. Fournier ; R. Fradin ; P. Frescal ; G. M. ; N. Garrigues ; J. Gonnet ; P. Goudry ; L. Gourdet ; E. Gourdon ; H. Jouanneau ; J. Guillaume ; A. Helin ; Herrmann ; G. Hiernaux ; H. Itier ; L. Jardin ; A. Jeannel ; A. Jupeau ; Krom ; X. Lacreuse ; B. Lachenaud ; F. Ladevèze ; M. Lagarde ; Laguarigue de Survilliers ; R. Larsonneur ; A. Larue ; E. Laudat ; E. Lavadoux ; E. Layes ; A. Legros ; E. Le Maigre ; F. Leulliot ; L. Magne ; C. Marie ; G. Massoutier ; J. Maury ; E. Ménissier ; A. Mirc ; J. Mouchet ; R. Mothes ; F. Pégorier ; G. Perdrizet ; P. Perrot ; J. Pillard ; H. Pingeot ; S. Pochon ; C. Poujol ; J. Quilichini ; Raynaud ; M. Rebeix ; P. Reboul , Remondet ; Robin ; A. Rongier ; A. Rozier ; P. de Sabbathier ; P. Saint-Félix ; E. Séclin ; E. Sevin ; J. Sire ; A. Smântanescu ; Stanciulescu ; Stern ; R. Sudre ; L. Tarrin ; R. Terrebonne ; M. Teulié ; E. Vaicle ; Valentin ; G. Vente ; A. Vergnole ; Vial ; Vidal-Naquet ; E. Villemagne ; P. Vincent ; E. Sinturel.]

GÉOMÉTRIE

4297. — *On donne un triangle ABC. Soient r le rayon du cercle inscrit et O son centre ; M étant le milieu du côté BC, démontrer que MO coupe la hauteur AH en un point I, tel que $AI = r$.*

Première solution. — Soit D le point de contact du cercle O avec le côté BC. La figure donne



$$AI = AH - IH = AH - \frac{r.HM}{DM}.$$

Calculons AH, HM et DM en fonctions des côtés a, b, c, du demi-périmètre p et du rayon r.

On a d'abord

$$AH = \frac{2pr}{a};$$

puis

$$DM = DC - \frac{a}{2} = p - c - \frac{a}{2} = \frac{b-c}{2}.$$

En multipliant membre à membre les deux égalités

$$2\overline{HM} = \overline{HC} + \overline{HB}, \qquad a = \overline{HC} - \overline{HB},$$

il vient

$$2a\overline{HM} = \overline{HC}^2 - \overline{HB}^2 = b^2 - c^2,$$

d'où
$$\overline{HM} = \frac{b^2 - c^2}{2a}.$$

Par suite,

$$AI = \frac{2pr}{a} - \frac{r(b^2-c^2)}{2a}\cdot\frac{2}{b-c} = \frac{r}{a}(2p - b - c) = r.$$

(G. GAUCHET, école primaire supérieure de Granville.)

M. G. Delahaye, à Roye, remarque que la droite qui joint M

au centre O_a du cercle exinscrit dans l'angle A rencontre AH en un point I_a tel que $AI_a = r_a$.

Seconde solution. — Traçons le cercle circonscrit au triangle ABC; la bissectrice intérieure de l'angle A passe par le milieu K de l'arc BC; soit S son point de rencontre avec BC.

Les triangles semblables AOI, OKM donnent

$$\frac{AI}{MK} = \frac{AO}{OK}; \qquad (1)$$

les triangles semblables ODS, SMK donnent

$$\frac{OD}{MK} = \frac{OS}{SK}; \qquad (2)$$

divisant (1) et (2) membre à membre, il vient

$$\frac{AI}{OD} = \frac{AO \times SK}{OK \times OS}. \qquad (3)$$

O étant le centre du cercle inscrit, on sait que $OK = KC$. D'autre part les triangles ABS et SKC sont évidemment équiangles et par suite semblables; donc

$$\frac{AB}{BS} = \frac{KC}{SK};$$

BO étant bissectrice de l'angle B, il vient

$$\frac{AB}{BS} = \frac{AO}{OS} = \frac{KC}{SK} = \frac{OK}{SK};$$

donc enfin $$AO \times SK = OK \times OS,$$
et par suite, d'après (3),
$$AI = OD.$$

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil ; P. Boutroux ; Burgat ; Cussenot ; G. Delahaye ; Feintuch ; L. Florentin ; L. Gourdet ; G. Hiernaux ; F. Leulliot ; L. Magne ; A. Mirc ; L. P. à A. ; J. Quilichini ; M. Rebeix ; Vial.]

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

4336. — *On donne, sur une horizontale de cote* 112^{mm}, *deux points* B *et* D, *distants de* 96^{mm}; *par la droite* BD *on mène un plan de pente* 1, *de manière que sa trace horizontale se trouve à droite du grand axe de la feuille. Dans ce plan on construit le carré* ABCD, *de diagonale* BD, A *étant le sommet de plus grande cote.*

Ce carré sert de base à un parallélépipède droit de 96^{mm} *de hauteur, situé au-dessous du plan* P. *Construire sa projection.*

Par le centre O *de ce parallélépipède on mène une horizontale* H, *parallèle à* BD, *et on y prend, de part et d'autre de* O, *les longueurs* $OS = 78^{mm}$, $OE = 47^{mm}$. *Par* E *on mène le plan vertical perpendiculaire à* OS, *et on y projette* A *en* F.

Déterminer les génératrices de contour apparent du cône de révolution ayant OS *pour axe,* SF *pour génératrice, ce cône étant limité au plan vertical* EF.

Trouver l'intersection de la surface du cône avec celle du parallélépipède, et représenter sur l'épure l'ensemble des deux corps supposés solides.

Représenter aussi, par des croquis réduits :

1° *le solide commun ;*

2° *la partie du parallélépipède extérieure au cône ;*

3° *la partie du cône extérieure au parallélépipède.*

Projection du parallélépipède. — Soit $bd = 96^{mm}$ la projection de la diagonale horizontale BD. La diagonale AC se trouve dans le plan vertical mené par le milieu $i(112)$ de BD et dont la trace est xy; en rabattant ce plan sur le plan horizontal, la diagonale AC se rabat suivant la droite $a'c' = 96^{mm}$, passant par i' et inclinée à 45° sur xy, et en élevant alors à $a'c'$, en a', i', c', des perpendiculaires égales à 96^{mm}, on a les projections verticales $a'a'_1$, $i'i'_1$, $c'c'_1$ des arêtes latérales de front du solide, d'où l'on déduit aisément sa projection $abcda_1b_1c_1d_1$. On voit d'après cette construction que la diagonale AC_1 est verticale, de sorte que le centre O du solide se projette en a.

Contour apparent du cône. — Sur la parallèle à bd issue de a, prenons $as = 78^{mm}$ et $ae = 47^{mm}$, s étant pris du côté opposé au rabattement du plan vertical xy. Le point A se projette en (e, a') ou (f, f') sur le plan vertical mené par e perpendiculairement à OS (plan de front); la génératrice $(sf, s'f')$, rendue horizontale après rotation autour de l'axe SO, vient en $(sg, s'c')$ ou $(sg_1, s'a'_1)$. Le cône limité considéré a ainsi pour contour apparent le triangle sgg_1.

Intersection du parallélépipède et du cône. — Nous chercherons d'abord les points remarquables situés sur les arêtes du solide et sur les génératrices de contour apparent du cône, puis un point courant et les points les plus hauts et les plus bas de l'intersection.

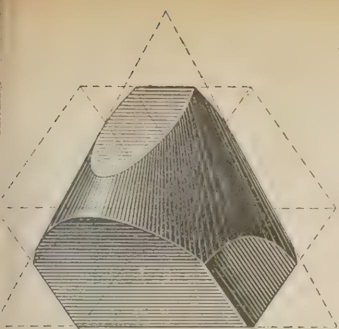
a) *Points sur les arêtes.* — Traçons le cercle s', projection verticale de la section du cône par le plan vertical xy. Ce cercle ne coupant pas les arêtes $a'a'_1$ et $c'c'_1$, situées dans son plan, ces arêtes sont extérieures au cône. Le plan des arêtes parallèles BB_1 et DD_1, passant par S, détermine dans le cône deux génératrices dont une seule, $(sl, s'l')$, est figurée sur l'épure et fournit l'un des points α où l'arête bb_1 perce le cône.

Des quatre plans menés par S et par l'une des arêtes de la base $A_1B_1C_1D_1$, les plans sa_1d_1 et sd_1c_1 peuvent seuls couper le cône ; les génératrices d'intersection s'obtiennent en cherchant la trace verticale (v, v') de la droite $(sd_1, s'd'_1)$, puis les points de rencontre p', q' des droites a'_1v' et c'_1v' avec le cercle s' ; les génératrices sp et sq fournissent ainsi les points β et γ sur les arêtes a_1d_1 et d_1c_1. En observant que la génératrice SP divise l'arête AD dans le même rapport en projection horizontale ou verticale, il est aisé de voir que les points β et γ divisent respectivement a_1d_1 et c_1d_1 dans le même rapport, de sorte que la droite $\beta\gamma$ est parallèle à a_1c_1. Par raison de symétrie, la droite $\beta\gamma$ prolongée détermine deux autres points analogues sur les arêtes ad et dc.

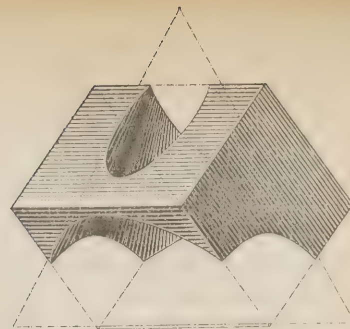
b) *Points sur les génératrices* sg *et* sg_1. — Le plan horizontal contenant ces génératrices coupe le parallélépipède suivant un losange dont une moitié a_1hk est seule figurée et fournit les points λ et μ sur la génératrice sg_1. Il est bon de remarquer que les plans de front menés par λ et μ contiennent les points de l'intersection situés dans le plan de profil ss', comme on le vérifie en rabattant ce dernier sur le plan horizontal.

c) *Point courant.* — Un plan quelconque mené par l'axe du cône rencontre ce dernier suivant la génératrice $(sn, s'n')$ et la face bcc_1b_1 suivant la droite $(hr, s'r')$; l'intersection de sn et hr donne le point m de l'intersection. Le plan tangent au cône suivant la génératrice $(sn, s'n')$ rencontre l'arête c_1c au point (t, t'), et mt est la tangente en m. On pourrait appliquer la construction à la détermination des tangentes aux points remarquables α, β, γ.

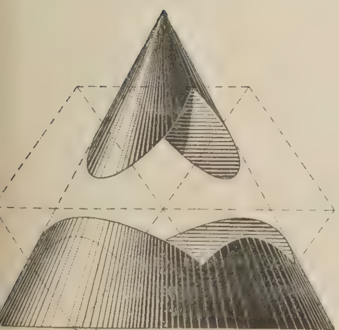
d) *Points les plus hauts et les plus bas.* — Pour ces points, la projection horizontale de la tangente est parallèle à xy. En considérant d'abord les faces latérales du parallélépipède, ces points appartiennent aux génératrices de contact telles que $(su, s'u')$ des plans tangents au cône parallèles aux arêtes latérales ; le plan de cette génératrice et de l'axe coupe les deux faces issues de a_1a suivant deux droites projetées en i_1h et i_1k, et rencontrant la génératrice aux points δ et ε.



A



B



C

LÉGENDE
relative aux croquis
$\left(\textit{Échelle} : \frac{1}{3}\right)$

A, solide commun.
B, partie du parallélépipède extérieure au cône.
C, partie du cône extérieure au parallélépipède.

Dans le cas des bases du solide, les points visés appartiennent aux génératrices de contact des plans tangents au cône parallèles à la diagonale ac ou a_1c_1 ; on constate ainsi que l'un de ces points est situé à l'intersection de b_1d_1 avec su.

Ponctuation. — L'ensemble du parallélépipède et du cône est représenté par l'intersection proprement dite et les parties des arêtes et du contour apparent extérieures aux deux solides ; une ligne n'est d'ailleurs vue qu'autant qu'elle se trouve à la fois sur la surface visible du parallélépipède et du cône.

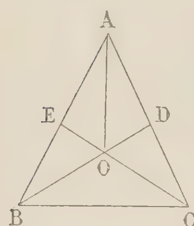
Pour la ponctuation des trois autres figures, nous n'insisterons pas, ces figures parlant suffisamment aux yeux.

(L. MESSENT.)

[Ont envoyé des épures exactes : MM. L. Curt, école normale de Bourg ; V. Duffet, à Lyon ; M. Oger.]

GÉOMÉTRIE

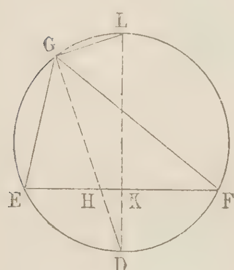
Théorème. — *Si dans un triangle deux bissectrices sont égales, le triangle est isocèle.*



Soit le triangle ABC, O le point de concours des bissectrices BD et EC supposées égales ; la troisième bissectrice est AO. Les deux triangles AEC, ABD sont égaux comme ayant un côté égal, l'angle opposé égal et la bissectrice correspondante égale. Par suite le côté AB est égal au côté AC.

(A. MOREAUX, professeur au lycée de Nancy.)

Reste à faire voir que deux triangles ayant un côté égal, l'angle opposé égal et même bissectrice de cet angle sont égaux.



En effet, prenons une longueur EF égale au côté connu, et décrivons sur EF comme corde un segment capable de l'angle connu. La bissectrice de l'angle opposé à EF passera par le milieu D de l'arc EDF qui complète le segment. Menons par D une droite quelconque rencontrant EF en H et le segment en G.

Dans le triangle GEF, GH est la bissectrice de l'angle en G. D'ailleurs

$$GH = DG - DH.$$

Lorsque DG tourne autour de D en partant de la position DE, la longueur DG *croît constamment* de DE à DL ; la longueur DH *décroît constamment* de DE à DK ; donc HG *croît constamment* de zéro à KL. Si donc la longueur l de la bissectrice est inférieure à la flèche KL du segment, il existe bien un seul triangle ayant un côté donné et un angle donné, la bissectrice de cet angle ayant une longueur donnée.

Les triangles dont les sommets sont à droite de KL sont évidemment identiques à ceux que nous venons de considérer.

TRIGONOMÉTRIE

4099. — *Les angles x et α satisfont à la relation*

$$(1 + m \cos x)(1 - m \cos \alpha) = 1 - m^2,$$

dans laquelle α est un angle connu et m un coefficient numérique également connu. On demande de calculer $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

(*Diplôme d'élève de 2e classe de la marine marchande, 1897.*)

Développons le premier membre de la relation et réduisons ; il vient

$$m \cos x - m \cos \alpha - m^2 \cos x \cos \alpha = -m^2,$$

d'où en supprimant le facteur commun m, supposé différent de zéro,
$$\cos x = \frac{-m + \cos \alpha}{1 - m \cos \alpha}.$$

En remplaçant $\cos x$ par sa valeur en fonction de l'arc moitié, nous aurons
$$\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{-m + \cos\alpha}{1 - m \cos \alpha};$$

d'ailleurs
$$\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = 1.$$

On déduit de là, par addition et soustraction,
$$2 \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{-m + \cos \alpha + 1 - m \cos \alpha}{1 - m \cos \alpha} = \frac{(1-m)(1+\cos \alpha)}{1 - m \cos \alpha},$$
$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - m \cos \alpha + m - \cos \alpha}{1 - m \cos \alpha} = \frac{(1+m)(1-\cos \alpha)}{1 - m \cos \alpha};$$

puis, en divisant membre à membre,
$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{(1+m)(1-\cos\alpha)}{(1-m)(1+\cos\alpha)},$$

d'où, en observant que $\cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$,
$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{1+m}{1-m}}.$$

Pour que $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ soit réel, il faut et il suffit qu'on ait
$$(1+m)(1-m) > 0$$
ou
$$-1 < m < 1.$$

Cette condition remplie, aux deux valeurs de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ correspondent pour $\frac{x}{2}$ deux arcs $+\alpha$ et $-\alpha$, α étant un arc positif inférieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$. Tous les arcs $\frac{x}{2}$ qui admettent les deux valeurs ci-dessus pour tangentes sont alors compris dans la formule
$$\frac{x}{2} = k\pi \pm \alpha,$$

et par suite tous les arcs x satisfaisant à la relation donnée sont
$$x = 2k\pi \pm 2\alpha,$$

k étant un nombre entier quelconque positif, nul ou négatif (ces arcs ont en effet pour cosinus $\cos 2\alpha$ et *vice versa*).

En posant $m = \cos \varphi$ (ce qui est toujours possible attendu que m est compris entre -1 et $+1$), on a pour $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ la forme logarithmique,
$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}.$$

(L. GANEL, pensionnat de Valbenoîte, à Saint-Étienne.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Ardin-Delteil ; Bayor ; M. Belleux ; L. Bessoles ; P. Bonnot ; R. Cayrol ; E. Chemin ; P. Cornelis ; G. Costey ; J. Courtinat ; L. Debrun ; L. Curt ; A. Franqueville ; J. Gutton ; R. Henry ; H. Janois ; H. Jouanneau ; J. Juquelier ; P. Leboucher ; M. Legras ; M. P. A. R. ; Marcenet ; de Mendiry ; E. Ménissier ; N. Mollon ; C. Niculescu ; M. Oger ; H. Perdrix ; J. Peyrache ; Raynaud ; Renaud ; J. Séjournet ; E. Sevin ; E. Sinturel ; C. Titiriga ; M. Valla.]

4291. — Complément aux propriétés du tétraèdre isocèle (voir la note de M. Vacquant, dans le numéro 7) :

Appelons a, b, c les côtés de l'une quelconque des faces égales ABC ; A, B, C *les angles de cette face ; α, β, γ les médianes qui joignent les milieux des côtés a, b, c aux milieux des arêtes opposées du tétraèdre ; φ, ψ, θ les angles dièdres ayant pour arêtes a, b, c ; V le volume du tétraèdre ; S l'aire* ABC. *On aura :*

1. $\beta^2 + \gamma^2 = a^2, \qquad \gamma^2 + \alpha^2 = b^2, \qquad \alpha^2 + \beta^2 = c^2;$

2. $$\frac{\sin\varphi}{\sin A} = \frac{\sin\psi}{\sin B} = \frac{\sin\theta}{\sin C};$$

3. $$V = \frac{\alpha\beta\gamma}{3} = \frac{abc}{3}\sqrt{\cos A \cos B \cos C};$$

4. $$S = \frac{\sqrt{\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2}}{2},$$

d'où $$\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2 = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4};$$

5. *Si on appelle* p *la puissance de l'un des sommets du tétraèdre par rapport à la sphère inscrite,*

$$p = \frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(b+c+a)(c+a-b)(a+b-c)}$$
$$= \frac{(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2)}{4(\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2)}.$$

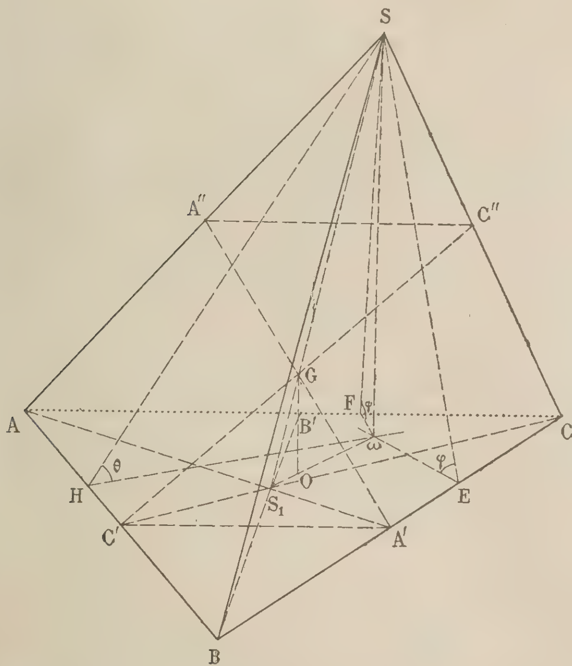
1° Le quadrilatère A′C′A″C″ est un parallélogramme, comme ayant deux côtés opposés égaux et parallèles ; on sait que ses diagonales se coupent à angle droit (voir n° 7, p. 50) ; donc

$$\overline{GA''}^2 + \overline{GC''}^2 = \overline{A''C''}^2,$$

ou $$\overline{A'A''}^2 + \overline{C'C''}^2 = 4\overline{A''C''}^2 = \overline{AC}^2;$$

d'où $$\alpha^2 + \gamma^2 = b^2;$$

on prouverait de même que $\beta^2+\gamma^2 = a^2$, et $\alpha^2+\beta^2 = c^2$.



2° Menons par S le plan perpendiculaire à l'arête BC du dièdre SBCA ; ce plan sera perpendiculaire aux deux faces du dièdre, et contiendra par suite la hauteur Sω du tétraèdre ; l'angle SEω sera le rectiligne du dièdre BC ou φ.

Le triangle rectangle SEω donne

$$\sin\varphi = \frac{S\omega}{SE};$$

or SE est la hauteur de la face SBC dont la surface vaut

$$S = \frac{1}{2}\,BC.SE;$$

donc SE vaut $\frac{2S}{BC}$ ou $\frac{2S}{a}$, et par suite

$$\sin\varphi = a\cdot\frac{S\omega}{2S};$$

on trouverait de même

$$\sin\psi = b\cdot\frac{S\omega}{2S}, \qquad \sin\theta = c\cdot\frac{S\omega}{2S}.$$

Donc $$\frac{\sin\varphi}{a} = \frac{\sin\psi}{b} = \frac{\sin\theta}{c},$$

ou bien, en remplaçant a, b, c par les quantités proportionnelles sin A, sin B, sin C,

$$\frac{\sin\varphi}{\sin A} = \frac{\sin\psi}{\sin B} = \frac{\sin\theta}{\sin C}.$$

3° Le volume du tétraèdre est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3}\,S.h;$$

donc $$9V^2 = S^2h^2.$$

Or, on a trouvé précédemment

$$h^2 = \frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{8S^2}.$$

Remplaçons a^2, b^2, c^2 par leurs valeurs en fonction de α^2, β^2, γ^2 ; il vient

$$9V^2 = \frac{8\alpha^2\beta^2\gamma^2}{8};$$

d'où $$V = \frac{\alpha\beta\gamma}{3}.\ (*)$$

D'après une propriété établie précédemment, on sait que

$$2\alpha^2 = b^2 + c^2 - a^2;$$

or $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A;$$

donc $$\alpha^2 = bc\cos A;$$

de même $$\beta^2 = ca\cos B,$$
$$\gamma^2 = ab\cos C.$$

Multipliant membre à membre, on trouve

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 = 9V^2 = a^2b^2c^2\cos A\cos B\cos C;$$

donc $$V = \frac{abc}{3}\sqrt{\cos A\cos B\cos C}.$$

4° On sait que

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)},$$

d'où, par des calculs bien connus,

$$16S^2 = 4a^2c^2 - (a^2+c^2-b^2)^2,$$

c'est-à-dire $$4S^2 = (\alpha^2+\beta^2)(\beta^2+\gamma^2) - \beta^4,$$

et enfin $$S = \frac{\sqrt{\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2}}{2}.$$

En égalant les deux valeurs de S, on trouve la seconde relation à démontrer.

5° La puissance d'un point extérieur par rapport à une sphère est égale au carré de la longueur de la tangente issue de ce point à la sphère.

Dans le cas du tétraèdre isocèle, les quatre sommets sont équidistants du centre de la sphère inscrite (SG = AG = BG = CG) ; le rayon de cette sphère est égal au quart de la hauteur :

$$GO = \frac{1}{4}\,S\omega.$$

Donc $$p = \overline{SG}^2 - \overline{GO}^2 = \overline{SG}^2 - \frac{h^2}{16};$$

mais $$\overline{SG}^2 = \overline{AG}^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{8};$$ (n° 7, p. 50)

donc $$p = \frac{a^2+b^2+c^2}{8} - \frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{16\times 8S^2},$$

(*) Ce résultat peut aussi s'établir en construisant le parallélépipède d'arêtes SA, SB, SC.

expression qui se réduit, tous calculs faits, à

$$\frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$

En tenant compte des relations déjà trouvées (1° et 4°), cette expression devient

$$p = \frac{(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2)}{4(\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2)}.$$

(F. CHUBERRE, lycée de Rennes.)

On pourrait se proposer de calculer, en fonction des données, l'angle que font entre elles deux arêtes opposées du tétraèdre. Le volume d'un tétraèdre a pour mesure le sixième de l'aire du parallélogramme qui aurait ses côtés égaux et parallèles à deux arêtes opposées, multipliée par la plus courte distance de ces arêtes. Donc

$$V = \frac{1}{6}\,SA.BC \sin(SA, BC) \times A'A'' = \frac{a^2\alpha}{6} \sin(SA, BC);$$

d'où $$\frac{\alpha\beta\gamma}{3} = \frac{\alpha}{6}(\beta^2+\gamma^2)\sin(SA, BC);$$

d'où $$\sin(SA, BC) = \frac{2\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2}.$$

(M. REBEIX, lycée du Puy.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Layes, à St-Didier ; H. Thouvenot, école J. B. Say ; A. Maître ; H. Janois, au Mans ; E. Brière, à Clermont.]

4344. — *On donne l'équation*

$$(2\cos\alpha - 1)x^2 - 4x + 4\cos\alpha + 2 = 0,$$

α désignant un angle aigu.

1° *Pour quelles valeurs de α les racines sont-elles réelles ?*

2° *Quels sont les signes des racines pour ces valeurs de α?*

3° *Rendre le produit des racines calculable par logarithmes.*

(*Bacc. lettres-math., Nancy, avril 1897.*)

1° La condition de réalité des racines est

$$4 - 2(2\cos\alpha - 1)(2\cos\alpha + 1) \geqslant 0$$

ou $$2 - (4\cos^2\alpha - 1) \geqslant 0$$

ou $$3 - 4\cos^2\alpha \geqslant 0,$$

d'où $$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \cos\alpha \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2},$$

condition qui se réduit à $0 \leqslant \cos\alpha \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, puisque le cosinus d'un angle aigu est positif.

Comme $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$, on voit que l'angle aigu α ne peut varier qu'entre 30° et 90°.

2° Le produit des racines est

$$\frac{4\cos\alpha + 2}{2\cos\alpha - 1}.$$

Comme l'angle aigu α a son cosinus toujours positif, ce produit sera positif en même temps que $2\cos\alpha - 1$, c'est-à-dire pour

$$\cos\alpha > \frac{1}{2}$$

ou, puisque $\frac{1}{2} = \cos 60°$,

$$\alpha < 60°.$$

Dans ce cas, le signe commun des deux racines est celui de leur somme, $\frac{4}{2\cos\alpha - 1}$, de sorte que ces racines sont ici positives.

Ainsi, dans l'hypothèse $30° \leqslant \alpha < 60°$, les deux racines sont réelles et positives ; si on suppose au contraire $60° < \alpha < 90°$, ces racines sont de signes contraires. Dans le cas particulier $\alpha = 60°$, l'équation admet une racine infinie, l'autre étant égale à 1.

3° Le produit des racines s'écrit

$$2\,\frac{2\cos\alpha + 1}{2\cos\alpha - 1}$$

ou, en divisant haut et bas par 2 et remplaçant $\frac{1}{2}$ par cos 60°,

$$2\,\frac{\cos\alpha + \cos 60°}{\cos\alpha - \cos 60°} = 2\,\frac{2\cos\frac{\alpha+60°}{2}\cos\frac{\alpha-60°}{2}}{-2\sin\frac{\alpha+60°}{2}\sin\frac{\alpha-60°}{2}}$$

$$= 2\cot\frac{60°+\alpha}{2}\cot\frac{60°-\alpha}{2},$$

expression logarithmique.

(J. MÉHU, lycée de Brest.)

[Ont résolu la même question : MM. J. de Bersaucourt ; A. Bertrand ; L. Bigot ; A. Bouzy ; J. Chantre ; A. Chapron ; G. Dazier ; J. Delpont ; F. Leulliot ; E. Mathieu ; Millet ; Remondet ; P. Tribier ; L. Barberot ; Bayor ; A. Blanc ; M. Boutry ; A. Buisson ; J. Coupat ; L. Cussenot ; R. Fradin ; P. Goudry ; Jouanneau ; L. M., à Vic ; E. Layes ; E. Le Maigre ; E. Madet ; C. Marie ; A. Mirc ; A. Nayel ; G. A. Nicolas ; M. Oger ; F. Pégorier ; L. Perret ; J. Pillard ; R. Quéré ; M. Rebeix ; P. Reboul ; E. Sevin ; G. Tastet ; J. E. Villemagne ; P. Vincent.]

MÉCANIQUE

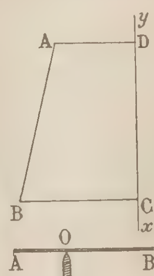
4341. — *On a un trapèze rectangle* ABCD *dont on connaît la surface,* $\frac{4}{10}$ *de décimètre carré, le rapport des deux bases,* $\frac{2}{3}$ *et la somme de ces mêmes bases,* $0^m,10$.

On fait exécuter à ce trapèze une révolution complète autour de la droite xy passant par le côté DC *et l'on suppose matériel le volume qu'il engendre. Ce volume, placé à l'extrémité* A *d'un fléau rectiligne, est équilibré par un poids de* 750^{gr} *placé à l'autre extrémité* B *du fléau. Si l'on place au contraire ce volume à l'extrémité* B, *il faut un poids de* $1978^{gr},032$ *en* A *pour avoir l'équilibre.*

Calculer d'après cela : 1° le poids du solide ; 2° sa densité ; 3° le rapport des deux bras du fléau.

(*Concours de vérificateur-adjoint des poids et mesures, 1898.*)

1° et 3°. Soit x le poids du solide. Dans l'état d'équilibre du levier AOB, les poids appliqués en A et B sont inversement proportionnels aux deux bras OA et OB du fléau ; donc



$$\frac{x}{750} = \frac{OB}{OA} = \frac{1978,032}{x},$$

d'où $$x^2 = 750 \times 1978,032,$$

et $$x = \sqrt{750 \times 1978,032} = 1218^{gr}.$$

En outre, le rapport des deux bras du fléau est

$$\frac{OB}{OA} = \frac{1218}{750} = 1,624.$$

2° La densité d du solide est égale au rapport des nombres qui mesurent son poids x et son volume v.

Or le solide engendré par le trapèze ABCD est un tronc de cône dont les rayons de base sont AD, BC et la hauteur CD ; par suite,

$$v = \frac{1}{3}\pi CD(\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + AD.BC).$$

Pour calculer AD et BC, on a

$$\frac{AD}{BC} = \frac{2}{3}, \qquad AD + BC = 10,$$

en prenant le centimètre comme unité de longueur ;

d'où $AD = 4^{cm}, \quad BC = 6^{cm};$

d'ailleurs $CD = \dfrac{\text{surf. ABCD}}{\frac{1}{2}(AD+BC)} = \dfrac{40}{5} = 8^{cm}.$

En remplaçant dans v, il vient

$$v = \frac{1}{3}\pi\, 8(4^2+6^2+24) = 636^{cmc},6976,$$

puis $d = \dfrac{x}{v} = \dfrac{1218}{636,6976} = 1,91.$

(J. MÉHU, lycée de Brest.)

[Ont résolu la même question : MM. Abel ; A. Ballé ; J. de Bersaucourt ; A. Bertrand ; L. Bigot ; E. Boutaud ; M. Boutry ; A. Bouzy ; J. Charignon ; J. Condemine ; J. Delpont ; G. Dive ; J. Fourestier ; G. Godard ; L. M. ; R. Larsonneur ; E. Layes ; A. Legros ; E. Le Maigre ; P. Le Moingt ; F. Leulliot ; C. Lhuissier ; E. Mathieu ; A. Mirc ; L. Patin ; R. Quéré ; M. Rebeix ; Robin ; E. Roncaglia ; P. de Sabbathier ; M. Saget ; A. Sambury ; G. Tastet ; M. Teulié ; E. Ardin-Delteil ; E. Chaineau ; A. Chautemps ; J. Coupat ; L. Durand ; Jouanneau ; E. Madet ; G. A. Nicolas ; M. Oger ; F. Pégorier ; L. Perret ; P. Reboul ; J. F. Villemagne ; P. Vincent.]

PHYSIQUE

4338. — *On considère un système de deux lentilles convergentes ayant même distance focale f et dont les centres sont écartés de d. Quelle sera la grandeur et la position de l'image d'un objet AB de longueur l placé devant le système ?*

Appelons p la distance de l'objet à la première lentille et supposons, pour fixer les idées, $p < f$.

L'image A'B', fournie par la première lentille, est virtuelle; sa distance p' à cette lentille est donnée par l'équation

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{f},$$

d'où l'on tire $p' = \dfrac{pf}{f-p}.$

Les rayons réfractés provenant de l'objet et dont les prolongements forment l'image virtuelle A'B' peuvent être considérés comme émis directement par A'B', et comme la distance $p'+d$ de A'B' à la seconde lentille est plus grande que f, l'image B''A'' fournie par la seconde lentille est réelle. Sa distance x à cette lentille est donnée par l'équation

$$\frac{1}{p'+d} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f},$$

d'où l'on tire $p'+d = \dfrac{xf}{x-f}.$

Remplaçant p' par sa valeur dans cette équation, il vient

$$\frac{pf}{f-p} + d = \frac{xf}{x-f},$$

ou $\dfrac{x}{f} = \dfrac{pf+d(f-p)}{pf+d(f-p)-f(f-p)},$

d'où $x = \dfrac{f[pf+d(f-p)]}{pf-(f-p)(f-d)}.$

Quant à la grandeur de l'image, on l'obtiendra à l'aide de la relation évidente

$$\frac{B''A''}{AB} = \frac{B''A''}{A'B'} \cdot \frac{A'B'}{AB}$$

et des relations connues

$$\frac{B''A''}{A'B'} = \frac{x}{p'+d} = \frac{x}{f} - 1$$

et $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{p'}{p} = \dfrac{1}{1-\dfrac{p}{f}} = \dfrac{f}{f-p}.$

Donc $\dfrac{B''A''}{AB} = \left(\dfrac{x}{f} - 1\right)\dfrac{f}{f-p},$

d'où $B''A'' = AB\left(\dfrac{x}{f} - 1\right)\dfrac{f}{f-p}.$

On voit que x et B''A'' dépendent de p. La discussion est d'ailleurs facile.

(E. SINTUREL.)

[Ont résolu la même question : MM. Bayor ; A. Bertrand ; M. Boutry ; L. Delavergnas ; J. Fourestier ; P. Marill ; M. Oger ; A. Rozier ; C. Sourénian.]

4345. — *Un tube cylindrique de longueur L est ouvert à ses deux extrémités. Une partie, de longueur l, est plongée verticalement dans une cuve à mercure. On ferme alors et on maintient fermé avec le doigt l'orifice supérieur du tube, puis on élève verticalement le tube tout entier jusqu'à ce que la partie inférieure cesse de plonger dans le mercure de la cuve. On demande de calculer la longueur x comprise entre les niveaux que le mercure occupait dans le tube dans la première et dans la seconde position. On désigne par H la hauteur du baromètre pendant l'expérience.*

Application numérique. — 1° $L = 0^m,85, \; l = 0^m,32, \; H = 0^m,74.$
2° $L = 0^m,80, \; l = 0^m,60, \; H = 0^m,80.$

(*Bacc. lettres-math., Dijon, juillet 1897.*)

Soit s la section du tube.

Quand le tube plonge dans le mercure, son orifice étant fermé avec le doigt, le volume occupé par l'air contenu dans le tube est $(L-l)s$, sous la pression atmosphérique H.

Quand la partie inférieure cesse de plonger dans le mercure, le volume occupé par la même masse d'air est $(L-l+x)s$ sous la pression $H-l+x$.

En appliquant la loi de Mariotte, on a

$$(L-l)sH = (L-l+x)s(H-l+x),$$

ou $x^2 - x(2l-H-L) + l(l-L) = 0,$

d'où l'on tire

$$x = \frac{2l-H-L \pm \sqrt{(2l-H-L)^2-4l(l-L)}}{2}$$
$$= \frac{2l-H-L \pm \sqrt{(H+L)^2-4Hl}}{2}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut évidemment que x soit positif et plus petit que l; la racine positive convient donc seule.

Application. — En remplaçant les lettres par leur valeur, il vient

1° $x = 15^{cm},3;$
2° $x = 20^{cm}.$

(G. BERNARD, lycée Saint-Louis.)

[Ont résolu la même question : MM. G. Bacquet ; L. Bellour ; J. de Bersaucourt ; J. Bruyas ; A. Buisson ; Burgat ; Chuberre ; Cussenot ; Delorme ; J. Fourestier ; A. Jupeau ; R. Larsonneur ; A. Legros ; L. M., à Vic ; Mathieu ; A. Mirc ; G. A. Nicolas ; M. Oger ; R. Quéré ; Robin ; L. Vacelet ; M. Vanschoor ; J. E. Villemagne ; G. Dive ; Jouanneau.]

4346. — *A l'un des plateaux d'une balance hydrostatique, on suspend, par un fil de poids négligeable, un morceau de zinc plongeant dans de l'eau ; le poids de ce zinc dans l'air est de 200^{gr}.*

A l'autre plateau, on suspend de la même façon un morceau de platine plongeant dans du mercure.

1° Tout l'appareil étant à la température de 0°, quel doit être le poids du morceau de platine pour que la balance soit en équilibre d'elle-même, sans poids ni tare?

2° La température de tout le système étant alors portée à 50°, quel poids doit-on mettre pour rétablir l'équilibre, et dans quel plateau de la balance?

Données : Densité de l'eau à 0° . . . 0,999871 ;
— *du mercure à 0°*. . 13,596 ;
— *du zinc à 0°*. . . 6,8 ;
— *du platine à 0°*. . . 21,16 ;
— *de l'eau à 50°* . . . 0,9882.

Coefficient de dilatation absolue du mercure entre 0° et 100°. $\frac{1}{5550}$;
— — *linéaire du zinc* . . . . . . 0,0000294 ;
— — — *platine*. . . . . 0,0000087.

(*Bacc. lettres-sciences, Marseille, novembre 1897.*)

1° Appelons x le poids que doit avoir le morceau de platine pour que la balance soit en équilibre d'elle-même.

Le poids apparent du zinc, dans l'eau, est

$$200 - \frac{200}{6,8} \times 0,999871 ;$$

celui du platine, dans le mercure, est $x - \frac{x}{21,16} \times 13,596$. Il y aura équilibre si ces deux poids apparents sont égaux. On a donc

$$200 - \frac{200}{6,8} \times 0,999871 = x - \frac{x}{21,16} \times 13,596,$$

d'où l'on tire $x = 477^{gr},224$.

2° Lorsque tout le système a été porté à 50°, le volume du zinc est devenu $\frac{200}{6,8}(1 + 50 \times 3 \times 0,0000294)$, et le volume du platine $\frac{477,224}{21,16}(1 + 50 \times 3 \times 0,0000087)$. Comme, à cette température, la densité du mercure a pour valeur $\frac{13,596}{1 + \frac{50}{5550}}$, le nouveau poids apparent du platine est

$$477,224 - \frac{477,224}{21,16} \times \frac{13,596}{1 + \frac{50}{5550}}(1 + 50 \times 3 \times 0,0000087) = 172^{gr},933.$$

De même, le nouveau poids apparent du zinc est

$$200 - \frac{200}{6,8} \times 0,9882(1 + 50 \times 3 \times 0,0000294) = 170^{gr},807.$$

Il faudra donc mettre $172,933 - 170,807 = 2^{gr},126$ dans le plateau qui soutient le zinc pour rétablir l'équilibre.

(P. REBOUL, à Tours.)

[Ont résolu la même question : MM. G. Bacquet ; A. Ballé ; Aram Bazbazian ; L. Bellour ; G. Bernard ; J. de Bersaucourt ; A. Bouzy ; J. Bruyas ; A. Buisson ; E. Calmette ; A. Chapron ; Chuberre ; Coupat ; C. Dujardin ; L. Florentin ; P. Goudry ; A. Jupeau ; J. Latou ; R. Larsonneur ; E. Layes ; A. Legros ; F. Leulliot ; E. Le Maigre ; Madet ; Mathieu ; J. Méhu ; A. Mirc ; J. Mouchet ; Nicolas ; L. Patin ; Perret ; R. Quéré ; M. Rebeix ; Remondet ; de Sabbathier ; M. Saget ; Tastet ; J. E. Villemagne ; G. Dive.]

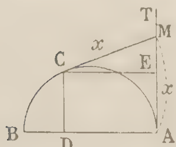
QUESTIONS PROPOSÉES

4356. — Calculer les rayons de base d'un tronc de cône circonscriptible à une sphère, connaissant son volume et sa surface totale.

(*Bacc. lettres-math., Dijon, novembre 1897.*)

4357. — Inscrire dans un cercle de rayon R un trapèze de hauteur $R\sqrt{3}$, tel que la somme des carrés de ses côtés soit égale à $4l^2$.
Discuter. — Valeurs limites de l^2.

4358. — On donne un demi-cercle ACB, de rayon R ; sur la tangente AT perpendiculaire au diamètre AB, on porte AM tel que $AM = x$, puis, du point M, on mène la tangente MC. On demande :



1° De calculer en fonction de R et de x les distances du point C au diamètre et à la tangente ;

2° De déterminer x de manière que la somme de ces deux distances soit égale à une longueur donnée m, telle que $CD + AD = m$. — Discussion.

(*Bacc. lettres-math., Toulouse, novembre 1898.*)

4359. — Etant donné sur un cercle O un point fixe A, on fait tourner autour de ce point une corde mobile AB. On demande :

1° le lieu du point d'intersection M de la tangente en B avec la perpendiculaire à la sécante AB menée par O ;

2° le lieu du point d'intersection P de la tangente en B avec la parallèle menée par le centre O à la sécante AB ;

3° de déduire le lieu du point M de la connaissance du lieu de P et inversement ;

4° le lieu du point d'intersection N de la tangente en B avec la tangente en C, un des points d'intersection du cercle O avec la perpendiculaire menée par O sur AB ;

5° le lieu du point d'intersection Q de la tangente en B avec la tangente en D, un des points d'intersection du cercle O et de la parallèle à AB menée par O ;

6° déduire le lieu de N de la connaissance du lieu de Q et inversement.

(LUIZ HÉMOIS.)

4360. — Lieu géométrique des points dont la somme des distances aux trois faces d'un trièdre est constante.

(L. G., à Tournus.)

4361. — Deux barres homogènes, de mêmes matières et de mêmes dimensions transversales AB, CD, peuvent tourner librement en leurs extrémités A et C autour de deux charnières horizontales I et J qui traversent une tige AC.

On sait que ce système pesant est en équilibre dans un même plan vertical lorsque les barres AB, CD horizontales sont réunies par la tige AC verticale et par un fil F' vertical et que la barre AB est supportée par un fil F dont la droite prolonge celle du fil F', en rasant l'extrémité B de la barre AB.

On regarde le poids de la tige AC comme négligeable, et on demande de calculer :

1° Le rapport $\frac{CD}{AB}$ de la longueur des deux barres ;

2° La tension du fil F, la tension du fil F' et la compression de la tige AC estimées en prenant comme unité de force le poids de la barre AB.

(*Bacc. lettres-sciences, Rennes, juillet 1897.*)

4362. — Entre deux conducteurs A, B supposés sans résistance sont disposés, comme l'indique la figure, 3 groupes de 2 lampes à incandescence dont la résistance individuelle est de $1^{ohm},5$. Ces conducteurs sont reliés aux deux pôles d'une batterie de 4 éléments de pile dont la force électromotrice et la résistance individuelles sont respectivement $1^{volt},8$ et $0^{ohm},5$. Parmi les 3 arrangements rationnels de ces 4 éléments, en existe-t-il qui détermineront un courant plus intense ? Quelle sera alors la quantité de chaleur rayonnée par seconde dans chaque lampe ?

Piles

(*Bacc. lettres-sciences, Poitiers, novembre 1897.*)

4363. — Etant donné un aéromètre de Beaumé pour liquides plus denses que l'eau, on constate que si on vient à en augmenter le poids de 2^{gr} en introduisant de la grenaille de plomb à son intérieur, il s'enfonce dans l'eau pure jusqu'à la division 15 de la tige.

Sachant qu'une dissolution de sel marin contenant 85 parties d'eau et 15 parties de sel a une densité de 1,114, on demande quels sont pour cet aéromètre : son volume jusqu'au zéro de la tige ; le volume d'une division ; son poids initial.

(*Bacc. lettres-math., Bastia, juillet 1897.*)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

22e Année. — N° 17. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 1er Juin 1898.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

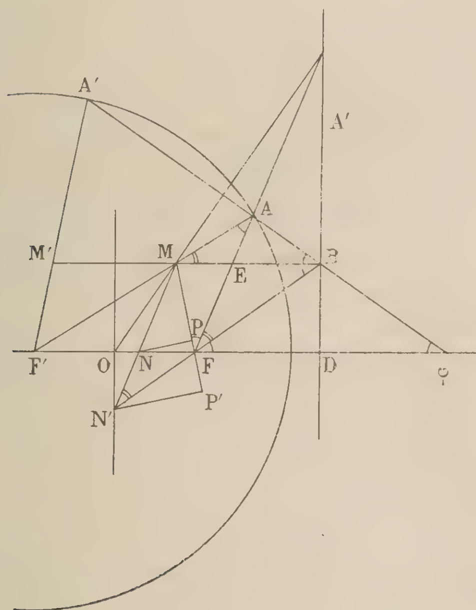
Abonnements.... Librairie **Nony** et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

NOTE SUR UNE CONSTRUCTION DE L'ELLIPSE ET DE L'HYPERBOLE

Par M. **P. Mascaret**, professeur au lycée de Digne.

Ellipse. —Soit M un point d'une ellipse ayant pour foyers F et F′. Traçons le cercle directeur relatif au foyer F′, et prenons, sur F′F, le point φ conjugué harmonique de F par rapport à ce cercle; au milieu D de Fφ élevons la perpendiculaire Δ à Fφ;



prolongeons F′M jusqu'à sa rencontre, A, avec le cercle directeur et menons la droite Aφ, qui rencontre Δ en B. Je dis que BM est parallèle à F′F. En effet, on peut écrire

$$\overline{F'A}^2 = F'F \times F'\varphi;$$

cette égalité prouve que

$$\widehat{F'AF} = \widehat{A\varphi F'}.$$

Or $\qquad \widehat{F'AF} = \widehat{MFA} \quad$ et $\quad \widehat{A\varphi F'} = \widehat{BFD}$;

par conséquent $\qquad \widehat{FMA} = \widehat{FB\varphi}.$

Le quadrilatère MABF est inscriptible et on voit alors que les angles ABM, MBF sont égaux. La droite BM étant bissectrice de l'angle ABF, est perpendiculaire sur BD et, par suite, parallèle à F′F.

Réciproquement, si l'on joint un point quelconque A du cercle directeur aux points F′ et φ, et si l'on trace BM parallèle à F′F, le point M est un point de l'ellipse.

En effet, on a $\qquad \overline{F'A}^2 = F'F \times F'\varphi;$

donc $\qquad \widehat{F'AF} = \widehat{A\varphi F}.$

D'ailleurs $\qquad \widehat{MBF} = \widehat{BF\varphi} = \widehat{A\varphi F};$

donc $\qquad \widehat{F'AF} = \widehat{MBF},$

et alors le quadrilatère MABF est inscriptible; donc les deux angles MAF et MFA, égaux respectivement aux angles égaux ABM et MBF, sont égaux; donc enfin

$$MF = MA$$

et $\qquad F'M + MF = F'A = 2a.$

On pourra donc construire l'ellipse de la façon suivante : ayant déterminé le point φ et tracé la droite Δ comme il a été dit, on joint un point quelconque A du cercle directeur aux points F′ et φ, puis on trace BM parallèle à F′F. M est un point de l'ellipse.

Remarquons d'ailleurs que la parallèle BM à F′F donnera un second point M′ de l'ellipse par sa rencontre avec le rayon F′A′, A′ étant le deuxième point d'intersection de la droite φA avec le cercle directeur. Les tangentes menées du point φ donneront les extrémités du petit axe.

Remarquons aussi que

$$\frac{MF}{MB} = \frac{MA}{MB} = \frac{F'A}{F'\varphi}.$$

Le rapport des distances d'un point quelconque de l'ellipse au foyer F et à la droite Δ est constant. Δ est la directrice relative au foyer F.

L'égalité $\qquad \overline{F'A}^2 = F'F \times F'\varphi$

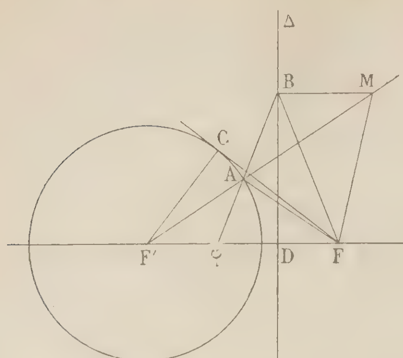
peut s'écrire $\qquad 4a^2 = 2c \times F'\varphi,$

d'où $\qquad F'\varphi = \frac{2a^2}{c},$

et alors $\qquad \frac{F'A}{F'\varphi} = \frac{c}{a} \qquad$ ou $\qquad \frac{MF}{MB} = \frac{c}{a}.$

Hyperbole. — Soit M un point d'une hyperbole ayant pour foyers F et F′; φ le point situé sur F′F, et conjugué de F par rapport au cercle directeur relatif au foyer F′; Δ la perpendiculaire à Fφ en son milieu. Tirons la droite MF′, qui rencontre le cercle en A, puis φA, qui rencontre Δ en B. MB est parallèle à F′F.

On le démontre comme pour l'ellipse. Réciproquement, si l'on joint un point quelconque A du cercle directeur F' et φ, et si l'on trace BM parallèle à F'F, le point M est un point de l'hyperbole. Même démonstration que pour l'ellipse. La construction de l'hyperbole sera la même que celle de l'ellipse. Si l'on trace les tangentes FC, FC' au cercle directeur relatif à F', les droites F'C et F'C' sont parallèles aux asymptotes.



La droite Δ est la directrice relative au foyer F. On a aussi, comme pour l'ellipse, $\dfrac{\text{MF}}{\text{MB}} = \dfrac{c}{a}$.

Applications. — Soit O le centre de l'ellipse. On a

$$\frac{\text{ME}}{\text{EB}} = \frac{\text{F'F}}{\text{F}\varphi} = \frac{\text{OF}}{\text{FD}},$$

ce qui prouve que les trois droites OM, FA et Δ sont concourantes.

En remarquant que FA est perpendiculaire à la tangente à l'ellipse en M, on peut dire que :

La droite qui joint le centre de l'ellipse à un point quelconque de cette courbe et la perpendiculaire abaissée d'un foyer sur la tangente en ce point se coupent sur la directrice correspondante.

Soit N' le point de rencontre de BF avec le petit axe. On a

$$\frac{\text{BF}}{\text{BN'}} = \frac{\text{DF}}{\text{DO}} = \frac{\text{BE}}{\text{BM}}.$$

Donc la droite MN' est parallèle à EF, autrement dit MN' est la normale en M. On a alors

$$\frac{\text{MN}}{\text{MN'}} = \frac{\text{BF}}{\text{BN'}} = \frac{\text{DF}}{\text{DO}} = \frac{\varphi\text{F}}{\varphi\text{F'}}.$$

Or
$$\varphi\text{F'} = \frac{\overline{\text{F'A}}^2}{\text{FF'}} = \frac{4a^2}{2c} = \frac{2a^2}{c},$$

$$\varphi\text{F} = \varphi\text{F'} - \text{FF'} = \frac{2a^2}{c} - 2c = \frac{2b^2}{c};$$

donc
$$\frac{\text{MN}}{\text{MN'}} = \frac{b^2}{a^2}:$$

Le rapport des segments déterminés par les axes sur la normale en un point de l'ellipse est constant et égal à $\dfrac{b^2}{a^2}$.

La propriété des trois points N', F, B d'être en ligne droite permet de résoudre le problème : *Mener une normale à l'ellipse par un point du petit axe.*

Le point N' étant le point donné, on mène la droite N'F, qui rencontre la directrice en B, puis φB, qui rencontre le cercle directeur relatif à F' en A. Le point de rencontre M de F'A avec la parallèle BM au grand axe est le pied de la normale cherchée; M'N' est une seconde solution.

Projections de MN *et de* MN' *sur* MF. — Soit P la projection de N sur MF. Les deux triangles rectangles MNP, BFD sont semblables; donc

$$\frac{\text{MN}}{\text{FB}} = \frac{\text{MP}}{\text{FD}};$$

d'autre part
$$\frac{\text{MN}}{\text{FB}} = \frac{\text{MN'}}{\text{BN'}} = \frac{\text{MA}}{\text{MB}} = \frac{c}{a},$$

car les triangles MN'B et AMB sont semblables; donc

$$\frac{\text{MP}}{\text{FD}} = \frac{c}{a};$$

or
$$\text{FD} = \frac{\varphi\text{F}}{2} = \frac{b^2}{c},$$

donc
$$\text{MP} = \frac{b^2}{a}.$$

Soit P' la projection de N' sur MF. On a

$$\frac{\text{MP'}}{\text{MP}} = \frac{\text{MN'}}{\text{MN}} = \frac{a^2}{b^2},$$

$$\text{MP'} = \text{MP} \times \frac{a^2}{b^2} = a.$$

On voit que MP et MP' sont des constantes.

Les propriétés précédentes appartiennent aussi à l'hyperbole.

ALGÈBRE

3839. — *Dans un trapèze isocèle* ABCD, *dont* I *et* J *sont les milieux des côtés parallèles, on a* $\text{AB} = 2a$, $\text{AD} = 2a$ *et la relation*

$$\text{IJ} + 5\text{DJ} = l.$$

Calculer le côté $\text{DC} = 2x$ *et* $\text{IJ} = y$.

Discuter, en indiquant pour chaque valeur de l *le nombre de solutions du problème.*

(*Bacc. ès sciences et lettres-math., Grenoble, avril 1895.*)

L'énoncé fournit l'équation

$$y + 5x = l. \qquad (1)$$

Dans le triangle rectangle DAH, le côté AH est égal à $a - x$ ou $x - a$, suivant que le côté DC est inférieur ou supérieur à $2a$; dans tous les cas il fournit l'équation

$$4a^2 = y^2 + (x - a)^2. \qquad (2)$$

Le problème est résolu par les équations (1) et (2), auxquelles il faut joindre les inéquations de conditions nécessaires

$$x > 0, \qquad y > 0.$$

Elles sont suffisantes, car si les équations (1) et (2) admettent pour x et y un système de solutions positives, on pourra construire un triangle rectangle DAH ayant pour côtés de l'angle droit y et $|x - a|$; ces valeurs satisfaisant à (2), l'hypoténuse DA de ce triangle sera égale à $2a$; on pourra donc construire le trapèze isocèle ABCD tel que $\text{AB} = \text{AD} = 2a$. Enfin, comme les valeurs des inconnues vérifient l'équation (1), on en conclut que dans ce trapèze

$$5\text{DJ} + \text{IJ} = l.$$

Pour résoudre le système formé par (1) et (2), on tire de (1)

$$y = l - 5x;$$

portant dans (2), il vient

$$4a^2 = (l - 5x)^2 + (x - a)^2,$$

ou
$$f(x) = 26x^2 - 2(a + 5l)x + l^2 - 3a^2 = 0.$$

L'inéquation $y > 0$ se traduit par $x < \dfrac{l}{5}$. Donc :

Le problème aura autant de solutions que l'équation $f(x) = 0$ admet de racines comprises entre 0 et $\dfrac{l}{5}$.

Calculons $f(0)$ et $f\left(\frac{l}{5}\right)$, en mettant en évidence les valeurs de l qui les font changer de signe.

$$f(0) = l^2 - 3a^2 = (l + a\sqrt{3})(l - a\sqrt{3}).$$

$$f\left(\frac{l}{5}\right) = \left(\frac{l}{5} - a\right)^2 - 4a^2 = \left(\frac{l}{5} - 3a\right)\left(\frac{l}{5} + a\right)$$
$$= \frac{1}{5}\left(\frac{l}{5} + a\right)(l - 15a).$$

Pour que le problème admette *une seule solution*, il faut et il suffit que $f(0)$ et $f\left(\frac{l}{5}\right)$ soient de signes contraires, ce qui se traduit par la condition

$$(l - a\sqrt{3})(l - 15a) < 0,$$

en négligeant des facteurs évidemment positifs. On en conclut qu'il faut

$$a\sqrt{3} < l < 15a.$$

Pour que le problème admette *deux solutions*, il faut et il suffit :

1° que $f(0)$ et $f\left(\frac{l}{5}\right)$ soient tous deux du signe du coefficient de x^2, c'est-à-dire positifs, ce qui exige certainement

$$l > 15a;$$

2° que la demi-somme des racines soit comprise entre 0 et $\frac{l}{5}$:

$$0 < \frac{a + 5l}{26} < \frac{l}{5},$$

ou $$5a < l,$$

condition remplie en vertu de la précédente;

3° que le discriminant (quantité sous le radical) de l'équation soit positif ; ce qui donne

$$(a + 5l)^2 - 26(l^2 - 3a^2) > 0,$$

ou $$l^2 - 10al - 79a^2 < 0;$$

ce trinome en l a ses racines réelles et de signes contraires; la condition sera donc vérifiée si la quantité positive l est inférieure à la racine positive de ce trinome. On trouve ainsi

$$l < a(5 + 2\sqrt{26}).$$

Cette condition est compatible avec $l > 15a$; en effet,

$$15 < 5 + 2\sqrt{26}.$$

Donc pour que le problème admette *deux solutions*, il faut et il suffit que

$$15a < l < (5 + 2\sqrt{26})a.$$

Il reste à examiner les cas limites.

Pour $l = a\sqrt{3}$, l'une des racines de l'équation est nulle; d'ailleurs $f\left(\frac{l}{5}\right)$ est négatif; $\frac{l}{5}$ est compris entre les racines; l'autre est donc à rejeter. A la racine nulle correspond un triangle.

Pour $l = 15a$, l'une des racines est égale à $\frac{l}{5} = 3a$; l'autre vaut $\frac{16a}{13} < 3b$; elle est donc acceptable ; à ce cas correspondent deux solutions.

Pour $l = a(5 + 2\sqrt{26})$, les deux solutions se confondent.

En résumé :

$l = a\sqrt{3}$ une solution nulle. Triangle.

$a\sqrt{3} < l < 15a$ une seule solution.

$l = 15a$ $x' = \frac{16a}{13}$, $x'' = 3a$. deux solutions.

$15a < l < a(5 + 2\sqrt{26})$ deux solutions.

$l = a(5 + 2\sqrt{26})$ deux solutions confondues.

[Ont résolu la même question : Mlle E. Lévêque, à Marseille ; MM. J. Bordas, à Palisse ; D. Bosc, à Marseille ; Brugerolle, à Draguignan ; J. Delpont, à Moissac ; C. Devaux, collège St-François-Xavier, Besançon ; H. Ducassé ; M. Dufour ; Ferrand ; L. Frère ; T. Gramain, à Bar-le-Duc ; M. Huguet, pensionnat N.-D. de Toutes-Aides, près Nantes ; E. Montagut, à Agonac ; R. Salkin, collège de Montélimar ; R. Valensi, lycée d'Alger ; J. Vernis, collège de Perpignan.]

4331. — *Calculer les trois côtés d'un triangle, connaissant la hauteur h et la médiane m relatives au côté a, ainsi que le rayon du cercle circonscrit.*

Discuter. Conditions de possibilité.

Construire géométriquement le triangle et discuter à nouveau.

I. Solution algébrique. — Désignons par a, b, c les côtés inconnus du triangle ABC, par h et m la hauteur et la médiane relatives au côté a, par R le rayon du cercle circonscrit au triangle.

Des théorèmes connus fournissent immédiatement les trois équations

$$b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}, \qquad (1)$$

$$b^2 - c^2 = 2a\sqrt{m^2 - h^2}, \qquad (2)$$

$$bc = 2Rh; \qquad (3)$$

elles supposent évidemment $m > h$.

Les valeurs de a, b, c tirées de ces équations doivent être positives ; mais ces conditions nécessaires ne sont pas suffisantes. Il faut encore qu'avec les trois quantités positives a, b, c on puisse construire un triangle, ce qui donne les inéquations de condition

$$|b - c| < a < b + c,$$

ou $$(b - c)^2 < a^2 < (b + c)^2. \qquad (4)$$

On fait jouer un rôle particulier au côté a dans ces conditions, parce que les données h et m se rapportent particulièrement à ce côté.

Pour résoudre le système proposé, on tire des équations (1) et (2)

$$b^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} + a\sqrt{m^2 - h^2},$$

$$c^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} - a\sqrt{m^2 - h^2};$$

on porte ces valeurs dans la troisième, ce qui donne

$$\left(m^2 + \frac{a^2}{4}\right)^2 - a^2(m^2 - h^2) = 4R^2h^2;$$

ou bien $$a^4 + 8(2h^2 - m^2)a^2 + 16(m^4 - R^2h^2) = 0.$$

En posant $a^2 = z$, cette inconnue est racine de l'équation du second degré

$$z^2 + 8(2h^2 - m^2)z + 16(m^4 - R^2h^2) = 0. \qquad (5)$$

Pour calculer b et c, nous nous servirons des équations (1) et (3), qui donnent immédiatement

$$(b + c)^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2} + 4Rh = 2m^2 + 4Rh + \frac{z}{2}; \qquad (6)$$

$$(b - c)^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2} - 4Rh = 2m^2 - 4Rh + \frac{z}{2}. \qquad (7)$$

Les valeurs de a, b, c seront positives si l'équation (5) fournit une valeur positive de z, et si cette racine, portée dans (6) et (7), fait acquérir une valeur positive aux seconds membres. Cela exige que

$$z > 4(2Rh - m^2); \qquad (8)$$

d'ailleurs on voit évidemment que le second membre de (7) est plus petit que celui de (6); il sera donc toujours possible de calculer b et c, lorsque la condition (8) est remplie.

Reste à exprimer que les valeurs obtenues vérifient les conditions (4). Tenant compte de (6) et de (7), elles s'écrivent

$$4(m^2 - 2Rh) < z < 4(m^2 + 2Rh).$$

Finalement une racine réelle de l'équation (5) ne sera solution du problème que si elle satisfait aux conditions

$$z > 0, \quad z > 4(2Rh - m^2), \quad z > 4(m^2 - 2Rh), \quad z < 4(m^2 + 2Rh).$$

Il y a donc deux hypothèses à faire, suivant la grandeur relative de m^2 et de $2Rh$.

I. $m^2 < 2Rh$. Autant de solutions que l'équation (5) a de racines entre $4(2Rh - m^2)$ et $4(2Rh + m^2)$.

II. $m^2 > 2Rh$. Autant de solutions que l'équation (5) a de racines entre $4(m^2 - 2Rh)$ et $4(m^2 + 2Rh)$.

1re *hypothèse* : $m^2 < 2Rh$.

Appelons $f(z)$ le premier membre de (5); on observe immédiatement que cette équation a ses racines réelles et de signes contraires; le problème admet donc *au plus une solution*. Pour qu'il en admette réellement une, il faut que les deux résultats de substitution

$$f[4(2Rh - m^2)] \quad \text{et} \quad f[4(2Rh + m^2)]$$

soient de signes contraires. On trouve

$f[4(2Rh - m^2)] = 64(2Rh - m^2)(h^2 - m^2)$, quantité négative puisque $h < m$,

$f[4(2Rh + m^2)] = 64h^2(m^2 + 2Rh)$, quantité positive.

Donc : *Dans l'hypothèse* $m^2 < 2Rh$, *le problème admet une seule solution fournie par la racine positive de l'équation* (5).

2e *hypothèse* : $m^2 > 2Rh$.

Substituons d'abord dans $f(z)$ les quantités $4(m^2 - 2Rh)$ et $4(m^2 + 2Rh)$. On trouve

$f[4(m^2 - 2Rh)] = 64h^2(m^2 - 2Rh)$, quantité positive par hypothèse;

$$f[4(m^2 + 2Rh)] = 64h^2(m^2 + 2Rh).$$

Ces deux résultats étant de même signe que le coefficient de z^2, le problème ne peut avoir dans ce cas que zéro ou deux solutions. Pour qu'il en admette effectivement deux, il faut encore : 1° que la demi-somme des racines soit comprise entre les nombres substitués ; 2° que les racines soient réelles.

La demi-somme des racines de l'équation $f(z) = 0$ est égale à $4(m^2 - 2h^2)$; elle est évidemment inférieure à $4(m^2 + 2Rh)$; pour qu'elle soit supérieure à $4(m^2 - 2Rh)$, il faut que

$$2Rh > 2h^2 \quad \text{ou} \quad R > h.$$

Cette condition supposée remplie, il faut enfin que le discriminant de $f(z) = 0$ soit positif, ce qui donne

$$16(2h^2 - m^2)^2 - 16(m^4 - 4R^2h^2) = 64[(h^2 + r^2) - m^2] > 0,$$

ou enfin

$$m^2 < R^2 + h^2.$$

Cette condition est compatible avec l'hypothèse

$$m^2 > 2Rh,$$

car

$$2Rh < R^2 + h^2.$$

Donc : *Dans l'hypothèse* $m^2 > 2Rh$, *le problème admet deux solutions à condition que* $h < R$, $m^2 < R^2 + h^2$.

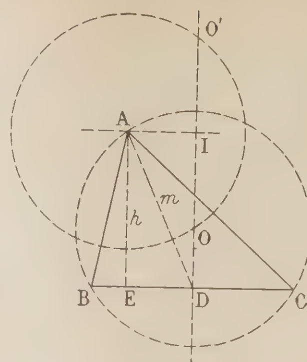
En résumé :

$m^2 < 2Rh$, *une seule solution*,

$2Rh < m^2 < R^2 + h^2$, $h < R$, *deux solutions*.

II. Solution géométrique. — Soient ABC le triangle cherché, $AE = h$ et $AD = m$ la hauteur et la médiane données; on peut construire de suite le triangle rectangle AED, sous la condition évidente

$$h < m.$$



Le centre O du cercle circonscrit au triangle doit alors se trouver sur la perpendiculaire élevée en D à ED et sur un cercle de centre A et de rayon R.

Supposons que ce dernier cercle coupe la perpendiculaire en O ; on déterminera les sommets B et C en décrivant de O comme centre un cercle de rayon R et marquant les points où il rencontre ED.

Pour que le point O existe, il faut

$$R \geqslant AI = ED;$$

pour que B et C existent, il faut en outre

$$R \geqslant OD.$$

Exprimons d'abord la première condition. Le triangle AED donne

$$ED = \sqrt{m^2 - h^2};$$

cette condition s'écrit donc

$$R \geqslant \sqrt{m^2 - h^2};$$

les deux membres étant positifs, on peut élever au carré, d'où

$$m^2 \leqslant R^2 + h^2. \qquad (1)$$

Cette condition supposée remplie, le cercle de centre A coupe la perpendiculaire DI en deux points O et O', en appelant O' le point situé par rapport à AI du côté opposé à celui où se trouve DE. Le point O peut d'ailleurs se trouver au-dessus ou au-dessous de DE.

Pour que O soit une solution du problème, il faut que

$$OD \leqslant R.$$

Si O se trouve au-dessous de DE, on aura

$$OD = IO - ID,$$

et la condition s'écrit

$$IO - ID \leqslant R \quad \text{ou} \quad IO \leqslant R + h;$$

le triangle AIO donne d'ailleurs

$$IO = \sqrt{R^2 - \overline{AI}^2} = \sqrt{R^2 - m^2 + h^2},$$

et la condition devient

$$\sqrt{R^2 + h^2 - m^2} \leqslant R + h;$$

elle est évidemment remplie ; remarquons que dans ce cas

$$h = ID < IO < R.$$

Lorsque O se trouve au-dessus de DE (c'est le cas de la figure), il vient

$$OD = ID - IO = h - \sqrt{h^2 + R^2 - m^2} \leqslant R,$$

ou

$$h - R \leqslant \sqrt{h^2 + R^2 - m^2}.$$

Si $h < R$, la condition est évidemment remplie et le point O est acceptable.

Si $h > R$, les deux membres sont positifs ; on peut les élever au carré, et on trouve

$$(h - R)^2 \leqslant h^2 + R^2 - m^2 \quad \text{ou} \quad m^2 \leqslant 2Rh.$$

Remarquons que cette condition entraîne $m^2 \leqslant R^2 + h^2$.

Donc : O est acceptable : 1° si $m^2 \leqslant 2Rh$;

2° si $m^2 \leqslant R^2 + h^2$ avec $h < R$.

Pour que O′ soit une solution du problème, il faut que

$$O'D < R \quad \text{ou} \quad ID + IO' < R \quad \text{ou} \quad IO' < R - h;$$

mais $\quad IO' = IO = \sqrt{R + h^2 - m^2},$

donc il vient $\quad \sqrt{R^2 + h^2 - m^2} < R - h.$

Cette condition ne peut évidemment être satisfaite que si $h < R$; dans cette hypothèse les deux membres sont positifs ; on peut les élever au carré, ce qui donne

$$m^2 > 2Rh.$$

Cette condition est compatible avec la condition nécessaire $m^2 < R^2 + h^2$.

Donc : O′ est acceptable si $h < R$ et $2Rh < m^2 < R^2 + h^2$.

En résumé :

I. $m^2 < 2Rh$, une seule solution, le point O.

II. $2Rh < m^2 < R^2 + h^2$, $h < R$, deux solutions, O et O′.

Ce sont précisément les résultats de la discussion algébrique.

[Ont résolu cette question : MM. Ardin-Delteil, à Montpellier ; Bayor, à Castelnau ; Bourvéau, à Kernével ; Carrière, élève à l'école normale d'Aix ; L. Cussenot ; Chapron, à Loudéac ; J. Delpont ; Leulliot, collège de Compiègne ; Millet ; L. Magne, à Belvès ; H. Michel, lycée de Douai ; Nayel, à Thouars ; F. Pégorier, à Cette ; P. Reboul, à Tours ; Remondet, à Augisey ; E. de Rycker, institut Dupuich, Bruxelles ; V. R. T., école normale de Périgueux.]

Dans toutes les solutions reçues, la discussion laissait plus ou moins à désirer. Nous engageons nos correspondants à employer, pour les discussions du second degré, le procédé exposé dans ce Journal par M. Girod (17e année, nos 7 et 8).

GÉOMÉTRIE

4248. — *Dans un triangle isocèle* ABC (AB = AC), *on prend le symétrique* D *par rapport à* AB *du centre* O *du cercle circonscrit, et par* D *on mène à* AC *une parallèle qui coupe* BC *en* E. *Démontrer que l'angle* DOE *est droit.*

Première solution. — Soit G le point d'intersection de DE et AB.

Le quadrilatère AOBD ayant ses côtés égaux est un losange ; donc BD est parallèle à AO, et

$$\widehat{GBD} = \widehat{GAO}$$
$$\widehat{GDB} = \widehat{OAC}.$$

Or $\quad \widehat{GAO} = \widehat{OAC};$

par suite

$$\widehat{GBD} = \widehat{GDB}.$$

Le triangle GBD est donc isocèle ; d'ailleurs le triangle GBE l'est par construction, comme étant semblable au triangle ABC. Donc

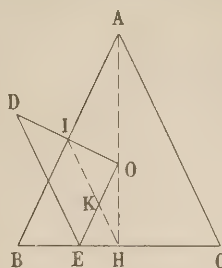
$$DG = GB = GE.$$

La droite AB passant ainsi par les milieux de deux côtés du triangle DOE est parallèle au troisième, OE ; OE est donc perpendiculaire à OD.

(J. WAKULSKI, collège Sainte-Barbe.)

[Ont ainsi résolu la question ; Mlle C. David ; MM. E. Ardin-Delteil ; Bacher ; Banié ; A. Baras ; P. Barroué ; Baudoin ; Benhaïm ; J. Beudin ; Bonnefont-Pédufau ; F. J. Bourrières ; P. Boutroux ; A. Bouzy ; Burgat ; Cantin ; L. Caralp ; Carpentier ; B. Carrière ; Cayotte-Boisnard ; E. Chambaud ; A. Cremer ; Cryé ; G. Damien ; G. Danguy ; P. Dégeilh ; A. Delcambre ; N. Delhotel ; F. Demblon ; Dobrovici ; Douménach ; R. Drion ; G. Dupuy ; G. Fauvernier ; Feintuch ; J. Font ; E. Foucart ; P. Fournel ; P. Frescal ; L. Gamet ; Gernez Pfanmatter ; A. Gipoulou ; H. Guillaud ; P. Herrmann ; J. J. G. B. ; Jacquet ; H. Janois ; J. Marius Lagarde ; A. Larcher ; A. Larue ; Layes ; P. Leduc ; H. Lefèvre ; M. Legras ; Legros ; Le Hénaff ; Le Maigre ; M. Loewy ; E. Madet ; L. Magne ; A. Maître ; H. Martiny ; J. Méhu ; A. Mirc ; E. Moëne ; A. Nicod ; Niel ; J. Pastour ; J. Patou ; F. Pégorier ; L. Perret ; J. Peyret ; J. Pillard ; Ph. Plisson ; J. Quintescu ; M. Rebeix ; F. Rey ; J. Rigal ; A. Riche ; P. Rolley ; E. Rousset ; E. Routier ; E. De Rycker ; Saget ; G. Siedel ; J. Sous ; R. Sudre ; J. Trouillé ; H. Valdenaire ; Vaquer ; Varinot ; Vergnole ; Vial ; P. Vincent ; Watrin ; J. Wittner.]

Seconde solution. — La droite IH qui joint les milieux de AB et BC est parallèle à AC ou à DE.



Soit K le point de rencontre de IH et OE. Dans le triangle ODE, la droite IK est la parallèle au côté DE issue du milieu I de OD ; cette droite passe donc par le milieu de OE, de sorte que HK est une médiane du triangle OHE, rectangle en H. Le triangle KEH est alors isocèle, et l'on a

$$\widehat{KEH} = \widehat{KHE} = \widehat{IBH},$$

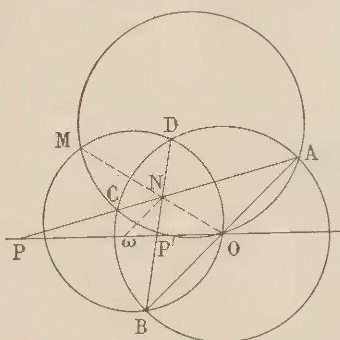
ce qui montre que KE ou OE est parallèle à AB, c'est-à-dire perpendiculaire à OD.

(G. BERNARD, lycée Saint-Louis.)

[Ont ainsi résolu la question : MM. J. Amboise ; P. Bataille ; E. Baudot ; G. Bernard ; F. Beynas ; L. Bolzinger ; P. Bonnot ; H. Bosc ; G. Bretz ; A. Chapron ; A. Chautemps ; Cambureanu ; Coste ; G. Delahaye ; L. Delavergnas ; G. Digne ; M. Drovin ; Eldin ; J. Fillols ; Fournier ; N. Garrigues ; P Gervaiseau ; E. Guénard ; P. Guillemin ; G. Hiernaux ; Jouve ; G. Leclerc ; H. Lévy ; Limongelli ; Masgana ; de Mendiry ; F. Morel ; A. Millet ; Mongin ; E. Pajot ; Raynaud ; Ribes ; J. Sire ; A. Slivneano ; Ch. Szabo ; P. Tarnier ; P. Tribier ; V. R. T.]

4300. — *On considère un cercle fixe* O *et deux points fixes* P, P′ *pris sur un diamètre. On joint les points* P, P′ *aux extrémités* A, B *d'un diamètre variable par deux droites qui coupent le cercle* O *en deux seconds points* C, D. *Lieu du second point de rencontre des cercles* AOC *et* BOD.

Transformons la figure par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour pôle d'inversion le point O et pour module R^2, R étant le rayon du cercle O. De cette façon, tous les points du cercle O sont leurs propres réciproques ; par suite les cercles AOC et BOD, qui passent par l'origine, ont pour transformées les droites AC et BD. Tout revient alors à chercher le lieu du point d'intersection N des droites AC et BD.



Pour cela, menons la parallèle Nω au diamètre AB jusqu'à sa rencontre en ω avec PO. Dans le faisceau N(PωP′O), la parallèle AB à l'un des rayons est divisée par les trois autres rayons en deux parties égales ; ce faisceau est donc harmonique, de sorte que le point ω, conjugué harmonique de O par rapport aux points fixes P, P′, est fixe.

Cela posé, on a

$$\frac{\omega N}{OA} = \frac{P\omega}{PO},$$

d'où $\quad \omega N = R \cdot \dfrac{P\omega}{PO} = \text{const.},$

ce qui montre que le lieu de N est une circonférence de centre ω.

Le lieu de M est donc la circonférence transformée de la circonférence ω par rapport au pôle O et au module R^2 d'inversion. On peut aussi considérer cette circonférence comme l'homothétique de la circonférence ω par rapport à O, ces deux circonférences se coupant sur le cercle en deux points réels ou imaginaires (axe radical commun aux trois cercles).

Dans ce qui précède, il est évident que les trois points en ligne droite O, P, P′ peuvent être pris d'une manière quelconque.

(M. REBEIX, lycée du Puy.)

Remarques. — L'expression du rayon ωN doit évidemment renfermer symétriquement les points P et P'. Voici comment on peut trouver une telle expression :

Comptons sur le diamètre OP les segments positivement dans le sens OP ; les triangles homothétiques ωPN et OPA, $\omega P'N$ et OP'B donnent

$$\frac{\omega N}{R} = \frac{\omega P}{OP}, \qquad \frac{\omega N}{R} = \frac{P'\omega}{OP'},$$

d'où
$$\frac{\omega N}{R} = \frac{P'\omega + \omega P}{OP' + OP} = \frac{PP'}{OP' + OP},$$

donc
$$\omega N = \frac{R.PP'}{OP + OP'}.$$

Pour calculer $O\omega$, on peut se servir de la relation harmonique

$$\frac{2}{O\omega} = \frac{1}{OP} + \frac{1}{OP'},$$

d'où
$$O\omega = \frac{2OP.OP'}{OP + OP'}.$$

On pourrait aussi se proposer de déterminer le centre du cercle lieu du point M. D'après une proposition de la théorie des figures inverses, on doit prendre à cet effet le point I où la polaire de O par rapport au cercle à transformer ω rencontre $O\omega$, et construire le point I', réciproque de I.

I est déterminé par l'équation

$$\omega I.\omega O = \overline{\omega N}^2,$$

qui s'écrit
$$O\omega.(O\omega - OI) = \overline{\omega N}^2,$$

d'où
$$O\omega.OI = \overline{O\omega}^2 - \overline{\omega N}^2.$$

I' est déterminé par l'équation

$$OI.OI' = R^2;$$

donc
$$OI' = \frac{R^2}{OI} = \frac{O\omega.R^2}{\overline{O\omega}^2 - \overline{\omega N}^2} = \frac{2R^2OP.OP'(OP + OP')}{4\overline{OP}^2.\overline{OP'}^2 - R^2.\overline{PP'}^2}.$$

Pour que le lieu du point N soit une droite, il faut et il suffit que OI' soit infini, ou encore que le cercle de centre ω et de rayon ωN passe par le pôle O. Cette dernière condition s'écrit

$$\omega N = O\omega,$$

d'où
$$2OP.OP' = R.PP' = R(OP' - OP).$$

Divisant les deux membres par R.OP.OP', il vient

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{OP} - \frac{1}{OP'}.$$

Appelons H l'extrémité du rayon OH de même sens que OP, P'' le symétrique de P' par rapport à O, de telle sorte que $OP'' = -OP'$, il vient

$$\frac{2}{OH} = \frac{1}{OP} + \frac{1}{OP''}.$$

Cette relation exprime que P'' et P sont conjugués harmoniques par rapport à O et H.

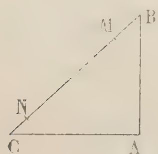
[Ont résolu la même question : MM. R. Guillemin, collège Rollin ; E. Laudat, lycée Saint-Louis.]

MÉCANIQUE

4096. — *Étant donné un plan incliné* ABC, *on propose de trouver sur* BC *deux points* M *et* N *tels que* $MN = BA = c$ *et que la distance* MN *soit parcourue dans le même temps que la hauteur* BA *serait parcourue par un autre point pesant tombant librement du point* B. *Le point pesant qui parcourt* BC *est supposé parti sans vitesse du point* B.

(*Diplôme d'élève de 1re classe de la marine marchande, 1897.*)

Posons $BM = x$; nous aurons $BN = x + c$.



Soient t et t' les époques des passages du mobile aux points M et N; α étant l'inclinaison du plan, il viendra

$$x = \frac{1}{2}\, g \sin\alpha.t^2,$$

$$x + c = \frac{1}{2}\, g \sin\alpha.t'^2.$$

Ceci posé, le temps τ mis par le mobile pour parcourir MN sera

$$\tau = t' - t,$$

ou bien
$$\tau = \sqrt{\frac{2(x+c)}{g \sin\alpha}} - \sqrt{\frac{2x}{g\sin\alpha}};$$

mais la durée de la chute d'un point qui tombe de B sans vitesse initiale a pour expression

$$\sqrt{\frac{2c}{g}};$$

par conséquent l'équation du problème s'écrira

$$\sqrt{\frac{2(x+c)}{g \sin\alpha}} - \sqrt{\frac{2x}{g\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2c}{g}},$$

ou encore

$$\sqrt{x+c} - \sqrt{x} = \sqrt{c \sin\alpha}. \qquad (1)$$

Multiplions les deux membres par $\sqrt{x+c} + \sqrt{x}$, il viendra

$$\sqrt{x+c} + \sqrt{x} = \sqrt{\frac{c}{\sin\alpha}}. \qquad (2)$$

Enfin, retranchons les équations (1) et (2) membre à membre, nous obtiendrons

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{c}{\sin\alpha}} - \sqrt{c\sin\alpha}\right),$$

d'où
$$x = \frac{c(1 - \sin\alpha)^2}{4 \sin\alpha}.$$

Pour que cette solution soit acceptable, il faut que MN appartienne au segment BC c'est-à-dire que l'on ait

$$x < \frac{c}{\sin\alpha}, \qquad x + c < \frac{c}{\sin\alpha}.$$

L'équation (2) montre que ces inégalités sont vérifiées, et le problème est toujours possible.

[Ont résolu cette question : MM. Bayor ; Betbézé ; L. Bessoles ; R. Cayrol ; J. Courtinat ; J. Delpont ; J. Gulton ; J. Juquelier ; A. Larcher ; E. Ménissier ; M. D. ; Mollon ; A. Nayel ; J. Peyrache.]

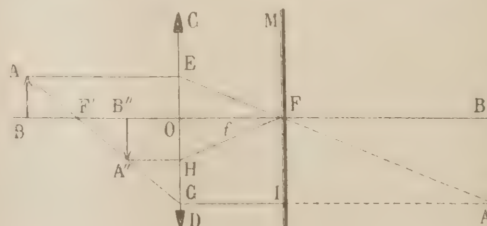
PHYSIQUE

4354. — *Un miroir plan* M, *passant par le foyer* F *d'une lentille convergente* CD *infiniment mince, est placé perpendiculairement à la droite* OF *joignant le centre optique* O *au foyer* F.

On place, en avant de la lentille, un objet AB *et on demande de construire l'image formée par les rayons qui, après avoir traversé la lentille* CD, *se réfléchissent sur le miroir* M *et repassent à travers la lentille* CD. *Calculer la grandeur de l'image et sa distance à* CD. — *Discussion.*

(*Bacc. lettres-math., Clermont, juillet 1897.*)

Le rayon incident AE, parallèle à l'axe principal, se réfléchit en F et donne le rayon FH qui sort de la lentille suivant HA'', également parallèle à l'axe principal. On voit déjà que l'image A''B'' obtenue après réflexion sur M et réfraction à travers CD, doit être égale à l'objet.



Pour déterminer complètement A'', considérons le rayon incident AF'G. Après avoir traversé la lentille, il suit la direction GI, parallèle à l'axe principal, tombe normalement sur le

miroir, revient suivant sa propre direction, et se réfracte finalement suivant GA. L'image du point A se forme donc en A″, point de rencontre des deux rayons HA″ et GA″.

En résumé, l'image obtenue A″B″ est égale à l'objet AB, et renversée par rapport à cet objet.

Pour déterminer la distance OB″, remarquons d'abord que si le miroir M n'existait pas, la lentille CD donnerait de AB une image A′B′ de grandeur égale à OG.

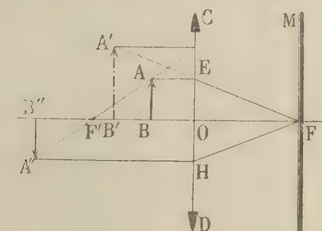
Or on a
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{f}{p-f},$$
d'où
$$A'B' = \frac{f \times AB}{p-f};$$
d'un autre côté, les triangles semblables F′B″A″ et F′OG donnent
$$\frac{f - OB''}{f} = \frac{A''B''}{OG} = \frac{AB}{\frac{f \times AB}{p-f}} = \frac{p-f}{f}.$$
Donc
$$f - OB'' = p - f$$
et
$$OB'' = 2f - p.$$

Par suite, dans les conditions de l'énoncé, l'objet ne peut être placé à une distance de la lentille supérieure à $2f$.

Discussion. — 1° Si $p = 2f$, l'image se forme sur la lentille, elle est renversée.

2° Si $f < p < 2f$, on se trouve dans le cas de la figure.

3° Si $p = f$, l'image A″B″ vient se former sous l'objet lui-même; elle est encore renversée.



4° Enfin si $p < f$, la figure ci-contre rend compte de la marche des rayons. L'image réelle renversée A″B″ se forme à une distance de F′ égale à $2f - p$, car les deux triangles F′AB et F′A″B″ sont égaux comme ayant un côté de l'angle droit égal et un angle aigu égal. On a donc
$$OB'' = f + f - p = 2f - p.$$

(ARDIN-DELTEIL.)

[Ont résolu la même question : MM. Bayor ; L. Bigot ; Bosc ; Boutry ; A. Bouzy ; A. Chapron ; A. Delbès ; J. Delpont ; G. Dive ; Grzybowski ; G. Hiernaux ; Larsonneur ; E. Larue ; Madet ; Oger ; Patin ; J. Pillard ; Raynaud ; Vente.]

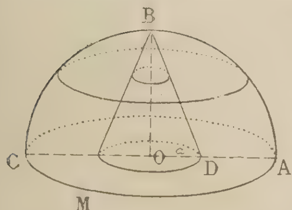
BACCALAURÉATS

SESSION D'AVRIL 1898

Lettres-mathématiques.

ALGER

I. — **4364**. On donne une demi-sphère ABC et un cône de révolution ayant son sommet au pôle B et sa base dans le plan du grand cercle AMC.



R étant le rayon de la sphère et a celui de la base du cône, on demande de couper la figure par un plan parallèle à la base de manière que la surface de l'anneau compris entre les deux sections ait une valeur donnée. — Maximum de cette surface.

Cas particulier : $a = R$.

II. — *1er sujet.* — Centre de gravité d'une pyramide polygonale.

II. — *2e sujet.* — Condition d'équilibre de trois forces appliquées à un corps solide en des points différents.

II. — *3e sujet.* — Graduation de la Romaine.

I. — La chambre d'un baromètre contient de l'air sec. Dans une première expérience, on lit la hauteur 751mm. On enfonce le tube dans la cuvette jusqu'à ce que le volume de la chambre soit réduit au 1/5 de sa valeur : la hauteur lue alors est 740mm. On demande quelle est la hauteur barométrique actuelle.

II. — *1er sujet.* — Décrire et interpréter les expériences qui fournissent les notions de potentiel et de capacité électrique.

II. — *2e sujet.* — Condensation ; bouteille de Leyde ; électroscope condensateur.

II. — *3e sujet.* — Énoncé des lois fondamentales des courants ; — unités pratiques d'intensité, de résistance et de force électromotrice.

BESANÇON

I. — *1er sujet.* — Division des monomes. — Division des polynomes.

I. — *2e sujet.* — Logarithmes vulgaires. Définition et propriétés.

I. — *3e sujet.* — Variations de grandeur du trinome du second degré ; représentation graphique.

II. — Calculer les côtés d'un triangle rectangle connaissant la somme m des deux côtés de l'angle droit et la hauteur h relative à l'hypoténuse. Discussion.

I. — *1er sujet.* — Condensation électrique. Théorie. (On ne parlera pas de la bouteille de Leyde, ni de l'électroscope condensateur.)

I. — *2e sujet.* — Électroscope condensateur. Description. Théorie.

I. — *3e sujet.* — Bouteille de Leyde. Description, théorie, décharge.

On a une lentille dont la distance focale principale est f ; on la partage en deux parties égales, comme l'indique la figure ci-contre : si la lentille était recollée, C et C′ se confondraient et formeraient son centre optique. A une distance de C et C′ égale à $2f$, on place un point lumineux. On demande de construire les deux images et de calculer leur distance, sachant que C et C′ sont distants de 1cm.



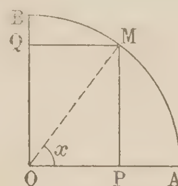
BORDEAUX

I. — *1er sujet.* — Intersection d'une ellipse et d'une droite passant par un foyer.

I. — *2e sujet.* — Intersection d'une droite et d'une parabole.

I. — *3e sujet.* — Lieu des points d'où l'on peut mener à une parabole deux tangentes rectangulaires.

II. — **4365**. On donne un quart de cercle AOB de rayon égal à l'unité. Soit OPMQ un rectangle inscrit dans ce quadrant.



1° Déterminer l'équation trigonométrique à laquelle doit satisfaire l'angle $x = MOP$ pour que le rapport du périmètre du rectangle à sa surface soit égal à un nombre donné m.

2° Calculer l'angle x dans les cas particuliers où
$$m = 4\sqrt{6}, \qquad m = 4\sqrt{2}.$$

I. — *1er sujet.* — Intensité d'un courant électrique. — Sa mesure en ampères.

I. — *2e sujet.* — Résistance d'une portion de circuit électrique. — Sa mesure en ohms.

I. — *3e sujet.* — Force électromotrice d'une pile. — Sa mesure en volts.

II. — **4366**. Un appareil photographique pour paysage a son écran à une distance fixe de 20 centimètres de l'objectif, dont il occupe ainsi le plan focal principal. On veut cependant s'en servir pour photographier un tableau, en réduisant au $\frac{1}{5}$ ses dimensions linéaires.

Quelle sera la distance focale de la lentille à placer en avant de l'objectif et contre l'objectif ?

Cette lentille étant biconvexe et ayant 1 mètre pour rayon commun de courbure de ses faces, quel est son indice ?

Quel rayon commun devront avoir les faces d'une autre lentille biconvexe, de même verre, pour que, en l'accolant à la précédente, on obtienne une photographie du tableau en vraie grandeur ?

CAEN

I. — **4367**. Faire voir qu'en désignant par a, b, c, d quatre entiers donnés, on peut trouver pour λ, μ, λ', μ' un système de valeurs entières, positives ou négatives, telles que l'on ait

$$(\lambda a + \mu b)^2 + (\lambda' a + \mu' b)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

En déduire que si, dans un produit de n nombres entiers, chaque facteur est la somme de deux nombres entiers carrés parfaits, le produit jouit de la même propriété.

II. — 1er *sujet*. — Définition et extraction de la racine carrée d'un nombre entier à moins d'une unité.

II. — 2e *sujet*. — Etudier le signe du trinome $2x^2 - x - 1$, lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$. Même question pour le trinome $4x^2 - 4x + 1$, et pour le trinome $2x^2 - x + 1$.

II. — 3e *sujet*. — Trièdres supplémentaires.

I. — Un baromètre, dont la cuvette est assez large pour qu'on puisse y considérer les dénivellations du mercure comme négligeables, a une chambre dans laquelle a pénétré une certaine quantité d'air. On veut néanmoins s'en servir pour déterminer la pression atmosphérique. Une expérience préliminaire a montré que, la température étant 0° et la pression effective 760^{mm}, le baromètre marquait 740^{mm} et la chambre barométrique avait une longueur de 25^{cm}.

On demande quelle sera la pression actuelle quand, à la température de 35°, le baromètre marque 745^{mm}. On sait que le coefficient de dilatation cubique du mercure est $\frac{1}{5550}$, celui de l'air $\frac{1}{273}$.

On négligera d'ailleurs la dilatation du verre.

II. — 1er *sujet*. — Force élastique maximum des vapeurs. — Leur détermination.

II. — 2e *sujet*. — Actions chimiques des courants. — Lois de Faraday.

II. — 3e *sujet*. — Action d'un prisme transparent sur un faisceau lumineux : déviation, formules générales. Détermination de l'indice dans le cas du minimum de déviation.

CLERMONT

I. — **4368**. Deux droites Ox, Oy font entre elles un angle de 60° ; on mène une droite Oz perpendiculaire au plan xOy. Sur Oz on prend une longueur donnée $OC = c$. On demande de déterminer sur Ox et Oy deux points A et B de telle sorte que AB ait une longueur donnée l et que le triangle ABC ait une surface donnée $\frac{1}{2}h^2$. Discussion. — Construction géométrique. — Calculer avec les données le volume du tétraèdre OABC.

II. — 1er *sujet*. — Angle de deux plans.
II. — 2e *sujet*. — Angle d'une droite et d'un plan.
II. — 3e *sujet*. — Plus courte distance de deux droites.
(Géométrie descriptive.)

I. — **4369**. Un tube de verre bien cylindrique ABCD, dont la section intérieure est de 4cq, renfermant une certaine masse d'air, a été renversé sur une cuve à mercure. Ce tube est fixé à l'extrémité d'un fil passant sur une poulie O très mobile, et portant à l'autre bout un plateau P.

On leste l'appareil de façon que les niveaux du mercure MN, dans le tube et dans la cuvette, soient les mêmes. La distance AM du fond du tube au niveau du mercure est alors de 10^{cm}.

On met dans le plateau P un poids de 1^{kg}. On demande de quelle hauteur le tube se soulèvera.

On négligera les effets de poussée du mercure sur les parois du tube et on prendra pour hauteur barométrique 730^{mm}.

II. — 1er *sujet*. — Chaleur spécifique des solides et des liquides ; méthode des mélanges.

II. — 2e *sujet*. — Vapeurs saturantes et non saturantes. — Force élastique maximum de la vapeur d'eau à diverses températures.

II. — 3e *sujet*. — Hygrométrie. — Hygromètres à condensation.

GRENOBLE

I. — Déterminer un parallélogramme ABCD connaissant un côté AB, la diagonale AC et la hauteur BE issue de B. — Conditions de possibilité.

II. — 1er *sujet*. — Lieu des points d'un plan dont le rapport des distances à deux points donnés de ce plan est constant.

II. — 2e *sujet*. — Inscrire un décagone régulier dans un cercle donné.

II. — 3e *sujet*. — Volume d'un parallélépipède quelconque en supposant connu le volume d'un parallélépipède rectangle.

I. — Etant donné un gaz combustible de densité 0,39, qui dégage en brûlant 11.000 calories par kilogramme et qui coûte $0^{fr},30$ le mètre cube, combien coûterait, à l'aide d'un brûleur alimenté par ce gaz, la production de 100.000 calories, et quel poids d'eau à 10° pourrait-on transformer en vapeur à 100° en utilisant 65 % de cette quantité de chaleur ?

II. — 1er *sujet*. — Effets calorifiques des courants.

II. — 2e *sujet*. — Effets magnétiques des courants.

II. — 3e *sujet*. — Effets chimiques des courants.

(La fin au prochain numéro).

QUESTIONS PROPOSÉES

4370. — M étant un point du plan d'un triangle équilatéral ABC, soient a, b, c les distances de M aux sommets A, B, C ; calculer le côté du triangle équilatéral en fonction de a, b, c.

Construction géométrique du triangle.

Discussion.

(P. Tarnier, à Dijon.)

4371. — On donne les trois côtés d'un triangle ABC :

$$AB = c, \qquad BC = 2a \quad \text{et} \quad CA = b.$$

Un point M décrit le côté CB. Soit x sa distance variable au milieu D de ce côté.

1° Pour quelles positions remarquables de M le rapport $y = \frac{\overline{AM}^2}{CM \cdot MB}$ est-il minimum en valeur absolue ?

2° Démontrer que les deux positions M′ et M″ pour lesquelles y prend des valeurs égales sont conjuguées harmoniques par rapport aux pieds des bissectrices issues du sommet A.

(J. Girod.)

4372. — On donne une parabole et deux tangentes ; par le point de contact de chacune d'elles on trace la corde parallèle à l'autre. Démontrer que les deux cordes ainsi obtenues se partagent mutuellement au quart de leur longueur.

(Th. Caronnet.)

ERRATUM. — Dans l'explication de l'épure 4336, page 138, colonne de droite, ligne 8 en remontant,

au lieu de

d) *Points les plus hauts et les plus bas.* — ...,

lire :

d) *Points où la tangente est parallèle au plan de base du cône.* — ....

Le Rédacteur-Gérant : Henry Vuibert.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

22e Année. — No 18. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 15 Juin 1898.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

CONCOURS DE 1896

Mathématiques élémentaires.

3891. — *On considère une sphère variable Σ orthogonale à une sphère fixe* S *et tangente à une autre sphère fixe* S_1.

1° *Lorsque la sphère Σ est assujettie à la condition d'avoir son centre dans un plan* P, *le lieu du point de contact de Σ et de S_1 est un cercle.*

Démontrer que, si le plan P *est tangent à la sphère* S, *le lieu du centre de la sphère Σ est une section conique ayant pour foyer le point de contact de* S *et de* P.

Examiner le cas où le plan P *est tangent à la sphère* S *en un point du cercle d'intersection de* S *et de* S_1.

2° *On peut déterminer sur la ligne des centres de* S *et de* S_1 *un point f tel que la sphère Σ_0 concentrique à Σ et passant par f reste toujours, quand Σ varie, tangente à une sphère fixe* D *ayant pour centre le point f_1, centre de* S_1.

3° *Soient m le centre de Σ_0 et m' le point de contact de Σ_0 et de* D. *Lorsque le point m' décrit un cercle de* D, *le point m reste dans un plan et décrit, dans ce plan, une ellipse, une hyperbole ou une parabole.*

Discuter, en supposant que le plan du cercle considéré sur D *se déplace parallèlement à lui-même.*

4° *Soit* T *le plan perpendiculaire au milieu du segment qui joint le point f à un point m' pris sur la sphère* D; *lorsque le plan* T *passe par un point fixe q, le lieu du point m' est un cercle γ_q.*

Si le point q vient à se déplacer dans un plan fixe, le cercle γ_q reste orthogonal à un cercle fixe de la sphère D. *Examiner le cas où le point q décrit une droite fixe.*

5° *Soit c le milieu de ff_1, prouver que les droites cm et fm' se coupent en un point qui demeure dans un plan fixe lorsqu'on fait varier la sphère Σ_0.*

1re Partie. — Toutes les sphères Σ ayant leur centre dans le plan P et orthogonales à la sphère S de centre O ont même axe radical, la perpendiculaire menée de O au plan P, car la puissance du point O par rapport à toutes ces sphères est constante.

Toutes ces sphères ont avec la sphère S_1, de centre f_1, un centre radical commun C, que l'on obtient en prenant l'intersection de l'axe radical commun aux premières sphères avec le plan radical de l'une quelconque d'entre elles et de S_1.

Si l'on considère alors les sphères Σ orthogonales à S, ayant leur centre ω dans le plan P, et tangentes à S_1, le plan tangent commun au point de contact M de Σ et S_1 passe constamment par le point C; le point M se trouve dès lors sur le cercle Γ, intersection de la sphère S_1 avec le plan polaire du point C par rapport à cette sphère.

Ce cercle Γ n'est réel que si C est extérieur à S_1; c'est alors le cercle de contact du cône circonscrit de sommet C.

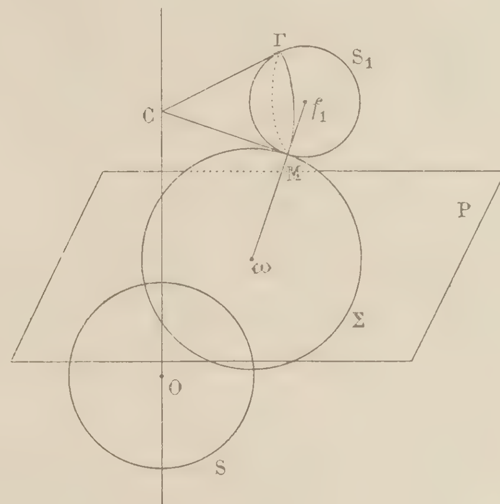


Fig. 1

On voit immédiatement qu'à tout point M de Γ correspond une sphère Σ satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Comme le

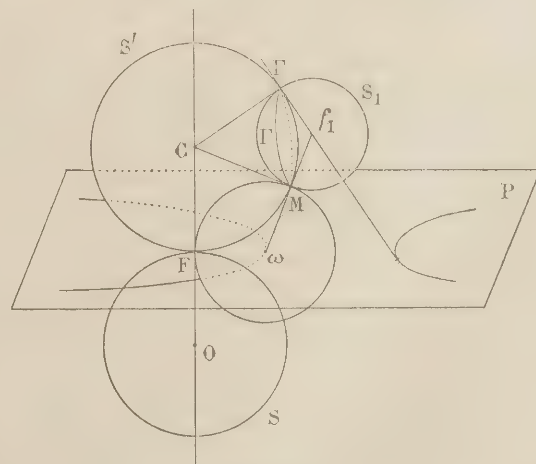


Fig. 2

centre ω se trouve situé sur le rayon f_1M, et que ce dernier a pour lieu le cône ayant pour sommet f_1 et pour directrice le cercle Γ, on voit que le lieu de ω est une section conique, intersection du cône précédent et du plan P.

Dans le cas particulier où le plan P est tangent à S, en un point F, on voit que toutes les sphères Σ sont tangentes en ce point à leur axe radical OF; si du point C comme centre, avec CF comme rayon, on décrit une sphère S′, elle est orthogonale à toutes les sphères Σ, ainsi qu'à S_1, et coupe cette dernière suivant le cercle Γ. Le cône décrit par le rayon f_1M est dès lors circonscrit à la sphère S′ le long de Γ; d'après le théorème de Dandelin, la section de ce cône par le plan P, qui est tangent à la sphère inscrite S′ au point F, est une conique de foyer F; cette conique est précisément le lieu du point ω.

Dans le cas spécial où le point F se trouve sur le cercle commun aux sphères S et S_1, le point C est confondu avec F si les sphères ne sont pas orthogonales, et est indéterminé sur OF si elles se coupent à angle droit. Dans la première hypothèse il n'existe qu'une seule sphère Σ, celle dont le centre ω est confondu avec F, et dont le rayon est nul; dans la seconde, les sphères Σ sont toutes les sphères tangentes à S_1 au point F, et le lieu de leurs centres est la droite f_1F.

2e Partie. — On sait que les sphères Σ orthogonales à une sphère S et tangentes à une sphère S_1 sont encore tangentes à une sphère S_2, inverse de la sphère S_1 par rapport à S; soit f le centre de S_2.

Suivant que la puissance du point O par rapport à S_1 est

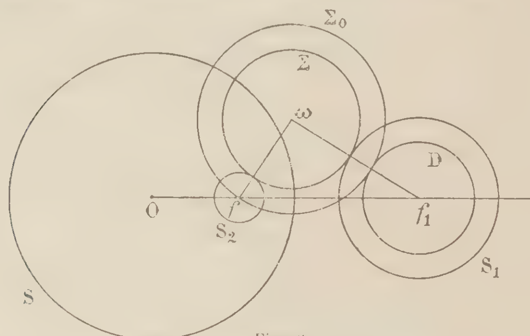


Fig. 3

négative ou positive, la somme ou la différence des distances du centre ω de Σ à f et f_1 est constante, et le lieu de ce point est un ellipsoïde ou un hyperboloïde de révolution ayant pour foyers f et f_1. La sphère Σ_0 de centre ω passant par f sera toujours tangente à une sphère D de centre f_1 ayant pour rayon, dans le premier cas la somme, dans le second cas la différence des rayons des sphères S_1 et S_2.

3e Partie. — A partir de maintenant, nous pouvons faire abstraction de tout ce qui précède, et considérer simplement des sphères Σ_0 passant par un point f, et tangentes à une sphère D de centre f_1; soient m le centre de Σ_0 et m' le point de contact de Σ_0 et D. Nous savons que m est situé sur une surface de révolution qui est un ellipsoïde ou un hyperboloïde suivant que f est intérieur ou extérieur à D, et qui a pour foyers f et f_1.

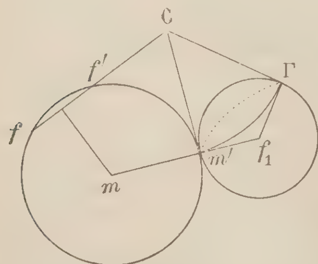


Fig. 4

Supposons que m' décrive un cercle Γ de D, et soit C le sommet du cône circonscrit suivant ce cercle; les sphères Σ_0 passent par un deuxième point fixe f' situé sur Cf, et tel que

$$Cf.Cf' = \overline{Cm'}^2;$$

dès lors le point m reste dans un plan P perpendiculaire au milieu de ff', et il décrit une section conique, intersection du plan P et du cône de révolution ayant pour sommet le centre f_1 de D et pour directrice le cercle Γ.

Cette conique aura des branches infinies si le plan parallèle à P, c'est-à-dire perpendiculaire à Cf, et passant par f_1, coupe le cercle Γ; cette condition est équivalente à la suivante : la droite Cf est extérieure au cône de sommet C et circonscrit à la sphère D.

Si f est intérieur à D, cette condition n'est jamais remplie et la conique est toujours du genre ellipse; si f est extérieur à D, la conique sera une ellipse si C est intérieur au cône circonscrit à D, de sommet f, ou à son opposé par le sommet; elle sera une parabole si C est sur l'un ou l'autre de ces cônes, et une hyperbole s'il leur est extérieur.

On obtiendrait les mêmes conclusions en considérant le cône des directions asymptotiques de la surface de révolution sur laquelle se trouve le point m, et la section de ce cône par un plan parallèle au plan P et passant par son sommet.

4e Partie. — Si le plan T perpendiculaire au milieu de fm' passe par un point q, on a $qm' = qf$, et le point m' se trouve sur le cercle γ_q d'intersection de D avec la sphère S_q de centre q et de rayon qf.

Si q se déplace dans un plan fixe Q, la sphère S_q passe constamment par le point f et par son symétrique φ par rapport à Q. Comme dans la première partie, le plan radical de S_q et de D coupe fφ en un point fixe C, centre radical des sphères S_q et de D; on en conclut que le cercle γ_q reste constamment orthogonal au cercle de contact du cône de sommet C circonscrit à D.

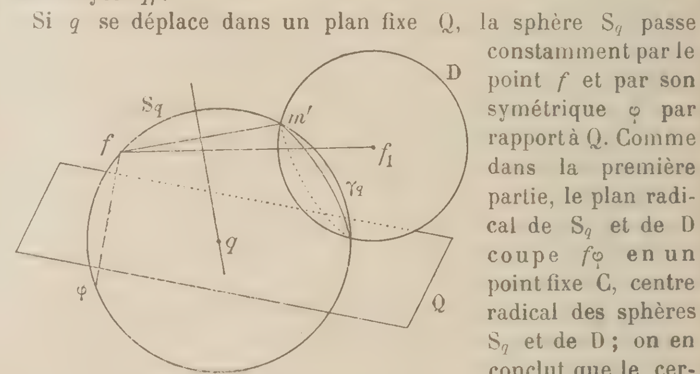


Fig. 5

Si q décrit une droite, intersection de deux plans Q et Q′, le cercle γ_q reste orthogonal à deux cercles, qui sont les cercles de contact de deux cônes circonscrits de sommets C et C′; son plan passe constamment par la droite CC′.

5e Partie. — En considérant la section de la figure par un plan perpendiculaire à ff_1, nous voyons que m décrit dans ce plan une conique de foyers f et f_1 et de centre C milieu de ff_1; le grand cercle de la sphère D situé dans le plan considéré est le cercle directeur du foyer f_1, et fm' est la perpendiculaire à la tangente en m à la conique.

La propriété à démontrer découle alors de la suivante :

Si l'on considère le rayon allant du centre à un point d'une conique, et la perpendiculaire abaissée d'un des foyers sur la tangente en ce point, ces deux droites se coupent sur la directrice relative au foyer considéré.

Considérons en effet la droite fh parallèle à la tangente mt au point m; son pôle se trouve : 1° sur le diamètre cm de la direction fh; 2° sur la perpendiculaire menée en f à fh, car c'est une droite conjuguée de fh; le pôle n'est autre alors que le point de rencontre p de ces deux droites, et comme il doit se trouver sur la polaire de f, il appartient à la directrice relative à ce foyer.

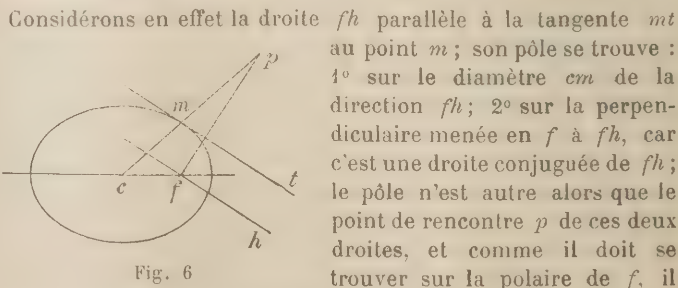


Fig. 6

H. V.

Solution analogue, mais moins développée, pour les quatre dernières parties par M. Ollier, professeur de mathématiques élémentaires au lycée de Saint-Denis (Réunion).

Pour démontrer la première partie, M. Ollier remarque que, lorsque des sphères variables coupent sous des angles constants α et β deux sphères, elles coupent aussi sous un angle constant γ une sphère ayant avec ces deux sphères un plan radical commun.

Il considère alors la sphère S_2, inscrite dans le cône de sommet O (centre de S) circonscrit à S_1, ayant un plan radical commun avec S et S_1. Toutes les sphères Σ, coupant S sous l'angle $\frac{\pi}{2}$ et S_1 sous l'angle zéro, couperont S_2 sous un angle constant. Mais les plans tangents au cône sont évidemment des sphères Σ ; ils sont tangents à S_2 ; donc toutes les sphères Σ sont tangentes à S_2.

Si on assujettit les sphères Σ à avoir leurs centres dans un plan P, elles seront aussi tangentes à la sphère S_2' symétrique de S_2 par rapport à P, et seront par suite tangentes aux trois sphères S_1, S_2, S_2'. Mais (théorème de Dupuis) quand une sphère variable ω touche constamment trois sphères fixes, chacun des trois points de contact décrit un petit cercle de la sphère correspondante.

Donc le point de contact de Σ et de S_1 décrit un petit cercle γ.

CONCOURS GÉNÉRAL DE SECONDE MODERNE

(1897)

4159. — 1° *Etant donné le carré* ABCD, *on considère le triangle équilatéral gef tel que g est en* A *et que e et f sont, respectivement, sur* BC *et sur* CD.

Evaluer le volume du solide compris entre le carré ABCD, *le triangle* GEF (*dont le plan est parallèle au plan du carré et qui se projette sur celui-ci suivant gef*) *et les plans* AGB, GBE, BEC, ECF, FCD, FGD, DGA. *On prendra* $AB = a$, $AG = \frac{3a}{2}$;

2° *Construire la projection du solide précédent sur le plan de la face* CEF ; *ponctuation de cette projection.*

Tracer la section des faces de ce polyèdre par le plan passant par la perpendiculaire commune aux arêtes BC, FE *et par le milieu de l'arête* AD. *On prendra* $a = 0^m,06$.

1° Soit ABCD (*fig.* 1) le carré donné ; g étant supposé en A, menons par A les droites Ae, Af faisant chacune 30° avec la diagonale AC. L'angle en A du triangle efA est égal à 60° ; d'ailleurs, si on replie la figure autour de AC, le point B vient en D, Ae se place sur Af ; donc e vient en f. Par suite Ae = Af, et le triangle isocèle eAf, dont l'angle en A vaut 60°, est équilatéral. BD et ef sont évidemment parallèles.

Fig. 1

Considérons maintenant (*fig.* 2) le polyèdre limité par le triangle équilatéral GEF, le carré ABCD, et les plans AGB, GBE, BEC, ECF, FCD, FGD, DGA. Par hypothèse le plan GEF est parallèle au plan ABCD, et le triangle GEF se projette sur le plan du carré en gef, de telle sorte que

$$AB = a, \qquad AG = fF = eE = \frac{3a}{2}.$$

Les arêtes de ce polyèdre, autres que celles des deux bases GEF, ABCD se projettent sur les côtés du carré.

Par le milieu M de l'arête AG menons un plan parallèle aux deux bases ; il détermine dans le polyèdre une section MNPQRST, ayant pour sommets les milieux des arêtes latérales ; les sept côtés de ce polygone sont parallèles alternativement à un côté de la base inférieure et un côté de la base supérieure. La projection orthogonale de ce polygone sur le plan de base ABCD est un polygone $mnpqrst$, dont le sommet m coïncide avec A et dont les autres sommets sont les milieux des segments AB, Be, eC, Cf, fD, DA.

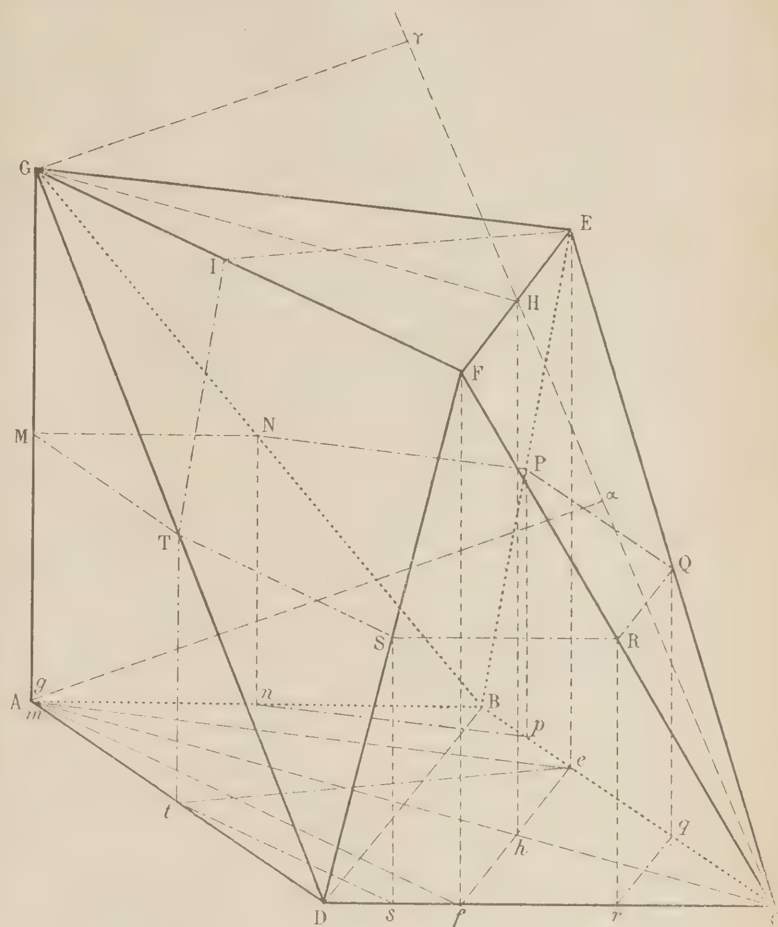


Fig. 2

Toutes les faces latérales de ce polyèdre étant des triangles, on peut évaluer son volume à l'aide du théorème de Sarrus :

$$V = \frac{1}{6} AG(S.ABCD + S.GEF + 4S.MNPQRST).$$

On a déjà

$$AG = \frac{3a}{2}, \qquad S.ABCD = a^2.$$

Pour calculer S.GEF, il suffit de connaître le côté Af de ce triangle équilatéral. Le triangle rectangle ADf de la figure 1 donne

$$Af = \frac{AD}{\cos 15°};$$

mais

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45°.\sin 30°$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Donc

$$Af = \frac{4a}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{4a(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2} = a(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

D'autre part, la surface du triangle équilatéral de côté l vaut $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$; par suite

$$S.GEF = \frac{a^2(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2.\sqrt{3}}{4} = a^2(2\sqrt{3}-3).$$

La surface du polygone *mnpqrst* se compose du triangle équilatéral *gef*, et des trois trapèzes *mfst*, *feqr*, *emnp* ; le triangle D*st* étant évidemment le quart du triangle D*mf*, le trapèze *mfst* est égal aux trois quarts du triangle D*mf* ; de même les trapèzes *feqr*, *emnp* sont respectivement les trois quarts des triangles C*fe*, B*me*. Or la somme des trois triangles D*mf*, C*fe*, B*me* est égale à S.ABCD — S.*gef* ; donc enfin

$$mnpqrst = \frac{3}{4}(\text{S.ABCD} - \text{S.}gef) + \text{S.}gef.$$

On en déduit que l'expression du volume est égale à

$$\frac{1}{6}\ \text{AG}(4\text{S.ABCD} + 2\text{S.GEF}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{3a}{2}\left[4a^2 + 2a^2(2\sqrt{3}-3)\right]$$
$$= \frac{a^3}{2}(2\sqrt{3}-1).$$

2° Pour construire la projection du solide sur le plan CFE, construisons d'abord le triangle CFE. Faisons sur le plan horizontal un carré *abcd* et inscrivons-y, comme il a été expliqué, le triangle *gef* (*fig.* 3). Remarquons (*fig.* 2) que le plan GAC est perpendiculaire au milieu de *ef* et par suite aussi de EF ; il est donc perpendiculaire au plan CEF et rencontre ce triangle isocèle suivant sa hauteur CH. Si donc on rabat (*fig.* 3) le trapèze ACHG autour de *ac* sur le plan horizontal, on obtiendra la longueur de cette hauteur CH. Ce rabattement s'obtient en élevant en *a* la perpendiculaire à *ac* et en y prenant

$$ag' = \text{AG} = \frac{3a}{2} = 0^{\text{m}},09 ;$$

on mène par g' la parallèle à *ac* et on y prend $g'h' = \text{GH} = ah$; le dernier côté ce' du trapèze est la hauteur cherchée.

Portons-la sur *ca* en ch_1 ; menons par h_1 la parallèle à *ef* ; prenons-y de part et d'autre de h_1 des longueurs $h_1e_1 = h_1f_1 = \frac{ef}{2}$; le triangle ce_1f_1 est égal au triangle CEF.

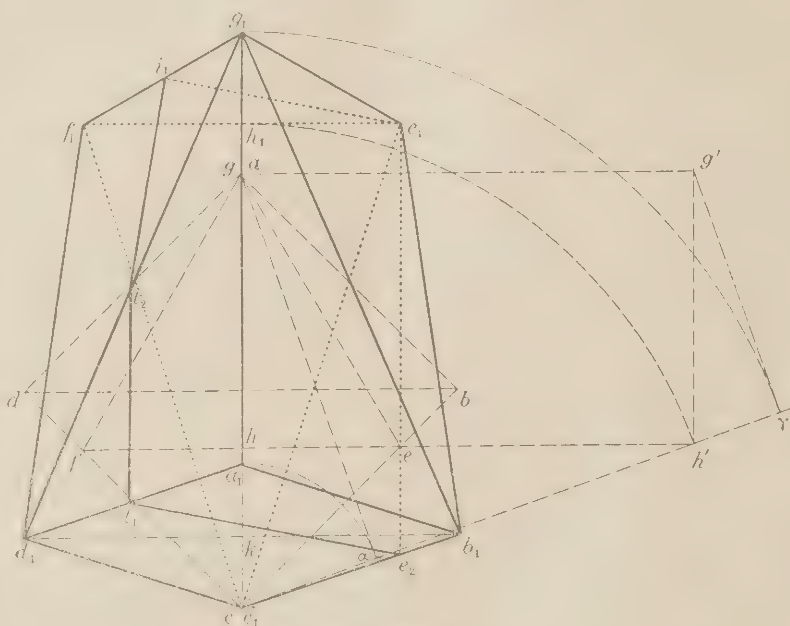


Fig. 3 (échelle : 2/3).

Restent à déterminer les projections des sommets A, G, B, D. Nous avons remarqué précédemment que le plan ACHG (*fig.* 2) est perpendiculaire au plan CEF suivant CH ; il contient donc les perpendiculaires abaissées de A et G sur ce plan ; les pieds α et γ de ces perpendiculaires se trouveront sur CH.

Pour déterminer Cα et Cγ, il suffit donc (*fig.* 3) d'abaisser des points *a* et g' les perpendiculaires $a\alpha'$ et $g'\gamma'$ sur ch' ; on rabat ensuite les longueurs $c\alpha'$ et $c\gamma'$ sur ch_1 en ca_1 et cg_1, ce qui fait connaître les projections a_1 et g_1 des points *a* et *g*.

La projection de ABCD sur le plan CEF est, comme on sait, un parallélogramme ; les diagonales de ABCD sont rectangulaires ; l'une d'entre elles, BD, est parallèle à EF et par suite au plan de projection CEF. Donc les diagonales de la projection sont aussi rectangulaires ; la projection de ABCD est donc un losange dont une diagonale a même longueur que BD. On la construira donc (*fig.* 3) en élevant la perpendiculaire au milieu *k* de a_1c et prenant de part et d'autre de *k* les longueurs $kb_1 = kd_1 = \frac{bd}{2}$.

Il suffit maintenant de tirer les droites g_1f_1, g_1e_1, e_1f_1, a_1d_1, a_1b_1, cb_1, cd_1, d_1g_1, b_1g_1, cf_1, ce_1 pour avoir les projections de toutes les arêtes du polyèdre.

Ponctuation. — Les arêtes qui limitent le solide en projection sont évidemment vues. Le point *a* est certainement vu et aussi les trois arêtes qui partent de ce point. Au contraire les arêtes de ce_1f_1, situées toutes sur le plan de projection, sont cachées.

Section du polyèdre par le plan passant par la perpendiculaire commune aux arêtes BC, FE *et le milieu de l'arête* AD.

La droite E*e* (*fig.* 2) est perpendiculaire au plan ABCD, par suite aux droites BC et EF ; comme elle les rencontre toutes deux, c'est donc la perpendiculaire commune à ces deux droites. Soit *t* le milieu de AD ; le plan E*et* rencontre le plan ABCD suivant *te* ; par suite le plan EFG, parallèle à ABCD, suivant la droite EI parallèle à *te* ; d'autre part les plans EBC et GAD sont parallèles ; donc le plan sécant rencontre la face GAD suivant une droite T*t* parallèle à E*e* ; il ne reste plus qu'à joindre I et T pour avoir le dernier côté du polygone de section.

En remarquant que E*e* est parallèle à AG, la construction de la section sur l'épure se fait de la manière suivante (*fig.* 3) :

On tire e_1e_2 parallèle à a_1g_1 jusqu'à sa rencontre en e_2 avec b_1c_1 ; on joint e_2 au milieu t_1 de a_1d_1 ; on mène dans la face $g_1e_1f_1$ la droite e_1i_1 parallèle à e_2t_1, jusqu'à sa rencontre en i_1 avec g_1f_1 ; on mène t_1t_2 parallèle à e_1e_2 jusqu'à sa rencontre en t_2 avec a_1g_1 ; la section demandée est le polygone $e_1e_2t_1t_2i_1$.

(LAVASTE, collège Chaptal, 1[er] prix.)

[Ont résolu cette question : MM. Curt ; de Mendiry ; Przemarch, à Essacy (Hongrie) ; E. Sevin (2e accessit), collège Chaptal.]

Remarque. — Au lieu de se servir de considérations géométriques comme dans la solution précédente, on aurait pu opérer comme suit.

On commence par construire la projection horizontale du solide sur le plan de base *abcd* ; les projections des sommets sont alors (*fig.* 3) les points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*. La cote donnée permet de construire ensuite leurs projections verticales sur un plan vertical parallèle à la diagonale *ac*, par exemple sur le plan *gac* ; les points *a* et *c* se confondent avec leurs projections verticales ; *b* et *d* se projettent sur *ac*, *g* en g', *e* et *f* au point h'. Il est alors aisé de déterminer la section du polyèdre par le plan vertical E*et*.

Cela fait, on remarque que le plan CEF est perpendiculaire au plan vertical considéré et que sa trace verticale est ch'. Il suffit donc, pour avoir la projection cherchée, de faire un changement de plan horizontal, en prenant ch' pour nouvelle ligne de terre.

4160. — *Etant donnés trois points* A, B, C *en ligne droite* (B *entre* A *et* C), *on décrit sur* BC *comme diamètre un demi-cercle*

auquel on mène la tangente AD; *soit* M *un point de l'arc* BD; *on propose de déterminer l'angle* MOA *de sorte qu'en joignant* M *et* C, M *et* A *et faisant tourner la figure autour de* AC, *le volume engendré par le triangle* MAC *soit partagé dans le rapport donné* k *par la zone qu'engendre l'arc* MB.

Trouver les limites de k *en fonction du rapport* h *de* OA *à* OB, O *étant le milieu de* BC.

Soit $OB = R$; d'après l'énoncé, $OA = hR$ et h est plus grand que 1, puisque A est extérieur à BC.

La condition géométrique imposée est

$$\frac{V.AMB}{V.BMC} = k;$$

elle s'écrit

$$\frac{V.AMB}{k} = \frac{V.BMC}{1} = \frac{V.AMC}{k+1};$$

les deux derniers rapports donnent

$$\frac{V.AMC}{V.BMC} = k + 1. \qquad (1)$$

Soit MI la perpendiculaire abaissée de M sur BC; la figure donne

$$V.AMC = \frac{1}{3}\pi AC.\overline{MI}^2 = \frac{1}{3}\pi(h+1)R.\overline{MI}^2;$$

$$V.BMC = V.BMD + V.MOC = \frac{2}{3}\pi R^2.BI + \frac{1}{3}\pi\overline{MI}^2.OC$$

$$= \frac{1}{3}\pi R\left[2R.BI + \overline{MI}^2\right].$$

L'équation (1) s'écrit donc, après avoir divisé haut et bas par $\frac{1}{3}\pi R$,

$$\frac{(h+1)\overline{MI}^2}{2R.BI + \overline{MI}^2} = k + 1,$$

c'est-à-dire

$$(h-k)\overline{MI}^2 = 2(k+1)R.BI.$$

La figure montre que

$$\overline{MI}^2 = BI \times IC;$$

l'équation précédente devient donc finalement

$$(h-k).IC = 2(k+1)R.$$

Soit x l'angle MOA; on voit aisément que

$$IC = R + R\cos x;$$

remplaçons IC par cette valeur; il vient

$$(h-k)R + (h-k)R\cos x = 2(k+1)R,$$

ou bien

$$(h-k)\cos x = 3k - h + 2;$$

d'où

$$\cos x = \frac{3k-h+2}{1-k}.$$

Pour qu'une valeur de x, tirée de cette équation, convienne au problème, il faut et il suffit qu'elle soit comprise entre 0 et l'angle DOA; le triangle DOA montre que

$$\cos DOA = \frac{OD}{OA} = \frac{R}{hR} = \frac{1}{h};$$

les conditions

$$0 < x < DOA$$

se traduisent alors par

$$1 > \cos x > \frac{1}{h},$$

ou

$$1 > \frac{3k-h+2}{h-k} > \frac{1}{h}.$$

Considérons d'abord l'inégalité

$$1 > \frac{3k-h+2}{h-k}.$$

Faisons passer tous les termes dans le premier membre et réduisons au même dénominateur; elle s'écrit

$$\frac{2(h-1-2k)}{h-k} > 0;$$

la fraction du premier membre sera positive en même temps que le produit

$$(h-k)\left[\frac{h-1}{2} - k\right];$$

ce produit est un trinome du second degré en k, admettant pour racines h et $\frac{h-1}{2}$; son terme en k^2 est *positif*; il est donc positif, si k satisfait à l'une *ou* l'autre des conditions

$$k > h \qquad \text{ou} \qquad k < \frac{h-1}{2}.$$

Prenons la seconde inégalité; opérons de même; elle s'écrit

$$\frac{k(3h+1) - h(h-1)}{h(h-k)} > 0$$

ou bien

$$[k(3h+1) - h(h-1)](h-k) > 0,$$

en divisant par h qui est positif. Ce nouveau trinome a pour racines $\frac{h(h-1)}{3h+1}$ et h; son terme en k^2 est négatif; pour qu'il soit positif, il faut que k soit *compris* entre les racines; la plus petite est évidemment $\frac{h(h-1)}{3h+1}$; il faut donc que

$$\frac{h(h-1)}{3h+1} < k < h.$$

La condition *nécessaire* $k < h$ montre que dans le premier cas, il faut choisir la condition

$$k < \frac{h-1}{2};$$

cette dernière, supposée remplie, entraîne $k < h$; il ne reste donc finalement que les deux conditions

$$\frac{h(h-1)}{3h+1} < k < \frac{h-1}{2}. \qquad (3)$$

Pour qu'elles soient compatibles, il faut encore que

$$\frac{h(h-1)}{3h+1} < \frac{h-1}{2},$$

ou, en supprimant le facteur positif $h-1$, que

$$2h < 3h + 1,$$

condition évidemment remplie.

Sous les conditions (3), l'équation fournit pour x une valeur acceptable et une seule.

(LAVASTE, collège Chaptal, 1[er] Prix.)

[Ont résolu cette question : MM. Delpont; Plisson; de Mendiry; M. Oger; F. Pégorier; Przemarch, à Essacy (Hongrie); E. Sevin (2e accessit), collège Chaptal.]

PHYSIQUE

4355. — *Le courant produit par une pile de* 100 *éléments Bunsen passe dans un circuit extérieur dont la résistance est égale à* 10 *ohms. On demande quelle sera l'intensité du courant si l'on dispose les* 100 *éléments en* 4 *séries de* 25 *chacune, associées en batterie. Comment faudra-t-il disposer les éléments pour rendre maximum l'intensité du courant? — Force électromotrice d'un*

élément Bunsen : 1,9 *volt* ; *résistance intérieure de cet élément* : 0,1 *ohm*.

(*Bacc. lettres-sciences, Caen, juillet 1897.*)

1° Appelons x le nombre d'éléments formant chaque série, y le nombre de séries, R la résistance du circuit extérieur r et e la résistance et la force électromotrice de chaque élément. La force électromotrice totale est xe, la résistance intérieure totale, $\frac{xr}{y}$. L'intensité du courant s'obtient en appliquant la formule d'Ohm :

$$I = \frac{xe}{\frac{xr}{y} + R}. \qquad (1)$$

En remplaçant les lettres par leur valeur, il vient

$$I = \frac{25 \times 1,9}{\frac{25 \times 0,1}{4} + 10} = 4^{amp},47.$$

2° La relation (1) peut se mettre sous la forme

$$I = \frac{e}{\frac{r}{y} + \frac{R}{x}}.$$

Pour que I soit maximum, il faut que le dénominateur soit minimum. Or ce dénominateur est formé de deux termes dont le produit est constant : $\frac{Rr}{xy} = \frac{Rr}{n}$, n désignant le nombre total des éléments ; il sera minimum quand les deux termes seront égaux, c'est-à-dire quand on aura

$$\frac{r}{y} = \frac{R}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{R}{r} = \frac{x}{y}. \qquad (2)$$

En remplaçant dans la relation (2), R par 10 et r par 0,1, on a

$$\frac{x}{y} = \frac{10}{0,1} = 100,$$

ou

$$x = 100\,y.$$

Comme $xy = 100$, $x = 100$, et $y = 1$.

Ainsi, il faut disposer les 100 éléments en *une seule série* pour rendre maxima l'intensité du courant. Cette intensité a alors pour valeur

$$I = \frac{100 \times 1,9}{100 \times 0,1 + 10} = 9^{amp},5.$$

(E. LE MAIGRE.)

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil ; Bayor ; A. Bertrand ; F. Beynas ; G. Bonnel ; J. Bruyas ; F. Chuberre ; Coupat ; J. Delpont ; E. Dumas ; Dupuis ; L. Florentin ; C. Herrmann ; Jeannel ; Jouanneau ; A. Jupeau ; Lescure ; F. Leulliot ; Limongelli ; M. Elém. Alais ; E. Madet ; P. Marill ; D. St-Martin ; Maubenche ; A. Mirc ; P. Le Moingt ; M. Oger ; J. Pillard ; Raynaud ; Reboul ; Remondet ; J. Reynaud ; Robin ; P. de Sabbathier ; Sambucy ; E. Sevin ; G. Tastet ; G. Vente ; J. E. Villemagne.]

CONCOURS DE 1898 (*Suite*)

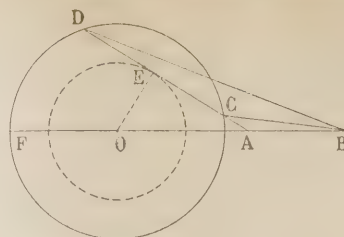
ÉCOLE NAVALE

Arithmétique et Algèbre.

I. — Une série à termes positifs est convergente lorsque, à partir d'un certain rang, l'une des quantités $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\sqrt[n]{u_n}$ reste plus petite qu'un nombre k plus petit que 1. — Application de ces théorèmes à l'étude de la convergence des séries.

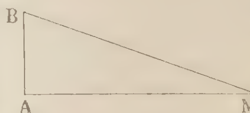
II. — **4373**. On donne une circonférence O, de rayon OF = R, et deux points A et B situés sur un même diamètre,

$$OA = a, \qquad OB = b.$$



On demande de déterminer le rayon $OE = x$ d'une circonférence, concentrique et intérieure à la précédente, telle que si l'on mène du point A une tangente à cette circonférence, la surface du triangle ayant pour sommet le point B et pour base la corde CD interceptée par la circonférence extérieure, augmentée du carré circonscrit à la circonférence intérieure, soit égale à un carré donné k^2. — Discussion. — Vérifier la valeur trouvée pour le maximum de k^2 en déterminant ce maximum par la dérivée.

III. — **4374**. Pour obtenir les distances horizontales de points tels que M à un point A, un observateur mesure les angles AMB sous lesquels est aperçue une règle verticale AB de $4^m,50$. L'instrument de mesure donne les angles à une minute près ; on demande jusqu'à quelle distance on pourra compter sur une approximation de 1 mètre.



(*1er juin, de 7 h. à 10 h. 1/2.*)

Géométrie cotée.

4375. — Dans le plan horizontal de cote zéro on donne une droite D et un point A sur cette droite.

Mener par la droite D deux demi-plans rectangulaires P et P', au-dessus du plan horizontal, dont l'un fasse avec ce plan un angle de 30°.

Tracer, sur le plan horizontal et sur le plan vertical perpendiculaire à D, le contour apparent d'un cône solide droit à base circulaire donné ayant son sommet en A et tangent aux deux demi-plans P et P'.

Le cône droit a une hauteur égale à 80^{mm} et un demi-angle au sommet de 30°.

On commencera, pour résoudre la question, par mener par A une droite faisant avec chacun des deux demi-plans un angle de 30°.

(*2 juin, de 1 h. à 3 h. 1/2.*)

Calcul trigonométrique.

4376. — Calculer l'arc x donné par la formule

$$x = (58'\ 12'',3)[\sin a \cos b - \cos a \sin b \cos C].$$

$a = -39°\ 27'\ 5'',2$, $\qquad b = +23°\ 18'\ 54'',6$, $\qquad C = +314°\ 57'\ 48''$.

Pour obtenir le logarithme du facteur entre crochets, on calculera les valeurs numériques de ses deux termes, d'où l'on déduira celle du facteur lui-même.

Géométrie et Géométrie analytique (*).

I. — Mener d'un point donné A une circonférence tangente à deux circonférences données O et O'. On supposera les deux circonférences extérieures. — Nombre des solutions. Discussion.

Considérer les deux circonférences Ω et Ω' passant par A, tangentes à O et O', et dont les contacts sont d'espèces différentes. Démontrer que, lorsque le point A se meut sur l'une des tangentes extérieures à O et O', le lieu du second point de rencontre de Ω et Ω' est une circonférence tangente à O et O'.

II. — Dans une circonférence on considère un diamètre et une corde parallèles. Démontrer que le paramètre de la parabole circonscrite au trapèze formé par ces deux droites est égal à la demi-distance de ces droites. Solution analytique ou géométrique.

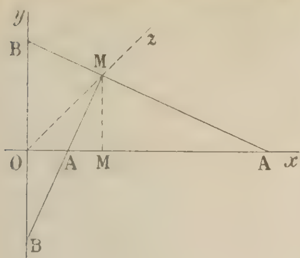
III. — Oxy sont deux axes rectangulaires. D'un point M pris sur la bissectrice de l'angle xOy (OM' = M'M = a), on mène deux droites rectangulaires variables qui coupent les axes respectivement aux points A, B et A', B'. Soit m le coefficient angulaire de l'une d'elles qu'on prendra comme paramètre variable.

On considère les deux paraboles dont l'une est circonscrite au triangle

---

(*) Les questions de géométrie analytique sont traitées dans la *Revue de Mathématiques spéciales*, n° de juillet 1898.

MAA' et a son axe parallèle à Oy, dont l'autre est circonscrite au triangle MBB' et a son axe parallèle à Ox.



a) Démontrer que ces deux paraboles sont égales et que leur paramètre commun est indépendant de m.

b) Lieu du point de rencontre des axes ; lieu du point de rencontre des tangentes aux sommets ; lieu des sommets de ces deux paraboles.

c) Lieu des points de rencontre de ces deux paraboles.

Pour simplifier les calculs, on mettra en évidence dans les équations des paraboles le coefficient $\mu = \frac{1 - m^2}{2m}$.

Dans la question III, les parties *a*) et *b*) sont susceptibles d'une démonstration géométrique en appliquant la question II et en se servant des propriétés du cercle des neuf points du triangle ABB'.

(*3 juin, de 7 h. à 10 h. 1/2.*)

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

Mathématiques.

I. — **4377**. Déterminer les deux bases d'un trapèze rectangle, connaissant sa hauteur h, sa surface $\frac{1}{2}hm$ et le produit k^2 de ses deux diagonales. — Discuter.

II. — **4378**. On donne deux droites de l'espace, AX et BY, orthogonales entre elles et ayant AB pour perpendiculaire commune. On prend sur AX une longueur variable AM et sur BY une longueur BN égale à AM.

1° Démontrer que la sphère qui a MN pour diamètre passe par les points A et B.

2° Trouver le lieu du centre de cette sphère.

3° Démontrer que le plan tangent en A à cette sphère passe toujours par une certaine droite fixe.

4° Démontrer que la droite MN reste parallèle à un certain plan fixe.

(*2 juin, de 7 h. 1/2 à 10 h. 1/2.*)

Calcul logarithmique.

Dans un triangle, on donne

$b = 2533$, $c = 3048$ et $A = 53°48'20''$.

Calculer B, C et a.

(*2 juin, de 1 h. 1/2 à 2 h. 1/2.*)

Épure.

4379. — *Données*. — 1° Un tétraèdre SMNP dont les faces MNP et SMN sont des triangles équilatéraux ; la première est dans le plan horizontal. MN égal à 220mm est parallèle au bord inférieur de la feuille et à une distance de ce bord égale à 50mm. La pente de la face SMN est $\frac{1}{1}$.

Le tétraèdre est au-dessus du plan horizontal et se projette au-dessus de MN.

2° Un hémisphère de rayon égal à 70mm, reposant par sa base sur le plan horizontal et au-dessus de ce plan. Le centre de cet hémisphère est situé sur la perpendiculaire élevée au milieu de MN, au-dessus et à 90mm de MN.

Représenter la projection horizontale de la portion supposée opaque de l'hémisphère intérieure au tétraèdre. — Écrire à l'encre rouge les cotes exprimées en millimètres des sommets utiles des courbes d'intersection. — Représenter en traits noirs et fins les lignes de niveau de ce solide déterminées par des plans équidistants de 10mm, à partir du plan horizontal. — Construire les tangentes aux intersections des deux solides aux points qui ont pour cote 50mm, puis celles qui se projettent perpendiculairement à MN.

(*3 juin, de 7 h. 1/2 à 10 h. 1/2.*)

BACCALAURÉATS

SESSION D'AVRIL 1898

Lettres-mathématiques (*Fin*).

LILLE

I. — *1er sujet*. — Translation d'une figure plane. Composition des translations. Réduction du mouvement le plus général d'une figure plane à une translation ou à une rotation.

I. — *2e sujet*. — On donne les deux foyers F, F' d'une ellipse et la longueur $2a$ de son grand axe. — Construire et discuter les points d'intersection de la courbe avec une droite donnée D.

I. — *3e sujet*. — Polyèdres homothétiques. Rapport des volumes de deux polyèdres semblables.

II. — On donne deux droites parallèles et un point A situé en dehors de ces deux droites. On demande de placer entre ces deux droites une perpendiculaire commune qui soit vue du point A sous un angle donné α.

I. — *1er sujet*. — Microscope composé.

I. — *2e sujet*. — Lunette astronomique.

I. — *3e sujet*. — Télescope de Newton.

II. — **4380**. Deux cubes ayant, l'un 10cm de côté, l'autre 1cm de côté, sont suspendus sous les plateaux d'une balance ; celle-ci est en équilibre quand les deux cubes sont placés dans le vide.

On met sur le cube le plus gros une surcharge de 1gr et on plonge les deux cubes dans une masse d'air à une pression x et à une température de 15° C. On demande la valeur de x pour laquelle l'équilibre est rétabli.

Coefficient de dilatation de l'air, $\alpha = \frac{1}{273}$;

Poids du litre d'air dans les conditions normales, $p = 1^{gr},3$.

MARSEILLE

I. — Variations de $\cos x$ avec x.

II. — Maximum et minimum de l'expression

$$a \cos^2 x + 2b \cos x \sin x + c \sin^2 x,$$

où a, b, c sont des constantes.

I. — **4381**. Étant donné un photomètre et deux sources lumineuses, A et B, situées à la même distance de l'écran du photomètre, on a interposé entre l'une d'elles, B, et l'écran une lentille divergente dont l'axe optique se confond avec la droite qui joint la source à la région observée de l'écran. De cette manière, l'une des moitiés de l'écran est éclairée directement par A et l'autre par le faisceau issu de B qui a traversé la lentille. Cette dernière a une distance focale de 25cm et à 50cm de la source. Dans ces conditions on constate l'égalité d'éclairement des deux moitiés de l'écran. On demande quel est le rapport des intensités des deux sources.

II. — *1er sujet*. — Densité des gaz (procédé de Regnault).

II. — *2e sujet*. — Fusion et solidification, chaleur de fusion.

II. — *3e sujet*. — Ébullition, chaleur de vaporisation.

MONTPELLIER

4382. — Circonscrire à une circonférence donnée un trapèze isocèle équivalent à un carré donné. Calculer les côtés du trapèze. Dans quel cas le problème est-il possible ?

I. — *1er sujet*. — Condensateurs électriques. — Théorie.

I. — *2e sujet*. — Lois des courants. — Unités pratiques d'intensité, de résistance et de force électromotrice.

I. — *3e sujet*. — Principes des machines magnéto et dynamo-électriques.

II. — Un flacon pèse : plein d'air 700gr,30 ; plein d'un certain gaz, 706gr,00 ; plein d'eau, 3kg,700. Calculer la densité de ce gaz par rapport à l'air.

On admettra que le litre d'air pèse 1gr,29 et le litre d'eau 1kg.

NANCY

I. — *1er sujet.* — Résolution de l'équation binome

$$Ax^p + Bx^q = 0,$$

où p et q désignent des entiers positifs ou nuls et A et B des nombres quelconques donnés.

Exemple : $$\sqrt{2}x^{11} + \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)x^6 = 0.$$

I. — *2e sujet.* — Evaluer l'annuité x qu'il faut verser à la fin de chaque année, pendant n années, pour produire un capital donné A, le taux de l'argent étant égal à i.

Exemple : $n = 5$; A = 8000fr ; $i = 2\ 3/4\ 0/0$.

I. — *3e sujet.* — Résolution des trois équations du premier degré :

$$ax + by = d, \qquad a'x + b'y = d', \qquad b''y + c''z = d'',$$

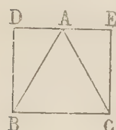
où $a, a', b, b', b'', c'', d, d', d''$ désignent des nombres donnés tels que $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$.

II. — Couper une sphère donnée par un plan de telle sorte que le segment sphérique à une base déterminé par ce plan soit équivalent au cône de même base qui a pour sommet le centre de la sphère.

I. — *1er sujet.* — Unités pratiques d'intensité, de résistance et de force électromotrice.

I. — *2e sujet.* — Principe des machines magnéto et dynamo-électriques.

I. — *3e sujet.* — Solénoïdes. Aimantation par les courants.



II. — Un prisme triangulaire isocèle ABC, en verre d'indice n, est accolé à deux prismes triangulaires BDA, CAE, en verre d'indice n', de telle sorte que l'ensemble constitue un parallélépipède rectangle BDEC.

Etudier la marche d'un rayon de lumière simple ou blanche qui tombe sur ce système normalement à la face BD.

POITIERS

I. — *1er sujet.* — Trièdres supplémentaires. — Définition. — Relations entre les éléments de deux trièdres supplémentaires.

I. — *2e sujet.* — Etant donnée une sphère solide, trouver son rayon par une construction plane.

I. — *3e sujet.* — Mener à la parabole une tangente par un point donné. — Dans quel cas obtient-on deux tangentes rectangulaires ?

II. — **4383**. Calculer le rapport m^2 entre la surface de la sphère circonscrite et la surface de la sphère inscrite à un cône dont l'apothème est a et le rayon de base b. — Si l'on pose $\frac{a}{b} = x$, quelle valeur doit prendre x pour que m soit minimum ?

I. — *1er sujet.* — Microscope composé. — Champ. — Grossissement.

I. — *2e sujet.* — Lunette astronomique. — Mise au point. — Champ. — Grossissement.

I. — *3e sujet.* — Lunette de Galilée. — Mise au point. — Champ. — Grossissement.

II. — On fait arriver 2kg,5 de vapeur d'eau saturante à 120° dans une cuve à 0° contenant 50kg d'un mélange de glace et d'eau. On constate que la température s'y élève finalement à 54°. Quel poids de glace y avait-il à l'origine ?

RENNES

I. — *1er sujet.* — Faire la discussion des signes que peut prendre le trinome à coefficients réels $ax^2 + bx + c$ lorsqu'on fait varier x de $-\infty$ à $+\infty$. Reconnaître si un nombre donné α est ou n'est pas compris entre les racines supposées réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

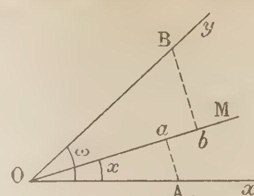
I. — *2e sujet.* — Résolution trigonométrique de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

I. — *3e sujet.* — Démontrer que les puissances d'exposant positif et entier d'un nombre plus grand que 1 vont en croissant en même temps que l'exposant et peuvent dépasser toute limite assignée d'avance.

Limite de $\sqrt[m]{a}$ lorsque m devient infini, a étant un nombre positif donné.

II. — **4384**. Etant donné un angle $x\mathrm{O}y = \omega$, on prend sur Ox une longueur $\mathrm{OA} = a$ et sur Oy une longueur $\mathrm{OB} = b$. Une droite mobile OM tourne autour du point O et dans chacune de ses positions on projette sur elle les longueurs OA et OB en Oa et Ob. Etudier la variation de la somme Oa + Ob.



I. — *1er sujet.* — Relations entre les aimants et les courants électriques. Procédés d'aimantation.

I — *2e sujet.* — Hygromètre de condensation. Usages.

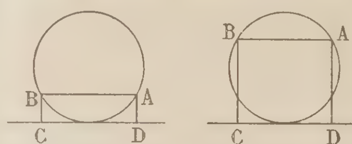
I. — *3e sujet.* — Comment mesure-t-on avec un thermomètre à poids une température et le coefficient de dilatation d'un corps solide?

II. — **4385**. D'un point M on laisse tomber un corps pesant suivant la verticale MN. Quand il a parcouru un espace $\mathrm{MN} = l$, on laisse tomber du point M un deuxième corps pesant. Au bout de combien de temps les deux mobiles se trouveront-ils l'un de l'autre à une distance donnée a ?

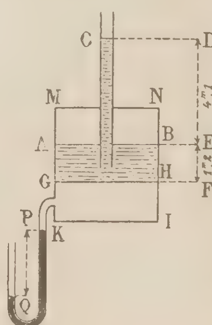
Application : $l = 1^m$, $a = 10^m$, accélération de la pesanteur $g = 9^m,81$.

TOULOUSE

Etant données une circonférence de rayon R et une tangente CD à cette circonférence, on demande de mener une corde AB parallèle à la tangente et telle que si l'on abaisse de ses extrémités A et B les perpendiculaires BC et AD sur la tangente, les diagonales du rectangle ABCD soient égales à une même longueur donnée l. — Discussion.



I. — **4386**. On donne un cylindre à double fond en tôle; il est hermétiquement clos; on suppose seulement que la paroi supérieure MN est traversée par un tube qui y est solidement encastré et qui s'ouvre dans l'atmosphère. De l'eau maintenue à 4° remplit la partie supérieure du cylindre depuis GH jusqu'en AB et le tube jusqu'en C. On a DE = 4m,1, EF = 1m,2.



La partie inférieure du cylindre est remplie d'air dont la pression est mesurée avec un manomètre à mercure. La dénivellation PQ entre les deux branches, mesurée à 20° sur une règle d'argent étalonnée à 0° (le coefficient de dilatation de l'argent est 0,00002) est de 30cm; la densité du mercure est 13,6 à 0° et son coefficient de dilatation cubique est 0,00018. On demande la résultante des pressions exercées sur un décimètre carré du fond GH.

II. — *1er sujet.* — Définition de l'inclinaison et de la déclinaison.

II. — *2e sujet.* — Galvanomètre. (On suppose que la bobine est composée d'un seul fil et qu'il n'y a qu'une aiguille).

II. — *3e sujet.* — Unités fondamentales pour les mesures des courants ; énoncé des lois d'Ohm.

QUESTIONS PROPOSÉES

4387. — On considère sur un cercle S deux points fixes A et B, et tous les couples de points C et D conjugués harmoniques par rapport à A et B sur le cercle S.

1° Trouver le lieu du point de rencontre des tangentes en C et D au cercle S ;

2° Trouver le lieu du point de rencontre des droites AC et BD.

(H. Michel, lycée de Douai.)

4388. — On considère toutes les paraboles passant par un point fixe A et admettant pour sommet un autre point fixe O.

1° Lieu du point de rencontre de la tangente en A à l'une quelconque de ces paraboles avec l'axe et la tangente au sommet.

2° Lieu des foyers de ces paraboles. (Ce lieu est une cissoïde.)

(G. Bernard, lycée Saint-Louis.)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

22e Année. — N° 19. JOURNAL Paris, le 1er Juillet 1898.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

MAXIMUM D'UN PRODUIT DE FACTEURS POSITIFS DONT LA SOMME EST CONSTANTE

par M. **Cotton**, professeur au lycée de Nice.

Lemme. — *Si a est un nombre positif, et α un nombre algébrique tel que $a+\alpha$ soit positif $[a > -\alpha]$, on a*

$$(a+\alpha)^n(a-n\alpha) < a^{n+1}. \qquad (1)$$

Pour $n=1$, on trouve

$$(a+\alpha)(a-\alpha) < a^2,$$

inégalité évidente.

Montrons que, si l'inégalité est vraie pour $n=p$, elle subsiste pour $n=p+1$. En effet, par hypothèse,

$$(a+\alpha)^p(a-p\alpha) < a^{p+1}.$$

Multiplions les deux membres de cette inégalité par a; il vient

$$(a+\alpha)^p[a+\alpha-(p+1)\alpha](a+\alpha-\alpha) < a^{p+2},$$

ou bien

$$(a+\alpha)^p[(a+\alpha)^2-(p+1)\alpha(a+\alpha)-\alpha(a+\alpha)+(p+1)\alpha^2] < a^{p+2};$$

donc, *a fortiori*, en supprimant dans la parenthèse le terme positif $(p+1)\alpha^2$,

$$(a+\alpha)^p[(a+\alpha)^2-(p+2)\alpha(a+\alpha)] < a^{p+2},$$

ou bien $\quad (a+\alpha)^{p+1}[a-(p+1)\alpha] < a^{p+2}.$

Théorème I. — *x et y étant deux nombres positifs variables tels que*

$$x+ny=(n+1)a,$$

le maximum du produit xy^n a lieu pour $x=y$.

En effet, posons

$$y=a+\alpha, \qquad x=a-n\alpha;$$

on en conclut $\quad xy^n=(a+\alpha)^n(a-n\alpha);$

par suite, en vertu du lemme,

$$xy^n < a^{n+1}.$$

Si α est nul, on a

$$x=y=a, \qquad xy^n=a^{n+1}.$$

Le maximum de xy^n est donc a^{n+1}.

Corollaire. — On a toujours $xy^n < \left(\dfrac{x+ny}{n+1}\right)^{n+1}$.

Théorème II. — *Le maximum d'un produit de facteurs positifs dont la somme est constante a lieu lorsque ces facteurs sont égaux.*

Considérons d'abord trois facteurs x, y, z, tels que

$$x+y+z=3a.$$

D'après le corollaire précédent, on peut écrire

$$yz < \left(\frac{y+z}{2}\right)^2,$$

et $\quad x\left(\dfrac{y+z}{2}\right)^2 < \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3.$

Multipliant membre à membre ces inégalités, il vient

$$xyz < \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3.$$

D'ailleurs cette inégalité devient une égalité pour

$$x=y=z=a.$$

La proposition est donc démontrée.

On passerait d'une façon analogue au cas de quatre facteurs, etc.

Remarque. — La démonstration de M. Cotton repose sur l'inégalité suivante, indiquée en corollaire :

x et y étant deux nombres positifs quelconques et n un entier positif, on a

$$xy^n < \left(\frac{x+ny}{n+1}\right)^{n+1}.$$

On peut l'établir de la manière suivante.

Posons $\dfrac{x}{y}=\lambda$; λ sera positif ; l'inégalité à établir revient à

$$\lambda < \left(\frac{\lambda+n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1+\lambda-1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{\lambda-1}{n+1}\right)^{n+1},$$

ou bien $\quad 1+(n+1)\dfrac{\lambda-1}{n+1} < \left(1+\dfrac{\lambda-1}{n+1}\right)^{n+1}.$

Comme $\dfrac{\lambda-1}{n+1}$ est plus grand que -1, cette inégalité est vraie (Notes de MM. V. Hioux et Goulard).

(E. REBUFFEL, professeur au lycée de Nice.)

ÉCOLE NORMALE PRIMAIRE SUPÉRIEURE DE FONTENAY-AUX-ROSES

(1897)

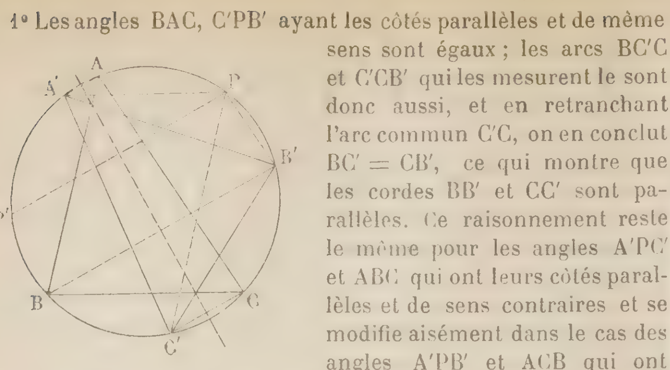
4176. — *Par un point P pris sur la circonférence du cercle circonscrit à un triangle ABC, on mène des parallèles aux côtés BC, CA, AB de ce triangle. Ces droites rencontrent la circonférence aux points A′, B′, C′. Comparer le triangle A′B′C′ au triangle ABC.*

Les triangles ABC et A′B′C′ étant supposés connus, peut-on retrouver le point P?

Peut-on supposer le triangle ABC déduit du triangle A′B′C′ par le même procédé, à l'aide d'un point P′? Quelle relation y a-t-il entre P et P′?

Peut-il arriver que les triangles ABC et A′B′C′ aient un ou deux sommets communs? Dans ce cas, où doivent se trouver les points P et P′?

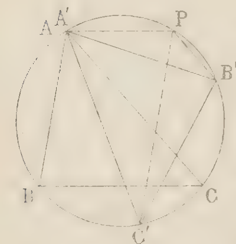
1° Les angles BAC, C′PB′ ayant les côtés parallèles et de même sens sont égaux ; les arcs BC′C et C′CB′ qui les mesurent le sont donc aussi, et en retranchant l'arc commun C′C, on en conclut $BC' = CB'$, ce qui montre que les cordes BB′ et CC′ sont parallèles. Ce raisonnement reste le même pour les angles A′PC′ et ABC qui ont leurs côtés parallèles et de sens contraires et se modifie aisément dans le cas des angles A′PB′ et ACB qui ont deux côtés parallèles et de même sens et deux autres parallèles et de sens contraires. On en conclut le parallélisme des trois cordes AA′, BB′, CC′. Il en résulte que les triangles ABC, A′B′C′ sont égaux comme symétriques l'un de l'autre par rapport au diamètre passant par les milieux des trois cordes parallèles AA′, BB′, CC′.



2° Pour retrouver le point P correspondant aux deux triangles égaux ABC, A′B′C′, il suffit de mener par le sommet A′ par exemple une parallèle à BC limitée à la circonférence du cercle circonscrit. Dans ces conditions, on a $\overset{\frown}{PC} = \overset{\frown}{A'B}$; or $\overset{\frown}{A'B} = \overset{\frown}{AB'}$; donc $\overset{\frown}{PC} = \overset{\frown}{AB'}$, ou, en retranchant $\overset{\frown}{PB'}$, $\overset{\frown}{B'C} = \overset{\frown}{AP}$, ce qui montre que PB′ est aussi parallèle à AC. On verrait de même que PC′ est également parallèle à AB.

3° Les deux triangles ABC, A′B′C′ étant symétriques l'un de l'autre, on peut évidemment déduire le premier du second au moyen d'un point P′ symétrique de P par rapport à l'axe de symétrie des deux triangles.

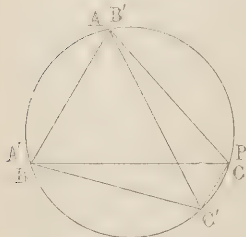
4° Pour que le sommet A′ du triangle A′B′C′ se confonde avec un des sommets du triangle quelconque ABC, il faut et il suffit que la parallèle PA′ au côté BC passe par A ou coïncide avec BC.



Dans le premier cas, le point P est à l'extrémité de la corde parallèle à BC issue de A et détermine le triangle A′B′C′ ayant le sommet A commun avec ABC.

Dans le second cas, P vient en B ou C. Supposons par exemple P confondu avec C; on en déduit alors le triangle A′B′C′ ayant deux sommets communs avec ABC.

Ainsi lorsque les triangles n'ont qu'un seul sommet commun, le point P se trouve à l'extrémité d'une des trois cordes parallèles aux côtés AB, BC, CA, issues respectivement des sommets opposés. Lorsque ces triangles ont deux sommets communs, P se confond avec l'un des sommets A, B, C.



Ce que nous venons de dire pour le point P s'applique aussi au point P′ en remplaçant simplement A, B, C par A′, B′, C′.

[Ont résolu les quatre parties : MM. A. Bouzy; L. Cabrol; L. Debrun; L. Delavergnas; G. Hiernaux; A. Maître; A. Mirc.]
[Ont résolu les trois premières parties seulement : Mlle C. David; MM. P. Barroué; J. Bordas; H. Crozemarie; L. Curt; Feintuch; P. Gervaiseau; H. Janois; J. Ménéchal; Le Hénaff; M. Oger; J. Rigal.]

4177. — *Prouver que tout nombre entier ou décimal est compris entre $10^n u$ et $10^{n-1}u$, en désignant par u une unité de l'ordre du chiffre qui occupe le n^e rang, en comptant de gauche à droite, à partir du premier chiffre significatif. Par exemple, si le chiffre de rang n représente des millièmes, le nombre considéré est compris entre $\frac{10^n}{1000}$ et $\frac{10^{n-1}}{1000}$.*

Soient N un nombre quelconque entier ou décimal. En divisant N par u, valeur relative de l'unité de l'ordre du n^e chiffre dans N, le quotient représente un nombre composé de n chiffres à la partie entière. On peut donc écrire

$$10^{n-1} \leqslant \frac{N}{u} < 10^n,$$

et, par suite, en multipliant par u,

$$10^{n-1}u \leqslant N < 10^n u. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Exemples. — Si $N = 340$, en prenant $n = 1$, on a $u = 100$, et $100 < 340 < 1000$.

Si $N = 2457{,}2153$, en prenant $n = 7$, on a $u = \frac{1}{10^3}$, et

$$10^3 < 2457{,}2153 < 10^4.$$

(L. DELAVERGNAS, à Limoges.)

[Ont résolu la même question : MM. J. Bordas; L. Cabrol; Crozemarie; L. Curt; P. Dégeilh; E. Foucart; E. Fournon; P. Gervaiseau; Gourdet; G. Hiernaux; H. Janois; Louvet; A. Maître; A. Mirc; Niel; M. Oger; J. Rigal; P. Tribier; P. Vincent.]

4178. — *Trouver le plus grand commun diviseur des nombres*

$$2520 \quad \text{et} \quad 119 \times 1816 \times 549$$

sans effectuer le produit indiqué et sans faire aucune décomposition en facteurs premiers.

Cherchons par la méthode des divisions successives, le plus grand commun diviseur entre 2520 et chacun des trois nombres 119, 1816, 549. On obtient ainsi les trois nombres consécutifs 7, 8, 9. Ces nombres étant premiers entre eux, leur produit divise 2520; donc $7 \times 8 \times 9 = 504$ est le plus grand commun diviseur entre 2520 et le produit $119 \times 1816 \times 549$.

(L. CURT, école normale de Bourg.)

Le raisonnement précédent suppose implicitement la proposition suivante: *Soient d, d′, d″ les p. g. c. d. entre un entier m et d'autres entiers a, b, c; si ces nombres d, d′, d″ sont premiers entre eux, leur produit dd′d″ est le plus grand commun diviseur entre m et le produit abc.*

En effet, m étant divisible par les nombres d, d', d'' premiers entre eux, ce nombre m est aussi divisible par leur produit $p = dd'd''$.

d étant le p. g. c. d. de m et a, les entiers $\frac{m}{d}$ et $\frac{a}{d}$ sont premiers entre eux; *a fortiori* en est-il ainsi de $\frac{m}{dd'd''} = \frac{m}{p}$ et $\frac{a}{d}$. On montrerait de même que $\frac{m}{p}$ est premier avec $\frac{b}{d'}$ et $\frac{c}{d''}$; il est donc premier avec le produit $\frac{a}{d} \cdot \frac{b}{d'} \cdot \frac{c}{d''} = \frac{abc}{p}$. Par suite, en divisant m et abc par p, on obtient des quotients premiers entre eux; p est donc bien le p. g. c. d. à m et abc.

[Ont résolu la même question : Mlle C. David; MM. E. Ardin-Delteil; J. Bordas; Crozemarie; M. Dacquinis; L. Delavergnas; A. Desplat; Donnadieu; E. Foucart; E. Fournon; Gourdet; Gourdin; H. Guillaud; G. Hiernaux; H. Janois; Le Hénaff; Louvet; A. Maître; Méhu; J. Ménéchal; Mérigeaud; A. Mirc; Niel; A. Noyelle; M. Oger; P. Plisson; Ch. Szabo; H. Valdenaire; M. Vial; L. Vignes; J. Wittner.]

ARITHMÉTIQUE

3911. — *On sait que, si le chiffre des unités d'un carré est 5, le chiffre des dizaines est 2; démontrer que le chiffre des centaines est 0, 2 ou 6.*

On sait que, si le chiffre des unités d'un carré est 1 ou 9, le chiffre des dizaines est pair ; démontrer que le chiffre des centaines est de même parité que la moitié du chiffre des dizaines.

1° Lorsqu'un nombre entier est terminé par un des chiffres

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9, \qquad (1)$$

son carré est terminé par

$$0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 6,\ 5,\ 6,\ 9,\ 4,\ 1. \qquad (2)$$

Si donc le chiffre qui termine le carré est 5, le tableau précédent montre que le nombre lui-même est terminé par 5 ; il est donc de la forme $10m + 5$; par suite son carré s'écrit

$$100m^2 + 100m + 25 ;$$

ce nombre est évidemment terminé par 25, et le chiffre de ses dizaines est 2.

Le nombre de ses centaines est $m^2 + m$; le chiffre des centaines est donc celui qui termine la somme $m^2 + m$, c'est-à-dire celui qui termine la somme de leurs derniers chiffres à droite. On obtient ces sommes en ajoutant entre eux les nombres de même rang des suites (1) et (2) ; cette opération ne fournit pas d'autres derniers chiffres que 0, 2, 6.

2° Lorsque le chiffre des unités du carré est 1 ou 9, la comparaison des suites (1) et (2) montre que le nombre est terminé par 1, 3, 7, 9 ; il est donc de l'une des formes

$$10m + 1, \qquad 10m + 3, \qquad 10m + 7, \qquad 10m + 9. \qquad (3)$$

Son carré est alors de l'une des formes

$$100m^2 + 20m + 1,$$
$$100m^2 + 60m + 9,$$
$$100m^2 + 140m + 9 = 100(m^2 + m) + 40m + 9,$$
$$100m^2 + 180m + 1 = 100(m^2 + m) + 80m + 9.$$

Pour démontrer la proposition en question, nous allons chercher le chiffre des dizaines et le nombre des centaines de chacun de ces nombres. Il suffira de prouver que le *nombre* des centaines est de même parité que la moitié du chiffre des dizaines. Nous ne ferons le raisonnement que pour le premier et le troisième ; il se ferait d'une façon analogue pour les autres.

Prenons donc $100m^2 + 20m + 1$ par exemple. Soit k le dernier chiffre de m, de telle sorte que

$$m = 10q + k ;$$

on en conclut $\quad 2m = 2q \times 10 + 2k,$

et $$100m^2 + 20m + 1 = 100m^2 + 2q \times 100 + 2k \times 10 + 1$$
$$= (100m^2 + 2q) + 2k \times 10 + 9.$$

Si k est égal à 1, 2, 3, 4, le nombre $2k$ est inférieur à 10 ; le chiffre des dizaines est égal à $2k$. Le nombre des centaines est $m^2 + 2q$, de même parité que m, c'est-à-dire que k ; la proposition est donc démontrée.

Si k est égal à 5, 6, 7, 8, 9, le nombre $2k$ est égal ou supérieur à 10, mais plus petit que 20 ; $2k \times 10$ renferme alors une centaine ; le chiffre des dizaines est $2k - 10 = 2(k - 5)$, nombre pair. Le nombre des centaines est $m^2 + 2q + 1$, nombre de parité différente de m, c'est-à-dire de k, mais $k - 5$ est aussi de parité différente de k ; donc $m^2 + 2q + 1$ et $k - 5$ sont de même parité.

On raisonnerait d'une façon analogue sur $100m^2 + 60m + 9$.

Prenons maintenant le troisième nombre,

$$100(m^2 + m) + 40m + 9,$$

et remarquons de suite que $m^2 + m$ est un nombre pair. Soit encore k le chiffre des unités de m ;

$$m = 10q + k,$$

d'où $\quad 4m = 4q \times 10 + k,$

et $$100(m^2 + m) + 40m + 9 = 100(m^2 + m + 4q) + 4k \times 10 + 9.$$

Si k est égal à 1 ou à 2, $4k$ est plus petit que 10 ; c'est le chiffre des dizaines ; il est donc pair. Le nombre des centaines est $m^2 + m + 4q$, nombre pair, c'est-à-dire de même parité que $2k$, moitié de $4k$.

Si k est égal à 3 ou 4, le nombre $4k \times 10$ se compose d'une centaine et de $4k - 10 = 2(2k - 5)$ dizaines ; le nombre des centaines est $m^2 + m + 4q + 1$, nombre impair de même que $2k - 5$.

Si k est égal à 5, 6, 7, le nombre $4k \times 10$ se compose de deux centaines et de $4k - 20 = 2(2k - 10)$ dizaines ; le nombre total des centaines est $m^2 + m + 4q + 2$, nombre pair de même que $2k - 10$.

Enfin si k est égal à 8 ou à 9, le nombre $4k \times 10$ se compose de trois centaines et de $4k - 30 = 2(2k - 15)$ dizaines ; le nombre des centaines est $m^2 + m + 4q + 3$, nombre impair comme $2k - 15$.

La proposition est ainsi démontrée dans tous les cas.

4294. — *Trouver la somme des exposants des facteurs premiers qui figurent dans les diviseurs du nombre* $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma$.

Première solution. — On sait que tous les diviseurs de N, y compris l'unité et le nombre N lui-même, sont représentés par les termes du produit des trois sommes

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^\alpha,$$
$$1 + b + b^2 + \cdots + b^\beta,$$
$$1 + c + c^2 + \cdots + c^\gamma.$$

Cherchons d'abord la somme des exposants du nombre premier a. Une puissance quelconque a^p de a $(p < \alpha)$ figure dans tous les diviseurs de N qui contiennent les puissances de b et de c, combinées deux à deux ; l'exposant p se trouve ainsi répété autant de fois qu'il existe de diviseurs dans le nombre $b^\beta c^\gamma$, de sorte que la somme des exposants p du facteur a est

$$p(\beta + 1)(\gamma + 1).$$

En remplaçant p par ses diverses valeurs $1, 2, \ldots, \alpha$, on a pour la somme des exposants relatifs au facteur a,

$$(1 + 2 + \ldots \alpha)(\beta + 1)(\gamma + 1) = \frac{\alpha}{2}(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1).$$

On verrait de même que les sommes des exposants relatifs aux facteurs b et c sont respectivement

$$\frac{\beta}{2}(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1),$$
$$\frac{\gamma}{2}(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1).$$

La somme totale des exposants entrant dans les diviseurs de N est donc

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1).$$

Il convient de remarquer que cette somme ne comprend pas l'exposant 1 du diviseur 1 de N.

(L. GOURDET.)

Seconde solution. — En divisant N par la suite des diviseurs de N, on reproduit, comme on sait, ces mêmes diviseurs dans un ordre différent. Par suite la somme des exposants des diviseurs de N est la moitié de la somme des exposants du nombre N répété autant de fois qu'il existe de diviseurs dans N.

La somme des exposants dans N étant $\alpha + \beta + \gamma$, et le nombre des diviseurs, $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$, le nombre cherché est dès lors

$$\frac{1}{2}(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)(\alpha + \beta + \gamma).$$

(DE MENDIRY.)

[Ont résolu la même question : Une abonnée de Tournon ; MM. L. Cussenot, collège de Mirecourt ; L. Delavergnas, à Eymoutiers ; L. Magne, école primaire supérieure de Belvès ; Remondet, à Augisey ; Ribes, de St-Estève ; A. Thorin, à Tours.]

ALGÈBRE

4260. — *Résoudre l'équation*

$$(m+2a)\sqrt[n]{(a+x)^p}+(n-2a)\sqrt[n]{(a-x)^p}=mna\sqrt[2n]{(a^2-x^2)^p}.$$

L'équation n'étant évidemment pas satisfaite pour $x=-a$, divisons tous les termes par $\sqrt[n]{(a+x)^p}$; l'équation s'écrit

$$m+2a+(n-2a)\sqrt[n]{\frac{(a-x)^p}{(a+x)^p}}=mna\frac{\sqrt[2n]{(a^2-x^2)^p}}{\sqrt[n]{(a+x)^p}},$$

ou $$m+2a+(n-2a)\left(\sqrt[2n]{\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^p}\right)^2=mna\sqrt[2n]{\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^p}.$$

En posant

$$\sqrt[2n]{\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^p}=y,$$

y est déterminé par l'équation du second degré

$$(n-2a)y^2-mnay+m+2a=0,$$

dont les deux racines sont

$$y=\frac{mna\pm\sqrt{m^2n^2a^2-4(n-2a)(m+2a)}}{2(n-2a)}.$$

Connaissant y, on obtient x en résolvant l'équation

$$\sqrt[2n]{\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^p}=y;$$

elle exige évidemment que y soit positif, en supposant que tous les radicaux ont le signe positif.

Pour cela, élevons chaque membre à la puissance $2n$, il vient

$$\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^p=y^{2n}.$$

Extrayons maintenant la racine p^e de chaque membre; on obtient

$$\frac{a-x}{a+x}=\varepsilon\sqrt[p]{y^{2n}},$$

ε étant pris égal à ±1 ou $+1$ suivant que p est pair ou impair. On déduit facilement de là

$$x=\frac{a(1-\varepsilon\sqrt[p]{y^{2n}})}{1+\varepsilon\sqrt[p]{y^{2n}}}.$$

Pour que ces deux valeurs de x (réduites à une seule lorsque $\varepsilon=+1$) soient réelles et conviennent à la question, il faut et il suffit que y soit réel et positif, puisque la quantité placée sous chaque radical est toujours positive. La condition de réalité est remplie si l'on a

$$m^2n^2a^2-4(n-2a)(m+2a)\geqslant 0,$$

ou $$(m^2n^2+16)a^2-8(n-m)a-4mn\geqslant 0. \qquad (1)$$

Le trinome du premier membre s'annule pour deux valeurs réelles a' et a'' $(a'<a'')$ de a lorsque

$$16(n-m)^2+4mn(m^2n^2+16)\geqslant 0,$$

ou $$16(m+n)^2+4m^3n^3\geqslant 0.$$

Dans ce cas, la condition (1) n'est vérifiée que pour

$$a\leqslant a' \quad \text{ou} \quad a\geqslant a'';$$

dans le cas contraire, cette condition subsiste quel que soit a.

(M. REBEIX, lycée du Puy.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Ardin-Delteil, à Montpellier ; V. V. Cambureanu, lycée de Berlad ; L. Cussenot, collège de Mirecourt ; F. Pégorier, à Cette ; A. Smântânescu, à Jassy.]

GÉOMÉTRIE

4332. — *Considérons sur une droite quatre points* A, B, C, D ; *soient* I *le milieu de* AB, I' *le milieu de* CD ; *la condition nécessaire et suffisante pour que les points* C *et* D *soient conjugués harmoniques par rapport à* A *et* B *est*

$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=4\overline{II'}^2.$$

En déduire que, si x_1, x_2, x_3, x_4 *sont les abscisses des points* A, B, C, D *par rapport à une origine arbitraire* O *prise sur la droite, on a*

$$2(x_1x_2+x_3x_4)=(x_1+x_2)(x_3+x_4).$$

1° Prenons le sens AD comme sens positif. On sait que le milieu I de AB et les points C, D, conjugués harmoniques par rapport à A et B, sont liés par la relation

A I C B I' D

$$\overline{IB}^2=\overline{IC}.\overline{ID}. \qquad (1)$$

En tenant compte des identités

$$\overline{IC}+\overline{CI'}+\overline{I'I}=0 \qquad \text{et} \qquad \overline{ID}+\overline{DI'}+\overline{I'I}=0,$$

cette relation devient

$$\overline{IB}^2=(\overline{II'}-\overline{CI'})(\overline{II'}-\overline{DI'}),$$

ou, en observant que $\overline{IB}=\dfrac{\overline{AB}}{2}$ et $\overline{CI'}=-\overline{DI'}=\dfrac{\overline{CD}}{2}$,

$$\frac{\overline{AB}^2}{4}=\overline{II'}^2-\frac{\overline{CD}^2}{4},$$

ou finalement

$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=4\overline{II'}^2. \qquad (2)$$

Cette condition nécessaire est en même temps suffisante, car en remontant la suite des égalités en sens inverse, on voit aisément qu'elle entraîne la relation (1) qui exprime que la division ABCD est harmonique.

2° Pour une position quelconque de l'origine O, sur la droite ABCD, on peut écrire

$$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=x_2-x_1;$$

$$\overline{CD}=\overline{OD}-\overline{OC}=x_4-x_3;$$

$$\overline{II'}=\overline{OI'}-\overline{OI}=\frac{\overline{OC}+\overline{OD}}{2}-\frac{\overline{OA}+\overline{OB}}{2}=\frac{x_3+x_4-x_1-x_2}{2}.$$

En portant ces valeurs dans la relation établie plus haut, elle devient

$$(x_2-x_1)^2+(x_4-x_3)^2=(x_3+x_4-x_1-x_2)^2,$$

ce qui peut s'écrire

$$(x_2-x_1)^2-(x_1+x_2)^2+(x_4-x_3)^2-(x_3+x_4)^2=-2(x_1+x_2)(x_3+x_4),$$

ou, en simplifiant,

$$2(x_1x_2+x_3x_4)=(x_1+x_2)(x_3+x_4).$$

(J. SIRE, collège de Lure.)

REMARQUE. — Dans le cas où le point O se confond avec A par exemple, x_1 devient nul et la relation prend la forme bien connue

$$\frac{2}{x_2}=\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}.$$

[Ont résolu la même question : MM. A. Amblard ; E. Ardin-Delteil ; Bayor ; A. Bouzy ; J. Delpont ; Feintuch ; F. Ladevèze ; L. Magne ; H. Michel ; M. Rebeix ; P. Reboul ; A. Rozier ; V. R. T.]

TRIGONOMÉTRIE

4335. — *Dans tout triangle, on a*

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

Première solution. — D'après l'identité

$$2\sin x\sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y),$$

lorsque la somme $x+y$ est constante, le produit $\sin x . \sin y$ devient maximum en même temps que $\cos(x-y)$, c'est-à-dire pour $\cos(x-y)=1$, ou $x=y$, en supposant les arcs x et y dans le premier quadrant.

Cela posé, supposons l'angle C constant. La somme

$$\frac{A}{2}+\frac{B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$$

l'est également, de sorte que, d'après ce qui précède, le produit $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$ atteint sa plus grande valeur quand $\sin\frac{A}{2}=\sin\frac{B}{2}$.

Ainsi le premier membre de l'inégalité proposée prend une valeur plus grande lorsque deux des sinus sont égaux ; son maximum correspond donc à l'égalité des trois sinus ou à celle des angles correspondants :

$$A = B = C = 60^\circ,$$

condition d'ailleurs possible, puisque dans tout triangle la somme des angles vaut 180°.

On peut donc écrire

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \sin^3 30^\circ = \frac{1}{8}.$$

On vérifierait de même les inégalités

$$\sin A\sin B\sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8},$$

$$\cos A\cos B\cos C \leqslant \frac{1}{8}.$$

(L.-A. BLANC, à Clermont-Ferrand.)

Deuxième solution. — En remplaçant $\sin\frac{A}{2}$, $\sin\frac{B}{2}$, $\sin\frac{C}{2}$ par leurs valeurs connues en fonction des côtés, l'inégalité à démontrer devient

$$8(p-a)(p-b)(p-c) \leqslant abc, \qquad (1)$$

ou $$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leqslant abc.$$

Les trois facteurs du premier membre de cette inégalité sont positifs comme représentant chacun l'excès de la somme de deux côtés sur le troisième. Posons alors

$$b+c-a=\alpha, \qquad c+a-b=\beta, \qquad a+b-c=\gamma;$$

on en déduit

$$a=\frac{\beta+\gamma}{2}, \qquad b=\frac{\gamma+\alpha}{2}, \qquad c=\frac{\alpha+\beta}{2},$$

et l'inégalité à démontrer se ramène à

$$8\alpha\beta\gamma \leqslant (\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta).$$

En simplifiant et divisant ensuite par la quantité positive $\alpha\beta\gamma$, il vient

$$6 \leqslant \left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)+\left(\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}\right)+\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

résultat évident : chacune des sommes entre parenthèses étant comme on sait au moins égale à 2.

Pour $\alpha=\beta=\gamma$ (ce qui revient à $a=b=c$ ou à $A=B=C$), l'inégalité se transforme en égalité.

Remarque. — En tenant compte des formules

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad \text{et} \qquad 4RS=abc,$$

l'inégalité (1) peut encore s'écrire

$$\frac{2S}{p} \leqslant R \qquad \text{ou} \qquad R \geqslant 2r,$$

résultat qui découle immédiatement de la relation $d^2=R(R-2r)$.

Troisième solution. — On a

$$\sin\frac{A}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B+C}{2}\right)=\cos\frac{B+C}{2}.$$

Par suite, si l'on pose

$$\frac{B+C}{2}=\alpha, \qquad \frac{C+A}{2}=\beta, \qquad \frac{A+B}{2}=\gamma,$$

les angles α, β, γ définissent un second triangle, puisque la somme des angles reste la même, et il faut démontrer que pour ce triangle, on a

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant \frac{1}{8}.$$

Or en remplaçant $\cos\gamma$ par $-\cos(\alpha+\beta)$ et en divisant par $\cos^2\alpha\cos^2\beta$, il vient

$$\frac{-(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \leqslant \frac{1}{8\cos^2\alpha\cos^2\beta},$$

ou $$-(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) \leqslant \frac{1}{8}(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\beta),$$

ou $$\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta-8\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+9 \geqslant 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-3)^2+(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)^2 \geqslant 0.$$

Le premier membre se présentant ici sous la forme d'une somme de deux carrés est toujours positif, sauf si les deux carrés s'annulent en même temps, ce qui arrive lorsque

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta=\sqrt{3}, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha=\beta=60^\circ.$$

(FEINTUCH, collège Chaptal.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Ardin-Delteil ; F. Beynas ; A. Bouzy ; F. Chuberre ; L. Cussenot ; L. Delavergnas ; J. Delpont ; G. Hiernaux ; E. Layes ; F. Leulliot ; L. Magne ; J. Méhu ; A. Nayel ; M. Oger ; F. Pégorier ; M. Rebeix ; P. Reboul ; P. Robin ; E. Sinturel ; C. Szabo.]

4365. — *On donne un quart de cercle* AOB *de rayon égal à l'unité. Soit* OPMQ *un rectangle inscrit dans ce quadrant.*

1° *Déterminer l'équation trigonométrique à laquelle doit satisfaire l'angle* $x = \text{MOP}$ *pour que le rapport du périmètre du rectangle à sa surface soit égal à un nombre donné* m.

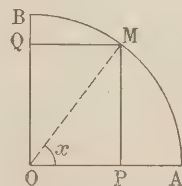
2° *Calculer l'angle* x *dans les cas particuliers où*

$$m=4\sqrt{6}, \qquad m=4\sqrt{2}.$$

(*Bacc. lettres-math., Bordeaux, avril 1898.*)

1° On doit avoir

$$\frac{2(OP+MP)}{OP.MP}=m,$$



ou, puisque $OP=\cos x$ et $MP=\sin x$,

$$2(\cos x+\sin x)=m\sin x\cos x.$$

Dans le cas de l'angle x aigu, seul considéré dans l'énoncé, cette équation a ses deux membres toujours positifs ; on peut donc les élever au carré sans introduire de solutions étrangères ; on a ainsi

$$4(\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x)=m^2(\sin x\cos x)^2,$$

ou, en remplaçant

$$\cos^2 x+\sin^2 x \text{ par } 1 \qquad \text{et} \qquad \cos x\sin x \text{ par } \frac{1}{2}\sin 2x,$$

$$m^2\sin^2 2x-16\sin 2x-16=0. \qquad (1)$$

L'angle x étant supposé aigu, l'angle $2x$ sera compris entre 0 et π, et par suite $\sin 2x$ doit être compris entre 0 et 1. Toute

racine de l'équation précédente, comprise entre 0 et 1, pourra être prise pour $\sin 2x$, et il lui correspondra deux valeurs de l'angle $2x$, l'une comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, l'autre entre $\frac{\pi}{2}$ et π; donc deux valeurs de x, l'une entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, l'autre entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$.

L'équation (1) n'admettant qu'une seule racine positive, cette racine ne sera acceptable que si elle est comprise entre 0 et 1, c'est-à-dire si les résultats de substitution des nombres 0 et 1 dans l'équation (1) sont de signes contraires. Ces résultats sont -16 et m^2-32 ; il faut donc

$$m^2 - 32 > 0,$$
$$m > 4\sqrt{2}.$$

Dans ces conditions, il correspond à la racine acceptable deux valeurs de x.

2° Pour $m = 4\sqrt{6}$, l'équation (1) devient

$$6 \sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0 ;$$

on en déduit la racine positive

$$\sin 2x = \frac{1+\sqrt{1+24}}{12} = \frac{1}{2} ;$$

d'où $2x = \frac{\pi}{6}$ ou $2x = \pi - \frac{\pi}{6}$,

par suite $x = \frac{\pi}{12}$ ou $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$.

Pour $m = 4\sqrt{2}$ (minimum de m), il vient

$$\sin 2x = 1,$$

d'où la solution unique

$$2x = \frac{\pi}{2}, \qquad x = \frac{\pi}{4}.$$

(A. SMANTANESCU, lycée de Jassy.)

[Ont résolu la même question : MM. F. Beynas; A. Chapron ; E. Le Maigre ; C. Marie ; A. Nayel ; L. Patin.]

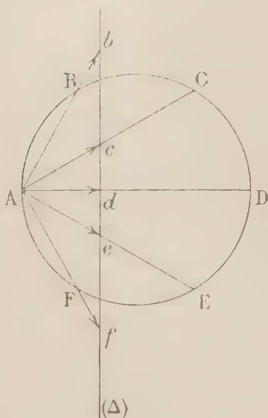
Dans la plupart des solutions reçues, les auteurs ont négligé de remarquer que l'équation $\sin 2x = a$ $(0 < a < 1)$ fait connaître deux angles $2x$, l'un aigu, l'autre obtus, et par suite deux angles x, tous deux aigus.

MÉCANIQUE

4253. — *Etant donné un hexagone régulier* ABCDEF, *on suppose que le sommet* A *est attiré par les autres sommets avec des intensités respectivement égales aux inverses des distances :*

1° *Déterminer la résultante de ces attractions ;*

2° *Même question, en substituant à l'hexagone un polygone régulier convexe de n côtés.*



Construisons la droite (Δ) inverse de la circonférence circonscrite au polygone, par rapport au point A, la puissance d'inversion étant 1.

Les attractions des sommets B, C, D, E, F seront représentées par les segments $\overline{Ab}$, $\overline{Ac}$, $\overline{Ad}$, $\overline{Ae}$, $\overline{Af}$; et d'après un théorème connu la résultante de ces forces sera dirigée suivant la droite Ad qui joint le point d'application A au centre des moyennes distances d des extrémités b, c, d, e, f, et aura pour intensité $5Ad = \frac{5}{2R}$.

Dans le cas où le polygone régulier a n côtés, la résultante des attractions considérées est encore dirigée suivant Ad et a pour intensité

$$(n-1)AD = \frac{n-1}{2R}.$$

[Ont résolu la question : MM. Ardin-Delteil ; Bayor ; Costes ; Fauvernier ; Feintuch ; Jouanneau ; H. Lefèvre ; Parizet ; Sevin ; V. R. T.]

PHYSIQUE

4362. — *Entre deux conducteurs* A, B *supposés sans résistance sont disposés, comme l'indique la figure, 3 groupes de 2 lampes à incandescence dont la résistance individuelle est de* $1^{\text{ohm}},5$. *Ces conducteurs sont reliés aux deux pôles d'une batterie de 4 éléments de pile dont la force électromotrice et la résistance individuelles sont respectivement* $1^{\text{volt}},8$ *et* $0^{\text{ohm}},5$. *Parmi les 3 arrangements rationnels de ces 4 éléments, en existe-t-il qui détermineront un courant plus intense ? Quelle sera alors la quantité de chaleur rayonnée par seconde dans chaque lampe ?*

(*Bacc. lettres-sciences, Poitiers, novembre 1897.*)

1° Les lampes étant associées deux par deux en dérivation, la résistance totale du circuit extérieur à la pile est de

A B

Piles

$$\frac{1,5 \times 2}{3} = 1^{\text{ohm}}.$$

Si l'on associe les quatre éléments en série, on aura

$$I = \frac{1,8 \times 4}{0,5 \times 4 + 1} = 2^{\text{amp}},4 ;$$

si on les associe en batterie,

$$I = \frac{1,8}{\frac{0,5}{4} + 1} = 1^{\text{amp}},6 ;$$

et si enfin on emploie une association mixte,

$$I = \frac{1,8 \times 2}{\frac{0,5 \times 2}{2} + 1} = 2^{\text{amp}},4.$$

On peut donc employer indifféremment l'association en série ou l'association mixte pour avoir un courant plus intense.

2° D'après la loi de Joule, la quantité de chaleur rayonnée dans un circuit est proportionnelle au carré de l'intensité du courant et à la résistance du circuit. Or, chaque dérivation est parcourue par un courant d'intensité égale à $\frac{2,4}{3} = 0^{\text{amp}},8$; sa résistance est de $1,5 \times 2 = 3^{\text{ohms}}$. La quantité de chaleur rayonnée en une seconde dans chaque dérivation a donc pour valeur

$$q = \frac{\overline{0,8}^2 \times 3}{4,17} = 0^{\text{cal}},46,$$

et, par suite, la quantité rayonnée dans chaque lampe est

$$\frac{0,46}{2} = 0^{\text{cal}},23.$$

(H. MICHEL, lycée de Douai.)

[M. E. Sevin a résolu la question.]
[Ont résolu une partie de la question : MM. J. Bruyas; M. Boutry; R. Durand; Jouanneau ; A. Jupeau ; F. Leulliot ; L. M. à Vic ; Le Moingt ; Raynaud.]

4363. — *Étant donné un aréomètre de Beaumé pour liquides plus denses que l'eau, on constate que si on vient à en diminuer le poids de 2^{gr} en enlevant de la grenaille de plomb à son intérieur, il s'enfonce dans l'eau pure jusqu'à la division 15 de la tige.*

Sachant qu'une dissolution de sel marin contenant 85 parties d'eau et 15 parties de sel a une densité de 1,114, on demande quels sont pour cet aréomètre : son volume jusqu'au zéro de la tige ; le volume d'une division ; son poids initial.

(*Bacc. lettres-math., Bastia, juillet 1897.*)

Dans tous les cas, le poids de l'aréomètre est égal au poids du liquide déplacé par la partie immergée. Si l'appareil remonte de 15^{div} lorsqu'on diminue son poids de 2^{gr}, c'est que 15^{div} du tube occupent un volume égal à celui qui est occupé par 2^{gr} d'eau soit 2^{cc}. Le volume d'une division est donc de $\frac{2}{15}$ c.c.

Soient x le nombre de divisions représentées par la tige et la partie non graduée de l'aréomètre, et p le poids initial de l'instrument. Quand on l'a plongé dans l'eau salée, comme l'affleurement a lieu à la division 15, le volume du liquide déplacé est de $(x-15)\frac{2}{15}$ c.c ; son poids, égal à p, est de $(x-15)\frac{2}{15}\times 1,114$ gr, d'où

$$p = (x-15)\frac{2}{15}\times 1,114. \qquad (1)$$

Si on plonge l'aréomètre dans l'eau, le volume du liquide déplacé est toujours de $(x-15)\frac{2}{15}$ c.c., puisque l'affleurement a encore lieu à la division 15, mais le poids de l'instrument est alors $p-2$. On a donc

$$p-2 = (x-15)\frac{2}{15}. \qquad (2)$$

Des équations (1) et (2) on tire

$$p = 19^{gr},54$$

et

$$x = 146,5.$$

En résumé, le volume d'une division est $\frac{2}{15} = 0^{cc},133$;

le volume de l'aréomètre jusqu'au 0 de la tige est

$$\frac{146,5\times 2}{15} = 19^{cc},53 ;$$

le poids initial de l'aréomètre est $19^{gr},54$.

(P. DUCLOS.)

[Ont résolu la question : MM. A. Bouzy ; J. Bruyas ; B. Carrière ; A. Chapron ; C. Dujardin ; L. M., à Vic ; E. Le Maigre ; P. Reboul ; A. Rozier ; A. Sambucy ; G. Tastet ; J. Valentin ; J. E. Villemagne.]

CONCOURS DE 1898 (*Suite*)

INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

Mathématiques.

I. — **4389.** Variations de la fonction $y = \frac{8x^2+9x-14}{x^2+x-1}$ quand x prend toutes les valeurs possibles. — Courbe correspondante.

II. — **4390.** Calculer les côtés d'un trapèze isocèle circonscrit à un cercle de rayon R, sachant que le volume engendré lorsqu'il tourne autour de sa plus grande base est égal à $8\pi a R^2$.

Discussion.

(*13 juin. — Durée : 3 heures.*)

Physique et Chimie.

I. — Evaporation. — Ebullition. — Principe de la distillation.

II. — **4391.** Un tuyau vertical plonge dans l'eau d'un réservoir de grande capacité et contient un piston dont la base est séparée du liquide par une colonne d'air de $0^m,50$ à la pression atmosphérique. On élève le piston jusqu'à 6^m au-dessus du niveau du réservoir : sachant que la hauteur du baromètre en eau égale 10^m, calculer la hauteur de l'eau située dans le tube.

III. — Composés oxygénés de l'azote (préparations et propriétés physiques et chimiques.)

(*13 juin. — Durée : 3 heures.*)

Sciences naturelles.

I. — La chlorophylle et ses fonctions.

II. — La moelle épinière ; sa structure, ses enveloppes, ses relations avec le sympathique et les nerfs rachidiens.

(*14 juin. — Durée : 3 heures.*)

Epure.

4392. — On donne un plan P passant par xy (xy est le petit axe de la feuille) et faisant avec la partie antérieure du plan horizontal et au-dessus de ce plan un angle de 30°.

Dans ce plan est situé un pentagone régulier ABCDE dont le rayon du cercle circonscrit est 4^{cm} ; le sommet A est à une distance de xy égale à 16^{cm}. Ce sommet se projette sur le grand axe de la feuille et est le point le plus en avant du périmètre du pentagone.

Ce pentagone est la base d'une pyramide, située au-dessus du plan P, dont la hauteur est 12^{cm} et dont le sommet se projette horizontalement en un point s situé à 8^{cm} à droite du grand axe et à 3^{cm} en avant du petit axe.

On demande de représenter par deux projections (parties vues et cachées) la portion du volume de cette pyramide comprise entre le plan P et le plan bissecteur de l'angle dièdre aigu que fait le plan P avec le plan vertical.

(*15 juin. — Durée : 3 heures.*)

ÉCOLE NORMALE DE SÈVRES

Arithmétique et Géométrie.

I. — **4393.** Le carré d'un nombre entier est terminé par 9 ; quel peut être le chiffre des dizaines de ce carré ? De même, en admettant que ce chiffre des dizaines soit 2, quelles valeurs peut prendre le chiffre des centaines ?

II. — **4394.** On donne un plan P et une droite d qui se coupent en un point A. Par le point A et dans le plan P on mène une droite d'. On demande d'étudier la variation de l'angle des deux droites d et d' lorsque, la droite d restant fixe, la droite d' tourne autour de A dans le plan P. Qu'arrive-t-il si la droite d fait des angles égaux avec trois positions distinctes de la droite d' ?

III. — **4395.** Démontrer que tout parallélogramme circonscrit à un cercle est un losange. Parmi tous les losanges circonscrits à un cercle, celui qui a le plus petit périmètre ou la plus petite surface est un carré.

Calculer le côté d'un losange circonscrit à un cercle de rayon donné R, connaissant la somme $2a$ des diagonales de ce losange.

IV. — **4396.** a étant un entier, indiquer le plus grand entier contenu dans l'expression

$$\sqrt{a^2+\sqrt{4a^2+\sqrt{16a^2+8a+3}}}.$$

(*20 juin, de 8 h. à midi.*)

Physique et Chimie.

I. — Comment détermine-t-on la masse et le poids d'un corps ?

II. — Acide sulfureux.

III. — **4397**. Quel est le poids de bioxyde de manganèse pur qu'il faudrait employer pour obtenir 1^{lit} de chlore à $20°$ et sous la pression de 740^{mm} ? Quel serait le poids de fer pur avec lequel on pourrait par la décomposition de l'eau préparer l'hydrogène nécessaire à la transformation totale du chlore obtenu en gaz chlorhydrique ?

On prendra pour poids atomiques de l'hydrogène, de l'oxygène, du chlore, du manganèse et du fer les nombres 1, 16, 35,5, 55 et 56, pour coefficient de dilatation du chlore $\frac{1}{273}$, pour densité de ce gaz, 2,5 et pour poids d'un litre d'air $1^{gr},293$ à $0°$ et sous la pression 760^{mm}.

(*21 juin, de 8 h. à midi.*)

Histoire naturelle.

I. — Les Mammifères; insister sur les caractères qui les distinguent des Oiseaux et des Reptiles et sur ceux qui les rapprochent de l'Homme. — Classification; indiquer particulièrement les espèces utiles ou nuisibles à l'Homme de chaque ordre.

II. — Forme et structure de la feuille.

(*22 juin, de 8 h. à midi.*)

CONCOURS GÉNÉRAUX

Classe de Mathématiques élémentaires.

Mathématiques (Paris et départements).

4398. — Résoudre le système d'équations

$$\frac{y+z}{1-yz}=a,\qquad \frac{z+x}{1-zx}=b,\qquad \frac{x+y}{1-xy}=c,$$

où a, b, c sont trois nombres donnés.

Démontrer qu'il existe un système de valeurs pour x, y, z qui vérifient ces équations et qui sont respectivement de même signe que les quantités

$$b+c-a+abc,\qquad c+a-b+abc,\qquad a+b-c+abc.$$

(*16 juin, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.*)

Classe de Première-sciences.

Physique et Chimie (Paris et départements).

I. — Décrire les principales expériences qui mettent en évidence la transformation du travail mécanique en chaleur. — Définir l'équivalent mécanique de la chaleur.

Un travail de T kilogrammètres produit dans un poids d'eau de P kilog. une élévation de température θ. Quelle serait en *ergs* l'expression de l'équivalent mécanique de la chaleur?

II. — Acide formique et chloroforme. — Préparation et propriétés.

III. — **4399**. On traite un poids d'urée par une dissolution concentrée et bouillante de potasse caustique. Un des produits de la réaction, que l'on suppose complète, est gazeux et aurait, à $0°$ et sous la pression de $0^m,760$, un volume de 22^{lit}. Quel est le poids d'urée qui a été décomposé, et quels sont les poids des produits de la décomposition?

Densité de l'oxygène, 1,105.
Densité de l'hydrogène, 0,069.
Densité de l'azote, 0,972.
Poids atomique du carbone, 12.
Poids atomique du potassium, 39.
Poids du litre d'air à $0°$ et sous la pression de $0^m,760$, $1^{gr},293$.

(*16 juin, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4400. — On porte sur une droite orientée, à partir d'une origine arbitraire, quatre segments mesurés par les racines x_1 et x_2, x_3 et x_4 de deux équations du second degré

$$ax^2+bx+c=0,$$
$$a'x^2+b'x+c'=0.$$

Trouver sur la droite un couple de points qui soient conjugués harmoniques aussi bien par rapport aux extrémités des segments x_1 et x_2 que par rapport à celles des segments x_3 et x_4.

(A. Roussel.)

4401. — Inscrire dans un losange ABCD un trapèze MNPQ de surface donnée S et qui soit de plus circonscriptible à un cercle.

Données : $AC=2a$, $BD=2b$, $S=\frac{b}{a}m^2$; les bases MN, PQ du trapèze sont parallèles à la diagonale BD du losange.

Inconnues : les distances $AI=x$, $CH=y$ des sommets A et C du losange aux bases MN et PQ.

Discussion.

(E. Rebuffel.)

4402. — Soient R et R' les rayons de deux cercles, d la distance de leurs centres, 2S la somme $d+R+R'$; I le point où leur axe radical rencontre la ligne des centres ; la puissance du point I par rapport aux deux cercles a pour expression

$$-\frac{4S(S-d)(S-R)(S-R')}{d^2}.$$

(A. Coussat, Lyon.)

4403. — On considère deux cercles O et O' et deux points fixes A et A' sur chacun d'eux ; on mène deux rayons OB et O'B', rencontrant les cercles O et O' en B et B', et faisant entre eux un angle constant V ; on mène enfin les droites AB et A'B' qui se coupent en P. On fait varier OB et O'B' et on demande :

1° Le lieu géométrique du point P ;

2° Le lieu géométrique du centre du cercle circonscrit au triangle PBB'.

(J. Vidaillet.)

4404. — Soient O le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC ; H le point de rencontre des hauteurs ; D, E, F les milieux des côtés. Aux points O et H on applique six forces représentées en grandeur et en direction par OD, OE, OF, HA, HB, HC.

Déterminer l'intensité et la direction de la résultante du système.

Dans quel cas ces forces se font-elles équilibre ?

(E. Sinturel, à Cusset.)

BIBLIOGRAPHIE

Notions de statique graphique, par M. E. Combette.

(Félix Alcan, éditeur.)

Dans cet opuscule de vingt-deux pages, destiné à être réuni au cours de Mécanique et de Statique du même auteur, M. Combette a eu l'intention de mettre à la portée des élèves de l'enseignement secondaire les principes de la *Statique graphique*. Cette méthode remarquable est demeurée jusqu'à ce jour si complètement étrangère à leurs cours de mécanique qu'ils sont forcés de passer par une initiation nouvelle pour profiter des traités de mécanique appliquée destinés à former l'art de l'ingénieur. La simplicité et l'élégance de la méthode exposée dans l'opuscule de M. Combette suffiraient pour justifier l'introduction de la statique graphique dans les plans d'études secondaires ; quelques exemples contenus dans ces courtes pages font encore ressortir les merveilleux avantages pratiques de cette conception et donnent l'envie de poursuivre plus loin ses développements, en ouvrant le traité magistral de M. Maurice Lévy, de qui M. Combette s'est inspiré.

En ce moment où l'Enseignement secondaire reçoit de tous côtés le conseil de joindre à la culture générale la préparation aux connaissances pratiques qui convient à notre époque pressée, l'opuscule aussi clair que précis de M. Combette vient fort à propos pour répondre à ce besoin, et fournit le complément désiré à l'enseignement de la mécanique.

J. GIROD.

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

22e Année. — N° 20. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 15 Juillet 1898.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (1898).

4398. — *Résoudre le système d'équations*

$$\frac{y+z}{1-yz}=a, \qquad \frac{z+x}{1-zx}=b, \qquad \frac{x+y}{1-xy}=c,$$

où a, b, c sont trois nombres donnés.

Démontrer qu'il existe un système de valeurs pour x, y, z qui vérifient ces équations et qui sont respectivement de même signe que les quantités

$$b+c-a+abc, \qquad c+a-b+abc, \qquad a+b-c+abc.$$

Soit

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{y+z}{1-yz}=a,\\ &\frac{z+x}{1-zx}=b,\\ &\frac{x+y}{1-xy}=c.\end{aligned}\right.$$

Appelons α, β, γ des angles compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, ayant respectivement pour tangentes les nombres algébriques a, b, c. Posons

$$x=\operatorname{tg}\xi, \qquad y=\operatorname{tg}\eta, \qquad z=\operatorname{tg}\zeta;$$

le système (1) devient

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{tg}(\eta+\zeta)=\operatorname{tg}\alpha,\\ &\operatorname{tg}(\zeta+\xi)=\operatorname{tg}\beta,\\ &\operatorname{tg}(\xi+\eta)=\operatorname{tg}\gamma,\end{aligned}\right.$$

d'où

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\eta+\zeta=\alpha+k\pi,\\ &\zeta+\xi=\beta+k'\pi,\\ &\xi+\eta=\gamma+k''\pi,\end{aligned}\right.$$

k, k', k'' étant des entiers arbitraires. On déduit des équations (3) par addition

$$2(\xi+\eta+\zeta)=\alpha+\beta+\gamma+(k+k'+k'')\pi.$$

Combinant cette équation auxiliaire successivement avec chacune des équations (3), on en conclut les valeurs

$$\xi=\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}+\frac{k+k'+k''}{2}\pi-k\pi,$$

$$\eta=\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}+\frac{k+k'+k''}{2}\pi-k'\pi,$$

$$\zeta=\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}+\frac{k+k'+k''}{2}\pi-k''\pi.$$

Prenant enfin les tangentes des deux membres, on trouve

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &x=\operatorname{tg}\xi=\operatorname{tg}\left(\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}+\frac{k+k'+k''}{2}\pi\right),\\ &y=\operatorname{tg}\eta=\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}+\frac{k+k'+k''}{2}\pi\right),\\ &z=\operatorname{tg}\zeta=\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}+\frac{k+k'+k''}{2}\pi\right).\end{aligned}\right.$$

Ces formules fourniront toutes les solutions du système proposé, à condition d'y donner à k, k', k'' toutes les valeurs possibles.

Si $k+k'+k''$ est *pair*, les formules (4) donnent

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &x=\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2},\\ &y=\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2},\\ &z=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}.\end{aligned}\right.$$

Si au contraire $k+k'+k''$ est impair, les mêmes formules donnent

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &x_1=-\operatorname{cotg}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}=-\frac{1}{x},\\ &y_1=-\operatorname{cotg}\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}=-\frac{1}{y},\\ &z_1=-\operatorname{cotg}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}=-\frac{1}{z}.\end{aligned}\right.$$

Il reste à démontrer que les valeurs des inconnues appartenant à un de ces systèmes sont de même signe que les quantités

$$b+c-a+abc, \qquad c+a-b+abc, \qquad a+b-c+abc.$$

On écrit

$$\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\alpha;$$

d'où

$$x=\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-a}{1+a\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}};$$

cette expression est de même signe que le produit

$$(7)\qquad \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-a\right)\left(1+a\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)$$

$$=-\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\left(a^2+\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}}a-1\right).$$

D'autre part,

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{a+b+c-abc}{1-bc-ca-ab}.$$

La parenthèse de l'expression (7) se réduit dans ces conditions à

$$\frac{-(1+a^2)(b+c-a+abc)}{a+b+c-abc}.$$

Par permutation circulaire des lettres a, b, c, on voit finalement que les valeurs de x, y, z appartenant au système (5) seront de même signe que les quantités

$$\frac{(1+a^2)\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}}{a+b+c-abc}(b+c-a+abc),$$

$$\frac{(1+b^2)\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}}{a+b+c-abc}(c+a-b+abc),$$

$$\frac{(1+c^2)\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}}{a+b+c-abc}(a+b-c+abc).$$

Le système (5) satisfera donc aux conditions énoncées si

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}}{a+b+c-abc}>0;$$

dans le cas contraire, ce sera le système (6).

(F. TARATTE, professeur au lycée de Saint-Quentin).

[Solution analogue par M. DEFOUG, professeur au collège de Toul.]

Autre solution. — On pourrait se proposer de résoudre le système donné sans avoir recours aux formules trigonométriques.

Les deux premières équations s'écrivent

$$y+z=a(1-yz), \qquad z+x=b(1-zx);$$

d'où

$$y=\frac{a-z}{1+az}, \qquad x=\frac{b-z}{1+bz}; \qquad (1)$$

portant ces valeurs dans la troisième, elle devient

$$\frac{a-z}{1+az}+\frac{b-z}{1+bz}=c-c\frac{(a-z)(b-z)}{(1+az)(1+bz)},$$

équation qui s'écrit

$$c(1+az)(1+bz)-c(z-a)(z-b)+(z-a)(1+bz)+(z-b)(1+az)=0,$$

et enfin

$$(a+b-c+abc)(z^2-1)+2[1-ab+c(a+b)]z=0. \quad (2)$$

Les racines de l'équation (2) sont toujours réelles, de signes contraires, inverses l'une de l'autre en valeur absolue. Les équations (1) font connaître les valeurs correspondantes de x et de y. Si dans ces dernières équations on change z en $-\frac{1}{z}$, y et x se changent en $-\frac{1}{y}$ et $-\frac{1}{x}$. Par conséquent, si x, y, z forment un premier système de solutions, les valeurs du second système seront $-\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{y}$, $-\frac{1}{z}$.

La valeur de x sera de même signe que le produit

$$(b-z)(1+bz)=(b^2-1)z-b(z^2-1);$$

dans cette expression, on a le droit de remplacer z^2-1 par sa valeur tirée de l'équation (2); il vient ainsi

$$(b-z)(1+bz)=(b^2-1)z+2b\frac{1-ab+ac+cb}{a+b-c+abc}z$$

$$=\frac{z}{a+b-c+abc}\cdot[(b^2-1)(a+b-c+abc)+2b(1-ab+ac+ab)]$$

$$=\frac{z}{a+b-c+abc}(b+c-a+abc)(1+b^2).$$

La valeur de x peut donc s'écrire

$$x=(b+c-a+abc)\cdot\frac{z}{a+b-c+abc}\cdot\frac{1+b^2}{(1+bz)^2}; \quad (3)$$

la valeur de y s'écrit, par échange des lettres a et b,

$$y=(a+c-b+abc)\cdot\frac{z}{a+b-c+abc}\cdot\frac{1+a^2}{(1+az)^2}. \quad (4)$$

Les formules (3) et (4) montrent que, si on choisit pour z celle des racines de l'équation (2) qui est de même signe que

$$a+b-c+abc,$$

la valeur de x est de même signe que $b+c-a+abc$, et celle de y de même signe que $a+c-b+abc$.

Remarque. — Le système proposé étant symétrique en x, y, z, a, b, c, on peut se demander quelle est la fonction symétrique de ces lettres qu'il suffirait de prendre pour inconnue auxiliaire u, de manière à pouvoir exprimer x, y, z en fonction symétrique de u.

Formons, à l'aide des équations données, les quantités

$$x+a \qquad \text{et} \qquad 1-ax.$$

Il vient

$$x+a=x+a\frac{y+z}{1-yz}=\frac{x+y+z-xyz}{1-yz},$$

$$1-ax=1-x\frac{y+z}{1-yz}=\frac{1-yz-zx-xy}{1-yz}.$$

On en conclut

$$\frac{x+a}{1-ax}=\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}.$$

Il est bien clair qu'un calcul analogue, effectué avec la seconde et la troisième équation, donnerait finalement

$$\frac{x+a}{1-ax}=\frac{y+b}{1-by}=\frac{z+c}{1-cz}=\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}.$$

Appelons u la valeur commune de ces rapports; on en déduit

$$x=\frac{u-a}{1+au}, \qquad y=\frac{u-b}{1+bu}, \qquad z=\frac{u-c}{1+cu}; \quad (5)$$

portant ces valeurs dans l'équation

$$u=\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy},$$

on trouve, tous calculs faits, l'équation

$$(u^2+1)[(a+b+c-abc)(u^2-1)-2(ab+ac+bc-1)u]=0.$$

Les inconnues x, y, z devant être réelles, il en est de même de u; par suite u est racine de

$$(a+b+c-abc)(u^2-1)-2(ab+ac+bc-1)u=0. \quad (6)$$

On écrit ensuite x sous la forme

$$x=\frac{(u-a)(1+au)}{(1+au)^2}=\frac{a(u^2-1)+(1-a^2)u}{(1+au)^2};$$

on remplace u^2-1 par sa valeur tirée de (6); il vient

$$x=\frac{u}{a+b+c-abc}\,\frac{1+a^2}{(1+au)^2}(b+c-a+abc),$$

et de même

$$y=\frac{u}{a+b+c-abc}\cdot\frac{1+b^2}{(1+bu)^2}\cdot(c+a-b+abc),$$

$$z=\frac{u}{a+b+c-abc}\,\frac{1+c^2}{(1+cu)^2}(a+b-c+abc),$$

formules qui démontrent encore la propriété énoncée.

On peut remarquer que cette inconnue u est identique à la quantité $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ employée dans la première solution.

[M. C. Hugon, professeur au lycée de Nîmes, a résolu cette question.]

CERTIFICAT D'APTITUDE A L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES (1897).

4219. — *On donne un triangle isocèle* OAB, *dans lequel* $OA = OB = a$, *et on considère un point* M *situé dans le plan du triangle.*

1° *Construire le point* P, *situé sur la droite* OM, *pour lequel on a*

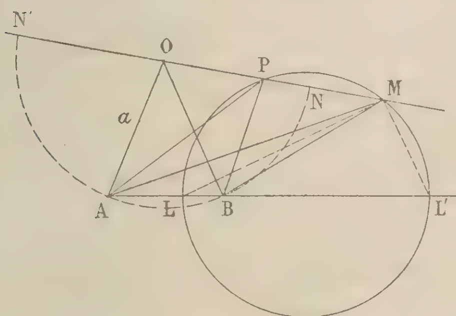
$$\frac{MA}{MB} = \frac{PA}{PB}.$$

2° *Trouver la relation qui relie les quantités* OM *et* OP.

3° *Trouver le lieu du point* P *lorsque le point* M *décrit une circonférence donnée* S. — *Peut-on choisir la circonférence* S *de manière que le lieu du point* P *soit cette circonférence?*

4° *Le point* M *se déplaçant sur une circonférence de rayon donné* R, *tangente à* OA *au point* O, *trouver pour quelles positions de ce point* M *l'aire du triangle* AMP *a une valeur donnée* m^2.

1° On sait que le lieu des points M du plan tels que le rapport de leurs distances aux points A et B soit égal à $\frac{MA}{MB}$ est un cercle ayant pour diamètre la distance des pieds des deux bissectrices ML, ML′ de l'angle AMB et de son supplément. Ce cercle, qui passe évidemment par M, rencontre la droite OM en un second point P, qui est le point cherché.



2° L'égalité $\frac{MA}{MB} = \frac{PA}{PB}$ pouvant s'écrire

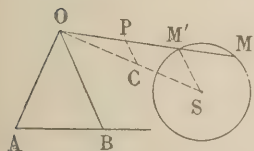
$$\frac{AM}{AP} = \frac{BM}{BP},$$

il en résulte, d'après ce qui précède, que les points A et B appartiennent à un même cercle dont le centre est situé sur PM et coïncide nécessairement avec le point O, équidistant de A et B.

Ce cercle O rencontre PM en deux points N, N′ conjugués harmoniques par rapport à P et M, d'où la relation cherchée :

$$OP.OM = \overline{ON}^2 = a^2. \qquad (1)$$

3° En vertu de cette relation, P est l'inverse du point M par rapport au pôle O et au module d'inversion a^2. Donc lorsque M décrit la circonférence S, le lieu de P est une circonférence inverse qu'on peut aussi regarder comme homothétique de la circonférence S. En effet, si M′ est le second point de rencontre de OM avec la circonférence S, on a, en appelant p la puissance du point O par rapport au cercle S,



$$OM'.OM = p, \qquad (2)$$

et, en divisant membre à membre (1) et (2),

$$\frac{OP}{OM'} = \frac{a^2}{p}.$$

On obtiendra le centre C de la circonférence lieu de P en menant le rayon PC parallèle au rayon homothétique M′S.

Ce raisonnement suppose M′ distinct de O ; il tombe en défaut lorsque la circonférence S passe par O. Dans ce dernier cas le lieu est comme on sait une droite perpendiculaire à OS.

Pour que les cercles C et S se confondent, il faut et il suffit que P coïncide avec M′, ce qui suppose $p = a^2$. Cette condition se trouve remplie pour toute circonférence S orthogonale au cercle O de rayon a.

4° Soit I la circonférence de rayon R tangente en O à OA. Lorsque M se déplace sur le cercle I, P parcourt une droite Δ perpendiculaire sur OI en un point K tel que

$$OK = \frac{a^2}{2R}.$$

Les triangles AMP, AOP ayant une hauteur commune sont entre eux comme les bases correspondantes MP, OP :

$$\frac{AMP}{AOP} = \frac{MP}{OP}.$$

Or, on a

$$AMP = m^2, \qquad AOP = \frac{1}{2} AO.OK = \frac{a^3}{4R},$$

et, en posant $OM = x$,

$$OP = \frac{a^2}{x}, \qquad MP = OP - OM = \frac{a^2}{x} - x.$$

La dernière égalité implique $OM < OP$ (P extérieur au cercle I) ; lorsque $OM > OP$ (P intérieur au cercle I), on doit prendre

$$MP = x - \frac{a^2}{x}.$$

De là, deux cas à distinguer :

Si $x < a$, l'équation du problème est

$$\frac{4Rm^2}{a^3} = \frac{a^2 - x^2}{a^2},$$

d'où l'on tire, en écartant la valeur négative,

$$x = \sqrt{a^2 - \frac{4Rm^2}{a}}.$$

Cette valeur de x, inférieure à a, n'est acceptable qu'autant qu'elle est réelle et non supérieure à 2R, ce qui revient à écrire

$$0 \leqslant a^2 - \frac{4Rm^2}{a} \leqslant 4R^2,$$

ou

$$\frac{a(a^2 - 4R^2)}{4R} \leqslant m^2 \leqslant \frac{a^3}{4R},$$

ou bien

$$\frac{a^3}{4R} - aR \leqslant m^2 \leqslant \frac{a^3}{4R}.$$

Pour que la première inégalité constitue une véritable condition, il faut que

$$\frac{a^3}{4R} > aR \qquad \text{ou} \qquad \frac{a^2}{2R} > 2R,$$

ou

$$OK > 2R.$$

La droite lieu du point P ne doit pas rencontrer le cercle.

Si $x > a$, l'équation du problème est

$$\frac{4Rm^2}{a^3} = \frac{x^2 - a^2}{a^2},$$

et donne

$$x = \sqrt{a^2 + \frac{4Rm^2}{a}}.$$

Cette valeur de x, toujours réelle et supérieure à a, doit être

inférieure ou égale à 2R, condition remplie lorsque

$$a^2 + \frac{4Rm^2}{a} \leqslant 4R^2,$$

ou

$$m^2 \leqslant \frac{a(4R^2 - a^2)}{4R},$$

condition qui exige que a vérifie la condition

$$a^2 < 4R^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{a^2}{2R} < 2R,$$

ou

$$OK < 2R\,;$$

il faut donc que la droite lieu du point P rencontre le cercle.

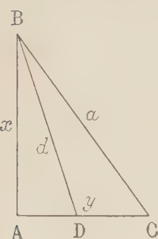
(C. BRUNET, école normale d'Aix.)

[Ont résolu les trois premières parties seulement : MM. R. Cordier, à Montpellier ; H. Crozemarie ; Feintuch ; E. Foucart ; A. Maître ; M. Rebeix, lycée du Puy ; L. Tarrin, à Saint-Gérard-de-Vaux.]

ALGÈBRE

4347. — *Dans un triangle* ABC *rectangle en* A, *on connaît l'hypoténuse* a *et la longueur* d *de la bissectrice* BD *de l'angle* B. *Calculer les côtés de l'angle droit. Discussion.*

(*Bacc. lettres-math., Paris, avril 1898.*)



Posons $AB = x$, $AC = y$. Puisque le triangle est rectangle, les inconnues x et y vérifient l'équation

$$x^2 + y^2 = a^2. \qquad (1)$$

Pour exprimer que la bissectrice de l'angle B est égale à d, calculons d'abord AD. D'après un théorème connu,

$$\frac{AD}{x} = \frac{DC}{a} = \frac{y}{x+a}\,;$$

d'où

$$AD = \frac{xy}{x+a}\,;$$

le triangle rectangle BAD fournit ensuite la deuxième équation

$$x^2 + \frac{x^2y^2}{(x+a)^2} = d^2. \qquad (2)$$

Pour que des valeurs de x et de y satisfaisant aux équations (1) et (2) constituent une solution du problème, il faut et il suffit qu'elles soient réelles et positives.

En effet, on pourra toujours construire un triangle rectangle ayant ces valeurs pour côtés de l'angle droit ; puisqu'elles satisfont à l'équation (1), l'hypoténuse de ce triangle sera égale à a ; puisqu'elles satisfont à (2), la bissectrice de l'angle adjacent au côté x sera égale à d. Le triangle construit satisfait donc aux conditions de l'énoncé.

Le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x^2 + \dfrac{x^2y^2}{(x+a)^2} = d^2 \end{cases}$$

est équivalent au suivant :

$$\begin{cases} y^2 = a^2 - x^2, \\ x^2 + \dfrac{x^2(a^2 - x^2)}{(x+a)^2} = d^2. \end{cases}$$

La dernière équation de ce système s'écrit, toutes réductions faites,

$$f(x) = 2ax^2 - d^2x - ad^2 = 0.$$

Une racine de cette équation est négative ; la positive seule peut convenir, à condition que la valeur correspondante de y soit réelle et positive. D'après l'équation $y^2 = a^2 - x^2$, il faut pour cela que

$$a^2 - x^2 > 0,$$

ou

$$x < a \quad (\text{puisque } x \text{ est positif}).$$

La racine positive devant être comprise entre 0 et a, il faut que $f(0)$ et $f(a)$ soient de signes contraires ;

$$f(0) = -ad^2, \qquad f(a) = 2a^3 - 2ad^2 = 2a(a^2 - d^2),$$

il faut donc

$$d < a,$$

condition qu'on pouvait prévoir géométriquement.

Remarque. — On peut résoudre un problème analogue en se donnant la bissectrice extérieure de l'angle B ; l'équation finale est

$$2ax^2 + d^2x - ad^2 = 0\,;$$

sa racine positive convient, quel que soit d.

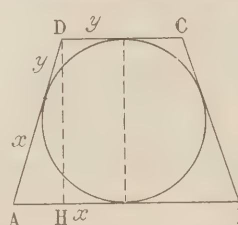
(A. BOUZY, école primaire supérieure de Vervins.)

[Ont résolu la même question : MM. Bayor ; M. Boucly ; J. Bruyas ; J. Delpont ; R. Dupland ; X. Lacreuse ; C. Marie ; A. Mirc ; Morin-Letessier ; A. Nayel ; L. Patin ; F. Pégorier ; P. Plisson ; Raynaud ; M. Rebeix ; P. Reboul ; Remondet ; J. Villemagne ; J. Wittner.]

4356. — *Calculer les rayons de base d'un tronc de cône circonscriptible à une sphère, connaissant son volume et sa surface totale.*

(*Bacc. lettres-math., Dijon, novembre 1897.*)

Désignons par x et y les rayons de base du tronc de cône. En égalant à $\frac{1}{3}\pi a^3$ et πb^2 le volume et la surface totale de ce tronc de cône, on a



$$\frac{\pi DH}{3}(x^2+y^2+xy) = \frac{1}{3}\pi a^3,$$

$$\pi(x+y)AD + \pi(x^2+y^2) = \pi b^2.$$

La section ABCD du tronc de cône par un plan passant par l'axe est par hypothèse circonscrite à un cercle ; on peut donc écrire

$$AD = x + y$$

et

$$DH = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{(x+y)^2 - (x-y)^2} = 2\sqrt{xy}.$$

Les équations du problème sont dès lors

$$2\sqrt{xy}\,(x^2 + y^2 + xy) = a^3, \qquad (1)$$

$$(x+y)^2 + x^2 + y^2 = b^2. \qquad (2)$$

L'équation (2) pouvant s'écrire

$$x^2 + y^2 + xy = \frac{b^2}{2}, \qquad (2)'$$

l'équation (1) devient par suite

$$\sqrt{xy}\,.\,b^2 = a^3,$$

d'où

$$xy = \frac{a^6}{b^4}. \qquad (3)$$

En ajoutant membre à membre (2)′ et (3), il vient

$$(x+y)^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{a^6}{b^4}\,;$$

puis en retranchant le triple de (3) de (2)′,

$$(x-y)^2 = \frac{b^2}{2} - \frac{3a^6}{b^4}.$$

De là on tire facilement

$$x + y = \frac{\sqrt{b^6 + 2a^6}}{b^2\sqrt{2}},$$

$$x - y = \pm\frac{\sqrt{b^6 - 6a^6}}{b^2\sqrt{2}}\,;$$

puis $$x = \frac{1}{2b^2\sqrt{2}}\left(\sqrt{b^6 + 2a^6} \pm \sqrt{b^6 - 6a^6}\right),$$

$$y = \frac{1}{2b^2\sqrt{2}}\left(\sqrt{b^6 + 2a^6} \mp \sqrt{b^6 - 6a^6}\right),$$

les signes supérieurs ou inférieurs étant pris ensemble.

Ces valeurs de x et y sont visiblement positives si elles sont réelles, ce qui suppose

$$b^6 \geqslant 6a^6 \qquad \text{ou} \qquad b^2 \geqslant a^2\sqrt[3]{6};$$

dans ce cas, le problème admet une seule solution distincte.

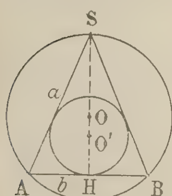
(RAYNAUD, à Rabastens.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Ardaillon ; E. Ardin-Delteil ; L. Bigot ; A. Bouzy ; G. Charpentier ; L. Cussenot ; A. Delbès ; A. Delcung S[t] Martin ; J. Delpont ; E. de Luca ; H. Itier ; Jarrige ; E. Joyer ; L. M., à Vic ; J. Marius Lagarde ; R. Larsonneur ; E. Le Maigre ; F. Leulliot ; C. Marie ; A. Nayel ; L. Patin ; Quilichini ; M. Rebeix ; Remondet ; G. Tastet.]

4383. — *Calculer le rapport m^2 entre la surface de la sphère circonscrite et la surface de la sphère inscrite à un cône dont l'apothème est a et le rayon de base b. — Si l'on pose $\frac{a}{b} = x$, quelle valeur doit prendre x pour que m soit minimum?*

(*Bacc. lettres-math., Poitiers, avril 1898.*)

Soit SAB la section du cône par un plan passant par l'axe; la sphère circonscrite et la sphère inscrite coupent ce plan suivant les deux grands cercles O et O′ circonscrit et inscrit au triangle SAB. En appelant R et r les rayons des cercles O et O′, on peut écrire



$$m^2 = \frac{4\pi R^2}{4\pi r^2} \qquad \text{ou} \qquad m = \frac{R}{r}.$$

Tout revient à évaluer R et r en fonction de a et de b. Or, d'après un théorème connu, on a

$$2R.SH = SA.SB,$$

d'où $$R = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - b^2}};$$

d'ailleurs en égalant deux expressions de l'aire SAB, il vient, en observant que $a + b$ est le demi-périmètre du triangle,

$$(a + b)r = b.SH,$$

d'où $$r = \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b}.$$

Par suite

$$m = \frac{a^2(a + b)}{2b(a^2 - b^2)} = \frac{a^2}{2b(a - b)}.$$

En divisant haut et bas par b^2, cette dernière valeur de m s'écrit, en posant $\frac{a}{b} = x$,

$$m = \frac{x^2}{2(x - 1)}.$$

A une valeur donnée de m correspondent pour x deux valeurs fournies par l'équation

$$x^2 - 2mx + 2m = 0;$$

ces valeurs ne sont réelles qu'autant qu'on a

$$m^2 - 2m \geqslant 0,$$

ou, puisque m est toujours positif,

$$m \geqslant 2.$$

Cette condition supposée remplie, les deux racines sont positives.

Pour $m = 2$ (minimum de m), la valeur correspondante de x est $x = m = 2$.

REMARQUE. — On peut aussi déterminer directement le minimum de m en remarquant qu'il correspond au maximum du dénominateur de m, en supposant a constant et b variable. Or le produit $b(a - b)$ étant celui de deux facteurs positifs de somme constante atteint son maximum lorsque $b = a - b$ ou $b = \frac{a}{2}$, et le minimum de m est $m = 2$.

(M[lle] MARIA PONT, à Bourg.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Bouzy ; E. Clément ; L. Curt ; Jarrige ; E. Le Maigre ; F. Leulliot ; A. Nayel ; M. Oger.]

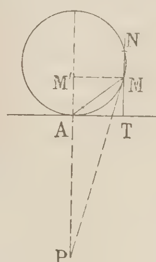
GÉOMÉTRIE

4351. — *On donne un cercle O et une tangente AT au point A. Mener par le point de contact A une corde AM telle que AM = NT, N désignant le second point de rencontre du cercle avec la perpendiculaire menée de M sur la tangente AT.*

On mène la tangente MP en M, et on la limite au diamètre passant par A ; on projette M en M′ sur ce diamètre ; calculer AP et PM′.

Evaluons d'abord TN en fonction du rayon R du cercle O et de la longueur $AM = x$. On a

$$TN.TM. = \overline{TA}^2.$$



Or $$TM = AM' = \frac{x^2}{2R}$$

et $$\overline{TA}^2 = x^2 - \overline{TM}^2 = x^2 - \frac{x^4}{4R^2}.$$

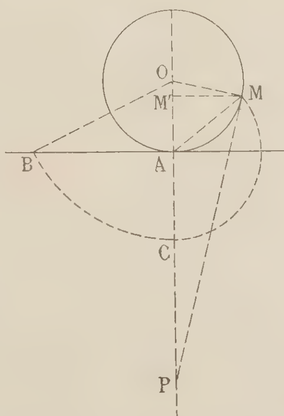
Donc $$TN = \frac{4R^2 - x^2}{2R}.$$

Egalons cette valeur à x ; nous aurons pour équation du problème

$$x^2 + 2Rx - 4R^2 = 0,$$

d'où, en écartant la valeur négative de x,

$$x = R(\sqrt{5} - 1).$$



Pour construire cette expression bien connue (côté du décagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 2R), on prend sur la tangente en A au cercle O, $AB = 2R$, puis on rabat OB en OC et AC en AM ; on a ainsi

$$AM = AC = OC - R = OB - R = R\sqrt{5} - R.$$

Calcul de AP *et* PM′. — D'après la figure précédente, on peut écrire

$$AP = OP - R, \quad PM' = OP - OM'.$$

Mais

$$OM' = R - AM' = R - \frac{x^2}{2R} = (\sqrt{5} - 2);$$

d'ailleurs le triangle rectangle OMP donne

$$OP = \frac{R^2}{OM'} = \frac{R}{\sqrt{5} - 2} = R(\sqrt{5} + 2).$$

En remplaçant, il vient

$$AP = R(\sqrt{5} + 2) - R = R(\sqrt{5} + 1),$$

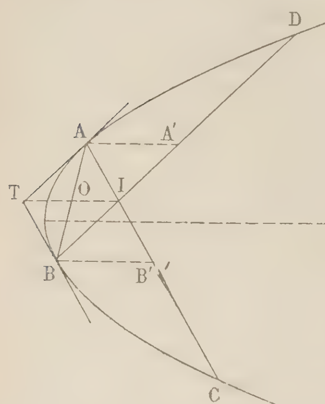
$$PM' = R(\sqrt{5} + 2) - R(\sqrt{5} - 2) = 4R.$$

(G. HIERNAUX, école normale de Châlons-sur-Marne.)

[Ont résolu la même question : MM. G. Bacquet ; Bayor ; L. Bigot ; A. Bouzy ; L. Gourdet ; M. Rebeix ; J. Vidaillet ; J. Wittner.]

4372. — *On donne une parabole et deux tangentes ; par le point de contact de chacune d'elles on trace la corde parallèle à l'autre. Démontrer que les deux cordes ainsi obtenues se partagent mutuellement au quart de leur longueur.*

Soient TA, TB les deux tangentes à la parabole. Menons les cordes AC, BD respectivement parallèles à TB, TA et qui se coupent au point I.



La corde BD étant parallèle à la tangente en A, a son milieu A' sur le diamètre conjugué des cordes parallèles à AT, de sorte que la droite AA' est parallèle à l'axe de la parabole ; de même pour BB'.

D'ailleurs, dans le parallélogramme ATBI, la diagonale TI passe par le milieu O de AB ; par suite la droite TI est le diamètre conjugué des cordes parallèles à AB, et comme telle elle est parallèle à l'axe, c'est-à-dire équidistante des parallèles AA' et BB'. Il en résulte que

$$AI = IB' = \frac{AC}{4}, \qquad BI = IA' = \frac{BD}{4}.$$

C. q. f. d.

Remarque. — La propriété est applicable en particulier à deux cordes perpendiculaires normales à la parabole.

[Ont résolu la question : MM. J. Henry ; P. de Lalaurencie ; H. Michel ; M. Rebeix, lycée du Puy ; E. Sevin, collège Chaptal ; X.]

TRIGONOMÉTRIE

4330. — *Trouver et construire les limites des intervalles dans lesquels l'arc x, pris sur le cercle trigonométrique, doit avoir son extrémité libre, pour que le sinus de cet arc vérifie l'inégalité suivante :*

$$\frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sin x - \sqrt{6}+1}{4\sin^2 x - 1} < 1.$$

(*Bacc. lettres-sciences, Paris, avril 1898.*)

En faisant tout passer dans le second membre, il vient

$$0 < \frac{4\sin^2 x - 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sin x - 2 + \sqrt{6}}{4\sin^2 x - 1}.$$

Le numérateur du second membre est un trinome du second degré en $\sin x$, dont le discriminant est

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 + 4(2-\sqrt{6})$$

$$= (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-5\sqrt{2});$$

ce discriminant étant négatif, le trinome conserve le signe de son premier terme quel que soit $\sin x$, c'est-à-dire est toujours positif.

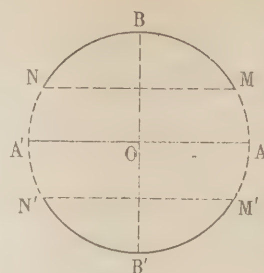
Il faut donc que le dénominateur soit également positif, ce qui revient à écrire

$$4\sin^2 x - 1 > 0,$$

ou

$$\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) > 0.$$

$\sin x$ doit ainsi être compris entre -1 et $-\frac{1}{2}$ ou entre $+\frac{1}{2}$ et $+1$. Si AM et AM' sont les deux plus petits arcs ayant respectivement pour sinus $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$, la condition précédente revient à prendre l'extrémité libre de l'arc x sur l'un des arcs MBN ou M'B'N'. En remarquant en outre que $\widehat{AM} = 30°$, on voit que les limites de x sont



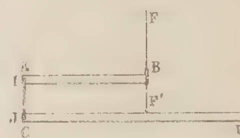
$$30° < x < 150° \quad \text{ou} \quad -30° < x < -150°.$$

(E. Sevin, collège Chaptal.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Bouzy ; G. Hiernaux ; M. Oger ; F. Pégorier ; M. Rebeix.]

MÉCANIQUE

4361. — *Deux barres homogènes, de mêmes matières et de mêmes dimensions transversales AB, CD, peuvent tourner librement en leurs extrémités A et C autour de deux charnières horizontales I et J qui traversent une tige AC.*



On sait que ce système pesant est en équilibre dans un même plan vertical lorsque les barres AB, CD horizontales sont réunies par la tige AC verticale et par un fil F' vertical et que la barre AB est supportée par un fil F dont la droite prolonge celle du fil F', en rasant l'extrémité B de la barre AB.

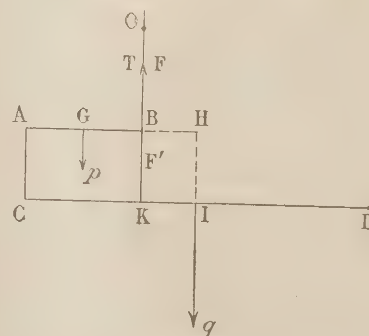
On regarde le poids de la tige AC comme négligeable, et on demande de calculer :

1° *Le rapport* $\frac{CD}{AB}$ *de la longueur des deux barres ;*

2° *La tension du fil F, la tension du fil F' et la compression de la tige AC estimées en prenant comme unité de force le poids de la barre AB.*

(*Bacc. lettres-sciences, Rennes, juillet 1897.*)

1° Supposons les barres AB et CD réduites à des droites matérielles ; les charnières I et J se confondront respectivement avec A et C. Soient G le centre de gravité de AB, I celui de CD, O le point fixe auquel est fixé le fil F.



Posons

$$AB = a, \quad CD = b,$$

et appelons d le poids de l'unité de longueur.

Le système considéré est soumis à trois forces extérieures, savoir les poids p et q des deux barres et la traction exercée par la fixité du point O sur le fil F. Il est soumis en outre à des forces intérieures : 1° les tensions du fil F', égales et de sens contraires, appliquées respectivement en B et K ; 2° les réactions mutuelles des barres AB et CD sur la barre AC, qui sont appliquées respectivement en A et C et sont aussi deux à deux égales et de sens contraires.

Le système étant en équilibre par hypothèse, il en est de même de l'ensemble des forces tant extérieures qu'intérieures ; ces dernières se détruisent deux à deux ; donc les forces p et q font équilibre à la tension T du fil F. Par suite en prolongeant la direction de q jusqu'au point H où elle rencontre AB, le point B se trouve entre G et H ; et de plus, comme chacune des forces p, q, T est proportionnelle à la distance des points d'application des deux autres, on peut écrire

$$\frac{p}{\mathrm{BH}} = \frac{q}{\mathrm{BG}} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{GH}},$$

ou bien

$$\frac{p}{\frac{b}{2} - a} = \frac{q}{\frac{a}{2}} = \frac{\mathrm{T}}{\frac{b-a}{2}}.$$

L'égalité des deux premiers rapports donne

$$pa = q(b - 2a),$$

ou en remplaçant p et q par les quantités proportionnelles a et b,

$$a^2 = b(b - 2a),$$

ou $\quad b^2 - 2ab - a^2 = 0 \qquad$ ou $\qquad \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{b}{a}\right) - 1 = 0.$

Le rapport $\frac{b}{a}$ devant être positif, on tire de cette équation la solution unique

$$\frac{b}{a} = 1 + \sqrt{2}.$$

2° L'égalité du premier et du dernier rapport donne

$$\mathrm{T} = p\,\frac{b-a}{b-2a} = p\,\frac{\frac{b}{a} - 1}{\frac{b}{a} - 2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}\,p = p(2 + \sqrt{2}).$$

On peut considérer la barre supérieure comme entièrement libre, à condition de lui appliquer en A une force verticale R égale à la réaction exercée par AC sur AB, en G son poids p, en B la tension T du fil F agissant de bas en haut, et la tension T′ du fil F′ agissant de haut en bas. Les forces R et T — T′ font par hypothèse équilibre à la force p. Donc, puisque AG = GB,

$$\mathrm{T} - \mathrm{T}' = \mathrm{R} = \frac{p}{2};$$

d'où $\quad \mathrm{T}' = \mathrm{T} - \frac{p}{2} = p(2 + \sqrt{2}) - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}\,(3 + 2\sqrt{2}).$

Enfin une force R′ égale et directement opposée à R représente la compression de la barre AC.

(Paul ROBIN, lycée de Rennes.)

[Ont résolu cette question : MM. Jouanneau ; Sevin, collège Chaptal ; Leullìot, collège de Compiègne.]

PHYSIQUE

4369. — *Un tube de verre bien cylindrique* ABCD, *dont la section intérieure est de* 4^{cq}, *renfermant une certaine masse d'air, a été renversé sur une cuve à mercure. Ce tube est fixé à l'extrémité d'un fil passant sur une poulie* O *très mobile, et portant à l'autre bout un plateau* P.

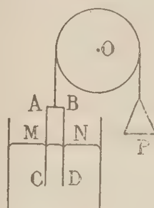
On leste l'appareil de façon que les niveaux du mercure MN, *dans le tube et dans la cuvette, soient les mêmes. La distance* AM *du fond du tube au niveau du mercure est alors de* 10^{cm}.

On met dans le plateau P *un poids de* 1^{kg}. *On demande de quelle hauteur le tube se soulèvera.*

On négligera les effets de poussée du mercure sur les parois du tube et on prendra pour hauteur barométrique 730^{mm}.

(*Bacc. lettres-math., Clermont, avril 1898.*)

La pression atmosphérique qui s'exerce au début sur la masse d'air enfermée dans le tube a pour valeur



$$73 \times 13{,}596 \times 4 = 3970^{\mathrm{gr}}.$$

Si l'on met 1^{kg} dans le plateau, la pression exercée sur la masse d'air n'est plus que de $3970 - 1000 = 2970^{\mathrm{gr}}$.

Pour une même masse gazeuse à une même température, le produit du volume par la pression étant constant, on a, en représentant par x le volume de la masse d'air dans la seconde expérience,

$$4 \times 10 \times 3970 = x \times 2970,$$

d'où

$$x = \frac{40 \times 3970}{2970} = 53^{\mathrm{cc}},47.$$

Ce volume occupera dans le tube une hauteur de

$$\frac{53{,}47}{4} = 13^{\mathrm{cm}},3675.$$

En outre, la pression au niveau du mercure libre dans la cuve devant avoir la même valeur que sur le même plan horizontal à l'intérieur du tube, il s'est élevé 1^{kg} de mercure dans le tube.

Le volume de ce kilogramme de mercure est

$$\frac{1000}{13{,}596} = 73^{\mathrm{cc}},552,$$

et dans le tube il atteindra une hauteur de

$$\frac{73{,}552}{4} = 18^{\mathrm{cm}},388.$$

La hauteur du tube au-dessus du niveau du mercure dans la cuve sera donc de

$$13{,}3675 + 18{,}388 = 31^{\mathrm{cm}},7555.$$

Comme elle était primitivement de 10^{cm}, le tube s'est soulevé de

$$31{,}7555 - 10 = 21^{\mathrm{cm}},7555.$$

(JULES RIGAL.)

[Ont résolu la question : MM. J. Delpont ; M. Rebeix ; A. Sambucy ; G. Tastet.]

CONCOURS DE 1898 (*Suite*)

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques élémentaires.

4405. — On considère un triangle T dont les sommets sont A, B, C, et une droite Δ dans son plan. On prend les symétriques d'un point O quelconque de la droite Δ par rapport aux côtés du triangle T, et on construit le centre O′ du cercle circonscrit au triangle ayant pour sommets les trois points ainsi obtenus.

I. Trouver le lieu du point O′ lorsque le point O décrit la droite Δ. Ce lieu est une conique S dont on discutera le genre en faisant varier la position de la droite Δ par rapport au triangle T. On indiquera également les positions de Δ pour lesquelles S lui est tangente.

II. Trouver le lieu du centre de la conique S lorsque la droite Δ se déplace parallèlement à elle-même.

Ce lieu est une conique S_1 qui dépend de la direction de Δ.

III. Trouver le lieu du centre de S_1 lorsqu'on fait varier la direction de Δ.

IV. Démontrer que par tout point I de S, on peut mener trois droites

OO' et faire voir que deux de ces droites sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites qui joignent le point I aux points de rencontre de Δ et de S.

V. Dans le cas particulier où la droite Δ passe par le centre ω d'un cercle inscrit au triangle T, on propose de trouver l'enveloppe de la droite OO'. Démontrer que, dans ce cas, les centres des trois autres cercles inscrits au triangle T et les points de rencontre des diagonales du quadrilatère complet ayant pour côtés Δ et les côtés de T sont six points placés sur une même conique.

(1er *juillet de 7 h. à 2 h.*)

CONCOURS GÉNÉRAUX (*Suite*)

Classe de Première-sciences.

Mathématiques (Paris et départements).

4406. — Deux points pesants, de poids P et P', sont reliés par un fil élastique qui possède normalement la longueur l et qui, lorsqu'on l'allonge d'une longueur x, tend à reprendre sa longueur primitive l en exerçant à ses extrémités une traction représentée par $k\frac{x}{l}$, où k désigne un facteur constant.

On place les deux points pesants à la distance d l'un de l'autre sur une même ligne de plus grande pente d'un plan incliné sur lequel ils peuvent glisser avec frottement. On demande :

1° Dans quel cas il y aura équilibre :

2° S'il n'y a pas équilibre, d'énumérer et de discuter les diverses manières dont l'équilibre pourra se trouver rompu, selon les valeurs des données.

On supposera $d > l$; on désignera par i l'inclinaison du plan incliné et par $f = \operatorname{tg}\varphi$, $f' = \operatorname{tg}\varphi'$, les coefficients de frottement des poids P, P' sur le plan incliné.

(*29 juin, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.*)

Classe de Seconde moderne.

Mathématiques (Paris et départements).

I. — **4407.** On considère un cercle de diamètre AOB ; par le milieu C de l'un des arcs AB on mène la corde CM qui rencontre AB en P ($OP < R$), et on trace le diamètre MON.

Évaluer le volume engendré par le quadrilatère ONCP en tournant autour de AB. Les données sont le rayon R du cercle et l'angle aigu α que la corde CM fait avec AB.

Interpréter la formule trouvée dans le cas $OP > R$.

II. — **4408.** On donne une droite Z verticale, une droite U parallèle à la ligne de terre, et une droite V située dans le plan bissecteur du premier dièdre, et faisant 45° avec la ligne de terre :

1° Construire les projections du parallélépipède dont trois arêtes sont sur les droites Z, U, V.

Ponctuation des résultats ;

2° Évaluer le volume de ce polyèdre en fonction des plus courtes distances λ, μ, ν des droites Z, U, V, deux à deux.

(*30 juin, de 8 h. 1/2 à 1 h. 1/2.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4409. — Démontrer que la somme

$$a^{6m} + a^{6n}$$

n'est divisible par 7 que si le nombre entier a est lui-même divisible par 7.

(E. Bonnet, instituteur à Alger.)

4410. — Trouver un nombre tel qu'en le multipliant par 37 et divisant le produit par 31, on ait pour reste 15.

4411. — a, b, c, d étant en progression arithmétique, on a

$$(a - b + c - d)^2 = (a - b)^2 + 2(b - c)^2 + (c - d)^2.$$

4412. — Prouver que l'expression

$$9\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 24\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 34$$

est un carré parfait.

4413. — Trouver un nombre de quatre chiffres sachant que le produit des deux premiers chiffres est égal au troisième chiffre, que leur somme est égale au quatrième chiffre et que la somme des quatre chiffres est 20.

(C. Benoit, instituteur à Mairon.)

4414. — Calculer les côtés d'un trapèze isocèle connaissant le périmètre $2p$, la longueur d de la diagonale et l'angle 2α des diagonales. — Discussion. — Construction géométrique du trapèze.

4415. — Dans un triangle ABC, rectangle en A, on mène l'une des bissectrices BD, qui rencontre en D le côté AC et en E la hauteur AH. Par E on mène la parallèle FG à BC, limitée en F à AB et en G à AC.

Démontrer que $AD = GC$ et que l'angle DHF est droit.

(M. Rivière, à Foix.)

4416. — Étant donnés une circonférence de centre O et un point A, on joint ce point à deux points quelconques B et C de la circonférence par les droites AB et AC. En B on élève la perpendiculaire à AB, en C la perpendiculaire à AC ; du point de rencontre P de ces perpendiculaires on abaisse la perpendiculaire sur BC. Prouver qu'elle rencontre le diamètre OA en un point A' tel que $OA = OA'$.

(Roger Julens, à Bruxelles.)

4417. — Dans un triangle ABC on mène des sommets A, B, C les hauteurs AA', BB', CC' relatives aux côtés opposés, et on désigne par α, β, γ les points de rencontre des hauteurs des triangles AB'C', BC'A', AC'B'. Démontrer :

1° Que les droites $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ sont concourantes en un point ω ;

2° Que la distance du point ω au côté $AC = b$ du triangle ABC a pour expression en fonction des côtés

$$\delta_b = \frac{(a^4 + c^4)[3b^4 + (a^2 - c^2)^2] - b^2(a^2 + c^2)[3(a^2 - c^2)^2 + b^4]}{32a^2bc^2S},$$

S désignant la surface du triangle ABC ;

3° Que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ se coupent au centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

(J. Vidaillet.)

4418. — On donne deux circonférences sécantes O et O'. On joint un point variable C de O aux points d'intersection A et B des deux circonférences par deux droites qui coupent la circonférence O' en A' et B'. Démontrer :

1° Que les lieux du centre du cercle circonscrit au triangle CA'B', du point de concours des hauteurs et de celui des médianes de ce même triangle sont trois circonférences ;

2° Que ces trois circonférences sont homothétiques par rapport à un même point S.

(M. Rebeix, lycée du Puy.)

4419. — Étant donné le triangle ABC, on trace les bissectrices de l'angle au sommet A.

1° Trouver le lieu des points M tels que les pieds des perpendiculaires abaissées de ces points sur les bissectrices soient en ligne droite avec le milieu D du côté BC opposé au sommet A.

2° Montrer que le problème 4278 (n° 7, 1898) n'est qu'un cas particulier du lieu précédent. (Luiz Hémois.)

4420. — On joint un point M d'un plan à deux points fixes A et B de ce plan. On projette M en C et D sur les droites AC et BD telles que les angles CAM et MBD soient respectivement égaux à des angles donnés α et β. La longueur CD étant supposée constante :

1° Trouver le lieu du point M ;

2° Trouver l'enveloppe de la droite CD;

3° Construire le quadrilatère ACDB de surface donnée.

(A. D., à Castres.)

4421. — Dans une ellipse on considère les points H et H' situés sur le petit axe à la même distance c du centre.

Démontrer que la somme des carrés de leurs distances à une tangente quelconque à l'ellipse est constante et égale à $2a^2$.

(Th. C.)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

TABLE DES MATIÈRES

Année 1897-1898

NOTES

ARITHMÉTIQUE

ALGÈBRE

CHIMIE

EXAMENS ET CONCOURS

CONCOURS GÉNÉRAUX

ECOLES

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES

ENSEIGNEMENT PRIMAIRE

DIVERS

BACCALAURÉATS

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet, Facdouel, Dir.

23e Année. — N° 1. JOURNAL Paris, le 1er Octobre 1898.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

ARITHMÉTIQUE

4409. — *Démontrer que la somme*

$$a^{6m}+a^{6n}$$

n'est divisible par 7 que si le nombre entier a est lui-même divisible par 7.

Tout nombre a premier avec 7 est de l'une des formes

$$m.7\pm 1,\qquad m.7\pm 2,\qquad m.7\pm 3,$$

et par suite la sixième puissance de a de l'une des formes

$$m.7+1,\qquad m.7+2^6,\qquad m.7+3^6.$$

Mais ces trois dernières formes sont identiques, puisque

$$2^6=(2^3)^2=8^2=(7+1)^2=m.7+1$$

et $$3^6=(3^2)^3=9^3=(7+2)^3=m.7+2^3=m.7+1.$$

Donc lorsque a est premier avec 7, on a toujours

$$a^6=m.7+1.$$

La somme donnée s'écrit alors successivement

$$(a^6)^m+(a^6)^n=(m.7+1)^m+(m.7+1)^n=m.7+2;$$

cette somme n'est donc pas divisible par 7. Mais si a est multiple de 7, la divisibilité devient évidente.

(BURGAT, école normale d'Albertville.)

Remarque. — La propriété $a^6=m.7+1$, établie plus haut, n'est qu'un cas particulier du théorème de Fermat.

[Ont résolu la même question : MM. P. Barroué, lycée de Brest; A. Bertrand ; E. Bonnet ; P. Bonnot ; M. Boutry ; A. Bouzy, école primaire supérieure de Vervins ; V. Cambureanu, lycée de Berlad ; L. Curt, école normale de Bourg ; L. Gourdet ; R. Henry ; G. Hiernaux ; H. Janois ; J. Ménéchal ; M. Oger ; L. Perret ; P. Plisson ; M. Rebeix ; Ch. Szabo, école réale de Györ ; R. Thomas.]

4413. — *Trouver un nombre de quatre chiffres sachant que le produit des deux premiers chiffres est égal au troisième chiffre, que leur somme est égale au quatrième chiffre et que la somme des quatre chiffres est 20.*

Soient x et y les deux premiers chiffres du nombre cherché ; le troisième et le quatrième chiffres seront respectivement xy et $x+y$.

En écrivant que la somme des quatre chiffres est 20, on a

$$2(x+y)+xy=20,$$

d'où $$y=\frac{20-2x}{2+x}=\frac{24}{2+x}-2.$$

Pour que cette valeur de y représente un chiffre, il faut et il suffit que le quotient $\frac{24}{2+x}$ ait une valeur entière comprise entre 2 et 12, ce qui revient à prendre $2+x$ parmi les diviseurs de 24 compris entre 2 et 12. Or ces diviseurs sont

$$3,\quad 4,\quad 6,\quad 8;$$

les valeurs correspondantes de x sont donc

$$1,\quad 2,\quad 4,\quad 6.$$

En les portant dans la valeur de y, on obtient respectivement

$$6,\quad 4,\quad 2,\quad 1.$$

Les quatre nombres

$$1667,\quad 2486,\quad 4286,\quad 6167$$

satisfont ainsi à la question, et ce sont les seuls.

(C. BENOIT, instituteur à Mairon.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Ardin-Delteil; A. Bertrand ; P. Bonnot; V. Bourquin, collège de Pontarlier ; M. Boutry ; A. Bouzy, école primaire supérieure de Vervins ; J. Coupat ; L. Curt, école normale de Bourg ; L. Gourdet ; R. Henry, soldat au 156e, à Toul ; P. Herrmann, collège Chaptal ; H. Janois ; A. Jeannel ; H. Keefer ; E. Le Maigre ; J. Ménéchal ; M. Oger ; F. Pégorier ; L. Perret ; Gernez-Pfanmatter ; M. Rebeix ; Ch. Szabo, école réale de Györ ; G. Tastet, lycée de Pau ; R. Thomas ; P. Vincent, école d'arts-et-métiers d'Aix.]

ALGÈBRE

4285. — *Trouver un nombre carré parfait de huit chiffres, sachant que les deux nombres formés par les quatre premiers chiffres et les quatre autres chiffres sont consécutifs.*

Soit y^2 le carré parfait, x le nombre formé par les quatre premiers chiffres de droite et $x+1$ le nombre donné par les quatre chiffres de gauche ; on a successivement :

$$y^2=10000(x+1)+x=10001x+10000,$$
$$10001x=y^2-100^2,$$
$$x=\frac{(y+100)(y-100)}{137.73}.$$

Pour que x soit un nombre entier, il faut prendre

$$\begin{cases} y+100=137z \\ y-100=73t \end{cases}\quad\text{d'où}\quad\begin{cases} y=137z-100 \\ y=73t+100. \end{cases}$$

L'équation indéterminée

$$73t+100=137z-100$$

donne

$$t=\frac{137z-200}{73}=2z-3-\frac{9z-19}{73}=2z-3-p,$$

en posant $$p=\frac{9z-19}{73};$$

d'où $$z=\frac{73p+19}{9}=8p+2+\frac{p+1}{9}=8p+2+n,$$

en posant $$n=\frac{p+1}{9};$$

d'où $$p=9n-1.$$

Par suite

$$z = 8p + 2 + n = 8(9n - 1) + 2 + n = 73n - 6,$$

$$y = 137z - 100 = 137(73n - 6) - 100 = 10001n - 922.$$

Pour $n = 1$, on a

$$y = 10001 - 922 = 9079$$

et

$$x = \frac{9179.8979}{137.73} = 67.123 = 8241.$$

On a bien $\quad 9079^2 = 82428241$

Remarque. — En prenant x pour le nombre de gauche et $x+1$ pour celui de droite, on a

$$y^2 = 10000x + x + 1 = 10001x + 1,$$

d'où

$$x = \frac{(y+1)(y-1)}{73.137}.$$

En posant

$$\begin{cases} y - 1 = 137z \\ y + 1 = 73t, \end{cases}$$

on trouve $\quad y = 7810 \quad$ et $\quad x = 6099,$

ce qui donne $\quad 7810^2 = 60996100.$

(A. THORIN, à Tours.)

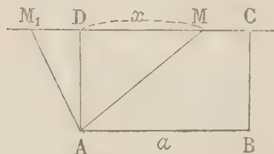
[Ont résolu partiellement la question (une solution) : MM. L. D., à Lille ; L. Gourdet ; H. Janois ; F. Pégorier ; R. Van Cauwenberghe.]

4329. — *Etant donné un rectangle* ABCD, *déterminer sur le côté* CD, *entre* C *et* D, *un point* M *tel que, si l'on mène* AM, *le volume engendré par le trapèze* ABCM *tournant autour de* AB *soit dans un rapport donné* m *avec le volume engendré par le triangle* ADM *tournant autour de* AD.

Discussion. — Montrer que, pour que le problème soit possible, m *doit rester supérieur à un certain minimum. — Interprétation des solutions négatives.*

On désignera les côtés AB *et* AD *du rectangle par* a *et* b *et on prendra pour inconnue la longueur* $DM = x$.

(*Bacc. lettres-math., Lyon, avril 1898.*)



Le volume engendré par le trapèze ABCM tournant autour de AB peut être considéré comme la différence entre les volumes engendrés par le rectangle et le triangle ADM tournant autour du même axe; ce volume a donc pour expression

$$\pi b^2.a - 2\pi bx.\frac{b}{3} = \pi b^2\left(a - \frac{2}{3}x\right).$$

Egalons ce volume à m fois le volume du cône engendré par le triangle ADM tournant autour de AD; nous obtenons l'équation

$$\pi b^2\left(a - \frac{2}{3}x\right) = m\,\frac{\pi x^2 b}{3} \qquad (1)$$

ou

$$mx^2 + 2bx - 3ab = 0.$$

Discussion. — L'équation précédente ayant ses termes extrêmes de signes différents admet deux racines réelles et de signes contraires.

Pour que la racine positive convienne au problème, il faut qu'elle soit inférieure ou égale à a, ce qui revient à exprimer que a est en dehors des racines, c'est-à-dire rend le premier membre de l'équation positif, signe du premier terme en x^2. On doit donc avoir

$$ma^2 - ab \geqslant 0$$

ou

$$m \geqslant \frac{b}{a}.$$

Cette condition remplie, le problème posé admet une solution, et n'en admet qu'une.

Interprétation de la solution négative. — Changeons dans la figure le sens de DM ; prenons donc sur le prolongement de CD au-delà de D un point M_1, et exprimons que le volume engendré par le trapèze ABCM, en tournant autour de AB est dans un rapport M avec le volume engendré par le triangle ADM_1 tournant autour de AD. On trouve ainsi

$$\pi b^2\left(a + \frac{2}{3}\,DM_1\right) = m\pi\,\frac{b}{3}.\overline{DM}_1^2. \qquad (2)$$

En comparant cette équation à l'équation (1), on voit que la quantité négative $-DM_1$ est racine de cette équation (1) ; c'est par suite la racine négative de cette équation.

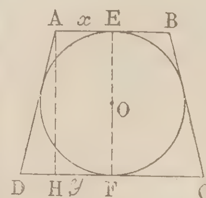
Donc, en portant à partir de D, en sens contraire de DC, une longueur égale à la valeur absolue de la racine négative de (1), on obtient un trapèze $ABCM_1$ et un triangle ADM_1 satisfaisant encore aux conditions de l'énoncé.

(M. REBEIX, lycée du Puy.)

[Ont résolu la même question : MM. Bayor ; C. Bourvéau ; M. Boutry; A. Bouzy ; B. Carrière ; F. Chuberre ; L. Curt ; Custaud ; G. Dazier ; L. Delavergnas ; J. Delpont; L. Durand ; G. Hiernaux ; J. Méhu ; E. Millet ; A. Nayel ; M. Oger ; L. Patin ; Remondet ; E. Sevin.]

4382. — *Circonscrire à une circonférence donnée un trapèze isocèle équivalent à un carré donné. Calculer les côtés du trapèze. Dans quel cas le problème est-il possible ?*

(*Bacc. lettres-math., Montpellier, avril 1898.*)



Soit ABCD un trapèze isocèle circonscrit au cercle donné O, de rayon R. On connaît la hauteur $EF = 2R$ de ce trapèze ; il suffit donc de calculer les demi-bases $AE = x$ et $DF = y$.

En désignant par a^2 l'aire donnée, un théorème connu fournit l'équation

$$2R(x + y) = a^2 ;$$

le triangle rectangle ADH donne

$$\overline{AD}^2 = \overline{DH}^2 + \overline{AH}^2,$$

ou

$$(x + y)^2 = (x - y)^2 + (2R)^2,$$

ou bien

$$xy = R^2,$$

relation qu'on aurait pu écrire de suite en observant que les droites AO et OD sont rectangulaires.

Le problème est ainsi résolu par le système

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \frac{a^2}{2R} \\ xy &= R^2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

qui montre que x et y doivent être racines de l'équation du second degré

$$z^2 - \frac{a^2}{2R}z + R^2 = 0. \qquad (2)$$

Il faut et il suffit que les racines de cette équation soient réelles et positives. En effet, en attribuant à x et y les valeurs de ces racines, on saura construire un trapèze isocèle ABCD de hauteur 2R et de bases $2x$ et $2y$. Puisque x et y satisfont à l'équation $xy = R^2$, ce trapèze sera circonscriptible à un cercle, dont le diamètre sera évidemment $EF = 2R$. Puisque d'autre part x et y vérifient l'équation $2R(x+y) = a^2$, l'aire de ce trapèze sera égale à a^2 ; ce sera donc le trapèze cherché.

On voit évidemment que les racines de l'équation (2) seront positives si elles sont réelles ; la seule condition de possibilité est

donc

$$\frac{a^4}{4R^2} - 4R^2 \geqslant 0 \qquad \text{ou} \qquad a^2 \geqslant 4R^2.$$

Lorsque $a^2 = 4R^2$, l'équation (2) a ses racines égales à R ; le trapèze devient le carré circonscrit, qui a, par suite, l'aire minimum.

D'après les équations (1), la recherche de ce minimum revient à chercher le minimum d'une somme $x + y$ quand le produit xy est constant. Comme x et y sont positifs, ce minimum est atteint pour $x = y$.

(L. PATIN.)

[Ont résolu la même question : MM. F. Leulliot ; A. Audibert, à Antibes.]

4412. — *Prouver que l'expression*

$$9\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 24\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 34$$

est un carré parfait.

En tenant compte de l'identité

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta,$$

l'expression peut s'écrire

$$9\left[\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 2\right] - 24\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 34,$$

ou

$$9\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 2 \times 12\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 16.$$

Or cette dernière expression représente visiblement le développement du carré de la quantité

$$3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - 4,$$

ce qui justifie l'énoncé.

(M. MATHIEU, instituteur à Vernoux.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Ardin-Delteil ; L. Barberot ; P. Barroué, lycée de Brest ; A. Bertrand ; P. Bonnot ; M. Boutry ; V. Cambureanu ; R. Cordier ; L. Curt, école normale de Bourg ; J. Dejonc ; L. Gourdet ; L. Guilhem, à Saö Paulo ; R. Henry ; P. Herrmann, collège Chaptal ; G. Hiernaux ; H. Janois ; A. Jeannel ; H. Keefer, école réale de Cannstatt ; E. Le Maigre ; F. Ladevèze, lycée de Toulouse ; G. Massoutié ; J. Ménéchal ; F. Pégorier ; Ch. Pellion, lycée de Brest ; Gernez-Pfanmatter ; P. Plisson ; J. Rigal, école primaire supérieure de Montcuq ; M. Rebeix ; A. Rozier, lycée de Bordeaux ; A. Smântânescu ; Ch. Szabo, école réale de Gyor ; G. Tastet ; R. Thomas ; P. Vincent, école d'arts-et-métiers d'Aix ; N. Yermoloff ; A. Vergnole.]

GÉOMÉTRIE

4349. — AC *et* BD *sont les diagonales d'un rectangle* ABCD.

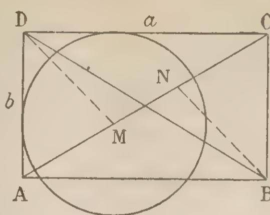
1° *Il existe sur* AC, *entre* A *et* C, *deux points* M *et* N *pouvant servir de centres à des circonférences tangentes à deux côtés adjacents du rectangle. Construire ces points et calculer leur distance* MN *en fonction des côtés* a *et* b *du rectangle.*

2° *On prend sur* AC, *entre* A *et* C, *un point quelconque* I *et on décrit sur* AI *et sur* CI *comme diamètres, deux circonférences qui rencontrent les côtés du rectangle les plus voisins de leurs centres, la première en* E *et en* F, *la seconde en* G *et en* H. *Les tangentes aux points* E, F, G, H *rencontrent la diagonale* BD *respectivement en* e, f, g, h. *Prouver que* $ef + gh = AC$.

3° *Prouver que la somme* $Ee + Ff + Gg + Hh$ *reste invariable lorsque* I *se déplace sur* AC *et évaluer cette somme en fonction de* a *et* b.

(*Ecole sup*re *des postes et des télégraphes, concours de 1898.*)

1° Les points cherchés M et N sont évidemment à l'intersection de la diagonale AC avec les bissectrices des angles ADC et ABC.



Ces points sont symétriques par rapport au centre du rectangle ; donc $AN = MC$ et

$$MN = AN - AM = MC - MA.$$

Or la bissectrice DM permet d'écrire

$$\frac{MC}{a} = \frac{MA}{b} = \frac{AC}{a+b},$$

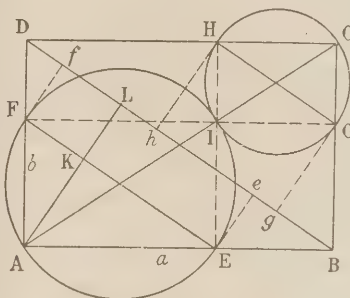
d'où

$$MC = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}, \qquad MA = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a+b};$$

enfin

$$MN = \frac{(a-b)\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}.$$

2° Les deux rectangles AEIF et IGCH sont semblables au rectangle ABCD, car ils ont avec ce dernier deux côtés communs et une diagonale commune ; par suite, les trois diagonales EF, GH, BD sont parallèles entre elles.



La figure EFfe ayant les angles en E, F droits et les côtés EF, ef parallèles, est un rectangle ; donc $ef = EF = AI$. De même $hg = HG = IC$.

Dès lors $ef + hg = AI + IC = AC$.

3° Abaissons la perpendiculaire AL sur BD et soit K son point de rencontre avec EF. On a

$$Ee = Ff = KL.$$

D'ailleurs les triangles rectangles AEK, HDh sont égaux comme ayant l'hypoténuse et un angle aigu égal : $AE = HD$ et $\widehat{E} = \widehat{D}$. Par suite

$$Gg = Hh = AK.$$

On déduit de là

$$Ee + Ff + Gg + Hh = 2(LK + KA) = 2AL.$$

Pour obtenir la valeur de la constante 2AL en fonction de a et b, il suffit d'égaler deux expressions de l'aire du triangle ABD, de côtés a et b, ce qui donne

$$\frac{AL \cdot BD}{2} = \frac{ab}{2},$$

d'où

$$2AL = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

(PAUL REBOUL, à Tours.)

[Ont résolu la même question : Mlle Maria Pont ; MM. G. Bacquel ; Bayor ; A. Bouzy, école primaire supérieure de Vervins ; J. Delpont ; M. Deschamps, collège de Cusset ; L. Gourdet ; L. M., à Vic ; X. Lacreuse ; F. Lambley, collège Chaptal ; E. Layes ; E. Le Maigre ; D. Limongelli, collège St-François-Xavier, Alexandrie ; F. Morel, collège de Cusset ; M. Oger ; L. Patin ; F. Pégorier ; L. Perret ; J. Pillard, lycée d'Orléans ; H. Plisson ; M. Rebeix, lycée du Puy ; J. Wittner.]

4371. — *On donne les trois côtés d'un triangle* ABC :

$$AB = c, \qquad BC = 2a \qquad \text{et} \qquad CA = b.$$

Un point M *décrit le côté* CB. *Soit* x *sa distance variable au milieu* D *de ce côté.*

1° *Pour quelles positions remarquables de* M *le rapport*

$$y = \frac{\overline{AM}^2}{\overline{CM}.\overline{MB}}$$

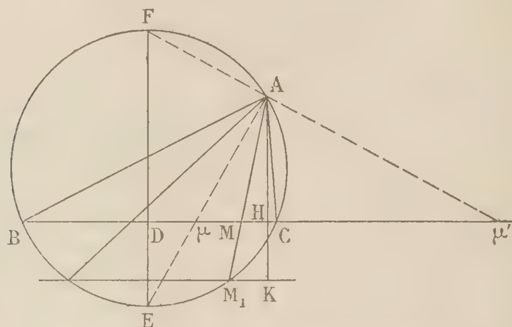
est-il minimum en valeur absolue?

2° *Démontrer que les deux positions* M' *et* M'' *pour lesquelles* y *prend des valeurs égales sont conjuguées harmoniques par rapport aux pieds des bissectrices issues du sommet* A.

Le rapport dont on demande d'étudier les variations s'écrit

$$y = -\frac{\overline{AM}^2}{\overline{MC}.\overline{MB}};$$

le dénominateur représente en grandeur et en signe la puissance du point M par rapport au cercle donné. Si donc on trace AM



et qu'on appelle N le second point de rencontre de cette droite et du cercle, on pourra écrire en grandeur et en signe

$$\overline{MC}.\overline{MB} = \overline{MA}.\overline{MM_1},$$

et par suite $$y = \frac{\overline{AM}}{\overline{MM_1}}.$$

Ces relations sont vraies quelles que soient la position du point M sur la droite CB indéfiniment prolongée et la position du point M_1 sur la circonférence donnée.

Menons la hauteur AH relative au côté BC; projetons-y les points M et M_1 en H et K; on pourra écrire en grandeur et en signe

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MM_1}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{HK}}.$$

Si on adopte sur AH la direction AH comme celle des segments positifs, $\overline{AH}$ sera positif, et $\overline{HK}$ sera positif ou négatif suivant que ce segment sera de même sens que AH ou de sens contraire.

Finalement, on a

$$y = \frac{AH}{\overline{HK}},$$

de telle sorte que les variations de y sont de sens contraire à celles de HK.

Or, lorsque M décrit la portion de droite CB, le point M_1 décrit l'arc CEB; le segment $\overline{HK}$ croît de 0 à un maximum positif, atteint lorsque M_1 se confond avec le milieu E de l'arc BC; à cet instant M se confond avec le pied μ de la bissectrice de l'angle A; le segment $\overline{HK}$ décroît ensuite de ce maximum à zéro. Lorsque le point M, continuant son mouvement, décrit le prolongement de CB à gauche, passe par l'infini, puis décrit le prolongement de CB à droite en se rapprochant de C, le point M_1 décrit l'arc de cercle BFC; le segment $\overline{HK}$ devient négatif; il décroît de 0 à un minimum négatif (maximum en valeur absolue), atteint lorsque N se confond avec F, c'est-à-dire lorsque M se confond avec le pied μ' de la bissectrice extérieure de l'angle A; le segment $\overline{HK}$ croît ensuite de ce minimum à zéro.

On conclut de là que le rapport y est infini quand M est en C; il décroît par valeurs positives à un minimum positif égal à $\frac{AH}{ED}$; il croît ensuite, et redevient infini quand M vient en B. Le point M dépassant B dans son mouvement, y devient négatif et croît de $-\infty$ à un certain maximum négatif égal à $-\frac{AH}{DF}$, atteint quand M est en μ'; la fonction y décroît ensuite par valeurs négatives, et redevient infinie lorsque M se rapproche de C.

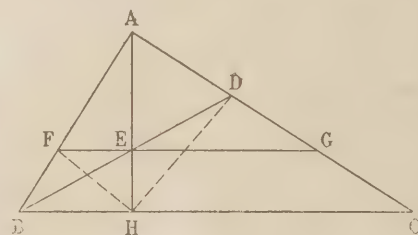
2° A deux valeurs égales de y correspondent deux valeurs égales de $\overline{HK}$, c'est-à-dire deux points M'_1 et M''_1 situés sur une même parallèle à BC. On en conclut que $A\mu$ et $A\mu'$ sont les bissectrices de l'angle $M'_1AM''_1$, et que par suite M' et M'', points d'intersection de BC avec AM'_1 et AM''_1, sont conjugués harmoniques par rapport à μ et μ'. (C. H.)

[Ont résolu la même question : MM. J. Delitala ; L. Gourdet.]

4415. — *Dans un triangle* ABC, *rectangle en* A, *on mène l'une des bissectrices* BD, *qui rencontre en* D *le côté* AC *et en* E *la hauteur* AH. *Par* E *on mène la parallèle* FG *à* BC, *limitée en* F *à* AB *et en* G *à* AC.

Démontrer que AD = GC *et que l'angle* DHF *est droit.*

Le côté AB et la parallèle FE au côté BC étant également inclinés sur la bissectrice BD de l'angle ABC, ces trois droites déterminent le triangle isocèle BEF tel que BF = FE. De même le triangle ADE est isocèle, puisque les angles D et E ont chacun pour complément une moitié de l'angle B.



Cela posé, la bissectrice BD permet d'écrire

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC},$$

puis les triangles semblables ABC, EAG,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{AG}.$$

Donc $$\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{AG},$$

ou, comme AD = AE,

$$DC = AG$$

et, en retranchant DG de part et d'autre,

$$GC = AD.$$

Pour établir que l'angle DHF est droit, il suffit de prouver que le quadrilatère AFHD est inscriptible.

Les triangles semblables AFE, ABH donnent

$$\frac{FE}{BH} = \frac{AE}{AH},$$

ou, comme FE = BF et AE = AD,

$$\frac{BF}{BH} = \frac{AD}{AH}.$$

Cette égalité montre que les angles égaux B et A des triangles BFH, ADH sont compris entre côtés proportionnels; ces triangles sont donc semblables, de sorte que

$$\widehat{BFH} = \widehat{ADH}.$$

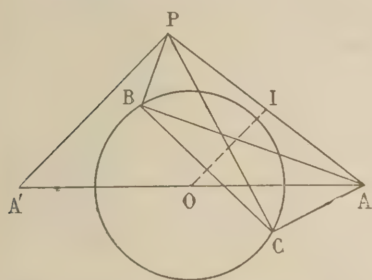
Le quadrilatère AFHD ayant dès lors les angles en F, D supplémentaires, est bien inscriptible.

(L. BLANC.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Ardin-Delteil ; P. Bonnot ; M. Boutry ; A. Bouzy, école primaire supérieure de Vervins ; Burgat, école normale d'Albertville ; R. Cordier, caporal au 2e Génie ; L. Curt, école normale de Bourg ; J. Dejonc ; R. Henry, soldat au 156e à Toul ; P. Herrmann, collège Chaptal ; G. Hiernaux, à Vouziers ; L. Gourdet ; A. Gourdin, école professionnelle de Saint-Aignan ; L. Guilhem, à Saò Paulo ; H. Janois ; A. Jeannel ; H. Keefer, école réale de Cannstatt ; E. Le Maigre ; M. Oger ; L. Perret ; F. Pégorier ; G. Pfanmatter ; M. Rebeix ; M. Rivière ; Ch. Szabo, école réale de Györ ; P. Vincent, école d'Arts-et-métiers d'Aix.]

4416. — *Etant donnés une circonférence de centre* O *et un point* A, *on joint ce point à deux points quelconques* B *et* C *de la circonférence par les droites* AB *et* AC. *En* B *on élève la perpendiculaire à* AB, *en* C *la perpendiculaire à* AC; *du point de rencontre* P *de ces perpendiculaires on abaisse la perpendiculaire sur* BC. *Prouver qu'elle rencontre le diamètre* OA *en un point* A′ *tel que* OA = OA′.

Les angles PBA et PCA étant droits, le quadrilatère PBCA est inscriptible dans un cercle ayant son centre I au milieu de PA. La corde BC étant commune à ce cercle et au cercle donné O est perpendiculaire à la ligne des centres IO : cette dernière est donc parallèle à la droite PA′ perpendiculaire à BC.



Or, dans le triangle PAA′, la parallèle au côté PA′ issue du milieu du côté PA passe comme on sait par le milieu du troisième côté A′A. Donc OA = OA′. C. q. f. d.

(BURGAT, école normale d'Albertville.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Ardin-Delteil ; R. Cordier, caporal au 2e Génie ; G. Hiernaux ; L. Gourdet ; A. Gourdin, école professionnelle de Saint-Aignan ; G. Massoutié ; M. Rebeix, lycée du Puy ; E. Rousselot.]

PHYSIQUE

4366. — *Un appareil photographique pour paysage a son écran à une distance fixe de 20 centimètres de l'objectif, dont il occupe ainsi le plan focal principal. On veut cependant s'en servir pour photographier un tableau, en réduisant au* $\frac{1}{5}$ *ses dimensions linéaires.*

Quelle sera la distance focale de la lentille à placer en avant de l'objectif et contre l'objectif?

Cette lentille étant biconvexe et ayant 1 mètre pour rayon commun de courbure de ses faces, quel est son indice?

Quel rayon commun devront avoir les faces d'une autre lentille biconvexe, de même verre, pour que, en l'accolant à la précédente, on obtienne une photographie du tableau en vraie grandeur?

(*Bacc. lettres-math., Bordeaux, avril 1898.*)

1° Appelons x la distance focale de la lentille à placer contre l'objectif. La convergence $\frac{1}{F}$ du système constitué par les deux lentilles est donnée par la formule

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{x} + \frac{1}{20}. \qquad (1)$$

D'un autre côté, on a, en appliquant les formules ordinaires des lentilles,

$$\frac{i}{0} = \frac{p'}{p} = \frac{1}{5} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{20} = \frac{1}{F}.$$

On tire de ces équations

$$F = \frac{100}{6}.$$

Portant cette valeur dans la relation (1), il vient

$$\frac{6}{100} = \frac{1}{x} + \frac{1}{20},$$

d'où $x = 100^{cm}$.

2° L'indice n de la lentille placée contre l'objectif est donné par l'équation générale de la convergence :

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right);$$

R étant égal à R′, on a

$$\frac{1}{100} = (n-1)\,\frac{2}{100},$$

d'où l'on tire $n = \frac{3}{2}$, indice du crown.

3° Soit y la distance focale de la nouvelle lentille accolée à la précédente ; la convergence $\frac{1}{F'}$ du système formé par les trois lentilles a pour valeur

$$\frac{1}{F'} = \frac{1}{20} + \frac{1}{100} + \frac{1}{y}.$$

On a aussi

$$\frac{i}{0} = \frac{p'}{p} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{20} = \frac{1}{F'}.$$

On en déduit $F' = \frac{20}{2} = 10^{cm}$.

Par suite $y = 25^{cm}$.

Le rayon commun que devront avoir les faces de la troisième lentille est donné par la formule

$$\frac{1}{y} = (n-1)\,\frac{2}{R}.$$

En remplaçant y par 25 et n par $\frac{3}{2}$, il vient

$$R = 25^{cm}.$$

(J. DELPONT.)

4385. — *D'un point* M *on laisse tomber un corps pesant suivant la verticale* MN. *Quand il a parcouru un espace* $MN = l$, *on laisse tomber du point* M *un deuxième corps pesant. Au bout de combien de temps les deux mobiles se trouveront-ils l'un de l'autre à une distance donnée* a?

Application : $l = 1^m$, $a = 10^m$, *accélération de la pesanteur* $g = 9^m,81$.

(*Bacc. lettres-math., Rennes, avril 1898.*)

Appelons x la durée de la chute du premier corps et y la durée de la chute du second au moment où ils sont l'un et l'autre à la distance donnée a.

Le premier corps étant tombé pendant x secondes, a parcouru un espace $e = \frac{1}{2}gx^2$. Le second a parcouru un espace $e' = \frac{1}{2}gy^2$. La différence entre ces deux espaces devant être égale à a, il vient

$$a = \frac{1}{2}g(x^2 - y^2). \qquad (1)$$

D'un autre côté, le premier corps est tombé seul pendant $x-y$ secondes et a parcouru l'espace l. On a donc

$$l=\frac{1}{2}g(x-y)^2. \qquad (2)$$

De l'équation (2) on tire

$$x-y=\sqrt{\frac{2l}{g}}. \qquad (3)$$

L'équation (1) peut s'écrire

$$a=\frac{1}{2}g(x+y)(x-y),$$

d'où, en remplaçant $x-y$ par sa valeur (3),

$$x+y=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{gl}}. \qquad (4)$$

Finalement, des équations (3) et (4) on tire

$$x=\frac{a+l}{\sqrt{2gl}}, \qquad y=\frac{a-l}{\sqrt{2gl}}.$$

Si $a>l$, les valeurs de x et de y sont toutes deux positives, le problème a une solution acceptable. Si $a<l$, y devient négatif; il n'y a pas de solution. Dans ce cas, en effet, le premier corps a parcouru une distance supérieure à l lorsqu'on laisse tomber le second.

Application : $a=10^{m}$, $l=1^{m}$, $g=9^{m},81$.

$$x=\frac{11}{\sqrt{19,62}}=2^{sec},48, \qquad y=\frac{9}{\sqrt{19,62}}=2^{sec},03.$$

(A. CHAPRON.)

(Ont résolu la question : Mlle M. Pont; MM. A. Audibert; Beynas; E. Clément; Jarrige; E. Le Maigre; E. Léotard; F. Leulliot; E. Löffler; E. Madet; A. Nayel; M. Oger; E. Roncaglia; G. Tastet; Thibaulot.)

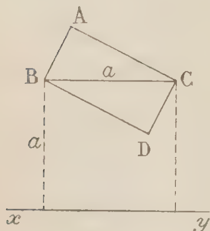
CONCOURS DE 1898 (*Suite*)

ÉCOLE NATIONALE ET SPÉCIALE DES BEAUX-ARTS

SECTION D'ARCHITECTURE

Mathématiques.

I. — **4422**. Étant donné un rectangle ABDC dont un des côtés AC est double du côté AB et dont la diagonale BC est donnée et égale à a, on considère, dans son plan, une parallèle xy à la diagonale BC, à la distance a de cette droite, et on fait tourner le rectangle autour de xy. On demande :



1° De trouver l'expression de la surface S du solide engendré par le triangle ABC, de la surface S' du solide engendré par le rectangle, du volume V engendré par le rectangle;

2° De calculer par logarithmes la longueur a, sachant que $V=\frac{1^{mc}}{5432}$; mettre tous les calculs.

II. — **4423**. Former, résoudre et discuter suivant la grandeur de m, l'équation du second degré qui donne les valeurs de x qui satisfont aux deux équations en x et y

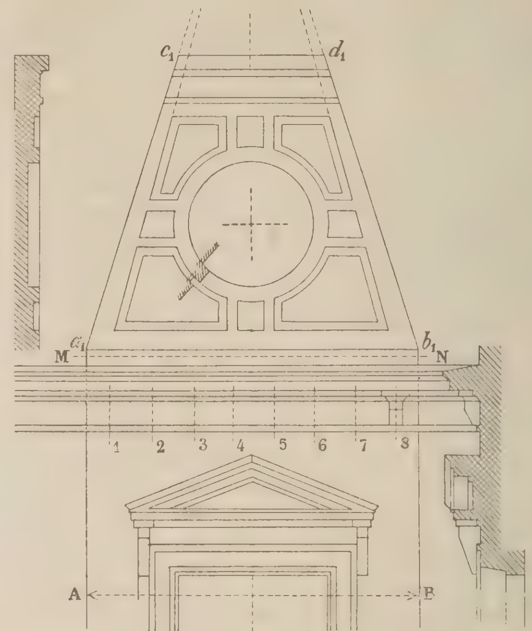
$$3x^2-5xy+2y^2-7x+6y+5=0,$$
$$y+5=m(x+2);$$

mettre tous les calculs.

(*1re session, 30 avril. — Durée : 2 heures.*)

Géométrie descriptive.

Etablir les projections horizontale et verticale d'une salle en forme d'hexagone régulier couverte par un plafond en tronc de pyramide régulière à base hexagonale.



Echelle (par rapport au dessin remis aux candidats) : $\frac{2}{9}$.

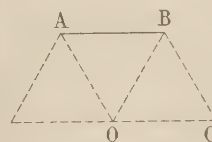
Les éléments de l'épure sont :

1° La projection verticale d'une face (partie supérieure) de la salle, vue de front;

2° Le profil, pris sur l'axe de ladite face, rendant compte de la fenêtre à fronton et de l'entablement à consoles;

3° Le rabattement sur le plan vertical de projection de l'une des faces du plafond pyramidal, avec ses profils.

L'épure demandée comprendra :



1° La projection horizontale de la salle montrant le plafond; la ligne de terre sera prise en MN, et la projection horizontale se limitera à la partie sise au-dessus de MN, c'est-à-dire au plafond ; il suffira de projeter deux sixièmes du plan, ABCO de la figure ci-contre.

2° La projection verticale des mêmes parties, faces verticales et plafond.

Feuille demi-grand aigle, cadre limite droit.

Nota. — Les candidats sont invités à tracer sur l'épure, soit à l'encre rouge, soit au crayon, les lignes indiquant toutes les constructions, et à l'encre noire les résultats.

(*1re session, 2 mai. — Durée : 8 heures.*)

ÉCOLE NORMALE PRIMAIRE SUPÉRIEURE DE FONTENAY-AUX-ROSES

Mathématiques.

I. — Comment reconnait-on si des fractions ordinaires données :

$$\frac{a}{d},\ \frac{b}{d},\ \frac{c}{d}$$

sont réduites au plus petit dénominateur commun ?

Exemple : $\frac{589}{1067}$, $\frac{1537}{1067}$, $\frac{1313}{1067}$.

II. — Qu'appelle-t-on fraction irréductible ? Énoncer et démontrer le théorème fondamental relatif aux fractions irréductibles.

III. — **4424.** — On considère un cercle de centre fixe C et de rayon variable R. Trouver le lieu des points communs aux cercles ayant pour centres les points fixes A, B et coupant à angle droit le premier cercle, quand son rayon R varie.

Remarque. — On dit que deux cercles se coupent à angle droit quand leurs tangentes en un point commun sont perpendiculaires.

(4 juillet, de 8 h. à midi.)

Physique, Chimie et Histoire naturelle.

I. — De l'aimantation par les courants. — Idée des applications auxquelles elle donne lieu.

II. — De l'oxyde de carbone; sa préparation, ses propriétés physiques et chimiques les plus importantes, son rôle en métallurgie.

III. — Le sang ; sa composition, son rôle.

(6 juillet, de 8 h. à midi.)

ÉCOLE NORMALE PRIMAIRE SUPÉRIEURE DE SAINT-CLOUD

Mathématiques.

I. — **4425.** Démontrer que le produit de trois nombres entiers consécutifs est toujours divisible par 504 si le nombre intermédiaire est un cube parfait.

II. — **4426.** Résoudre et discuter le système des trois équations

$$(m+2)x-(3m+4)y-z=7m^2-6m-16,$$
$$-(3m+4)x+(m+2)y-z=7m^2-6m-16,$$
$$x+y+(2m+1)z+7m^2-6m-16=0\,;$$

ceci fait, chercher entre quelles limites doit varier m pour que les valeurs de x, de y, de z soient comprises entre $(73-70m)$ et $(70m-67)$.

III. — **4427.** Étant donnés deux points O et P, on considère, en géométrie plane, tous les cercles qui passent par O et qui sont tels que les deux tangentes menées à chacun d'eux par le point P soient rectangulaires : 1° déterminer géométriquement un cercle répondant aux conditions précédentes, sachant en outre que son rayon est donné ; 2° déterminer par le calcul le centre d'un cercle répondant aux conditions primitivement données, sachant que ce centre doit se trouver sur une droite donnée AB rencontrant la droite OP en un point A et faisant avec cette droite un angle donné α. — Discuter. — On posera $OP=d$, $OA=a$.

(29 juin, de 8 h. à midi.)

Physique, Chimie et Histoire naturelle.

I. — Réflexion totale. — Dans quelles circonstances se produit-elle ? — Applications.

II. — **4428.** Un ballon, dont le volume est supposé invariable, contient de l'air saturé d'humidité ; la température est 10°. Il communique avec l'air extérieur par une étroite ouverture munie d'un robinet. Celui-ci étant ouvert, on porte le ballon à la température de 20°. On demande quel sera l'état hygrométrique de l'air intérieur.

La tension maximum de la vapeur à 10° est 9mm,2 et à 20° elle est 17mm,4. La pression atmosphérique extérieure reste constante pendant l'expérience.

III. — Phosphore. — Acide phosphorique.

IV. — Division du règne végétal en embranchements et sous-embranchements. — Préciser les caractères généraux et les enchaînements de ces groupes. — Indiquer, autant que possible, l'époque géologique où apparurent les représentants de chacun d'eux et celle où ils ont prédominé.

(1er juillet, de 8 h. à midi.)

CERTIFICAT D'APTITUDE A L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES

Mathématiques.

I. — Démontrer que, si deux nombres m et n, substitués à x dans le premier membre de l'équation du second degré

$$ax^2+bx+c=0,$$

donnent des résultats de signes contraires, l'équation proposée a deux racines distinctes dont l'une est comprise entre m et n.

II. — **4429.** Soit un parallélogramme ABCD, dans lequel la diagonale BD est perpendiculaire sur les côtés parallèles AD, BC. On donne la longueur l de la diagonale AC et la distance d des côtés parallèles AB, CD :

1° Calculer les longueurs des côtés AB, BC et de la diagonale BD ;
2° Construire géométriquement le parallélogramme.

(8 juillet, de 8 h. 1/2 à midi 1/2.)

Physique et Chimie.

I. — Équivalence entre une quantité de chaleur et une quantité d'énergie mécanique. — Exposer l'une des déterminations expérimentales de l'équivalent mécanique de la calorie.

II. — **4430.** Quelle vitesse initiale x faudrait-il imprimer à une masse m pour que la destruction complète de la force vive qu'elle posséderait après une durée t de chute verticale, à Paris, dans le vide, produise la même quantité de chaleur qu'un courant électrique d'intensité I, passant pendant un temps T dans un fil métallique de résistance constante R ?

Calculer x à l'aide des valeurs numériques suivantes :

$m=100^{g}$, $t=5^{s}$, $I=6^{amp}$, $T=20^{s}$.

Résistivité du métal (1cm de fil de 1cq de section) $r=\frac{81}{10^7}$ ohms.

Longueur du fil $l=49^{cm}$; section du fil $s=0^{cq},001$.
1 joule $=10^7$ ergs.
Définir ensuite les unités employées dans ce calcul.

III. — Étudier les propriétés de la *soude* et du *carbonate de sodium*, en insistant sur les propriétés qui sont communes à d'autres composés, en faisant connaître les lois ou les principes qu'elles vérifient et en rattachant les usages des deux corps aux propriétés étudiées.

(9 juillet, de 8 h. 1/2 à midi 1/2.)

ÉCOLE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES DE PARIS

Mathématiques.

ARITHMÉTIQUE

I. — Démontrer que si deux nombres a et b sont premiers entre eux, $a+b$ et ab sont aussi premiers entre eux.

II. — Trouver deux nombres, sachant que leur somme est 28 et leur plus petit commun multiple 40.

ALGÈBRE

I. — Trouver un polynome entier en x, du troisième degré, qui s'annule pour $x=1$ et pour $x=2$, et qui, étant divisé par x^2+4x+3, donne pour reste $2x+5$.

II. — Résoudre l'équation

$$\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=\frac{(a+b)^2}{ab}.$$

GÉOMÉTRIE

I. — On considère un triangle ABC, le cercle circonscrit à ce triangle

et l'intersection H de ses hauteurs. — Montrer que le second point, où la droite CH coupe le cercle est symétrique de H par rapport à AB.

II. — **4431**. On considère tous les trièdres T qui sont trirectangles et dont les trois arêtes rencontrent un cercle donné. En appelant S le sommet de l'un quelconque de ces trièdres, H la projection de S sur le plan du cercle, P et Q les intersections du cercle avec une droite passant par H, démontrer la relation

$$\overline{SH}^2 = \frac{\overline{HP} \times \overline{HQ}}{2}.$$

Trouver le lieu de ceux des sommets des trièdres T qui sont à une distance donnée du plan du cercle. — Discussion.

Physique.

I. — Actions chimiques produites par les courants. — Piles électriques.

II. — **4432.** Un cycliste sur sa machine se déplace sur une route horizontale avec une vitesse de 8 kilomètres à l'heure. Il s'engage, avec cette vitesse, sur une pente telle que la variation de niveau soit de 2 centimètres par mètre de route. — A cet instant, le cycliste lâche les pédales et n'agit plus sur sa machine. On demande :

1° Quelle sera la vitesse du cycliste lorsqu'il aura parcouru, sur la route, une distance de 50 mètres, à partir de l'origine de la pente.

2° Combien de temps il aura mis pour parcourir ces 50 mètres.

On traitera d'abord le problème sans tenir compte des forces de frottement. On le traitera une seconde fois en tenant compte de ces forces et en admettant que le frottement produit le même effet qu'une force constante de 1 kilogramme agissant sur le cycliste en sens inverse de la vitesse et tendant à l'arrêter.

Le poids du cycliste et de sa machine est de 80 kilogrammes; l'accélération due à la pesanteur est de 9,8, en prenant comme unités le mètre et la seconde.

Chimie.

I. — Phosphore ordinaire et phosphore rouge; dresser un tableau comparatif des caractères physiques et des propriétés chimiques de ces deux variétés ; décrire brièvement les méthodes de préparation et formuler les équations permettant de donner une explication des diverses réactions.

II. — **4433.** — 10^{gr} d'un mélange sec formé d'azotate de potassium et d'azotate de sodium sont traités par de l'acide sulfurique en excès vers 140°-150° ; le produit volatil obtenu, en admettant l'absence de réaction secondaire, est condensé en totalité, puis neutralisé par une solution aqueuse ammoniacale.

On évapore à sec, et le résidu solide est ensuite décomposé en le chauffant avec précaution vers 250°.

Tout le gaz formé dans cette décomposition, mesuré sec à 0° et 760^{mm}, occupe un volume de $2^{lit},395$.

Formuler les réactions et donner le poids de chacun des azotates contenus dans le mélange.

Poids atomiques : $H = 1$; $O = 16$; $Az = 14$; $Na = 23$; $K = 39$.
Densité de l'hydrogène, 0,0694.
Poids d'un litre d'air à 0° et 760, $1^{gr},293$.

(*12 et 13 juillet. — Durées : mathématiques, 4 h. ; physique, 4 h. ; chimie, 1 h.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4434. — Trouver un caractère de divisibilité par 17 en décomposant un nombre donné en tranches de deux chiffres à partir de la droite.

4435. — L'expression

$$7^{2n+1} + 2^{4n+2}$$

est ou non divisible par 65 selon que n est un nombre entier pair ou impair.

4436. — Démontrer que les nombres de la suite 49, 4489, 444889, ... formés en intercalant 48 au milieu du nombre précédent, sont tous des carrés parfaits.

(J. Peyret, école normale d'Auch.)

4437. — Décomposer en facteurs l'expression

$$(ax + by + az)^3 + (bx + ay + bz)^3.$$

4438. — Mettre sous forme de produit de facteurs le polynome

$$(x + y)^3 + 3xy(1 - x - y) - 1.$$

4439. — Trouver la somme

$$100^2 - 99^2 + 98^2 - \ldots + 2^2 - 1^2.$$

4440. — Trouver trois nombres entiers sachant qu'ils forment une progression arithmétique telle que le quotient de leur produit par leur somme est égal au double de la raison.

(L. Largeteau.)

4441. — On considère une circonférence de diamètre AB ; on construit un trapèze isocèle tel que trois de ses côtés soient tangents à la circonférence, l'un d'eux étant parallèle à AB ; le quatrième côté se trouve sur AB. Déterminer la demi-longueur x du côté parallèle à AB de façon que la surface engendrée par le périmètre du trapèze en tournant autour de AB soit égale à une surface donnée.

Interpréter les valeurs de x plus grandes que R.

4442. — Deux cercles étant dans un même plan et les tangentes communes intérieures se coupant à angle droit, l'aire du triangle formé par ces tangentes et une tangente commune extérieure est équivalente au rectangle des rayons.

(J. M. Lagarde, à Tournus.)

4443. — Construire un triangle connaissant le pied M de la médiane AM, le pied H de la hauteur BH et le milieu D du segment de hauteur compris entre l'orthocentre et le sommet C.

(L. Fournier, lycée de Rennes.)

4444. — Soit a l'arête d'un cube ABCDA'B'C'D'. En désignant par α, α', β, β', γ, γ', δ, δ' les distances des sommets opposés A et A', B et B', etc. à un même plan qui ne coupe pas le cube, on a

$$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 - 2\gamma\gamma' - 2\delta\delta' = 2a^2.$$

4445. — Sur une droite donnée AB comme base, on peut généralement construire d'un même côté six triangles semblables à un triangle donné. Démontrer que les six sommets de ces triangles opposés à AB sont sur une même circonférence.

(E. Lemoine.)

4446. — On donne un point A, un cercle de centre O et une droite XY perpendiculaire à OA ; on construit le pôle C d'une sécante ABD par rapport au cercle O ; on projette enfin le point C sur XY en E, et on demande :

1° Le lieu du point M, projection du point E sur la sécante variable ABD ;

2° Le lieu du point P où la sécante ABD rencontre la droite OE ;

3° De discuter le lieu du point P ;

4° De trouver la position que doit occuper la droite XY pour que le lieu du point M coïncide avec celui du point P.

(Louis Hémois.)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

23e Année. — N°   JOURNAL   Paris, le 15 Octobre 1898.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

ARITHMÉTIQUE

4182. — 1° *Réduire à leur plus simple expression les fractions*

$$\frac{56272}{263775} \quad et \quad \frac{9764}{36615};$$

2° *Déterminer le plus petit nombre fractionnaire irréductible qui, divisé par chacune de ces fractions, donne des quotients entiers;*

3° *Déterminer le plus petit nombre décimal, puis le plus petit nombre entier remplissant les mêmes conditions.*

(*Certif. d'apt. au profess. des écoles normales, aspirants, 1897.*)

1° Pour réduire les deux fractions à leur plus simple expression, il suffit de supprimer le plus grand commun diviseur aux deux termes de chacune d'elles. En employant la méthode ordinaire, on a

	4	1	2	5
263775	56272	38687	17585	3517
38687	17585	3517	0	

Les deux termes de la première fraction admettent ainsi 3517 pour plus grand commun diviseur, et la fraction se réduit à

$$\frac{16}{75}.$$

En opérant de même sur la seconde fraction, on obtient la fraction réduite $\frac{4}{15}$.

2° Soit x un nombre quelconque tel qu'on ait

$$x = \frac{16}{75}\cdot q, \qquad x = \frac{4}{15}\cdot q',$$

q et q' désignant des quotients entiers.

En égalant ces deux valeurs, il vient

$$\frac{16q}{75} = \frac{4q'}{15},$$

d'où

$$q' = \frac{4q}{3}.$$

Cette valeur de q' n'est entière qu'autant que q est un multiple de 3. En posant alors $q = 3n$, le nombre cherché est de la forme

$$x = \frac{16 \times 3n}{75} = \frac{16n}{15}.$$

Le plus petit nombre fractionnaire x correspond visiblement à $n = 1$, et est égal à $\frac{16}{15}$.

3° Pour que le nombre x représente un nombre décimal ordinaire, il faut et il suffit que son dénominateur ne renferme d'autres facteurs premiers que 2 ou 5. Cette condition est remplie lorsqu'on prend $n = 3n'$, ce qui donne

$$x = \frac{16n'}{5}.$$

Le plus petit nombre décimal, qui correspond à $n' = 1$ est donc $\frac{16}{5} = 3,2$.

Les valeurs entières de x sont évidemment de la forme $16n''$, et la plus petite est 16.

(J. BORDAS, à Tulle.)

[Ont résolu cette question : MM. L. Curt ; N. Delhotel ; A. Desplat ; P. Gervaiseau ; G. Hiernaux ; H. Janois ; E. Louvet ; J. Ménéchal ; M. Oger ; L. Perret ; P. Tribier ; H. Valdenaire ; P. Vincent.]

4435. — *L'expression*

$$7^{2n+4} + 2^{4n+2}$$

est ou non divisible par 65 selon que n est un nombre entier pair ou impair.

Première solution. — On a successivement

$$7^{2n+4} = (7^2)^{n+2} = 49^{n+2} = (65 - 2^4)^{n+2}.$$

Si n est pair, le terme -2^4 élevé à la puissance d'exposant pair $n+2$ devient positif, et l'on a

$$\begin{aligned} 7^{2n+4} &= m.65 + 2^{4(n+2)} \\ &= m.65 + 2^{4n+2}.2^6 \\ &= m.65 + 2^{4n+2}(65 - 1) \\ &= m.65 - 2^{4n+2}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'expression donnée est bien divisible par 65.

Si n est impair, on a

$$\begin{aligned} 7^{2n+4} &= m.65 - 2^{4n+2} \\ &= m.65 - 2^{4n+2}(65 - 1) \\ &= m.65 + 2^{4n+2}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'expression énoncée est égale à un multiple de 65 augmenté d'une puissance de 2, et par suite ne peut être divisible par 65.

Remarque. — Il résulte de ce qui précède que si n est impair, on a

$$7^{2n+4} - 2^{4n+2} = m.65.$$

(J. SIRE, à Belvernc.)

Deuxième solution. — Nous ne changeons pas les conditions de divisibilité en multipliant l'expression donnée par 2^{2n+4}, nombre premier avec 65. Elle devient alors

$$(2\times 7)^{2n+4} + 2^{6n+6} = [(2\times 7)^2]^{n+2} + (2^6)^{n+1}.$$

Or

$$(2\times 7)^2 = 196 = m.65 + 1;$$

donc

$$[(2\times 7)^2]^{n+2} = m.65 + 1,$$

quel que soit n.

D'autre part $2^6 = 64 = m.65 - 1$;

donc $(2^6)^{n+1} = m.65 + (-1)^{n+1}$.

La somme $[(2 \times 7)^2]^{n+2} + (2^6)^{n+1}$

ne sera donc divisible par 65 que si le second terme est de la forme $m.66 - 1$; cette condition exige que $n+1$ soit impair ou n pair.

(BOUZY, instituteur à Vervins.)

[Ont résolu cette question : MM. Burgat, école normale d'Albertville ; Delbès, administration des Postes, Paris ; Ménechal, instituteur au Bugue ; Nicolæsac, lycée de Craïova ; Rebeix, lycée du Puy ; Tastet, lycée de Bordeaux ; L. Barberot ; M. Drovin.]

4436. — *Démontrer que les nombres de la suite* 49, 4489, 444889, *formés en intercalant* 48 *au milieu du nombre précédent, sont tous des carrés parfaits.*

Le n^e nombre de la suite peut être considéré comme celui qui vient immédiatement après le nombre formé par n chiffres 4 suivi de n chiffres 8. Ce nombre peut donc s'écrire

$$N = \overbrace{44...4}^{n} \times 10^n + \overbrace{88...8}^{n} + 1$$

$$= 4 \times \overbrace{11...1}^{n} \times 10^n + 8 \times \overbrace{11...1}^{n} + 1.$$

Or $$\overbrace{11...1}^{n} = \frac{\overbrace{99...9}^{n}}{9} = \frac{\overbrace{100...0}^{n+1} - 1}{9} = \frac{10^n - 1}{9}.$$

Par suite

$$N = \frac{4(10^n - 1)10^n + 8(10^n - 1)}{9} + 1$$

$$= \frac{4 \times 10^{2n} + 4 \times 10^n + 1}{9} = \left(\frac{2 \times 10^n + 1}{3}\right)^2.$$

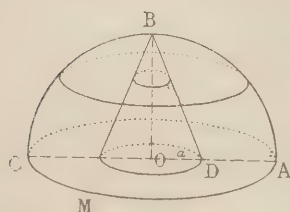
Le numérateur $2 \times 10^n + 1$ représente le nombre 2000...01 dont le tiers est visiblement 666...7. On voit ainsi que tous les nombres de la suite, à partir du second, sont les carrés parfaits des nombres entiers de la forme 666...7.

(V. BONZOM, au Broca de Saint-Paul.)

[Ont résolu la même question : MM. Drovin ; G. Foucry ; J. Ménéchal ; M. Oger ; Remondet ; M. Rebeix ; J. Rigal.]

ALGÈBRE

4364. — *On donne une demi-sphère* ABC *et un cône de révolution ayant son sommet au pôle* B *et sa base dans le plan du grand cercle* AMC.

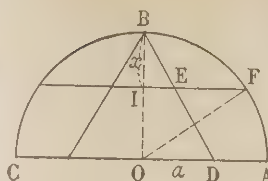


R *étant le rayon de la sphère et* a *celui de la base du cône, on demande de couper la figure par un plan parallèle à la base de manière que la surface de l'anneau compris entre les deux sections ait une valeur donnée. — Maximum de cette surface.*

Cas particulier : $a = R$.

(*Bacc. lettres-math., Alger, avril 1898.*)

Prenons comme plan de figure un plan passant par l'axe BO du cône, et soit IEF la trace du plan sécant sur ce plan.



Nous allons calculer la distance $BI = x$ en fonction des données R, a et de la surface πm^2 de l'anneau compris entre les deux cercles de rayons IE et IF. On a par définition

$$\pi m^2 = \pi \overline{IF}^2 - \pi \overline{IE}^2.$$

Or $\overline{IF}^2 = \overline{OF}^2 - \overline{OI}^2 = R^2 - (R - x)^2 = 2Rx - x^2$; d'autre part les triangles semblables BIE, BOD donnent

$$\frac{IE}{a} = \frac{x}{R}, \qquad \text{d'où} \qquad IE = \frac{ax}{R}.$$

L'équation du problème est donc

$$m^2 = 2Rx - x^2 - \frac{a^2x^2}{R^2}$$

ou $$f(x) = (a^2 + R^2)x^2 - 2R^3x + m^2R^2 = 0. \qquad (1)$$

Pour qu'une valeur de x convienne au problème, il faut et il suffit qu'elle soit réelle, positive et inférieure à R.

Formons $f(0)$, $f(R)$ et le discriminant δ de l'équation. On obtient

$$f(0) = m^2R^2, \qquad f(R) = (m^2 + a^2 - R^2)R^2,$$

$$\delta = R^6 - m^2R^2(a^2 + R^2) = R^2[R^4 - m^2(a^2 + R^2)].$$

Pour que le problème admette une seule solution, il faut et il suffit qu'on ait

$$f(0).f(R) < 0$$

ou $$m^2 < R^2 - a^2,$$

condition qui ne peut être remplie qu'en supposant $a < R$.

Pour qu'il admette deux solutions, on doit avoir à la fois

$$f(0) > 0, \qquad f(R) > 0,$$

$$\delta \geqslant 0, \qquad 0 < \frac{R^3}{a^2 + R^2} < R.$$

La première et la dernière inégalité étant toujours vérifiées, ces quatre conditions se réduisent aux deux suivantes :

$$m^2 > R^2 - a^2, \qquad m^2 \leqslant \frac{R^4}{a^2 + R^2}.$$

Comme $R^2 - a^2 < \frac{R^4}{a^2 + R^2}$, ces inégalités sont toujours compatibles, de sorte qu'il existe deux solutions lorsque

$$R^2 - a^2 < m^2 \leqslant \frac{R^4}{a^2 + R^2},$$

la première condition étant satisfaite d'elle-même si l'on a $a > R$.

On voit ainsi que l'anneau acquiert une surface maximum égale à

$$\frac{\pi R^4}{a^2 + R^2},$$

et correspondant à $\delta = 0$ ou $x = \frac{R^3}{a^2 + R^2}$.

Dans le cas particulier $a = R$, il y a toujours deux solutions, puisque m^2 peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et $\frac{R^2}{2}$; pour cette dernière valeur (maximum de m^2), on a $x = \frac{R}{2}$, et le plan sécant est alors équidistant du sommet et de la base du cône.

(J. DELPONT, à Beaumont.)

[Ont résolu cette question : MM. C. Bourvéau ; A. Bouzy ; A. Chapron ; E. Le Maigre ; C. Marie ; A. Nayel ; L. Patin ; A. Sambucy ; A. Smantanescu ; G. Tastet.]

4423. — *Former, résoudre et discuter suivant la grandeur de m, l'équation du second degré qui donne les valeurs de x qui satisfont aux deux équations en x et y*

$$3x^2 - 5xy + 2y^2 - 7x + 6y + 5 = 0,$$
$$y + 5 = m(x + 2);$$

mettre tous les calculs.

(*École des Beaux-Arts, section d'architecture, 1898.*)

De la seconde équation on tire

$$y = mx + 2m - 5;$$

portant cette valeur dans la première, celle-ci devient

$$3x^2 - 5x(mx + 2m - 5) + 2(mx + 2m - 5)^2 - 7x + 6(mx + 2m - 5) + 5 = 0.$$

Ordonnons cette équation par rapport aux puissances décroissantes de x; le coefficient de x^2 est

$$3 - 5m + 2m^2;$$

le discriminant de ce trinome en m est $25 - 24 = 1$; il a donc ses racines rationnelles et peut par conséquent se décomposer en deux facteurs rationnels. On le voit de suite en écrivant

$$3 - 3m - 2m + 2m^2 = 3(1 - m) - 2m(1 - m) = (3 - 2m)(1 - m).$$

Le coefficient de x est

$$-5(2m - 5) + 4m(2m - 5) + 6m - 7 = 8m^2 - 24m + 18$$
$$= 2(4m^2 - 12m + 9) = 2(2m - 3)^2.$$

Enfin le terme indépendant de x s'écrit

$$2(2m - 5)^2 + 6(2m - 5) + 5.$$

En considérant $2m - 5$ comme une variable, le discriminant de ce trinome en $2m - 5$ est égal à $9 - 10 = -1$; il n'a donc pas de racines réelles et il n'y a qu'à l'ordonner par rapport à m, ce qui donne

$$8m^2 - 28m + 25.$$

L'équation en x s'écrit donc

$$(2m - 3)(m - 1)x^2 + 2(2m - 3)^2 x + 8m^2 - 28m + 25 = 0.$$

Discussion. — Pour que cette équation ait ses racines réelles, il faut et il suffit que son discriminant soit positif; il a pour valeur

$$(2m - 3)^4 - (2m - 3)(m - 1)(8m^2 - 28m + 25)$$
$$= (2m - 3)[(2m - 3)^3 - (m - 1)(8m^2 - 28m + 25)]$$
$$= (2m - 3)[8m^3 - 36m^2 + 54m - 27 - (8m^3 - 36m^2 + 53m - 25)]$$
$$= (2m - 3)(m - 2).$$

Ce dernier résultat montre immédiatement que pour toute valeur de m non comprise entre $\frac{3}{2}$ et 2, ρ est positif ou nul, et dans ce cas les valeurs de x sont réelles.

Pour déterminer le signe de ces valeurs, formons leur produit P et leur somme S. On a

$$P = \frac{c}{a} = \frac{8m^2 - 28m + 25}{(m - 1)(2m - 3)},$$
$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{2(2m - 3)}{m - 1}.$$

Le numérateur de P ne peut changer de signe, car en l'égalant à zéro, on obtient l'équation

$$8m^2 - 28m + 25 = 0,$$

dont les racines sont imaginaires; d'ailleurs en faisant $m = 0$, on voit que ce numérateur est positif.

Dès lors, P prend le signe du produit

$$(m - 1)(2m - 3),$$

tandis que S prend le signe contraire.

Les valeurs remarquables de m sont donc $\frac{3}{2}$, 2 et 1 ou, par ordre de grandeur croissante, 1, $\frac{3}{2}$, 2. Le tableau suivant résume alors la discussion :

$-\infty < m < 1$,	$\rho > 0$,	$P > 0$.	Racines réelles et négatives.
$1 < m < \frac{3}{2}$,	$\rho > 0$,	$P < 0$.	Racines réelles et de signes contraires.
$\frac{3}{2} < m < 2$,	$\rho < 0$.		Racines imaginaires.
$2 < m < +\infty$,	$\rho > 0$,	$P > 0$.	Racines réelles et négatives.

Les deux racines ont pour expression

$$x = \frac{-(2m - 3)^2 \pm \sqrt{(2m - 3)(m - 2)}}{(m - 1)(2m - 3)}.$$

(C. DUPUIS.)

[Ont résolu la même question : M. J. Sire, à Belverne ; Remondet.

4437. — *Décomposer en facteurs l'expression*

$$(ax + by + az)^3 + (bx + ay + bz)^3.$$

Il suffit pour cela d'appliquer l'identité

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2),$$

en posant

$$\alpha = ax + by + az, \qquad \beta = bx + ay + bz.$$

On obtient ainsi

$$\alpha^3 + \beta^3 = (a + b)(x + y + z)[(ax + by + az)^2 - (ax + by + az)$$
$$\times (bx + ay + bz) + (bx + ay + bz)^2]$$
$$= (a + b)(x + y + z)[(a^2 - ab + b^2)$$
$$\times (x^2 + y^2 + z^2 + 2xz - xy - yz) + 3aby(x + y)].$$

Le facteur entre crochets ne peut être décomposé en d'autres facteurs réels, attendu que le trinome $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2$ ne s'annule pour aucune valeur réelle de α ou β.

(F. PÉGORIER, à Cette.)

[M. Rebeix, au Puy, a résolu la même question.]

4439. — *Trouver la somme*

$$100^2 - 99^2 + 98^2 - \ldots + 2^2 - 1^2.$$

D'après l'identité $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$, on a

$$\overline{100}^2 - \overline{99}^2 = (100 + 99)(100 - 99) = 100 + 99.$$

On aurait de même

$$\overline{98}^2 - \overline{97}^2 = 98 + 97,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$2^2 - 1 = 2 + 1.$$

La somme demandée n'est donc autre chose que la somme des 100 premiers nombres entiers. En lui appliquant la formule connue, on obtient

$$S = \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{100 \times 101}{2} = 5050.$$

(A. VERGNOLE, lycée de Bordeaux.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Ballé ; L. Barberot ; L. Blanc ; V. Bonzom ; J. Ciocâlteu, à Craïova ; R. Coural, collège de Narbonne ; M. Cryé ; M. Drovin ; G. Foucry ; A. Lancel ; E. Löffler, école réale de Tübingen ; J. Ménéchal ; J. Nicolaescu, lycée de Craïova ; M. Oger ; F. Pégorier ; A. Pichon ; A. Popescu ; M. Rebeix ; A. Redon, école normale de Châteauroux ; Remondet ; A. Rozier ; J. Sire ; G. Tastet.]

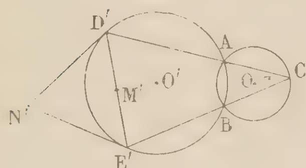
GÉOMÉTRIE

4342. — *On considère deux cercles O et O′ se coupant en A et B. On joint A et B à un point quelconque C du cercle O par deux droites qui rencontrent le cercle O′ en D′ et E′.*

1° Calculer la longueur D′E′ et en déduire les lieux du pôle N′ et du milieu M′ de D′E′;

2° En joignant de même A et B à un point quelconque C′ du cercle O′ et appelant M le point analogue à M′, démontrer que les deux cercles de centres O et O′ et de rayons OM et O′M′ ont les mêmes centres d'homothétie que les deux cercles donnés.

1° Remarquons d'abord que la corde D′E′ reste constante lorsque C décrit le cercle O.



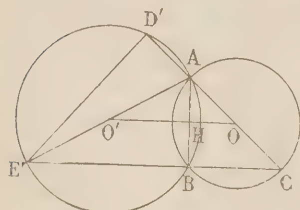
En effet, l'angle ACB est constant comme inscrit dans le cercle O; dans le cercle O′, cet angle a pour mesure

$$\frac{\overset{\frown}{D'E'} - \overset{\frown}{AB}}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\overset{\frown}{D'E'} + \overset{\frown}{AB}}{2}$$

suivant que C est extérieur ou intérieur au cercle O. Dans les deux cas, comme l'arc AB est invariable, l'arc D′E′ l'est également, et par suite aussi la corde qui le sous-tend.

Il résulte de là que la corde D′E′ enveloppe un petit cercle de centre O′, qui est en même temps le lieu de M′. Le triangle N′D′E′ restant égal à lui-même dans toutes ses positions, le lieu de N′ est un second cercle concentrique O′.

Pour évaluer la longueur constante D′E′ en fonction des rayons R, R′ des cercles O, O′ et de la distance $OO' = d$, nous nous placerons dans le cas particulier où BC est parallèle à O′O.



Les points C et E′ sont alors diamétralement opposés à A, et $CE' = 2OO' = 2d$.

La similitude des triangles E′CD′ et ACB permet d'ailleurs d'écrire

$$\frac{D'E'}{AB} = \frac{E'C}{AC},$$

d'où

$$D'E' = \frac{AB \times d}{R}.$$

Mais AB étant le double de la hauteur AH du triangle AOO′ a pour expression

$$AB = 2 \times \frac{2 \text{ surf. } AOO'}{d}$$

$$= \frac{\sqrt{(R + R' + d)(R + R' - d)(R' + d - R)(d + R - R')}}{d}.$$

Donc

$$D'E' = \frac{\sqrt{(R + R' + d)(R + R' - d)(R' + d - R)(d + R - R')}}{R}.$$

2° En permutant dans cette dernière formule R et R′, on obtient pour longueur de la corde DE correspondant au point C′ du cercle O′,

$$DE = \frac{\sqrt{(R' + R + d)(R' + R - d)(R + d - R')(d + R' - R)}}{R'}.$$

On conclut de là

$$\frac{D'E'}{DE} = \frac{R'}{R},$$

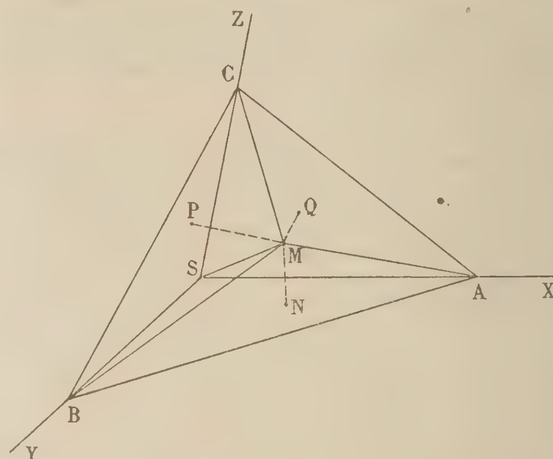
ce qui montre que les cercles enveloppes des cordes constantes D′E′, DE (cercles de rayons O′M′ et OM) ont les mêmes centres d'homothétie que les cercles O′, O.

(M. REBEIX, lycée du Puy.)

(Ont résolu la même question : MM. Bayor; L. Cussenot ; Debrun ; A. Doué; G. Hiernaux ; L. Jardin ; L. M., à Vic ; L. Magne ; H. Michel ; A. Mirc ; P. Vincent.)

4360. — *Lieu géométrique des points dont la somme l des distances aux trois faces d'un trièdre est constante.*

Une arête du trièdre étant commune à deux faces, le point de



cette arête situé à une distance l de la troisième face appartient au lieu. Soient alors A, B, C les points des arêtes SX, SY, SZ distants respectivement de la longueur donnée l des faces SYZ, SZX, SXY.

Je dis que tout point M du plan ABC, pris à l'intérieur du trièdre, appartient au lieu. En effet, les trois plans menés par M et chacune des arêtes SX, SY, SZ décomposent le tétraèdre SABC en trois autres tétraèdres ayant une face commune avec le trièdre ; si donc on abaisse de ces points les perpendiculaires MN, MP, MQ sur les trois faces du trièdre, on a, en égalant deux expressions du volume du tétraèdre,

$$SAB.MN + SBC.MP + SCA.MQ = SAB.l.$$

Mais les trois faces SAB, SBC, SCA sont équivalentes, comme correspondant par hypothèse à des hauteurs égales ; par suite l'égalité précédente revient à

$$MN + MP + MQ = l.$$

C. Q. F. D.

Cette démonstration suppose essentiellement le point M pris à l'intérieur du triangle ABC ; pour tout autre point situé par exemple à l'intérieur de l'angle BCA, on a, suivant que M_1 est du même côté que AB ou du côté opposé,

$$-MN + MP + MQ = l,$$

ou

$$MN - MP - MQ = l.$$

On établit d'ailleurs facilement que pour tout point du trièdre SXYZ en dehors du plan ABC, la somme $MN + MP + MQ$ est inférieure ou supérieure à l.

En considérant les points A′, B′, C′ symétriques respectivement de A, B, C par rapport à S, il est clair que tous les points appartenant à l'une des huit faces de l'octaèdre ABCA′B′C′ font également partie du lieu.

(L. MESSENT.)

Généralisation. — Proposons-nous de traiter la question plus générale suivante :

Lieu des points tels que si de ces points on abaisse des perpendiculaires sur des plans qui se coupent en un même point, et qu'on

multiplie les longueurs de ces perpendiculaires par des nombres donnés positifs, la somme des produits soit constante.

Soit S le point commun à ces plans. Menons par S des perpendiculaires SX, SY, ... à ces plans. D'un point quelconque M du lieu, abaissons des perpendiculaires MP, MP′, ... sur ces droites ; les longueurs SP, SP′, ... sont les distances du point M aux plans considérés. Portons sur SX, SY, ... des longueurs SA, SA′, ... proportionnelles aux nombres donnés. On a

$$SA \times SP + SA' \times SP' + \ldots = k^2. \quad (1)$$

Joignons S à M, et menons les perpendiculaires AQ, A′Q′, ... sur cette droite SM. Les deux triangles semblables SAQ, SPM donnent

$$SA \times SP = SM \times SQ.$$

L'égalité (1) s'écrira donc

$$SM \times (SQ + SQ' + \ldots) = k^2. \quad (2)$$

Désignons par G le centre des moyennes distances des points A, A′, ... ; par g sa projection sur SM. On a

$$SQ + SQ' + \ldots = n \times Sg.$$

L'égalité (2) nous donne donc

$$n \times SM \times Sg = k^2. \quad (3)$$

Abaissons de M la perpendiculaire MH sur la droite fixe SG. Nous aurons, en considérant les triangles semblables SGg, MHS :

$$SM \times Sg = SG \times SH.$$

L'égalité (3) devient alors

$$n \times SG \times SH = k^2.$$

Or SG est constant, donc SH l'est aussi. Ce qui prouve que le lieu du point M est un plan perpendiculaire à SG au point H tel que

$$SH = \frac{k^2}{nSG}.$$

(C. H.)

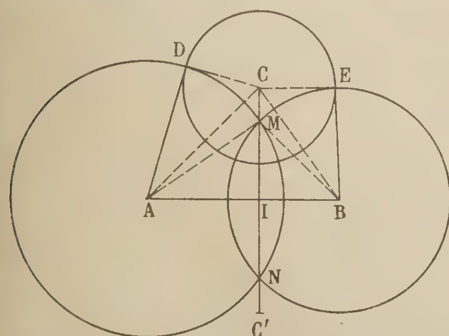
[Ont résolu la même question : MM. J. Lagarde ; M. Rebeix.]

4424. — *On considère un cercle de centre fixe* C *et de rayon variable* R. *Trouver le lieu des points communs aux cercles ayant pour centres les points fixes* A, B *et coupant à angle droit le premier cercle, quand son rayon* R *varie.*

Remarque. — *On dit que deux cercles se coupent à angle droit quand leurs tangentes en un point commun sont perpendiculaires.*

(*École normale de Fontenay-aux-Roses, concours de 1898.*)

Par les points A, B, menons les tangentes AD, BE au cercle C, et décrivons les cercles de centres A, B qui passent respectivement par les points de contact D, E. Ces cercles coupent visiblement le cercle C à angle droit ; soient M, N les deux points communs à ces cercles. La figure donne



$$\overline{MA}^2 = \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - R^2,$$

$$\overline{MB}^2 = \overline{BE}^2 = \overline{BC}^2 - R^2,$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2.$$

Le point M appartient donc au lieu des points dont la différence des carrés des distances aux deux points fixes A et B est constante et égale à $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$. Ce lieu est comme on sait la perpendiculaire CI à AB menée par le point connu C du lieu.

Pour qu'un point M de cette perpendiculaire fasse partie du lieu, il faut et il suffit qu'il existe un cercle C coupant à angle droit les deux cercles A et B passant par M. Or ceci n'est possible que si du point C on peut mener des tangentes aux deux cercles A et B; le point C doit donc être extérieur à ces cercles, c'est-à-dire sur le prolongement de IM. Ainsi le lieu décrit par M est limité au segment de droite CI.

Le point N étant le symétrique de M par rapport à I décrit le segment IC′, symétrique du segment IC.

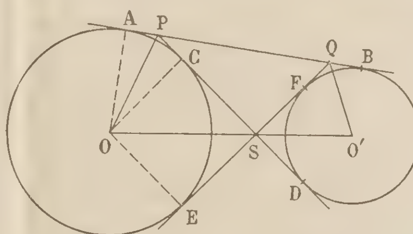
(M. OGER, à Poitiers.)

[Ont résolu la même question : MM. J. Rigal, école primaire supérieure de Montcuq ; G. Foucry, école normale de Châlons-sur-Marne].

Remarque. — On sait que le centre de tout cercle orthogonal à deux cercles de centres A et B se trouve sur l'axe radical (ou corde commune) de ces deux cercles, et que ce centre est extérieur à la portion de la corde commune intérieure aux deux cercles. Si donc il existe deux cercles de centres A et B orthogonaux au cercle de centre C, leur corde commune est nécessairement la perpendiculaire abaissée de C sur AB, et leurs points communs sont compris entre le point C et son symétrique par rapport à AB.

4442. — *Deux cercles étant dans un même plan et les tangentes communes intérieures se coupant à angle droit, l'aire du triangle formé par ces tangentes et une tangente commune extérieure est équivalente au rectangle des rayons.*

Soit SPQ le triangle déterminé par la tangente commune extérieure AB et les deux tangentes communes intérieures CD, EF, qui se coupent à angle droit.



Le cercle O′ étant exinscrit au triangle SPQ, on peut écrire

$$\text{aire SPQ} = (p - SQ)R',$$

p désignant le demi-périmètre du triangle et R′ le rayon du cercle O′.

Mais le cercle O, de rayon R, étant également exinscrit au triangle SPQ, on a

$$p = QE = QS + SE.$$

Donc $$\text{aire SPQ} = SE.R' = RR',$$

en observant que SE = R comme côtés du carré OCSE.

(M. OGER, à Poitiers.)

Autre démonstration. — Le triangle SPQ étant rectangle en S, on a

$$\text{aire SPQ} = \frac{1}{2}\,SP.SQ.$$

Tirons les droites OP et QO′. Je dis que les triangles SOP,

SQO′ sont semblables. En effet, ils ont les angles en S égaux à 45° ; d'ailleurs

$$\widehat{POS} = \widehat{POC} + \widehat{COS} = \frac{\widehat{AOC}}{2} + 45^\circ,$$

ou, puisque $\widehat{AOC} = \widehat{SPQ}$ (côtés perpendiculaires),

$$\widehat{POS} = \frac{\widehat{SPQ} + 90^\circ}{2} = \frac{\widehat{SQB}}{2} = \widehat{SQO'}.$$

Des triangles semblables SOP, SQO′, on déduit alors

$$\frac{SO}{SP} = \frac{SQ}{SO'},$$

ou $$SP.SQ = SO.SO'.$$

Donc aire $SPQ = \frac{1}{2}\,SO.SO' = \frac{1}{2}\,R\sqrt{2}.R'\sqrt{2} = RR'.$

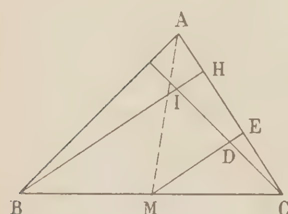
(Georges LEQUERÉ, lycée de Brest.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Bouzy ; F. Pégorier ; L. Barberot ; G. Foucry.]

4443. — *Construire un triangle connaissant le pied* M *de la médiane* AM, *le pied* H *de la hauteur* BH *et le milieu* D *du segment de hauteur compris entre l'orthocentre et le sommet* C.

Supposons le problème résolu : soient ABC le triangle cherché et I l'orthocentre.

La droite MD joignant les milieux de deux côtés du triangle BIC est parallèle au troisième côté BI ; cette droite étant parallèle au côté BH du triangle BHC et passant par le milieu M du côté BC passe par le milieu E du côté HC.



De là la construction suivante : on joint les points donnés M et D par une droite et sur cette droite on abaisse la perpendiculaire HE que l'on prolonge d'une quantité

$$EC = EH ;$$

on mène la droite MC qui coupe en B la parallèle à ME issue de H ; enfin en abaissant de B la perpendiculaire sur la droite CD, on obtient sur la droite CH le troisième sommet, A, du triangle, qui se trouve alors complètement déterminé.

Cette construction est toujours possible tant que les trois points donnés M, D, H sont distincts et non en ligne droite.

Lorsque D se confond avec M, la droite MD devient indéterminée et par suite aussi le sommet C ; à chaque position particulière de C correspondent un point B et un point A tels que le triangle ABC est rectangle en B : résultat évident, puisque dans un tel triangle, la hauteur issue de C se confond avec BC. Il y a alors une infinité de triangles qui répondent à la question.

Lorsque les trois points M, D, H sont en ligne droite (cas qui comprend en même temps celui où H se confond avec M ou D), C vient sur MD, ainsi que B ; BA, perpendiculaire à CD ou MD, ne peut rencontrer la perpendiculaire en H à MD, à moins que B ne se confonde avec H ou C, ce qui ne peut arriver, car le triangle se réduirait alors à une droite. Donc dans tout triangle, les trois points M, D, H ne peuvent jamais être en ligne droite, et cette condition est la seule condition de possibilité du problème.

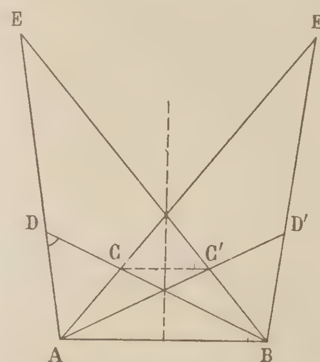
On trouve une autre solution en remarquant que les points M, D, H appartiennent au cercle des neuf points du triangle ABC. Le centre de ce cercle étant ω, le symétrique de D par rapport à ω est le pied de la médiane issue de C ; cette remarque fournit aisément une seconde construction.

(L. FOURNIER, lycée de Rennes.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Bouzy ; Burgat ; M. Cryé, lycée de Laval ; M. Oger ; F. Pégorier ; G. Tastet, lycée de Bordeaux ; E. Vaunac ; A. Ballé, lycée de Bordeaux ; J. Chapron ; M. Drovin ; G. Foucry ; A. Redon ; J. Théron, lycée de Toulon.]

4445. — *Sur une droite donnée* AB *comme base, on peut généralement construire d'un même côté six triangles semblables à un triangle donné. Démontrer que les six sommets de ces triangles opposés à* AB *sont sur une même circonférence.*

Par le point A menons, d'un même côté de AB, trois droites faisant avec AB des angles égaux aux trois angles du triangle donné, puis prenons les symétriques de ces trois droites par rapport à la perpendiculaire élevée au milieu de AB.



Les six droites ainsi tracées se coupent en six points C, D, E, C′, D′, E′, tels que les triangles ABC, ABD, ABE, ... sont semblables au triangle donné.

Il s'agit d'établir que les trois points C, D, E et leurs symétriques C′, D′, E′ par rapport à la perpendiculaire élevée au milieu de AB, sont sur une même circonférence.

Tirons CC′. Cette droite étant parallèle à AB, l'angle CC′E est égal à l'angle ABE ; mais comme le triangle ABE est semblable au triangle ADB, l'angle ABE est égal à $\widehat{ADB}$. Donc $\widehat{CC'E} = \widehat{ADB}$. Le quadrilatère convexe EDCC′ ayant ainsi deux angles opposés supplémentaires est inscriptible, de sorte que le point C′ appartient à la circonférence CDE. Un raisonnement analogue montre que les points D′ et E′ sont situés également sur la circonférence CDE.

Lorsque le triangle donné est isocèle, deux des trois droites issues de A ou B coïncident, de sorte que les six triangles se réduisent à trois, et la propriété cesse d'être applicable.

(BURGAT, école normale d'Albertville.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Bouzy ; M. Oger ; J. Chapron ; R. Coural, collège de Narbonne ; M. Drovin ; M. Rebeix ; E. Rousset ; J. Sous.]

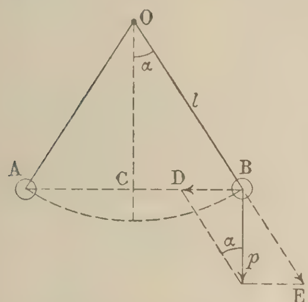
PHYSIQUE

4284. — *Deux pendules électriques de longueur l, d'abord en contact, sont chargés d'une certaine quantité d'électricité. Ils s'écartent alors de la verticale et chacun d'eux fait un angle α avec cette direction.*

On demande de calculer la charge x de chaque balle de poids p, le poids des fils suspendant ces balles étant négligeable.

(*Bacc. lettres-math., Tunis, juin 1897.*)

Posons $AB = d$ et soit f la force avec laquelle les balles A et B se repoussent.



Ces balles étant supposées chargées de quantités égales d'électricité, la loi de Coulomb relative aux attractions et répulsions électriques se traduit ici par l'équation

$$f = \frac{x^2}{d^2}. \qquad (1)$$

Or le poids p de la balle B par exemple peut se décomposer en deux forces, l'une, BE, dirigée suivant OB, l'autre, BD, dirigée suivant BA. La force BD est égale à $p \operatorname{tg} \alpha$ et puisque le système est en équilibre, on a $f = p \operatorname{tg} \alpha$.

D'autre part $d = 2BC = 2l \sin \alpha$.

L'équation (1) s'écrit donc

$$p \operatorname{tg} \alpha = \frac{x^2}{4l^2 \sin^2 \alpha}.$$

On en tire $\quad x^2 = 4pl^2 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha$

$$x = 2l \sin \alpha \sqrt{p \operatorname{tg} \alpha}.$$

(J. DELPONT.)

[Ont résolu la même question : MM. Bayor ; F. Beynas ; F. Chuberre ; E. Clément ; Delacommune ; N. Delhotel ; Feintuch ; E. Fourmon ; P. Frescal ; Geltzenlichter ; J. A. P. L. O. ; A. Larue ; E. Layes ; E. Léotard ; F. Leulliot ; E. Madet ; A. Mire ; J. Orsini ; M. Rebeix ; J. Salières ; G. Szabo, à Gyor ; Watrin.]

4380. — *Deux cubes ayant, l'un 10^{cm} de côté, l'autre 1^{cm} de côté, sont suspendus sous les plateaux d'une balance ; celle-ci est en équilibre quand les deux cubes sont placés dans le vide.*

On met sur le cube le plus gros une surcharge de 1^{gr} et on plonge les deux cubes dans une masse d'air à une pression x et à une température de 15° C. On demande la valeur de x pour laquelle l'équilibre est rétabli.

Coefficient de dilatation de l'air, $\alpha = \frac{1}{273}$;

Poids du litre d'air dans les conditions normales, $p = 1^{gr},3$.

(*Bacc. lettres-math., Lille, avril 1898.*)

Soit P le poids commun des deux cubes dans le vide ; le volume du grand cube est 1^{lit}, et le volume du petit, $0^{lit},001$. Ces deux cubes plongés dans l'air à 15° et sous la pression x éprouvent une certaine poussée ; le poids apparent du premier a pour valeur

$$P - 1 \times 1,3 \times \frac{x}{76} \times \frac{1}{1 + \frac{15}{273}}$$

et celui du second,

$$P - 0,001 \times 1,3 \times \frac{x}{76} \times \frac{1}{1 + \frac{15}{273}}.$$

L'équation du problème est donc

$$P - 1 \times 1,3 \times \frac{x}{76} \times \frac{1}{1 + \frac{15}{273}} + 1 = P - 0,001 \times 1,3 \times \frac{x}{76} \times \frac{1}{1 + \frac{15}{273}},$$

d'où, en réduisant,

$$x = \frac{76 \times 288}{1,3 \times 273(1 - 0,001)} = 61^{cm},7.$$

(M. REBEIX, lycée du Puy.)

[Ont résolu la même question : Mlle M. Pont ; MM. J. Bruyas ; Burgat ; A. Chapron ; E. Clément ; L. Curt ; F. Leulliot ; E. Madet ; E. Le Maigre.]

CONCOURS DE 1898 (*Suite*)

CERTIFICAT D'APTITUDE AU PROFESSORAT DES ÉCOLES NORMALES ET DES ÉCOLES PRIMAIRES SUPÉRIEURES

Aspirants.

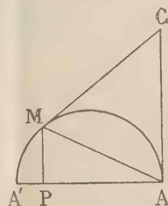
Mathématiques.

I. — **4447**. Définition et recherche de la racine carrée d'un nombre A à $\frac{n}{p}$ près, en supposant connue l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier à une unité près.

Exemple : Calculer la racine carrée de $\frac{4}{7}$ à $\frac{3}{11}$ près.

Démontrer que si l'entier q est un multiple de l'entier p, la racine carrée de A à $\frac{1}{q}$ près, par défaut, est au moins égale à la racine carrée de A à $\frac{1}{p}$ près par défaut.

II. — **4448**. On donne une demi-circonférence de rayon R, limitée par le diamètre AA'. En un point M de cette demi-circonférence on trace la tangente MC jusqu'à sa rencontre en C avec la tangente au point A ; on joint M et A et on mène la perpendiculaire MP sur AA', puis on fait tourner la figure autour de AA'.



Déterminer le point M, en prenant pour inconnue la distance $AP = x$, de telle sorte que le volume engendré par le triangle AMC soit au volume du cône circulaire droit ayant AC pour rayon de base et R pour hauteur dans un rapport donné m.

Discussion par rapport à m.

Pour certaines valeurs de m on trouve deux points M' et M'' répondant à la question, desquels on mène les perpendiculaires M'P' et M''P'' sur AA'. Évaluer, en fonction de m et de R, la somme S des volumes des cônes engendrés par les triangles AM'P' et AM''P'' en tournant autour de AA'.

Quelle valeur faut-il donner donner à m pour que la somme S des volumes des deux cônes précédents soit au volume de la sphère de rayon R dans un rapport donné p ? Entre quelles limites peut varier le nombre p ?

Application numérique : $p = \frac{1}{2}$; $R = 1$. Calculer les valeurs correspondantes de x.

(*22 juin, de 8 h. à midi.*)

Physique, Chimie et Histoire naturelle.

I. — Observations barométriques. — Expliquer comment on peut les utiliser pour prévoir les mouvements de l'atmosphère. — Cyclones.

II. — Composés d'origines minérale ou organique contenant du phosphore. Transformations qu'on leur fait subir pour les employer aux applications industrielles ou agricoles. — Nature de ces applications.

III. — Appareil digestif des Mammifères. Phénomènes mécaniques et chimiques de la digestion. — On insistera sur les modifications de l'appareil digestif chez les animaux des divers ordres.

Définir ce que l'on entend par rations alimentaires, montrer l'importance de l'alimentation rationnelle.

(*23 juin, de 7 h. à midi.*)

Aspirantes.

Mathématiques.

I. — Établir la relation donnant le carré d'un côté AB d'un triangle ABC, quand on connaît les deux autres côtés, AC et BC, et la projection CD de l'un de ces derniers sur l'autre.

Distinguer les cas où l'angle C est aigu, obtus ou droit.

II. — Dans un losange ABCD on connaît l'angle C, égal à 45°, et le côté BC, égal à $0^{m},15$. Calculer à un millimètre près :

1° La hauteur de ce losange ;

2° Ses diagonales.

III. — Démontrer :

1° Que tout nombre entier non premier est décomposable en un produit de facteurs premiers ;

2° Que cette décomposition est unique.

IV. — **4449.** Dans une table où les nombres premiers sont rangés par ordre de grandeur croissante, on prend deux nombres premiers consécutifs quelconques a et b, plus grands que 2, a étant le plus petit ; on fait leur somme $a+b$. Démontrer :

1° Que cette somme n'est pas un nombre premier ;

2° Que tous ses diviseurs premiers sont plus petits que a.

(*27 juin, de 8 h. à midi.*)

Physique, Chimie et Histoire naturelle.

I. — Qu'entend-on par point d'ébullition d'un liquide pour une pression donnée ?

Ce point d'ébullition peut-il être déterminé expérimentalement, défini théoriquement ?

Suffit-il que la température du liquide, supposé pur, ait atteint ce point d'ébullition pour que l'ébullition se produise ? Indiquer les expériences et les considérations théoriques qui se raportent à cette dernière question.

II. — Principaux effets chimiques produits par les différentes formes d'énergie électrique : étincelle, effluve, courant, arc. — Applications les plus importantes.

III. — Sécrétions et excrétions : Peau ; — Reins.

(*28 juin, de 7 h. à midi.*)

CERTIFICAT D'APTITUDE A L'ENSEIGNEMENT DE LA COMPTABILITÉ

Aspirants et Aspirantes.

Arithmétique appliquée au commerce [1].

I. — Je dois 1 000 reichmarck à Berlin, payables au reçu de mon envoi.

Je trouve du papier à 10 jours de vue à 122 1/8 et du papier à 60 jours de vue à x francs.

Le taux de l'escompte sur marché libre, à Berlin, est 3 3/8 p. 0/0.

Quel doit être le cours x pour qu'il soit indifférent pour moi d'envoyer du papier court ou du papier long ?

L'escompte à Berlin sera fait en dedans.

(On ne tiendra pas compte des commissions.)

II. — Une commune emprunte 10 millions, au taux de 5 p. 0/0. Elle doit rembourser cette somme en 10 ans par 10 amortissements variables.

L'État a garanti à la commune le payement des amortissements ; mais, au lieu de lui payer une somme qui varie tous les ans, il veut lui payer chaque année une somme fixe.

Quelle somme doit-il payer chaque année ?

(*1er février, de 9 h. à midi.*)

(1) L'usage de la table de logarithmes n'est pas autorisé.

QUESTIONS PROPOSÉES

4450. — Converser $\frac{9}{10}$ en une somme de fractions ayant pour dénominateurs des puissances de 6.

4451. — Trouver un nombre tel qu'en le multiplant par 37 et divisant le produit par 31, on ait pour reste 15.

4452 — Sommer les n premiers termes de la suite

$$1 + 11 + 111 + 1111 + \ldots$$

(F. Pégorier.)

4453. — On donne une demi-circonférence construite sur AB comme diamètre. Par un point C de cette demi-circonférence, on abaisse la perpendiculaire CM sur AB et la perpendiculaire CP sur la tangente en B ; enfin on mène la tangente au point C, qui rencontre en D la tangente BP. Cela posé, comment faut-il choisir le point C pour que les deux triangles CDP et ACM soient équivalents ?

(*Bacc. lettres-math., Bordeaux, juillet 1898.*)

4454. — Dans un triangle ABC les côtés sont a, b, c. Par les points B et C on mène les perpendiculaires BB′ et CC′ au plan du triangle. On demande de déterminer sur ces droites des points M et N tels que le triangle MAN soit rectangle en A et ait une surface donnée $\frac{1}{2} l^2$. — Discussion. Construction géométrique.

(*Bacc. lettres-math., Clermont, juillet 1898.*)

4455. — Étant donnés deux cercles O et O′ tangents, on demande de trouver sur leur axe radical un point A tel que les tangentes AB et AB′ menées de ce point aux deux cercles soient rectangulaires. — Discussion.

(L. Hémois.)

4456. — Avec les mêmes données trouver sur l'axe radical un point A tel que le triangle ABB′ soit équilatéral.

(L. Hémois.)

4457. — Les perpendiculaires élevées aux milieux des bissectrices intérieures d'un triangle rencontrent les côtés opposés aux sommets d'où partent ces bissectrices en trois points en ligne droite.

(J. M. Lagarde, à Tournus.)

4458. — Le triangle ABC étant donné, on mène la bissectrice CD de l'angle C et, par le point C, la perpendiculaire à cette bissectrice ; elle rencontre AB en D′ ; on prend le milieu O de DD′. Calculer en fonction des côtés $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ les distances du point O aux trois points A, B, C, et, de la comparaison des résultats obtenus, conclure que la circonférence décrite sur DD′ comme diamètre coupe orthogonalement la circonférence circonscrite au triangle ABC.

(*Bacc. lettres-math., Rennes, juillet 1898.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

23e Année. — N° 3. 1159. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 1er Novembre 1898.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

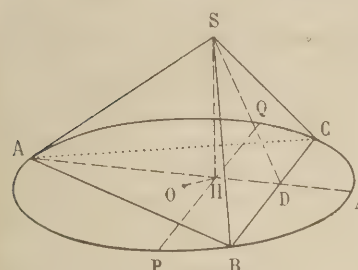
ÉCOLE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES DE PARIS (1898)

4431. — *On considère tous les trièdres* T *qui sont trirectangles et dont les trois arêtes rencontrent un cercle donné. En appelant* S *le sommet de l'un quelconque de ces trièdres,* H *la projection de* S *sur le plan du cercle,* P *et* Q *les intersections du cercle avec une droite passant par* H, *démontrer la relation*

$$\overline{\mathrm{SH}}^2 = \frac{\overline{\mathrm{HP}} \times \overline{\mathrm{HQ}}}{2}.$$

Trouver le lieu de ceux des sommets des trièdres T *qui sont à une distance donnée du plan du cercle. — Discussion.*

Soient A, B, C les points de rencontre des arêtes du trièdre T avec la circonférence du cercle donné O.



Le plan ASH contenant une perpendiculaire à chacune des faces SBC et ABC est perpendiculaire à ces deux faces, et par suite, à leur intersection BC. La droite AH se confond alors avec la hauteur AD du triangle ABC. En considérant les plans SBH et SCH, on voit de même que BH et CH sont les deux autres hauteurs du triangle, de sorte que H est l'orthocentre du triangle.

Cela posé, le triangle ASD, rectangle en S, donne

$$\overline{\mathrm{SH}}^2 = \mathrm{AH}.\mathrm{HD}.$$

D'ailleurs en prolongeant AD jusqu'à son second point de rencontre A′ avec le cercle O, on sait que $\mathrm{HD} = \mathrm{DA}'$; donc

$$\overline{\mathrm{SH}}^2 = \mathrm{AH}\cdot\frac{\mathrm{HA}'}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{HP}.\mathrm{HQ}.$$

C. q. f. d.

Lieu du sommet S *lorsque* $\mathrm{SH} = a$. — D'après la relation précédente, on a

$$\mathrm{HP}.\mathrm{HQ} = 2a^2,$$

ou, en désignant par R le rayon du cercle O,

$$\mathrm{R}^2 - \overline{\mathrm{OH}}^2 = 2a^2,$$

d'où

$$\mathrm{OH} = \sqrt{\mathrm{R}^2 - 2a^2}.$$

Le point O étant fixe et la distance OH constante, le lieu de H est un cercle concentrique au cercle donné. Par suite, comme $\mathrm{SH} = a$, le lieu de S est la projection de ce cercle sur un plan parallèle au plan ABC, situé à une distance a de ce dernier; c'est donc un cercle de même rayon ayant pour centre la projection du point O sur le plan parallèle.

Pour que ce cercle existe, il faut et il suffit que son rayon, égal à OH, soit réel, c'est-à-dire qu'on ait $a \leqslant \frac{\mathrm{R}\sqrt{2}}{2}$; lorsque $a = \frac{\mathrm{R}\sqrt{2}}{2}$, le cercle lieu de S a un rayon nul et S est fixe.

(M. REBEIX, au Puy.)

[Ont résolu la même question : MM. G. Girot, école primaire supérieure de Mézin ; J. Sire, à Belverne ; E. Vaunac, à Belvès ; L. Ollie ; P. Goudry.]

Dans la solution précédente on a remplacé HP.HQ par $\mathrm{R}^2 - \overline{\mathrm{OH}}^2$, parce que ces deux expressions représentent toutes deux la puissance du point H par rapport au cercle O. Cela suppose que le point H est toujours à l'intérieur de ce cercle. Pour le voir, il suffit de montrer que la projection du sommet d'un trièdre trirectangle sur le plan du triangle de section se fait à l'intérieur de ce triangle.

En effet, on a montré précédemment que SH est la hauteur du triangle rectangle ASD; H se trouve donc entre A et D. La droite SD est la hauteur du triangle rectangle BSC; le point D est donc entre B et C. Par suite H est bien à l'intérieur de ABC et par suite du cercle O.

4432. — *Un cycliste sur sa machine se déplace sur une route horizontale avec une vitesse de 8 kilomètres à l'heure. Il s'engage, avec cette vitesse, sur une pente telle que la variation de niveau soit de 2 centimètres par mètre de route. — A cet instant, le cycliste lâche les pédales et n'agit plus sur sa machine. On demande :*

1° Quelle sera la vitesse du cycliste lorsqu'il aura parcouru, sur la route, une distance de 50 mètres, à partir de l'origine de la pente.

2° Combien de temps il aura mis pour parcourir ces 50 mètres.

On traitera d'abord le problème sans tenir compte des forces de frottement. On le traitera une seconde fois en tenant compte de ces forces et en admettant que le frottement produit le même effet qu'une force constante de 1 kilogramme agissant sur le cycliste en sens inverse de la vitesse et tendant à l'arrêter.

Le poids du cycliste et de sa machine est de 80 kilogrammes ; l'accélération due à la pesanteur est de 9,8, en prenant comme unités le mètre et la seconde.

1° Soient v_0 la vitesse initiale du cycliste lorsqu'il s'engage sur la pente, v sa vitesse lorsqu'il aura parcouru un espace e sur cette pente, γ l'accélération du mouvement, t le temps employé pour parcourir l'espace e. Les formules du mouvement uniformément accéléré donnent

$$v = v_0 + \gamma t$$

et

$$e = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

Élevons la première équation au carré et multiplions tous les termes de la deuxième par γ; il vient

$$v^2 = v_0^2 + 2v_0\gamma t + \gamma^2 t^2$$

et $$2\gamma e = 2v_0\gamma t + \gamma^2 t^2.$$

On en tire $$v^2 - v_0^2 = 2\gamma e,$$

d'où $$v = \sqrt{v_0^2 + 2\gamma e}.$$

On a d'un autre côté

$$t = \frac{v - v_0}{\gamma}.$$

Application. — $v_0 = \frac{8000}{3600} = 2^m,222$ par seconde ; $e = 50^m$; l'accélération γ a pour valeur

$$9 \times \frac{2}{100} = \frac{9,8}{50} = 0^m,196.$$

La vitesse du cycliste lorsqu'il aura parcouru 50^m a pour valeur $\sqrt{\overline{2,222}^2 + 2 \times 0,196 \times 50} = 4^m,953$, et le temps employé pour parcourir ces 50^m, $\frac{4,953 - 2,222}{0,196} = 13^{sec},9$.

2° La force de 1^{kg} qui agit sur le cycliste en sens inverse de la vitesse diminue l'accélération du mouvement. Soit γ' la nouvelle accélération. Le cycliste était d'abord entraîné par une force égale à $\frac{80}{50}$; la force à laquelle il est soumis en tenant compte du frottement a pour valeur $\frac{80}{50} - 1 = 0^{kg},600$. Les forces étant proportionnelles aux accélérations qu'elles impriment à une même masse, on a

$$\frac{0,600}{\frac{80}{50}} = \frac{\gamma'}{0,196},$$

d'où $$\gamma' = 0^m,0735.$$

Portant cette valeur dans les équations

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\gamma e} \quad \text{et} \quad t = \frac{v - v_0}{\gamma'},$$

il vient $$v = \sqrt{\overline{2,222}^2 + 2 \times 50 \times 0.0735} = 3^m,505$$

et $$t = \frac{3,505 - 2,222}{0.0735} = 17^{sec},4$$

(V. BONZOM.)

[Ont résolu la même question : MM. Le Maigre ; M. Oger ; M. Teulié ; R. Henry ; L. Hubert ; L. Ollié ; F. Pégorier.]

4433. — *10^{gr} d'un mélange sec formé d'azotate de potassium et d'azotate de sodium sont traités par de l'acide sulfurique en excès vers 140-150° ; le produit volatil obtenu, en admettant l'absence de réaction secondaire, est condensé en totalité, puis neutralisé par une solution aqueuse ammoniacale.*

On évapore à sec, et le résidu solide est ensuite décomposé en le chauffant avec précaution vers 250°.

Tout le gaz formé dans cette décomposition, mesuré sec à 0° et 760^{mm}, occupe un volume de $2^{lit},395$.

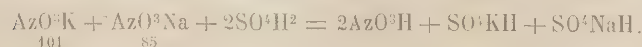
Formuler les réactions et donner le poids de chacun des azotates contenus dans le mélange.

Poids atomiques : H = 1 ; O = 16 ; Az = 14 ; Na = 23 ; K = 39.

Densité de l'hydrogène, 0,0694.

Poids d'un litre d'air à 0° et 760, $1^{gr},293$.

Le mélange d'azotate de potassium et d'azotate de sodium traité par de l'acide sulfurique concentré vers 140-150° donne lieu à un dégagement d'acide azotique et à un résidu de sulfate acide de potassium et de sulfate acide de sodium :



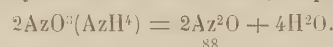
$$\underset{101}{AzO^3K} + \underset{85}{AzO^3Na} + 2SO^4H^2 = 2AzO^3H + SO^4KH + SO^4NaH.$$

L'acide azotique condensé, neutralisé par une solution aqueuse ammoniacale, donne de l'azotate d'ammonium :



$$2AzO^3H + 2AzH^3 = 2AzO^3(AzH^4).$$

Le résidu solide d'azotate d'ammonium décomposé par la chaleur donne de l'oxyde azoteux et de l'eau, d'après l'équation



$$2AzO^3(AzH^4) = \underset{88}{2Az^2O} + 4H^2O.$$

Calculons la masse des $2^{lit},395$ d'oxyde azoteux obtenus ; la densité de ce gaz est donnée par la formule $d = \frac{md'}{2}$; elle a donc pour valeur

$$\frac{44 \times 0,0694}{2} = 1,5268.$$

On a donc recueilli

$$2,395 \times 1,293 \times 1,5268 = 4^{gr},728 \text{ d'oxyde azoteux.}$$

En se reportant aux réactions formulées ci-dessus, on trouve

$$4,728 \times \frac{101}{88} = 5^{gr},426 \quad \text{d'azotate de potassium,}$$

et $$4,728 \times \frac{85}{88} = 4^{gr},567 \quad \text{d'azotate de sodium.}$$

(M. OGER.)

[Ont résolu la même question : MM. V. Bonzom ; G. Giraud ; E. Gernez ; E. Le Maigre ; L. Palin ; E. Roussel ; E. Vaunac ; R. Henry ; J. Jantet ; R. Martin ; H. Perdrix.]

CONCOURS GÉNÉRAL (1898)

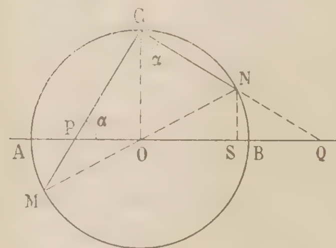
Classe de Seconde moderne.

4407. — *On considère un cercle de diamètre* AOB ; *par le milieu* C *de l'un des arcs* AB *on mène la corde* CM *qui rencontre* AB *en* P (OP < R), *et on trace le diamètre* MON.

Evaluer le volume engendré par le quadrilatère ONCP *en tournant autour de* AB. *Les données sont le rayon* R *du cercle et l'angle aigu* α *que la corde* CM *fait avec* AB.

Interpréter la formule trouvée dans le cas OP > R.

Faisons les constructions indiquées dans l'hypothèse OP < R ; l'angle CPO sera égal à α. Prolongeons CN jusqu'à la rencontre de AB en Q ; il est clair que



$$\text{Vol. ONCP} = \text{Vol. PCQ} - \text{Vol. ONQ},$$

ces volumes étant engendrés par la rotation des aires autour de AB. D'ailleurs, en abaissant de N la perpendiculaire NS sur AB, la figure donne

$$\text{Vol. PCQ} = \frac{1}{3}\pi\overline{OC}^2.(OP + OQ),$$

$$\text{Vol. ONQ} = \frac{1}{3}\pi\overline{NS}^2.OQ.$$

Le triangle rectangle PCQ montre que

$$OP = OC \operatorname{cotg} \alpha = R \operatorname{cotg} \alpha, \qquad OQ = OC \operatorname{tg} \alpha = R \operatorname{tg} \alpha.$$

Le triangle OCN étant isocèle, l'angle CON est égal à $180° - 2\alpha$, et par suite l'angle complémentaire NOS est égal à $2\alpha - 90°$. Il en résulte que, dans le triangle rectangle NOS,

$$NS = ON \sin(2\alpha - 90°) = -R \cos 2\alpha.$$

L'expression du volume cherché est donc

$$\frac{1}{3}\pi R^2(R \operatorname{tg} \alpha + R \operatorname{cotg} \alpha) - \frac{1}{3}\pi R^2 \cos^2 2\alpha . R \operatorname{tg} \alpha, \qquad (1)$$

ou bien

$$\frac{1}{3}\pi R^3(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha - \cos^2 2\alpha \operatorname{tg}\alpha)$$

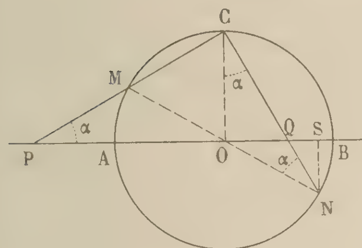
$$= \frac{1}{3}\pi R^3(\operatorname{cotg}\alpha + \sin^2 2\alpha \operatorname{tg}\alpha).$$

La parenthèse peut aussi s'écrire

$$\frac{\cos^2\alpha + \sin^2 2\alpha \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + 4\sin^4\alpha\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha(1 + 4\sin^4\alpha),$$

d'où, pour le volume, la seconde expression

$$\frac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{cotg}\alpha(1 + 4\sin^4\alpha).$$



Interprétation de cette formule dans le cas de $OP > R$. — A cet effet, nous prendrons cette formule sous la forme (1) et nous chercherons les volumes que représentent sur la nouvelle figure les deux parties de (1). Cette figure donne de suite

$$OP = R \operatorname{cotg}\alpha, \qquad OQ = R \operatorname{tg}\alpha,$$

$$\widehat{SON} = \widehat{CON} - 90^\circ = 180^\circ - 2\alpha - 90^\circ = 90^\circ - 2\alpha,$$

$$NS = R \sin SON = R \cos 2\alpha.$$

La formule (1) devient donc

$$\frac{1}{3}\pi\overline{OC}^2(OP + OQ) - \frac{1}{3}\pi\overline{NS}^2.OQ = \text{Vol. PCQ} - \text{Vol. OQN}.$$

C'est la même expression que dans le premier cas; seulement la différence des aires PCQ et OQN ne représente plus, comme dans ce premier cas, l'aire du quadrilatère ONCP.

La plupart de nos correspondants ont calculé le volume engendré par le quadrilatère ONCP dans la seconde figure. Ce n'est pas ce que demandait l'énoncé; il fallait chercher ce que représentait dans le second cas la première formule trouvée.

4408. — *On donne une droite Z verticale, une droite U parallèle à la ligne de terre, et une droite V située dans le plan bissecteur du premier dièdre, et faisant 45° avec la ligne de terre:*

1° Construire les projections du parallélépipède dont trois arêtes sont sur les droites Z, U, V.

Ponctuation des résultats;

2° Évaluer le volume de ce polyèdre en fonction des plus courtes distances λ, μ, ν des droites Z, U, V, deux à deux.

1° Figurons-nous, avant de faire l'épure, le parallélépipède ABCDEFGH, en supposant que la verticale Z se confonde avec AE, la parallèle à la ligne de terre U avec GH, la droite V du premier plan bissecteur avec CB. Pour déterminer le parallélépipède, on mène par Z un plan parallèle à U qui rencontre V en B, et par Z un plan parallèle à V, rencontrant U en H; on mène ensuite par U un plan parallèle à Z rencontrant V en C. La verticale du point C rencontre U en G; la verticale du point H rencontre en D la parallèle menée par C à U. On connaît ainsi trois points de la base ABCD; on en déduit aisément le quatrième en achevant le parallélogramme dont trois sommets sont B, C, D. La parallèle menée par H à V rencontre Z en E; la parallèle menée par E à U rencontre en F la verticale de B. Tous les sommets sont ainsi déterminés.

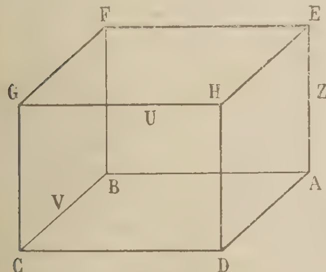


Fig. 1

Soit donc xy la ligne de terre; construisons d'abord la droite VV′, située dans le premier plan bissecteur et faisant 45° avec xy. Ce plan bissecteur étant supposé rabattu sur le plan horizontal autour de la ligne de terre, le rabattement de VV′ est une droite V_1 faisant 45° avec xy. Relevons (à l'aide d'un triangle rectangle) un point m_1 de V_1 en (m, m'); les deux projections V et V′ seront αm et $\alpha m'$.

Donnons-nous en outre arbitrairement la parallèle (U, U′) à la ligne de terre et la verticale (Z, Z′).

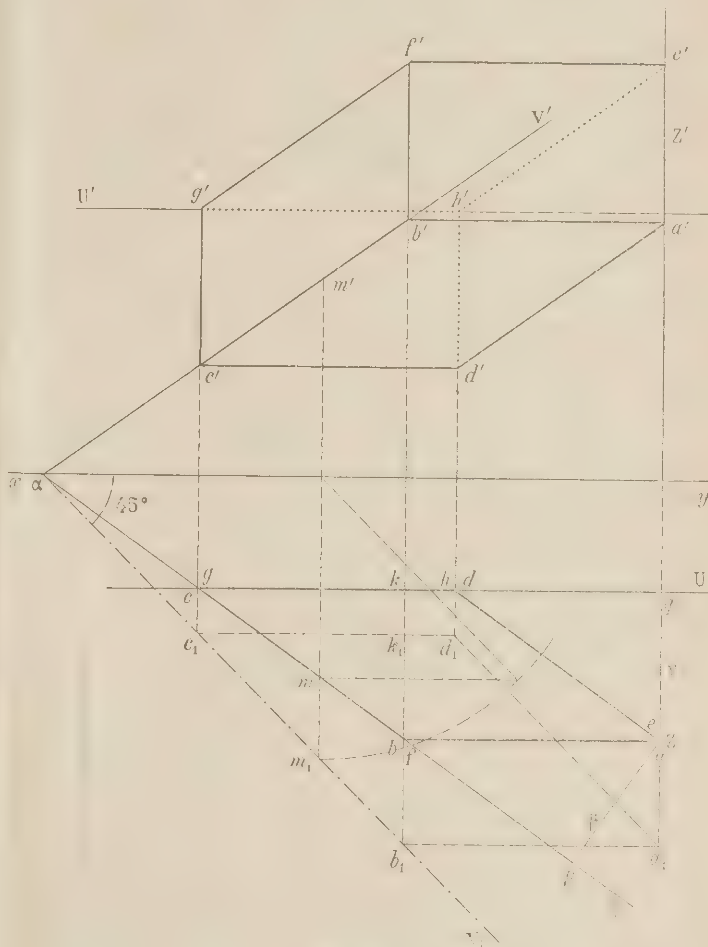


Fig. 2

Le plan mené par (Z, Z′) parallèlement à (U, U′) est un plan de front dont la trace horizontale est la parallèle menée par Z à xy. Ce plan rencontre (V, V′) au point (b, b'). Le plan mené par (Z, Z′) parallèlement à (V, V′) est un plan vertical ayant pour trace horizontale la parallèle menée par Z à V. Ce plan vertical rencontre (U, U′) au point (h, h'). Le plan mené par (U, U′) parallèlement à (Z, Z′) est le plan vertical ayant pour trace horizontale U; il rencontre (V, V′) au point (c, c'). La verticale du point (c, c') fournit sur (U, U′) le point (g, g'). Menant par ce point la parallèle à la ligne de terre, sa rencontre avec la verticale du point (h, h') donne le point (d, d'). On achève le parallélogramme ayant pour trois sommets (b, b'), (c, c'), (d, d'), ce qui fait connaître (a, a'). On en conclut sans peine les autres sommets du parallélépipède.

Ponctuation. — La projection horizontale se réduisant au

parallélogramme $abcd$, tout est vu en projection horizontale.

Le contour apparent de la projection verticale est entièrement vu. L'arête $(bf, b'f')$ est évidemment vue en projection verticale ; au contraire $(dh, d'h')$ est cachée. Il en résulte que les arêtes aboutissant en (b, b') sont vues ; au contraire celles aboutissant en (h, h') sont cachées.

2° Évaluation du volume.

Soient λ la plus courte distance des arêtes U, V ;

μ celle des arêtes V et Z ;

ν celle des arêtes Z et U.

La plus courte distance des arêtes U et V n'est autre que la distance de deux plans menés par chaque arête parallèlement à l'autre, c'est la distance des deux plans EFGH et ABCD ; c'est donc la hauteur du parallélépipède en lui donnant pour base ABCD (*fig.* 1). Donc

$$V = \text{Surf. ABCD} \times \lambda.$$

La droite Z étant verticale, ses plus courtes distances aux arêtes U et V se projettent horizontalement en vraie grandeur ; ce sont donc (*fig.* 2) les longueurs des perpendiculaires abaissées de Z sur les projections U et V ;

$$zp = \mu, \qquad zq = \nu.$$

Le parallélogramme ABCD se trouve dans le premier plan bissecteur ; donc

$$\text{Surf. } abcd = \text{S.ABCD} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}},$$

et $$\text{Surf. ABCD} = abcd.\sqrt{2} = cb \times \mu \times \sqrt{2}.$$

On est ramené à calculer cb. A cet effet, rabattons le plan bissecteur sur le plan horizontal ; $abcd$ se rabat en $a_1b_1c_1d_1$. La hauteur bk de $abcd$ étant perpendiculaire à xy fait 45° avec le plan horizontal ; donc

$$b_1k_1 = bk\sqrt{2} = \nu\sqrt{2}.$$

Le triangle $c_1k_1b_1$ est rectangle et isocèle ; donc

$$c_1b_1 = \nu\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2\nu.$$

Pour déduire de là cb, il suffit de connaître l'angle que fait la droite CB avec le plan horizontal. Soit (*fig.* 3) B_1 le premier plan bissecteur, H le plan horizontal. Menons par un point α de xy une droite $\alpha\beta$ située dans B_1 et faisant 45° avec xy. Projetons β en β_1 sur H ; menons $\beta_1\gamma$ perpendiculaire à xy ; on sait que l'angle $\beta\gamma\beta_1$ est le rectiligne du dièdre B_1H ; il vaut donc 45°. La figure donne

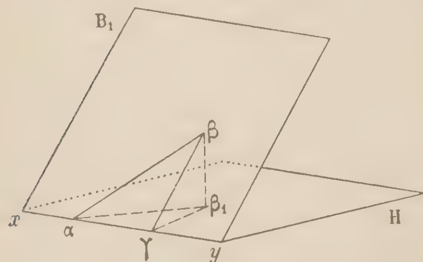


Fig. 3

$$\beta\gamma = \alpha\beta \sin 45^\circ, \qquad \beta\beta_1 = \beta\gamma \sin 45^\circ ;$$

donc $$\beta\beta_1 = \alpha\beta \sin^2 45^\circ = \frac{\alpha\beta}{2};$$

donc $$\alpha\beta_1 = \sqrt{\overline{\alpha\beta}^2 - \frac{\overline{\alpha\beta}^2}{4}} = \alpha\beta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha\beta \cos 30^\circ.$$

Donc, l'angle $\beta\alpha\beta_1$ vaut 30°.

Revenant alors à la figure 2, on en conclut

$$cb = c_1b_1 \cos 30^\circ = 2\nu \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \nu\sqrt{3}.$$

Finalement $$\text{Surf. ABCD} = \mu\nu\sqrt{6},$$

et $$V = \lambda\mu\nu\sqrt{6}.$$

[Ont résolu cette question : MM. Curt, école normale de Bourg ; M. Rebeix, à Eygurande.]

ARITHMÉTIQUE

4244. — *Si a et b sont deux nombres entiers quelconques, le quotient $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ n'est jamais égal à un nombre entier.*

Si le quotient $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ était égal à un nombre entier q, on aurait

$$a^2 + b^2 = (a^2 - b^2)q,$$

et par suite

$$a^2(q-1) = b^2(q+1)$$

ou $$\frac{a^2}{b^2} = \frac{q+1}{q-1};$$

la fraction $\dfrac{q+1}{q-1}$ est donc un carré parfait ; on sait que, lorsqu'il en est ainsi, le produit de ses termes est carré parfait ; ainsi

$$(q+1)(q-1) = h^2,$$

d'où

$$q^2 - 1 = h^2,$$

ou

$$q^2 - h^2 = 1,$$
$$(q-h)(q+h) = 1 ;$$

égalité impossible, puisque le premier membre admet les deux diviseurs entiers $q+h$ et $q-h$.

Donc on ne peut supposer que

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

soit entier.

[Ont résolu la question : MM. J. Amboise ; P. Boutroux ; Burgat ; Cambureanu ; Cauchy ; A. Chapron ; J. Delpont ; P. Gervaiseau ; L. Gourdet ; Grzybowski ; G. Hiernaux ; H. Janois ; E. Layes ; Lecocq-Ameye ; H. Lefèvre ; Le Hénaff ; E. Louvel ; R. Manen ; H. Martiny ; J. Pastour ; J. Peyret ; Ph. Plisson ; A. Riche ; P. Tribier ; J. Wittner.]

4434. — *Trouver un caractère de divisibilité par 17 en décomposant un nombre donné en tranches de deux chiffres à partir de la droite.*

On remarque aisément que :

$$\begin{aligned}
1 &= m17 + 1,\\
10^2 &= m17 - 2,\\
10^4 &= m17 + 4,\\
10^6 &= m17 - 8,\\
10^8 &= m17 + 16 = m17 - 1,\\
10^{10} &= m17 + 2,\\
10^{12} &= m17 - 4,\\
10^{14} &= m17 + 8,\\
10^{16} &= m17 - 16 = m17 + 1,\\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Les restes de division par 17 des puissances de 10 d'exposant pair ont pour valeurs absolues 1, 2, 4, 8 et sont alternativement

positifs et négatifs ; la première série des quatre restes commence par $+1$, la seconde par -1, la troisième par $+1$, etc.

Considérons alors le nombre 45372894653. En le séparant en tranches de deux chiffres à partir de la droite, on peut l'écrire

$$53 + 46 \times 10^2 + 89 \times 10^4 + 72 \times 10^6 + 53 \times 10^8 + 4 \times 10^{10}.$$

On ne change pas le reste de division de ce nombre par 17 en remplaçant chaque puissance de 10 par le reste qui lui correspond, ce qui donne le nouveau nombre

$$53 - 46 \times 2 + 89 \times 4 - 72 \times 8 - 53 \times 1 + 4 \times 2.$$

Pour que le nombre proposé soit divisible par 17, il faut et il suffit que cette somme soit divisible par 17. Elle s'obtient évidemment par la règle suivante :

Ayant divisé le nombre en tranches de deux chiffres à partir de la droite, la dernière tranche à gauche pouvant n'avoir qu'un chiffre, on multiplie les nombres représentés par ces tranches, dans l'ordre où elles se suivent, par 1, -2, $+4$, -8, -1, $+2$, -4, $+8$, $+1$ etc. Si la somme des résultats comporte plus de deux chiffres, on fait sur cette somme la même opération jusqu'à ce qu'on arrive à un nombre plus petit que 100 ; si ce nombre est divisible par 17, il en est de même du nombre donné.

Il est clair que si l'un des résultats est négatif, il n'y a qu'à l'augmenter d'un multiple convenable de 17 pour le rendre positif.

Dans l'exemple considéré on trouve

$$53 - 92 + 356 - 576 - 53 + 8 = 417 - 1531 = -1114.$$

Augmentant de 1700, on trouve 586 ; appliquant une seconde fois la règle, on trouve

$$5 \times 1 - 2 \times 86 = 5 - 172 = -167.$$

Ajoutant encore 170, on trouve 3. Le nombre donné n'est pas divisible par 17 ; son reste de division par 17 est 3.

[Ont résolu cette question : MM. R. Croze ; L. Hubert ; J. Moisson ; M. Rebeix ; P. Reboul ; Ribes ; R. Van Cauwenbergh.]

ALGÈBRE

4348. — *Dans une équation* A *du second degré, on remplace* x *par* $y + k$; *on obtient ainsi une équation* B *où l'inconnue est* y. *Choisir* k *de manière que les racines de l'équation* A *et celles de l'équation* B *aient même produit.*

Expliquer la solution $k = 0$. *Prouver que, si on adopte l'autre valeur de* k, *la somme des quatre racines des équations* A *et* B *est nulle.*

L'équation A *sera, à la volonté du candidat,* $ax^2 + bx + c = 0$ *ou* $2x^2 - 7x - 3 = 0$.

(*École supérieure des postes et des télégraphes, 1898.*)

Dans l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad \text{(A)}$$

faisons $x = y + k$; il vient, après avoir ordonné par rapport à y,

$$ay^2 + (2ak + b)y + ak^2 + bk + c = 0. \qquad \text{(B)}$$

En égalant les produits des racines des équations (A) et (B), on a

$$\frac{c}{a} = \frac{ak^2 + bk + c}{a},$$

ou, en supposant $a \neq 0$, ce qui est permis puisque l'équation (A) est du second degré,

$$ak^2 + bk = 0.$$

On tire de là

$$k = 0 \qquad \text{ou} \qquad k = -\frac{b}{a}.$$

La solution $k = 0$ rendant les équations (A) et (B) identiques est évidente *a priori*.

En prenant $k = -\frac{b}{a}$, l'équation (B) se réduit à

$$ay^2 - by + c = 0 ;$$

dans ce cas la somme des racines de l'équation (B), $\frac{b}{a}$, est égale et de signe contraire à la somme des racines de l'équation (A), ce qui justifie la dernière partie de l'énoncé.

(M. REBEIX, lycée du Puy.)

[Ont résolu la même question : Melles J. Bruyas ; M. Pont ; MM. R. Basset ; F. Beynas ; G. Bonnel ; H. Bosc ; A. Bouzy ; J. Delpont ; M. Deschamps, collège de Cusset ; Doué, lycée de Toulon ; R. Dupland ; F. Chuberre ; L. Durand, lycée de Rennes ; J. Coupat ; L. Florentin, lycée de Nancy ; L. Gourdet ; Grzybowski ; J. Guillaume ; G. Hiernaux ; A. Jeannel, école normale de Melun ; X. Lacreuse ; J. Lagarde ; F. Lambley, collège Chaptal ; E. Layes ; E. Le Maigre ; M. Letessier, lycée de Laval ; L. M., à Vic ; A. Mirc ; F. Morel ; A. Nayel ; Oger ; L. Patin ; F. Pégorier ; L. Perret ; J. Pillard ; J. Pinchis ; P. Plisson ; Raynaud ; P. Reboul ; J. Reynaud, école professionnelle de Voiron ; E. Roncaglia ; E. Sevin ; A. Smântânescu ; Vial ; J. Villemagne ; J. Wittner.]

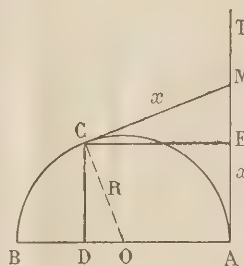
4358. — *On donne un demi-cercle* ACB, *de rayon* R ; *sur la tangente* AT *perpendiculaire au diamètre* AB, *on porte* AM *tel que* $AM = x$, *puis, du point* M, *on mène la tangente* MC. *On demande :*

1° *De calculer en fonction de* R *et de* x *les distances du point* C *au diamètre et à la tangente ;*

2° *De déterminer* x *de manière que la somme de ces deux distances soit égale à une longueur donnée* m, *telle que* $CD + AD = m$. *— Discussion.*

(*Bacc. lettres-math., Toulouse, novembre 1898.*)

1° Tirons le rayon OC du demi-cercle ACB. Les triangles rectangles COD, CME ayant les angles en C égaux comme compléments de l'angle OCE, sont semblables, et donnent



$$\frac{CD}{CE} = \frac{R}{x}. \qquad (1)$$

D'ailleurs la relation $\overline{CD}^2 = BD.DA$ s'écrit, en observant que $DA = CE$,

$$\overline{CD}^2 = CE(2R - CE). \qquad (2)$$

Les relations (1) et (2) entre CD et CE permettent de calculer ces deux segments.

En effet, remplaçons dans (2) CE par sa valeur tirée de (1) ; il vient

$$\overline{CD}^2 = \frac{x}{R} \cdot CD\left(2R - \frac{x}{R} \cdot CD\right),$$

ou, en divisant par le facteur CD qui n'est pas nul,

$$CD = 2x - \frac{x^2}{R^2} \cdot CD,$$

d'où
$$CD = \frac{2R^2x}{R^2 + x^2},$$

et, en portant cette valeur dans (1),

$$CE = \frac{2Rx^2}{R^2 + x^2}.$$

2° Égalons la somme des deux valeurs précédentes à m ; on obtient pour équation du problème,

$$\frac{2R^2x}{R^2 + x^2} + \frac{2Rx^2}{R^2 + x^2} = m,$$

ou, après avoir chassé le dénominateur commun et ordonné,

$$(m-2R)x^2-2R^2x+mR^2=0.$$

Discussion. — Pour qu'une valeur de x convienne, il faut et il suffit qu'elle soit réelle et positive.

La condition de réalité est

$$R^4-(m-2R)mR^2\geqslant 0,$$

ou $$m^2-2Rm-R^2\leqslant 0,$$

ou bien $$(m-R)^2-2R^2\leqslant 0,$$

ou encore $$(m-R-R\sqrt{2})(m-R+R\sqrt{2})\leqslant 0.$$

Le dernier facteur étant évidemment positif, cette condition revient à

$$m\leqslant R(1+\sqrt{2}).$$

Lorsqu'elle est remplie, le coefficient $m-2R$ de x^2 peut changer de signe, ce qui conduit à distinguer deux cas :

Si $m<2R$, l'équation ayant ses termes extrêmes de signes différents admet deux racines réelles de signes contraires, et la racine positive convient seule.

Si $2R<m\leqslant R(1+\sqrt{2})$, les deux racines ont leur produit, $\dfrac{mR^2}{m-2R}$, positif, ainsi que leur somme, $\dfrac{2R^2}{m-2R}$; ces racines étant ainsi positives sont toutes deux acceptables.

Pour $m=2R$, l'une des racines devient infinie (solution limite) ; l'autre racine, fournie par l'équation incomplète $-2R^2x+mR^2=0$, est égale à R (solution évidente d'après la figure).

Pour $m=R(1+\sqrt{2})$, les deux racines sont égales, et leur valeur commune est

$$x=\frac{R^2}{m-2R}=\frac{R}{\sqrt{2}-1}=R(\sqrt{2}+1);$$

les deux solutions du cas général sont alors confondues.

Remarque. — D'après les valeurs de CD et $CE=DA$, on voit facilement qu'une valeur négative de x répond à la relation

$$AD-CD=m.$$

(A. Bouzy, école primaire supérieure de Vervins.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Ardaillon, collège de Pont-à-Mousson ; L. Bigot ; M. Boutry ; A. Chapron ; G. Charpentier ; L. Cussenot, collège de Mirecourt ; J. Delpont ; R. Dupland ; R. Durand ; R. Fradin ; Jarrige, lycée de Tulle ; L. M., à Vic ; X. Lacreuse ; C. Marie ; L. Palin ; R. Quéré ; Raynaud ; M. Rebeix, lycée du Puy ; Remondet ; J. Valentin ; G. Vente, pensionnat Saint-Joseph, Caen ; J. Villemagne, pensionnat Valbenoîte, Saint-Étienne.]

4438. — *Mettre sous forme de produit de facteurs le polynome*

$$(x+y)^3+3xy(1-x-y)-1.$$

Le polynome peut s'écrire

$$(x+y)^3-1+3xy(1-x-y),$$

ou, en tenant compte de l'identité $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$,

$$(x+y-1)[(x+y)^2+x+y+1]+3xy(1-x-y).$$

En mettant alors en évidence le facteur commun $(x+y-1)$ et en réduisant, il vient

$$(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1).$$

La décomposition ne peut être poussée plus, car le second facteur, égalé à zéro, fournit pour x ou y des valeurs imaginaires.

(Abel Pichon, lycée de Niort.)

[Ont résolu la même question : Mlle Maria Pont ; MM. A. Bouzy ; A. Delbès ; J. Menéchal ; J. Nicolaescu ; Péchabrié ; F. Pégorier ; G. Tastet, lycée de Bordeaux ; M. Teulié ; E. Vaunac ; C. Barbe ; J. de Bersaucourt ; E. Chaineau ; L. Curt ; H. Dutertier ; A. Farret ; J. Moisson ; E. Gernez-Pfanmatter ; L. Patin ; P. Reboul ; F. Sol.]

GÉOMÉTRIE

4422. — *Étant donné un rectangle* ABDC *dont un des côtés* AC *est double du côté* AB *et dont la diagonale* BC *est donnée et égale à* a, *on considère, dans son plan, une parallèle* xy *à la diagonale* BC, *à la distance* a *de cette droite, et on fait tourner le rectangle autour de* xy. *On demande :*

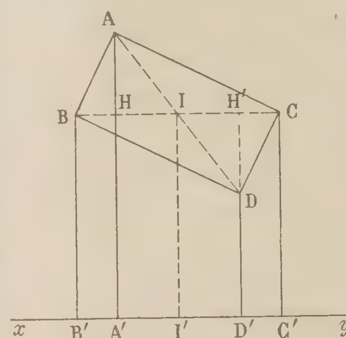
1° *De trouver l'expression de la surface* S *du solide engendré par le triangle* ABC, *de la surface* S' *du solide engendré par le rectangle, du volume* V *engendré par le rectangle ;*

2° *De calculer par logarithmes la longueur* a, *sachant que* $V=\dfrac{1^{mc}}{5432}$; *mettre tous les calculs.*

(*École des Beaux-Arts, section d'architecture, 1898.*)

1° *Surface* S *du solide engendré par le triangle* ABC.

Cette surface est la somme des surfaces latérales du cylindre et des troncs de cône engendrés par le carré BCC'B', et les trapèzes ABB'A', ACC'A'. Son expression est donc



$$S=2\pi aBC+\pi(a+AA')AB+\pi(a+AA')AC$$

ou

$$S=2\pi a^2+\pi(a+AA')(AB+AC).$$

Évaluons AA', AB et AC en fonction de a.

On a par hypothèse

$$AC=2AB,\qquad \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=a^2,$$

d'où l'on déduit

$$AB=\frac{a}{\sqrt{5}},\qquad AC=\frac{2a}{\sqrt{5}};$$

d'ailleurs, en appelant H le point d'intersection de AA' et BC,

$$AA'=AH+a$$

ou, comme $$AH.a=AB.AC=\frac{2}{5}a^2,$$

$$AA'=\frac{2}{5}a+a=\frac{7}{5}a.$$

En remplaçant dans S, il vient

$$S=2\pi a^2+\pi\left(a+\frac{7}{5}a\right)\frac{3a}{\sqrt{5}}=\frac{2\pi a^2(25+18\sqrt{5})}{25}.$$

Surface S' *du solide engendré par le rectangle.*

On peut considérer cette surface comme la somme des surfaces latérales des troncs de cône engendrés par les trapèzes ABB'A', ACC'A', BDD'B', DCC'D'. Donc

$$S'=\pi(a+AA')(AB+AC)+\pi(a+DD')(DB+DC),$$

ou, puisque $$DB+DC=AB+AC,$$

$$S'=\pi(2a+AA'+DD')(AB+AC).$$

Or on a vu plus haut que

$$AA'=\frac{7}{5}a,\qquad AB=\frac{a}{\sqrt{5}},\qquad AC=\frac{2a}{\sqrt{5}};$$

d'ailleurs

$$DD'=a-DH'=a-AH=a-\frac{2}{5}a=\frac{3}{5}a.$$

Par suite,

$$S'=\pi\left(2a+\frac{7}{5}a+\frac{3}{5}a\right)\frac{3a}{\sqrt{5}}=\frac{12}{\sqrt{5}}\pi a^2.$$

Volume V engendré par le rectangle.

Ce volume équivaut à la somme des volumes des troncs de cône engendrés par les trapèzes ABB'A, ACC'A', diminuée de la somme des volumes engendrés par les trapèzes BDD'A', DCC'D'. On peut donc écrire, en remarquant que les deux premiers troncs ont des bases égales, ainsi que les deux derniers,

$$V = \frac{1}{3}\pi B'C'(\overline{BB'}^2 + \overline{AA'}^2 + BB'.AA')$$

$$- \frac{1}{3}\pi B'C'(\overline{BB'}^2 + \overline{DD'}^2 + BB'.DD')$$

ou

$$V = \frac{1}{3}\pi a[\overline{AA'}^2 - \overline{DD'}^2 + a(AA' - DD')]$$

$$= \frac{1}{3}\pi a(AA' - DD')(AA' + DD' + a)$$

$$= \frac{1}{3}\pi a\left(\frac{7}{5}a - \frac{3}{5}a\right)\left(\frac{7}{5}a + \frac{3}{5}a + a\right) = \frac{4}{5}\pi a^3.$$

2° En remplaçant V par la valeur numérique donnée, on a l'équation

$$\frac{1}{5432} = \frac{4}{5}\pi a^3,$$

d'où
$$a^3 = \frac{5}{5432 \times 4\pi}.$$

En prenant les logarithmes de chaque membre on obtient

$$3 \log a = \log 5 - \log 5432 - \log 4 - \log 3{,}1416\,;$$

or les tables à 5 décimales donnent

$$\log 5 = 0{,}69897\,; \qquad \log 5432 = 3{,}73496\,;$$
$$\log 4 = 0{,}60206\,; \qquad \log 3{,}1416 = 0{,}49715.$$

Donc
$$3 \log a = 0{,}69897 - (3{,}73496 + 0{,}60206 + 0{,}49715)$$
$$= 0{,}69897 - 4{,}83417 = \bar{5}{,}86480\,;$$

$$\log a = \frac{\bar{5}{,}86480}{3} = \bar{2}{,}62160\,;$$

$$a = 0^{m}{,}0418.$$

Remarque. — On parvient plus rapidement aux expressions de S' et de V en appliquant les théorèmes de Guldin, d'après lesquels S' et V sont respectivement égaux à la circonférence décrite par le centre I du rectangle multipliée par le périmètre ou l'aire du rectangle. Ainsi

$$S' = 2\pi a.2(AB + AC) = \frac{12}{\sqrt{5}}\pi a^2,$$

$$V = 2\pi a.AB \times AC = \frac{4}{5}\pi a^3.$$

(A. Bouzy, instituteur à Vervins.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Baudoin ; V. Bonzom ; F. Montaland ; A. Popescu, lycée de Jassy ; J. Rigal, école primaire supérieure de Montcuq ; L. Barberot ; Remondet ; Mlle Maria Pont ; MM. E. Baudot ; E. Bergeret ; A. Brodbeck ; L. Curt ; J. Fiton ; Ch. Godard ; R. Henry ; E. Le Maigre ; J. Méréchal ; L. Michel ; A. Salvetat ; P. Tribier.]

PHYSIQUE

4386. — *On donne un cylindre à double fond en tôle ; il est hermétiquement clos : on suppose seulement que la paroi supérieure* MN *est traversée par un tube qui y est solidement encastré et qui s'ouvre dans l'atmosphère. De l'eau maintenue à 4° remplit la partie supérieure du cylindre depuis* GH *jusqu'en* AB *et le tube jusqu'en* C. *On a* DE = $4^{m}{,}1$, EF = $1^{m}{,}2$.

La partie inférieure du cylindre est remplie d'air dont la pression est mesurée avec un manomètre à mercure. La dénivellation PQ *entre les deux branches, mesurée à 20° sur une règle d'argent étalonnée à 0° (le coefficient de dilatation de l'argent est 0,00002) est de 30cm ; la densité du mercure est 13,6 à 0° et son coefficient de dilatation cubique est 0,00018. On demande la résultante des pressions exercées sur un décimètre carré du fond* GH.

(*Bacc. lettres-math., Toulouse, avril 1898.*)

Soit H la pression extérieure.

La pression exercée par l'eau sur GH est égale au poids d'une colonne d'eau ayant pour base GH et pour hauteur

$$DF = 4{,}1 + 1{,}2 = 5^{m}{,}3.$$

Une unité de surface — le décimètre carré dans le cas du problème — supporte donc une pression de haut en bas égale à

$$H + 53^{kg}.$$

L'air enfermé au-dessous de GH exerce une pression apparente de H — 30cm. Mais la dénivellation étant mesurée à 20° et la règle étant étalonnée à 0°, la pression réelle exercée par cet air est donnée par l'expression

$$H - \frac{30}{1 + 0{,}00018 \times 20} \times (1 + 0{,}00002 \times 20),$$

ou
$$H - 29^{cm}{,}9.$$

Cette colonne mercurielle de $2^{dm}{,}99$ reposant sur une surface de 1 décimètre carré exercerait une pression de

$$13^{kg}{,}6 \times 2{,}99 = 40^{kg}{,}664.$$

La résultante des pressions exercées sur un décimètre carré du fond GH a donc pour valeur

$$H + 53^{kg} - (H - 40^{kg}{,}664) = 93^{kg}{,}664.$$

(Mathieu, à Vernoux.)

[Ont résolu la même question : MM. M. Rebeix ; E. Sinturel.]

CONCOURS DE 1898 (*Suite*)

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES

Section des Sciences mathématiques.

Arithmétique et Algèbre.

4459. — Étant donnée la fraction $\frac{m}{n}$:

1° Trouver des nombres entiers a, b, c, ... tels que l'on ait

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{15} + \frac{b}{15^2} + \frac{c}{15^3} + \dots\,;$$

2° Chercher la condition nécessaire et suffisante pour que le second membre de cette égalité se compose d'un nombre limité de fractions.

3° Cette condition étant remplie, quel sera le nombre des fractions à calculer ?

4460. — On substitue les racines a et b de l'équation du second degré

$$x^2 + px + q = 0$$

dans le trinome $\qquad u = mx^2 + nx + h,$

et on propose de calculer n et h en fonction de p, q et m, de manière que l'on ait $u = b$ pour $x = a$, et $u = a$ pour $x = b$.

Soient n' et h' les valeurs trouvées pour n et h.

1° Démontrer que les racines de l'équation

$$mx^2 + n'x + h' = 0$$

satisfont à une relation indépendante de m ;

2° Chercher pour quelles valeurs de m l'équation

$$mx^2 + n'x + h' = 0$$

a ses racines réelles ;

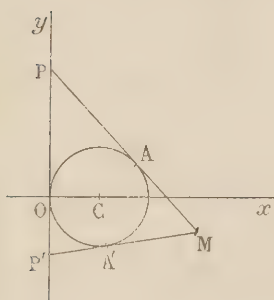
3° En supposant que l'on a $p = -\frac{3}{2}$ et $q = -1$, étudier les variations de la fraction

$$y = \frac{mx^2 + n'x + h'}{x^2 + px + q}.$$

(*8 juillet, de 8 h. 1/2 à midi 1/2.*)

« *Géométrie et Cosmographie* ».

4461. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy, et une circonférence de centre C, tangente en O à Oy, et de rayon a.



Soient deux points P et P′ pris sur Oy, par lesquels on mène les tangentes PA, P′A′ à la circonférence C. Ces deux points se déplacent sur Oy de manière que leurs ordonnées b et b' vérifient la relation

$$ubb' + v(b + b') + w = 0,$$

u, v, w étant des constantes données :

1° Trouver le lieu géométrique du point de rencontre M des tangentes PA, P′A′ ;

2° Démontrer que la droite AA′ qui joint les points de contact des tangentes PA, P′A′ passe par un point fixe ;

3° Démontrer que les trois droites OM, PA′, P′A se coupent en un même point, et chercher le lieu géométrique de ce point.

Construire ce lieu lorsqu'on suppose $v = 0$.

(*9 juillet, de 8 h. 1/2 à midi 1/2.*)

Section des Sciences physiques et naturelles.

Physique.

I. — Étude expérimentale des conditions dans lesquelles se produit la liquéfaction des gaz. — Applications des gaz liquéfiés.

II. — Caractère du timbre, en acoustique. — Causes des différences de timbre pour des sons de même hauteur.

III. — **4462.** Dans un circuit parcouru par un courant électrique, sont placés, à la suite les uns des autres, un voltamètre à azotate d'argent, un voltamètre à sulfate de cuivre, et un voltamètre à eau acidulée, de densité 1,1. Au bout de $35^{min}10^{sec}$, le volume d'hydrogène recueilli dans le dernier voltamètre est de $25^{cc},8$, la température étant de $13°,5$, la pression atmosphérique étant de 762^{mm}, et la hauteur de l'eau acidulée dans l'éprouvette étant de 75^{mm}. On sait d'ailleurs que la tension de la vapeur d'eau, au-dessus du liquide acidulé, est de $11^{mm},5$. — On demande :

1° Quelle est, en ampères, l'intensité du courant, sachant que 1 coulomb dégage $0^{cc},1158$ d'hydrogène à 0° et 760^{mm} ;

2° Comment on pourra vérifier le résultat au moyen des deux autres voltamètres, sachant que les équivalents électrolytiques de l'argent et du cuivre sont respectivement 108 et 31,5.

(*8 juillet, de 8 h. 1/2 à midi 1/2.*)

Sciences naturelles.

I. — Composition de l'aliment de l'Homme ; différences entre cet aliment et celui des plantes. Action des sucs digestifs sur les substances alimentaires. (On supposera connu l'appareil digestif.)

II. — Croissance de la tige ; son mécanisme.

(*9 juillet, de 8 h. 1/2 à midi 1/2.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4463. — La surface d'un triangle de côtés $2n^2 + 2$, $2n^2$, $2n^2 - 2$ est quadruple de celle d'un triangle de côtés $2n + 1$, $2n$, $2n - 1$. Déterminer pour quelle valeur de n.

(F. Pégorier, à Cette.)

4464. — On donne deux points A et B dans un plan. Sachant que les nombres m et n sont tels que

$$(1 - m)(1 - n) > 0,$$

évaluer l'aire de la région du plan contenant des points P tels que le rapport $\frac{PA}{PB}$ soit compris entre M et N.

(E. Montagut.)

4465. — Deux cercles, de centres O, O′, sont tangents extérieurement en C. Soient A, B leurs points de contact respectifs avec l'une de leurs tangentes communes.

1° On suppose que la figure tourne autour de la ligne OO′ et l'on demande de calculer le volume engendré par l'aire qui est limitée par la droite AB et les arcs de cercle AC, BC.

2° On suppose que les rayons des cercles varient, leur somme restant constante, et l'on demande de trouver les valeurs des rayons pour lesquelles le volume précédent est maximum.

3° On suppose que les rayons varient, leur produit restant constant, et l'on demande d'étudier la variation du volume et d'en indiquer la représentation graphique.

(*Bacc. lettres-math.*, *Montpellier, juillet 1898.*)

4466. — Construire un triangle connaissant A, $b + a = h$, $c + a = k$. — Discuter.

Calculer ensuite les côtés de ce triangle.

(P. Sailly, à Limoges.)

4467. — Dans un vase hermétiquement clos se trouve une balance réduite à son fléau.

On attache aux deux bouts :

1° une sphère S de 1^{lit} de volume et pesant $p = 502^{gr}$;

2° une sphère S′ de $0^{mc},000025$ formée d'un corps de densité 20.

On demande à quelle pression il faut porter l'acide carbonique contenu dans la boîte pour que, à 100°, il y ait équilibre entre les deux sphères.

Densité de CO^2, 1,529.

(*Bacc. lettres-math.*, *Toulouse, juillet 1898.*)

4468. — Deux petites sphères identiques, électrisées positivement, sont placées à une certaine distance l'une de l'autre, et donnent lieu à une répulsion égale à 1. On les rapproche jusqu'à ce qu'elles se touchent, puis on les éloigne à une distance égale à la moitié de la précédente, et l'on a une répulsion égale à 4,5. On demande le rapport des charges électriques primitives des deux sphères.

(*Bacc. lettres-math.*, *Lyon, juillet 1898.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel Dir.

23e Année. — N° 4. JOURNAL Paris, le 15 Novembre 1898.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie **Nony** et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

CONCOURS DE 1898

Mathématiques élémentaires.

4405. — *On considère un triangle* T *dont les sommets sont* A, B, C *et une droite* Δ *dans son plan. On prend les symétriques d'un point* O *quelconque de la droite* Δ *par rapport aux côtés du triangle* T, *et on construit le centre* O′ *du cercle circonscrit au triangle ayant pour sommets les trois points ainsi obtenus.*

I. *Trouver le lieu du point* O′ *lorsque le point* O *décrit la droite* Δ. *Ce lieu est une conique* S *dont on discutera le genre en faisant varier la position de la droite* Δ *par rapport au triangle* T. *On indiquera également les positions de* Δ *pour lesquelles* S *lui est tangente.*

II. *Trouver le lieu du centre de la conique* S *lorsque la droite* Δ *se déplace parallèlement à elle-même.*

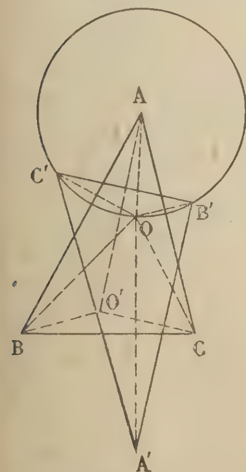
Ce lieu est une conique S_1 *qui dépend de la direction de* Δ.

III. *Trouver le lieu du centre de* S_1 *lorsqu'on fait varier la direction de* Δ.

IV. *Démontrer que par tout point* I *de* S *on peut mener trois droites* OO′ *et faire voir que deux de ces droites sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites qui joignent le point* I *aux points de rencontre de* Δ *et de* S.

V. *Dans le cas particulier où la droite* Δ *passe par le centre* ω *d'un cercle inscrit au triangle* T, *on propose de trouver l'enveloppe de la droite* OO′. *Démontrer que, dans ce cas, les centres des trois autres cercles inscrits au triangle* T *et les points de rencontre des diagonales du quadrilatère complet ayant pour côtés* Δ *et les côtés de* T *sont six points placés sur une même conique.*

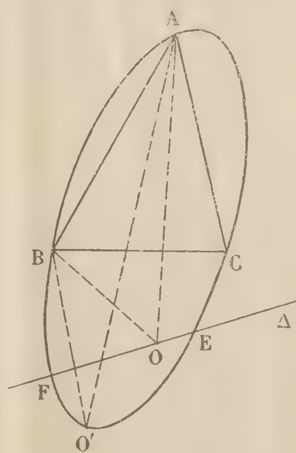
I. — Soient A′, B′, C′ les symétriques d'un point O par rapport aux côtés du triangle ABC ; le centre O′ du cercle circonscrit au triangle A′B′C′ se trouvera à l'intersection des perpendiculaires élevées aux côtés de ce triangle en leurs milieux ; je vais montrer que ces perpendiculaires passent respectivement par les sommets A, B, C, et sont les symétriques des droites AO, BO, CO par rapport aux bissectrices des angles du triangle ABC.



Considérons en effet par exemple les points B′ et C′ ; le point A est à égale distance des trois points B′, C′ et O, par suite il se trouve sur la perpendiculaire au milieu de B′C′ ; soit AO′ cette droite. Traçons le cercle de centre A et circonscrit au triangle B′C′O ; quel que soit le sens que l'on adopte sur les droites indéfinies AB, AC, AO, AO′, OC′, B′C′, les angles (AB, AO′) et (C′O, C′B′) sont toujours égaux et de même sens comme ayant les côtés perpendiculaires, et il en est de même des angles (C′O, C′B′) et (AO, AC) comme ayant même mesure dans la circonférence de centre A ; les angles (AB, AO′) et (AO, AC) étant par suite égaux et de même sens, on peut affirmer que AO′ et AO sont symétriques par rapport à l'une ou l'autre des bissectrices de l'angle BAC, et les droites BO′ et BO, CO′ et CO jouissent de la même propriété par rapport aux bissectrices des angles B et C. Ainsi donc à chaque point O du plan correspond un point O′, intersection des symétriques de AO, BO et CO respectivement par rapport aux bissectrices des angles A, B, C, et c'est le point dont il est question dans l'énoncé.

On arriverait à la même conclusion en remarquant que le cercle circonscrit au triangle A′B′C′ est le cercle directeur relatif au second foyer O′ d'une conique inscrite dans le triangle ABC et ayant O comme premier foyer ; la propriété des angles formés par deux tangentes avec les droites joignant leur point d'intersection aux foyers fournit la construction que nous avons donnée pour le point O′.

Les points O et O′ sont tels que chacun se déduit de l'autre par la construction précédente ; ils sont dits *points inverses* l'un de l'autre ; la transformation par points inverses joue un rôle important dans l'étude des courbes rapportées à un triangle (*).



Lorsque le point O décrit une droite Δ, son inverse O′ décrit une conique S circonscrite au triangle ABC ; les rayons AO′ et BO′ décrivent en effet autour de A et B des faisceaux respectivement homographiques aux faisceaux décrits par AO et BO ; ces derniers étant homographiques, il en est de même des premiers, et O′ décrit une conique S passant par A et B ; elle passe aussi par C pour la même raison ; les tangentes à S aux points A, B, C sont les symétriques, par rapport aux bissectrices du triangle T, des droites joignant les sommets aux points de rencontre de Δ avec les côtés opposés ; la conique est ainsi complètement déterminée.

Les points de rencontre E et F de la conique S et de la droite Δ sont deux points inverses l'un de l'autre ; si l'on considère en

(*) Voir la solution de la question de Mathématiques spéciales du concours d'agrégation de 1890 par M. Delassus, insérée dans la Revue de mathématiques spéciales.

effet le point E commun à Δ et S, son inverse appartiendra aux inverses de ces deux lignes, c'est-à-dire à S et à Δ ; il n'est pas en général confondu avec E, parce que AE n'est pas confondu avec l'une des bissectrices de l'angle A, par conséquent il ne peut être que le deuxième point F commun à S et à Δ.

Ces points E et F sont les points doubles des deux divisions homographiques tracées par AO' et BO' sur Δ ; ils peuvent être réels et distincts, imaginaires ou confondus, ce dernier cas ne se présentant que lorsque Δ est tangent à S.

Pour que la droite Δ soit tangente à S, il faut et il suffit, d'après ce qui précède, que le point de contact soit un point confondu avec son inverse, ou que les droites qui le joignent aux sommets A, B, C du triangle T soient chacune confondue avec une bissectrice de ce triangle ; il est alors nécessaire et suffisant que le point de contact soit le centre de l'un des quatre cercles tangents aux trois côtés du triangle T, ou enfin que la droite Δ passe par l'un de ces quatre points, qui sera précisément le point de contact de Δ et de S.

Pour trouver la nature de la conique S inverse d'une droite Δ, je remarque que le point O' sera à l'infini si le triangle A'B'C' se réduit à une droite, c'est-à-dire si le point O se trouve sur le cercle circonscrit au triangle ABC ; on sait en effet que ce cercle est le lieu des points dont les projections sur les côtés du triangle, et par suite les symétriques par rapport à ces côtés sont trois points situés en ligne droite.

Il résulte de là que la conique S aura autant de points à l'infini que la droite Δ aura de points communs avec le cercle circonscrit au triangle T ; S sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que Δ ne coupera pas ce cercle, le coupera ou lui sera tangent. Ajoutons que, d'après la réciprocité des points O et O', la conique inverse de la droite de l'infini sera précisément le cercle circonscrit à ABC. Pour que la conique S se décompose, il faut et il suffit que Δ passe par un des sommets du triangle ; la conique inverse se compose alors d'une droite passant par ce sommet, et du côté opposé.

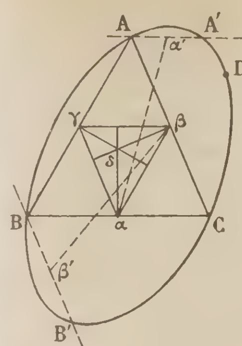
II. — Supposons que la droite Δ se déplace parallèlement à une direction Δ_1 ; la conique S passe constamment par les sommets A, B, C du triangle et par le point D inverse du point à l'infini dans la direction Δ_1. Lorsque Δ varie, on obtient pour S successivement toutes les coniques du faisceau déterminé par ces quatre points, car si l'on prend un point quelconque O' dans le plan, son inverse O, et la droite Δ passant par O parallèlement à Δ_1, la conique S inverse de Δ passe par A, B, C, D et O' et se confond avec la conique du faisceau assujettie à passer par O'.

Nous sommes donc ramenés à trouver le lieu des centres des coniques passant par les quatre points A, B, C, D ; je vais montrer que c'est une conique S_1 qui passe par neuf points remarquables, ce sont les milieux des six côtés du quadrangle ABCD et les trois points diagonaux de ce quadrangle.

Je considère pour cela les cordes AA' et BB' respectivement parallèles à BC et AC ; les points A' et B' où elles coupent les coniques du faisceau, décrivent deux divisions homographiques ; en effet, en vertu de l'égalité des rapports anharmoniques des deux faisceaux

$$A(A', B', C, D) \qquad \text{et} \qquad B(A', B', C, D)$$

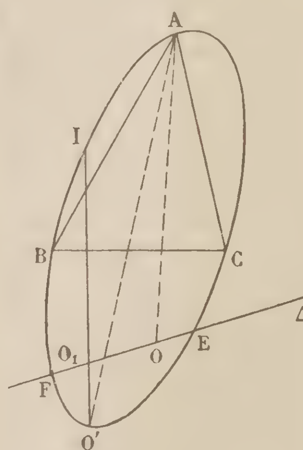
les seuls côtés variables de ces faisceaux AB' et BA' décrivent des faisceaux homographiques, et A' et B' sont homographiques. Les diamètres $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ des deux directions BC et AC joignent respectivement les milieux α et β de BC et AC aux milieux α' et β' des cordes AA' et BB' ; comme les points α' et β' décrivent des divisions semblables aux divisions A' et B', par suite homographiques, le point de rencontre de $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$, qui n'est autre que le centre de la conique S, décrit une conique S_1 passant par α et β. Elle passe pour une raison analogue par le milieu γ de AB, ainsi que par les milieux de DA, DB et DC ; si l'on considère enfin les coniques S du faisceau réduites à un couple de côtés opposés du quadrangle ABCD, leurs centres sont les points de rencontre de ces côtés opposés, c'est-à-dire les trois points diagonaux du quadrangle ; ces points appartiennent encore à la conique S_1.



Quelle que soit la direction de Δ_1, lorsque Δ s'éloigne à l'infini, la conique S devient le cercle circonscrit au triangle ABC, par suite le centre δ de ce cercle est un dixième point appartenant à la conique S_1. Cette conique passe ainsi par les milieux α, β, γ des côtés du triangle ABC, et par le point δ qui est l'orthocentre du triangle $\alpha\beta\gamma$; on en conclut que c'est une hyperbole équilatère, et qu'elle renferme les points de concours des hauteurs de tous les triangles qu'on peut former en choisissant trois quelconques des dix points mentionnés précédemment.

III. — Lorsque la direction de Δ varie, la conique S_1 varie en passant par les quatre points α, β, γ, δ dont chacun est l'orthocentre du triangle des trois autres; le raisonnement de la deuxième partie nous montre que le lieu du centre de S_1 est une conique passant par neuf points remarquables du quadrangle $\alpha\beta\gamma\delta$, et elle n'est autre que le cercle des neuf points du triangle $\alpha\beta\gamma$.

IV. — Si une droite OO' passe par un point I de la conique S, on peut supposer que O' est confondu avec I ou bien qu'il est distinct; dans le premier cas il n'existe sur Δ qu'un seul point O inverse de I, et qu'une seule droite OO'; dans le second cas, il existe deux droites OO' passant par I, et distinctes de la première. Supposons en effet que l'on fasse tourner une droite autour du point I, qu'elle coupe la conique en O' et la droite Δ en O_1, puis que l'on construise le point O inverse de O'. Les faisceaux AO et AO' d'une part, AO' et IO'O$_1$ d'autre part sont homographiques; on en conclut que les divisions déterminées par O et O_1 sur la droite Δ sont homographiques ; pour que I, O et O' soient en ligne droite, il faut et il suffit que O et O_1 soient confondus, donc que O soit en un des deux points doubles des divisions précédentes ; il existe donc bien deux droites de la nature indiquée répondant à la question.

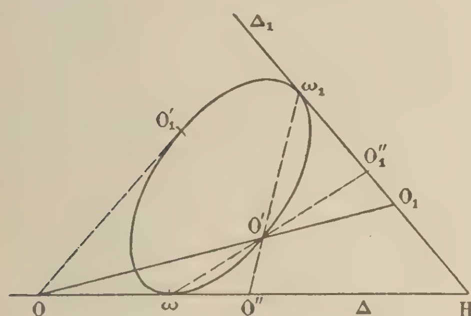


Les divisions tracées par O et O_1 sur Δ sont en involution, car si l'on considère les points E et F de rencontre de S et de Δ, ce sont, comme on l'a vu, deux points inverses l'un de l'autre, et ils se correspondent d'une manière réciproque dans les divisions O et O_1 ; on sait que l'existence d'un seul couple de points de cette nature suffit pour caractériser la propriété involutive de deux divisions homographiques de même base, par suite les divi-

sions tracées par O et O_1, ainsi que les faisceaux engendrés par $IO'O_1$ et IO sont en involution. Comme les rayons doubles sont conjugués harmoniques par rapport à deux rayons homologues quelconques, on voit que les deux droites OO′ passant par I, et telles que O′ soit distinct de I sont les rayons doubles des faisceaux précédents et forment un faisceau harmonique avec les droites IE, IF joignant le point I aux points communs à S et à Δ.

V. — Supposons que la droite Δ passe par un centre ω d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle T; nous avons vu dans la première partie que la conique S est tangente à Δ au point ω; je vais montrer que l'enveloppe de OO′ est une conique bitangente à S.

La question peut être posée d'une manière générale de la façon suivante : Deux points O′ et O tracent l'un sur une conique S, l'autre sur une de ses tangentes des divisions homographiques (c'est-à-dire vues d'un point de la conique suivant des faisceaux homographiques) ayant un point homologue commun au point de contact de la tangente, montrer que l'enveloppe de OO′ est une conique bitangente à S.



Je suppose que du point O on trace la deuxième tangente à S; on sait que son point de contact O'_1 décrit sur la conique une division homographique à celle que trace O sur Δ; les divisions O′ et O'_1 seront dès lors homographiques sur la conique; elles ont un premier point double en ω, je désigne par ω_1 l'autre point double, et je trace la tangente Δ_1 au point ω_1.

Je considère un point O′ sur S, le point O correspondant sur Δ, et je trace OO′ qui coupe Δ_1 en O_1; je trace également $\omega O'$ et $\omega_1 O'$ qui coupent Δ_1 et Δ en O''_1 et O″; je désigne enfin par H le point de concours des deux tangentes.

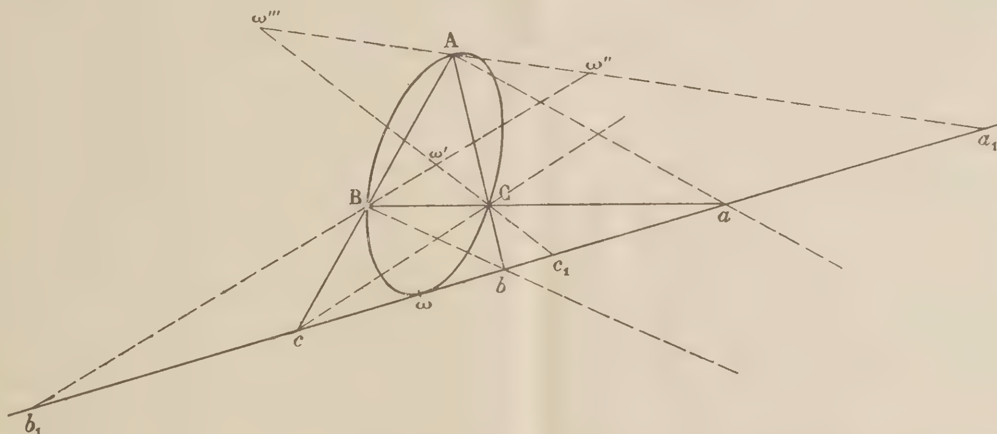
D'après les hypothèses faites, les points O et O″ décrivent sur Δ des divisions homographiques dont ω et H sont les points doubles, par suite le rapport anharmonique $(OO''\omega H)$ est constant ; le rapport $(O_1\omega_1 O_1''H)$ lui est égal par perspective faite du point O′, et il est aussi constant, par suite O_1 et O_1'' décrivent sur Δ_1 des divisions homographiques dont ω_1 et H sont les points doubles ; mais les divisions O_1'' et O″ étant homographiques comme perspectives de la division O′ de la conique, et les divisions O″ et O étant homographiques par hypothèse, O et O_1 décrivent sur Δ et Δ_1 des divisions homographiques ; par conséquent la droite $OO'O_1$ enveloppe une conique tangente à Δ et Δ_1 ; les points de contact sont précisément ω et ω_1, de sorte que l'enveloppe trouvée est bitangente à S en ces deux points, ce que nous voulions démontrer.

On peut interpréter de la façon suivante la question que nous venons de résoudre : Étant données dans l'espace une section conique S et une droite G rencontrant cette conique, et projetée sur le plan de cette courbe suivant une de ses tangentes, les droites OO′ sont les projections des génératrices d'un système réglé du second ordre s'appuyant sur S et sur G ; l'enveloppe de OO′ est alors le contour apparent de l'hyperboloïde ainsi engendré sur le plan de S, et c'est une conique bitangente à la première.

En revenant au problème posé, on voit que l'enveloppe de OO′ est une conique bitangente à S, l'un des points de contact étant ω, et Δ étant la tangente commune en ce point.

On peut déterminer *a priori* plusieurs autres tangentes à la conique précédente ; si l'on suppose d'abord que O vienne sur Δ en l'un des points a, b, c où cette droite rencontre les côtés du triangle, le point O′ vient en l'un des sommets opposés A, B, C, de sorte que l'on obtient déjà comme tangentes les trois diagonales Aa, Bb, Cc du quadrilatère complet formé par Δ et les côtés de T. Si l'on suppose d'autre part que O vienne en un des points a_1, b_1, c_1 de rencontre de Δ avec les bissectrices du triangle autres que celles qui se coupent en ω, le point O′ est situé chaque fois sur la même bissectrice ; on en conclut que trois nouvelles tangentes sont constituées par ces bissectrices, c'est-à-dire par les côtés du triangle formé par les centres ω', ω'', ω''' des cercles exinscrits autres que ω.

La dernière question de l'énoncé est une conséquence immédiate du théorème suivant : *Si deux triangles sont circonscrits à une conique, leurs sommets sont six points situés sur une autre conique ;* il suffit en effet de l'appliquer à l'enveloppe que l'on vient de trouver, et aux deux triangles formés par les tangentes précédentes. Il existe plusieurs démonstrations élémentaires de ce théorème ; l'une des plus simples consiste à transformer homographiquement la figure de façon que deux des sommets d'un des triangles deviennent les points cycliques du plan ; la conique devient une parabole ayant pour foyer le transformé du troisième sommet du triangle considéré ; la proposition se transforme alors dans la suivante, qui est bien connue : *Les sommets d'un triangle circonscrit à la parabole sont sur un cercle passant par le foyer.*



H. V.

[Cette même question a été bien traitée par MM. H. Lacaze, à Ayros, et H. L'Huillier, à Nancy.]

ARITHMÉTIQUE

4410. — *Trouver un nombre tel qu'en le multipliant par* 37 *et divisant le produit par* 31, *on ait pour reste* 15.

Soit x le nombre cherché. Tout revient à résoudre en nombres entiers l'équation

$$37x = 31y + 15.$$

On en déduit

$$y = \frac{37x - 15}{31} = x + \frac{6x - 15}{31}.$$

Cette valeur de y devant être égale à un nombre entier, posons

$$\frac{6x - 15}{31} = t,$$

t étant un nombre entier. On tire de là

$$x = \frac{31t + 15}{6} = 5t + \frac{t + 15}{6}.$$

Cette valeur de x devient elle-même entière en posant

$$\frac{t + 15}{6} = u,$$

d'où $$t = 6u - 15$$

et $$x = 5(6u - 15) + u = 31u - 75 = 31u' + 18.$$

Tous les multiples de 31 augmentés de 18, tels que 18, 49, 80, ... etc., satisfont donc à la condition imposée.

(L. GOURDET.)

[Ont résolu la question 4410 : MM. E. Beutel et Keefer, école réale de Cannstatt ; V. Bourquin, collège de Pontarlier ; M. Boutry ; A. Bouzy ; R. Cordier ; J. Coupat ; J. Dejonc ; A. Gourdin ; R. Henry, soldat au 156e à Toul ; A. Jeannel ; M. Mathieu ; J. Ménéchal ; M. Oger ; F. Pégorier ; Gernez-Pfanmalter ; P. Plisson ; M. Rebeix ; A. Smântânescu, à Romanesti ; Ch. Szabo, école réale, à Györ ; P. Vincent, école d'arts et métiers d'Aix ; N. Yermoloff.

Ont résolu la même question, proposée par erreur sous le no 4451 : MM. A. Amblard ; Bayor ; V. Bonzom ; J. Blampain ; L. Bois ; C. Bourveau ; B. Carrière ; L. Ecoffard ; G. Foucry ; G. H. D. O. ; Grzybowski ; R. Hüe ; E. Kornis ; X. Lacreuse ; J. Le Bihan ; H. Lefèvre ; E. Le Maigre ; G. Marquet ; F. Morel ; A. Popescu ; Raynaud ; Remondet ; Ribes ; J. Rigal ; R. Ruchon ; G. Schoonheere ; G. Tastet ; R. Thomas ; J. Trouillé ; Venet ; Vial.]

4450. — *Convertir* $\frac{9}{10}$ *en une somme de fractions ayant pour dénominateurs des puissances de* 6.

Première méthode. — Evaluons la fraction $\frac{9}{10}$ à moins de $\frac{1}{6}$; nous aurons

$$\frac{9}{10} = \frac{54}{60} = \frac{50 + 4}{60} = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{10}.$$

En opérant de même sur la fraction $\frac{4}{10}$, il vient

$$\frac{4}{10} = \frac{24}{60} = \frac{20 + 4}{60} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{10}. \qquad (1)$$

Donc

$$\frac{9}{10} = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{10}\right) = \frac{5}{6} + \frac{2}{6^2} + \frac{1}{6^2} \cdot \frac{4}{10},$$

et, en remplaçant indéfiniment de proche en proche $\frac{4}{10}$ par sa valeur (1),

$$\frac{9}{10} = \frac{5}{6} + \frac{2}{6^2} + \frac{2}{6^3} + \cdots + \frac{1}{6^n} \cdot \frac{4}{10}.$$

Pour n infiniment grand, le dernier terme tend vers zéro, de sorte que la fraction $\frac{9}{10}$ se trouve être la somme d'une infinité de fractions ayant pour dénominateurs des puissances de 6.

(LE BIHAN, maître d'études à Saint-Pol de Léon.

Seconde méthode. — Dans le système de numération de base 6, $9 = 6 + 3$ s'écrit 13 et $10 = 6 + 4$ s'écrit 14 ; dans ce système la fraction $\frac{9}{10}$ devient donc $\frac{13}{14}$. Or

$$\frac{13}{14} = 0{,}5222\ \ldots$$

Par suite, en revenant au système décimal,

$$\frac{9}{10} = \frac{5}{6} + \frac{2}{6^2} + \frac{2}{6^3} + \cdots$$

(J. LE BIHAN.)

La division de 13 par 14 doit naturellement être faite dans le système de base 6. Pour la faire commodément, on dresse un tableau des 6 premiers multiples du diviseur 14 écrits dans le système de base 6. On trouve ainsi

$$14 \times 1 = 14,\quad 14 \times 2 = 32,\quad 14 \times 3 = 50,\quad 14 \times 4 = 104,$$
$$14 \times 5 = 122,\quad 14 \times 6 = 140.$$

La division se fait alors comme suit :

En 13, combien de fois 14 ? Zéro fois ; on place au quotient un zéro suivi d'une virgule, et on ajoute un zéro à la droite du dividende.

En 130, combien de fois 14 ? D'après le tableau dressé, 5 fois ; on place 5 après la virgule, et on retranche du dividende 130 le produit de 5 par 14, soit 122 ; 2 ôté de 10 reste 4 (ne pas oublier qu'on opère dans le système de base 6), et je retiens 1 ; 1 et 2 font 3, ôté de 3 reste zéro ; 1 de 1 reste zéro.

On place un zéro à la droite du reste 4 ; en 40, combien de fois 14 ; 2 fois, d'après le tableau des produits ; de 40 on retranche le produit de 14 par 2, soit 32 ; 2 ôté de 10 reste 4, et je retiens 1 ; 1 et 3 font 4, ôté de 4 reste zéro.

Le reste 4 se reproduit donc indéfiniment ; de même le chiffre 2 au quotient. Ce quotient est donc la fraction périodique 0,5222 . .

[Ont résolu la même question : MM. Burgat, école normale d'Albertville ; E. Foucart ; G. Foucry ; E. Framboise, lycée de Gueret ; G. H. D. O. ; Grzybowski, lycée de Saint-Etienne ; R. Hüe ; H. Janois ; F. Pégorier ; A. Smântânescu, à Bucarest ; R. Thomas ; J. Fiton ; E. Ménissier ; A. Popescu ; A. Thorin.]

4452. — *Sommer les n premiers termes de la suite*

$$1 + 11 + 111 + 1111 + \ldots$$

Le $n^{ième}$ terme de la suite étant composé de n chiffres 1 a pour expression

$$10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1,$$

polynome égal comme on sait au quotient de $10^n - 1$ par $10 - 1$ ou 9.

La suite proposée équivaut donc à la suivante :

$$\frac{10 - 1}{9} + \frac{10^2 - 1}{9} + \ldots + \frac{10^n - 1}{9}.$$

La somme de ces n termes est visiblement

$$S = \frac{10 + 10^2 + \ldots 10^n - n}{9},$$

ou, en observant que $10 + 10^2 + \ldots 10^n = 10 \cdot \frac{10^n - 1}{9}$,

$$S = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{81}.$$

Remarque. — L'addition directe des nombres donnés montre que lorsque $n < 10$, la somme S est exprimée par le nombre formé des n premiers chiffres : 1 2 3 ... n.

(R. THOMAS, à Lanouaille.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Amblard ; L. Bois ; V. Bonzom ; C. Bourveau ; A. Brodbeck ; R. Coural ; J. Delpont ; R. Dickson ; L. Ecoffard ; Famechon ; J. Fiton ; E. Foucart ; G. Foucry ; R. Henry ; R. Hüe ; H. Janois ; Javelot ; G. Jullian ; E. Kornis ; L. Lacomblez ; X. Lacreuse ; L. Lassence ; E. Léotard ; P. Letourneur ; F. Morel ; M. Oger ; F. Pégorier ; A. Popescu ; Raynaud ; J. Rigal ; M. Rivière ; E. de Rycker ; A. Sainte-Laguë ; G. Schoonheere ; A. Tardieu ; G. Tastet ; N. Teryep ; A. Vergnole ; Bouzy ; A. Prost.]

ALGÈBRE

4367. — *Faire voir qu'en désignant par* a, b, c, d *quatre entiers donnés, on peut trouver pour* $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ *un système de*

valeurs entières, positives ou négatives, telles que l'on ait

$$(\lambda a + \mu b)^2 + (\lambda' a + \mu' b)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

En déduire que si, dans un produit de n nombres entiers, chaque facteur est la somme de deux nombres entiers carrés parfaits, le produit jouit de la même propriété.

(*Bacc. lettres-math., Caen, avril 1898.*)

En développant et ordonnant par rapport à a et b, la relation énoncée devient

$$(\lambda^2 + \lambda'^2 - c^2 - d^2)a^2 + 2(\lambda\mu + \lambda'\mu')ab + (\mu^2 + \mu'^2 - c^2 - d^2)b^2 = 0.$$

Pour que cette égalité subsiste quels que soient a et b, il faut et il suffit que les coefficients de a^2, ab, b^2 soient nuls, ce qui fournit les trois équations :

$$\lambda^2 + \lambda'^2 = c^2 + d^2,$$
$$\mu^2 + \mu'^2 = c^2 + d^2,$$
$$\lambda\mu + \lambda'\mu' = 0.$$

Ce système est visiblement vérifié par les valeurs entières suivantes :

$$\lambda = \pm c, \qquad \lambda' = \pm d,$$
$$\mu = \pm d, \qquad \mu' = \pm c,$$

les signes + ou — étant pris de manière que les produits $\lambda\mu$ et $\lambda'\mu'$ soient de signes contraires. On a ainsi l'identité facile à vérifier :

$$(\pm ca \mp bd)^2 + (\pm ad \pm bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

En vertu de cette identité, on peut écrire

$$(a^2 + a'^2)(b^2 + b'^2) = A^2 + B^2,$$

puis en multipliant par un troisième facteur de la forme $c^2 + c'^2$,

$$(a^2 + a'^2)(b^2 + b'^2)(c^2 + c'^2) = (A^2 + A'^2)(c^2 + c'^2) = B^2 + B'^2.$$

En continuant la multiplication par les autres facteurs du produit, on obtient ainsi une série de produits de même forme que les facteurs constitutifs.

(Francis BEYNAS.)

[M. L. Gourdet a résolu la même question.]

4411. — *a, b, c, d, étant en progression arithmétique, on a*

$$(a - b + c - d)^2 = (a - b)^2 + 2(b - c)^2 + (c - d)^2.$$

En développant le carré du premier membre, l'égalité à démontrer peut s'écrire

$$(a - b)^2 + 2(a - b)(c - d) + (c - d)^2 = (a - b)^2 + 2(b - c)^2 + (c - d)^2,$$

ou, en supprimant les termes qui se détruisent et divisant ensuite par 2,

$$(a - b)(c - d) = (b - c)^2.$$

Or les nombres a, b, c, d se succédant par hypothèse en progression arithmétique, les trois différences $a - b$, $c - d$, $b - c$ sont égales à la raison de cette progression, et la relation précédente devient évidente.

Remarque. — La relation énoncée est également vérifiée lorsque les nombres a, b, c, d forment une progression géométrique (*V. Journal, 22e année, n° 4245, p. 45*).

(L. CURT, école normale de Bourg.)

[Ont résolu la même question : MM. G. Anastasiu ; E. Ardin-Delteil ; L. Barberot ; P. Barroué, lycée de Brest ; P. Bonnot ; V. Bourquin ; M. Boutry ; A. Bouzy ; Burgat, école normale d'Albertville ; V. Cambureanu ; L. Caralp, lycée de Foix ; R. Cordier ; J. Coupat ; L. Gourdet ; A. Gourdin ; R. Henry ; P. Herrmann, collège Chaptal ; Jacquet, lycée de Mâcon ; H. Janois ; A. Jeannel ; H. Keefer ; F. Ladevèze, lycée de Toulouse ; E. Le Maigre ; F. Leulliot ; J. Ménéchal, au 108e de ligne ; M. Oger ; L. Patin ; F. Pégorier ; Ch. Pellion, lycée de Brest ; L. Perret ; Gernez-Pfanmatter ; P. Plisson ; M. Rebeix ; E. Rousselot ; A. Rozier, lycée de Bordeaux ; Ch. Szabo, école réale de Gyor ; G. Tastet, lycée de Pau ; R. Thomas ; A. Vergnole ; P. Vincent, école d'Arts et Métiers d'Aix.]

4440. — *Trouver trois nombres entiers sachant qu'ils forment une progression arithmétique telle que le quotient de leur produit par leur somme est égal au double de la raison.*

Soient $\quad x - y, \quad x, \quad x + y,$

trois nombres formant une progression arithmétique de raison y. Le produit de ces trois nombres est

$$(x - y)x(x + y) \qquad \text{ou} \qquad x(x^2 - y^2)$$

et leur somme $\ x - y + x + x + y\ $ ou $\ 3x$. On doit donc avoir

$$\frac{x(x^2 - y^2)}{3x} = 2y,$$

ou

$$y^2 + 6y - x^2 = 0,$$

d'où

$$y = -3 \pm \sqrt{9 + x^2}. \qquad (1)$$

Pour que y soit entier, il faut et il suffit que le nombre entier $9 + x^2$ représente un carré parfait. En posant

$$9 + x^2 = k^2$$

on en déduit $\qquad (k - x)(k + x) = 9.$

Cette égalité n'est évidemment possible qu'en égalant l'un des nombres entiers $k - x$ ou $k + x$ à l'un des diviseurs de 9. Ces diviseurs étant 1, 3 et 9, on est conduit à l'une des trois hypothèses suivantes :

$$k - x = 1, \quad \text{d'où} \quad k + x = 9; \qquad (2)$$
$$k - x = 3, \quad \text{d'où} \quad k + x = 3; \qquad (3)$$
$$k - x = 9, \quad \text{d'où} \quad k + x = 1. \qquad (4)$$

Dans chacun des systèmes d'équations (2), (3), (4), retranchons la première et la seconde équation membre à membre ; on en tire comme valeurs de x :

$$4, \qquad 0, \qquad -4;$$

les valeurs correspondantes de y fournies par (1) sont

$$2 \text{ et } -8, \qquad 0 \text{ et } -6, \qquad 2 \text{ et } -8.$$

En laissant de côté le cas où $x = y = 0$, les nombres $x - y$, x, $x + y$ répondant à la question sont par suite

2, 4, 6; $\quad$ 12, 4, —4; $\quad$ +6, 0, —6; $\quad$ —6, —4, —2;

4, —4, —12.

(A. VERGNOLE, lycée de Bordeaux.)

[Ont résolu la même question : MM. V. Bonzom ; M. Cryé, lycée de Laval ; A. Delbès ; M. Drovin ; G. Foucry ; L. Largeteau ; J. Menéchal ; M. Oger ; F. Pégorier ; A. Pichon, lycée de Niort ; A. Popescu, lycée de Jassy ; Remondel ; E. Roussel ; J. Sire ; G. Tastet, lycée de Bordeaux ; F. Vaunac ; J. Vignier, lycée de Montluçon ; M. Vimart, lycée de Reims ; Mlle Maria Pont ; MM. E. Ardin-Delteil ; E. Chaineau ; R. Croze ; L. Culière ; L. Curt ; H. Damoiseau ; L. Fabia ; L. Famechon ; R. Henry ; L. Hubert ; R. Hüe ; H. Janois ; X. Lacreuse ; E. Le Maigre ; G. Le Sage ; L. Ollie ; Méheust-Bily ; J. Moisson ; E. Gernez-Pfanmatter ; L. Pont ; P. Reboul ; J. Rigal ; A. Sainte-Laguë ; R. Thomas ; H. Tourrette ; G. Trannoy ; R. Van Cauwenberghe ; H. Varennes ; Vien.]

GÉOMÉTRIE

4402. — *Soient* R *et* R′ *les rayons de deux cercles, d la distance de leurs centres,* 2S *la somme* $d + R + R'$; I *le point où leur axe radical rencontre la ligne des centres ; la puissance du point* I *par rapport aux deux cercles a pour expression*

$$-\frac{4S(S - d)(S - R)(S - R')}{d^2}.$$

La puissance du point I par rapport à chacun des deux cercles est

$$P = \overline{IO}^2 - R^2 \qquad \text{ou} \qquad P' = \overline{IO'}^2 - R'^2.$$

Ces deux puissances devant être égales, on a

$$\overline{IO}^2 - R^2 = \overline{IO'}^2 - R'^2$$

ou $$\overline{IO}^2 - \overline{IO'}^2 = R^2 - R'^2. \qquad (1)$$

Suivant la position relative des deux cercles, le point I peut être intérieur ou extérieur au segment limité par les points O et O'. Si donc on adopte un sens positif sur OO', par exemple celui de O' vers O, on pourra écrire dans tous les cas

$$\overline{IO} - \overline{IO'} = \overline{O'O} = d. \qquad (2)$$

En divisant membre à membre les égalités (1) et (2), il vient

$$\overline{IO} + \overline{IO'} = \frac{R^2 - R'^2}{d},$$

puis en ajoutant ce résultat à (2) et divisant par 2,

$$\overline{IO} = \frac{d}{2} + \frac{R^2 - R'^2}{2d}.$$

La puissance P a alors pour expression en fonction de R, R' et d,

$$P = \left(\frac{d^2 + R^2 - R'^2}{2d}\right)^2 - R^2$$
$$= \frac{(d^2 + R^2 - R'^2)^2 - 4d^2R^2}{4d^2}$$
$$= \frac{(d^2 + R^2 - R'^2 - 2dR)(d^2 + R^2 - R'^2 + 2dR)}{4d^2}$$
$$= \frac{[(d - R)^2 - R'^2][(d + R)^2 - R'^2]}{4d^2}$$
$$= \frac{(d - R - R')(d - R + R')(d + R - R')(d + R + R')}{4d^2}.$$

Or, en posant $d + R + R' = 2S$, cette dernière expression se ramène bien à l'expression énoncée, puisque

$$d - R - R' = 2(d - S), \qquad d - R + R' = 2(S - R),$$
$$d + R - R' = 2(S - R'), \qquad d + R + R' = 2S.$$

(A. COUSSAT, à Lyon.)

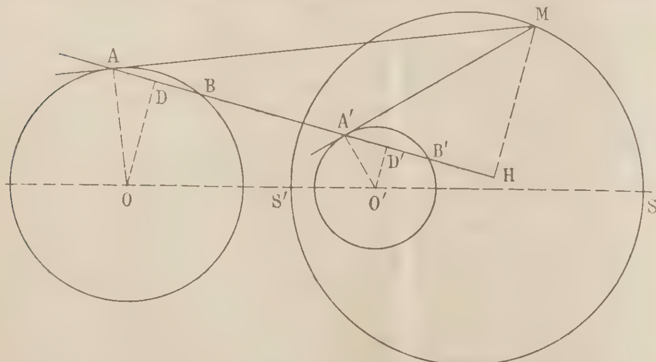
[Ont résolu la même question : M[lle] M. Pont, à Bourg ; MM. M. Boutry, à Gannat ; Feintuch ; L. Gourdet ; E. Madel ; J. Ménéchal ; F. Pégorier, à Cette M. Oger ; M. Rebeix ; R. Van Cauwenberghe ; J. Delpont.]

4333. — *Soient* S *et* S' *les centres d'homothétie de deux circonférences quelconques* O *et* O' ; *d'un point* M *de la circonférence de diamètre* SS' *on mène la tangente* MA *au cercle* O *et la tangente* MA' *au cercle* O'.

1° *Démontrer que la sécante* AA' *intercepte dans les deux circonférences des cordes égales.*

2° *Réciproquement, si une sécante* AA', *rencontrant en* A *le cercle* O *et en* A' *le cercle* O', *détermine dans ces deux cercles des cordes égales, les tangentes en* A *et* A' *se coupent sur le cercle de diamètre* SS'.

Soient O et O' les centres des cercles donnés, AA' une droite



quelconque interceptant dans ces deux cercles les cordes AB et A'B'. Menons les tangentes en A et A', et de leur point de rencontre M abaissons la perpendiculaire MH sur AA'. Enfin menons par O la perpendiculaire OD sur AB et par O' la perpendiculaire O'D' sur A'B'.

Les triangles rectangles OAD et AHM sont semblables, comme ayant l'angle AOD égal à l'angle HAM (côtés perpendiculaires) ; donc

$$\frac{AD}{HM} = \frac{AO}{AM}. \qquad (1)$$

De même les triangles O'A'D' et A'MH sont semblables et donnent

$$\frac{A'D'}{HM} = \frac{A'O'}{A'M}. \qquad (2)$$

Divisant membre à membre (1) et (2), il vient

$$\frac{AD}{A'D} = \frac{AO}{A'O'} \times \frac{A'M}{AM}. \qquad (3)$$

1° Si le point M appartient au cercle de diamètre SS', on sait que

$$\frac{AM}{A'M} = \frac{R}{R'} = \frac{AD}{A'D'};$$

il en résulte

$$AD = A'D' \qquad \text{ou} \qquad AB = A'B'.$$

2° Si $AB = A'B'$, il en résulte $AD = A'D'$, donc

$$\frac{AO}{A'O'} \times \frac{A'M}{AM} = 1,$$

ou bien $$\frac{AM}{A'M'} = \frac{AO}{A'O'} = \frac{R}{R'};$$

donc M appartient au cercle de diamètre SS' (propriété connue).

(DEBRUN, à Soissons.)

[Ont résolu cette question : MM. Bayor ; Feintuch ; Hiernaux ; H. Michel; M. Rebeix ; M. Rivière.]

4458. — *Le triangle* ABC *étant donné, on mène la bissectrice* CD *de l'angle* C *et, par le point* C, *la perpendiculaire à cette bissectrice ; elle rencontre* AB *en* D' ; *on prend le milieu* O *de* DD'. *Calculer en fonction des côtés* $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ *les distances du point* O *aux trois points* A, B, C, *et, de la comparaison des résultats obtenus, conclure que la circonférence décrite sur* DD' *comme diamètre coupe orthogonalement la circonférence circonscrite au triangle* ABC.

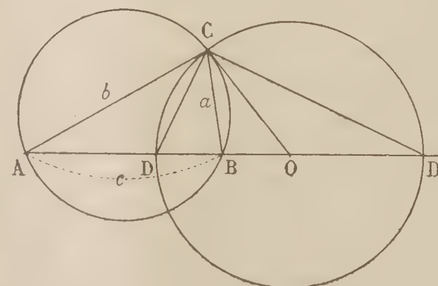
(*Bacc. lettres-math., Rennes, juillet 1898.*)

Dans le triangle rectangle CDD', OC étant la médiane issue du sommet de l'angle droit, on a

$$OC = OD = \frac{DD'}{2} = \frac{AD' - AD}{2};$$

d'ailleurs

$$OA = OD + AD,$$
$$OB = OA - c.$$



Il suffit donc de calculer en fonction de a, b, c les deux segments AD et AD'. Or la bissectrice intérieure CD donne

$$\frac{AD}{b} = \frac{DB}{a} = \frac{AD + DB}{b + a},$$

d'où $$AD = \frac{bc}{b + a};$$

de même en observant que la droite CD' est bissectrice exté-

rieure de l'angle C, on a

$$\frac{AD'}{b} = \frac{D'B}{a} = \frac{AD' - D'B}{b - a},$$

d'où

$$AD' = \frac{bc}{b - a}.$$

En remplaçant, il vient successivement

$$OC = OD = \frac{bc}{2}\left(\frac{1}{b-a} - \frac{1}{b+a}\right) = \frac{abc}{b^2 - a^2},$$

$$OA = \frac{abc}{b^2 - a^2} + \frac{bc}{b+a} = \frac{bc}{b+a}\left(\frac{a}{b-a} + 1\right) = \frac{b^2c}{b^2 - a^2},$$

$$OB = \frac{b^2c}{b^2 - a^2} - c = \frac{a^2c}{b^2 - a^2}.$$

A l'inspection de ces valeurs de OC, OA et OB, on voit immédiatement qu'elles vérifient la relation

$$\overline{OC}^2 = OA.OB,$$

qui exprime que la droite OC est tangente en C au cercle circonscrit ABC. Ce cercle a donc son centre sur la perpendiculaire en C à CO, et est par suite orthogonal au cercle O, de diamètre DD'.

(J. FITON, instituteur à Agen.)

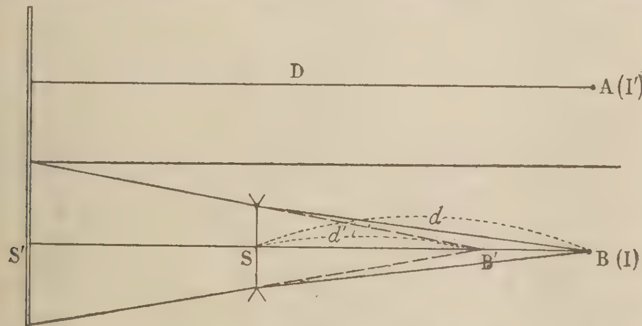
[Ont résolu la même question : MM. J. Audine ; A. Balle ; L. Barberot ; G. Bénie ; F. Beynas ; J. Boulay ; C. Bourveau ; Bouzy ; A. Brodbeck ; H. Carpentier ; B. Carrière ; Th. Croze ; P. Delolme ; J. Delpont ; Ecoffard ; A. Fadeuille ; E. Foucart ; G. Foucry ; G. H. D. O. ; A. Gironde ; G. Girot ; R. Henry ; R. Hüe ; Javelot ; G. Jullian ; F. Ladevèze ; G. Lallier ; J. Lamotte ; P. Le Hénaff ; E. Le Maigre ; G. Le Sage ; F. Leulliot ; J. Leveau ; M. Maigret ; C. Marie ; M. Oger ; G. Pfanmatter ; A. Prost ; Remondet ; Ribes ; A. Rozier ; R. Ruchon ; J. Sire ; G. Tastet ; N. Teryep ; R. Thomas ; J. Trouillé ; Venet ; A. Vergnole.]

PHYSIQUE

4381. — *Étant donnés un photomètre et deux sources lumineuses, A et B, situées à la même distance de l'écran du photomètre, on a interposé entre l'une d'elles, B, et l'écran une lentille divergente dont l'axe optique se confond avec la droite qui joint la source à la région observée de l'écran. De cette manière, l'une des moitiés de l'écran est éclairée directement par A et l'autre par le faisceau issu de B qui a traversé la lentille. Cette dernière a une distance focale de* 25^{cm} *et est à* 50^{cm} *de la source. Dans ces conditions on constate l'égalité d'éclairement des deux moitiés de l'écran. On demande quel est le rapport des intensités des deux sources.*

(*Bacc. lettres-math., Marseille, avril 1898.*)

Appelons I l'intensité de B, I' celle de A, D la distance



commune des deux sources à l'écran, d la distance de B à la lentille.

Le faisceau issu de B est, après avoir traversé la lentille, dans les mêmes conditions que s'il provenait d'une source lumineuse virtuelle B', située à une distance $d' < d$ de la lentille.

L'intensité étant l'éclairement à l'unité de distance, l'éclairement à la distance d est $\frac{1}{d^2}$, et la quantité de lumière qui tombe sur la lentille est $\frac{1}{d^2}$ S, S désignant la surface de la lentille.

Cette quantité de lumière se trouve ainsi répartie sur la surface S' de la moitié de l'écran. L'éclairement sur la surface S' est donc $\frac{1}{d^2} \cdot \frac{S}{S'}$.

Or,

$$\frac{S}{S'} = \frac{d'^2}{[D - (d - d')]^2},$$

d'où l'éclairement sur la surface S' a pour valeur

$$\frac{1}{d^2} \cdot \frac{d'^2}{[D - (d - d')]^2}.$$

D'autre part, l'éclairement produit par la source A est $\frac{I'}{D^2}$.

Puisqu'il y a égalité d'éclairement des deux moitiés de l'écran, on a

$$\frac{I'}{D^2} = \frac{1}{d^2} \cdot \frac{d'^2}{[D - (d - d')]^2}. \qquad (1)$$

Or la formule ordinaire des lentilles donne

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{d'} = -\frac{1}{f},$$

d'où

$$d' = \frac{fd}{f + d}$$

et

$$d - d' = \frac{d^2}{f + d}.$$

En remplaçant d' et $d - d'$ par leur valeur dans la relation (1), il vient

$$\frac{1}{I'} = \frac{d^2[D - (d - d')]^2}{D^2 d'^2} = \frac{d^2\left(D - \frac{d^2}{f + d}\right)^2}{D^2 \frac{f^2 d^2}{(f + d)^2}},$$

d'où

$$\frac{1}{I'} = \frac{d^2[D(f + d) - d^2]^2}{D^2 f^2 d^2} = \frac{[D(f + d) - d^2]^2}{D^2 f^2}.$$

La distance D des sources à l'écran n'est pas donnée ; $f = 25^{cm}$; $d = 50$.

$$\frac{1}{I'} = \frac{[D \times 75 - 2500]^2}{25^2 \times D^2} = \left(\frac{3D - 100}{D}\right)^2.$$

CONCOURS GÉNÉRAL DE PREMIÈRE SCIENCES (1898)

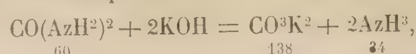
Solution par M. **Félix Lavaste**, élève du collège Chaptal, lauréat du concours (1er Prix).

4399. — *On traite un poids d'urée par une dissolution concentrée et bouillante de potasse caustique. Un des produits de la réaction, que l'on suppose complète, est gazeux et aurait, à 0° et sous la pression de* $0^m,760$, *un volume de* 22^{lit}. *Quel est le poids d'urée qui a été décomposé, et quels sont les poids des produits de la décomposition ?*

Densité de l'oxygène, 1,105.
Densité de l'hydrogène, 0,069.
Densité de l'azote, 0,972.
Poids atomique du carbone, 12.
Poids atomique du potassium, 39.
Poids du litre d'air à 0° et sous la pression de $0^m,760$, $1^{gr},293$.

L'amide d'un acide organique quelconque, traité par la potasse bouillante, donne le sel de potassium de l'acide et un dégagement de gaz ammoniac. L'urée étant le diamide de l'acide carbo-

nique, CO^3H^2, donne du carbonate de potassium et du gaz ammoniac, suivant l'équation



$$\underset{60}{CO(AzH^2)^2} + 2KOH = \underset{138}{CO^3K^2} + \underset{34}{2AzH^3},$$

ce qui montre qu'à 60 parties d'urée correspondent 138 parties de carbonate de potassium et 34 de gaz ammoniac.

Cherchons le poids de gaz ammoniac dégagé. La densité de ce gaz est égale à $\dfrac{0{,}972 + 0{,}069 \times 3}{2} = 0{,}5895$; par suite, 22^{lit} de gaz ammoniac dans les conditions normales pèsent

$$22 \times 0{,}5895 \times 1{,}293 = 16^{gr},7689.$$

Autant de fois 34^{gr} seront contenus dans ce poids, autant de fois on aura traité 60^{gr} d'urée et recueilli 138^{gr} de carbonate de potassium.

Poids d'urée décomposé : $\dfrac{16{,}7689 \times 60}{34} = 29^{gr},592.$

Poids de carbonate recueilli : $\dfrac{16{,}7689 \times 138}{34} = 68^{gr},062.$

Poids de gaz ammoniac dégagé . . . . $16^{gr},7689.$

[Ont résolu la même question : Mlle Maria Pont; MM. Ardin-Delteil ; M. Boury ; M. Girot ; L. Magne ; E. Le Maigre ; M. Oger ; L. Perret ; G. Tastet.]

CONCOURS GÉNÉRAUX DE 1898

Classe de Mathématiques élémentaires.

Physique et Chimie (Paris).

I. — Machine de Gramme.

II. — **4469**. L'expérience montre que des colonnes gazeuses superposées par ordre de densité dans des tubes fins se mêlent difficilement et se comportent tout d'abord comme des colonnes liquides.

Deux tubes verticaux A et B, très étroits, de même longueur, s'ouvrant par le haut dans l'atmosphère, peuvent être mis en communication par leur partie inférieure au moyen d'un robinet.

La communication étant fermée, on remplit A d'un gaz dont on veut avoir la densité, et B de gaz carbonique, puis on ouvre la communication : une partie du gaz carbonique passe de B en A, chassant devant lui le gaz du tube A, dont une partie s'échappe dans l'atmosphère, et faisant place en B à une colonne d'air. L'équilibre établi, on ferme la communication, et il ne reste plus qu'à mesurer les colonnes. Mais celles-ci sont invisibles. On les détermine par le procédé suivant : on ferme les extrémités supérieures des tubes, et, par une manipulation qu'il est inutile de décrire, on absorbe dans chacun des tubes le gaz carbonique qu'il contient et on ramène le gaz restant à la pression atmosphérique. Le premier gaz occupe alors en A une hauteur h, et l'air, en B, une hauteur h'.

La densité cherchée étant représentée par d, celle de l'air par d' et celle du gaz carbonique par δ, on demande d'établir l'équation d'équilibre et d'en tirer la valeur de d.

Application : $h = 105^{cm},8$, $h' = 112^{cm},4$, $d' = 1$, $\delta = 1{,}529$.

III. — Anhydride sulfureux.

Classe de Seconde moderne.

Physique et Chimie (Paris).

I. — Effets chimiques des courants.

II. — Zinc et principaux composés du zinc.

III. — **4470**. Une pièce de un franc est traitée par de l'acide azotique chaud et en excès jusqu'à dissolution complète. A la liqueur refroidie on ajoute une solution de potasse jusqu'à ce qu'elle prenne une réaction alcaline. On demande :

1° Quelle est la nature du précipité formé ;

2° Quel sera le poids de ce précipité quand on l'aura lavé, séché et maintenu quelque temps au rouge sombre ;

3° Si l'on continue à chauffer le résidu, mais dans un courant d'hydrogène, ce qu'il deviendra définitivement.

Ag = 108, Cu = 63.

QUESTIONS PROPOSÉES

4471. — m étant un nombre composé de la forme $\alpha\beta\gamma$, on trouve la racine m^e d'un nombre à une unité près en extrayant à une unité près la racine d'indice α du nombre donné, puis à une unité près la racine d'indice β de cette première racine, et ainsi de suite.

4472. — Trouver un nombre de quatre chiffres sachant que le produit des deux premiers chiffres est égal au 4e, que leur somme est égale au 3e, et que le produit des quatre chiffres est égal à 576.

(L. Hémois.)

4473. — Simplifier l'expression

$$\frac{\sqrt[11]{\left[\left(\sqrt[3]{a^4b^2c}\right)^5 \cdot \left(\sqrt{a^3b^2c}\right)^4\right]^3}}{a^{5/11}}.$$

4474. — Construire un triangle connaissant le côté a, la hauteur h relative à ce côté et sachant que l'angle B est le double de l'angle C.

(A. Rozier, lycée de Bordeaux.)

4475. — Dans un quadrilatère inscrit ABCD les cercles des neuf points relatifs aux quatre triangles ABC, BCD, CDA, DAB concourent en un même point.

Dans un pentagone inscrit ABCDE les cercles des neuf points relatifs aux cinq triangles ABC, BCD, CDE, DEA, EAD se coupent deux à deux en cinq points qui sont sur un même cercle.

(V. Duffet, élève de M. C. Blanc, à Lyon.)

4476. — On donne deux circonférences O et O' se coupant en A et B. On mène par A une sécante variable DAE, rencontrant ces circonférences en D et E. On trace BE coupant l'autre cercle en un second point C.

Trouver :

1° le lieu géométrique du centre de gravité du triangle BDC ;

2° le lieu géométrique du centre de gravité du triangle BDE ;

3° le lieu géométrique du centre du cercle circonscrit au triangle EDC, lorsqu'on fait tourner la sécante DAE autour du point A.

(H. Michel, lycée de Douai.)

4477. — Dans un calorimètre de poids négligeable on introduit 1^{lit} d'eau à 10° et 100^{gr} de glace à 0°. Quel poids de vapeur d'eau à 100° faudra-t-il y condenser pour que la température finale soit de 80° ?

Chaleur latente de fusion de la glace, 80.

Chaleur de vaporisation de l'eau à 100°, 637.

(*Bacc. lettres math., Nice, juillet 1898.*)

4478. — Le courant fourni par une pile de 20 éléments associés en série traverse un conducteur en cuivre ayant 4^{mmq} de section et 10^m de longueur ; son intensité est de 9,4 ampères ; s'il traverse un conducteur en fer ayant même longueur et même section que le conducteur de cuivre, l'intensité se réduit à 8,96 ampères. La résistance du cuivre évaluée en ohms est 0,016 par millimètre carré de section et par mètre de longueur, celle du fer est 0,096. Calculer :

1° la force électromotrice de chaque élément exprimée en volts ;

2° la résistance intérieure d'un élément en ohms ;

3° l'intensité d'un courant qui traverserait le conducteur de cuivre si les éléments étaient associés en surface.

(*Bacc. lettres-sciences, Caen, juillet 1898.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

23e Année. — N° 5. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 1er Décembre 1898.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO :...................	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL..............	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

REMARQUES ÉLÉMENTAIRES

SUR LES NORMALES A L'ELLIPSE

Par M. **Maurice d'Ocagne**.

La considération des normales à l'ellipse, utile pour diverses applications pratiques, est généralement négligée parmi les quelques notions sur les coniques que comportent les premiers éléments de Géométrie. On pourrait combler cette lacune au moyen des propositions bien simples que voici, et qui supposent seulement connues les deux suivantes, extraites des éléments classiques :

1° *Si on accroît les ordonnées d'une ellipse dans le rapport* $\frac{a}{b}$ *on obtient un cercle, dit principal;*

2° *Les tangentes aux points correspondants de l'ellipse et du cercle principal se coupent sur le grand axe.*

De ces deux propositions on déduit immédiatement les suivantes :

I. — *Le rapport de l'abscisse à la sous-normale est égal à* $\frac{a^2}{b^2}$.

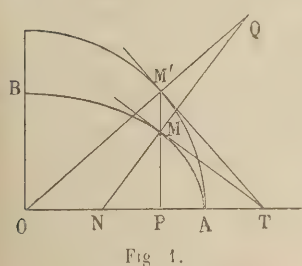


Fig. 1.

En effet, les triangles rectangles OM'T et NMT (*fig.* 1) donnent

$$\overline{PM'}^2 = PO.PT,$$

$$\overline{PM}^2 = PN.PT;$$

d'où

$$\frac{OP}{NP} = \frac{\overline{PM'}^2}{\overline{PM}^2} = \frac{a^2}{b^2}.$$

II. — *Si les tangentes aux sommets* A *et* B *se coupent au point* C, *le point de rencontre* H *de la perpendiculaire abaissée du pied* N *de la normale sur* AB *et de l'ordonnée* PM *se trouve sur la droite* OC.

Les triangles HPN et OAB sont semblables, comme ayant leurs côtés deux à deux perpendiculaires (*fig.* 2). Par suite

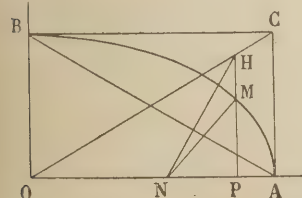


Fig. 2.

$$\frac{PH}{NP} = \frac{a}{b}.$$

Divisant cette égalité par la précédente, on a

$$\frac{PH}{OP} = \frac{b}{a} = \frac{AC}{OC},$$

ce qui prouve bien que le point H se trouve sur OC.

1re *Application. — Construire la normale au point* M.

Du point de rencontre H de l'ordonnée PM et de la droite OC on abaisse sur AB la perpendiculaire HN, qui donne le pied N de la normale [1].

2e *Application. — Mener les normales à l'ellipse issues d'un point* N *de son grand axe.*

On abaisse de N sur AB une perpendiculaire qui coupe OC en H. Les pieds des normales demandées sont sur la perpendiculaire abaissée de H sur OA [2].

III. — *Si la perpendiculaire abaissée de* C *sur* AB *coupe* OA *au point* I, *et si le diamètre* OM *coupe* AC *au point* L, *la normale* MN *est parallèle à* LI [3].

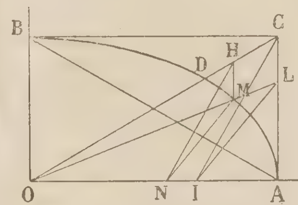


Fig. 3.

Si, en effet, nous considérons le triangle MNH du théorème précédent, nous avons (*fig.* 3)

$$\frac{OI}{ON} = \frac{OC}{OH} = \frac{OL}{OM},$$

ce qui prouve bien que LI est parallèle à MN.

1re *Application. — Trouver le point* M *où la normale a une direction donnée.*

On mène par le point I la parallèle IL à la direction donnée. Le point M cherché se trouve sur la droite OL.

2e *Application. — Trouver le point* M *où la normale fait un angle donné avec le diamètre* OM. *Maximum de cet angle.*

On décrit sur OI le segment de cercle capable de l'angle donné. Il coupe AC en des points L qui se trouvent sur les diamètres des points M cherchés.

On aura le maximun de l'angle de la normale et du diamètre lorsque le segment capable de cet angle sera tangent à AC. Le point de contact sera alors C, car la similitude des triangles ICA et ABC, qui ont leurs côtés deux à deux perpendiculaires, donne

$$\frac{AI}{AC} = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{OA},$$

ou

$$\overline{AC}^2 = AI.AO.$$

---

[1] Cette construction, que nous avons proposée en vue du tracé des joints dans les voûtes elliptiques (*Ann. des Ponts et Chaussées*, 2e sem. 1886, p. 403), a été adoptée par M. Degrand dans son Traité des *Ponts en maçonnerie*, p. 620 (*Encycl. des Travaux publics*, 1888).

[2] Nous avons utilisé cette remarque dans la solution que nous avons donnée du problème de la perspective conique d'une sphère (*Nouv. Ann. de Math.*, 3e sie, t. XVII, p. 44).

[3] Théorème obtenu par une autre voie dans une étude sur *Quelques propriétés de l'ellipse* (*Nouv. Ann.*, 3e sie, t. VII, p. 265).

Par suite, le maximum de l'angle de la normale et du diamètre, qui correspond au point D de l'ellipse, situé sur OC, est égal à l'angle OCI.

3e Application. — Détermination du centre de courbure répondant au sommet A.

Lorsque le point M tend vers le point A, les points M et L se rapprochent indéfiniment, par suite aussi les points N et I. Donc. le centre de courbure répondant au sommet A se confond avec le point I.

La même suite de propositions peut être reprise avec le cercle décrit sur le petit axe comme diamètre, mais en inversant les divers rapports. On trouve ainsi que le centre de courbure répondant au sommet B est également sur la perpendiculaire abaissée de C sur AB.

IV. — *Le lieu du point de rencontre des normales correspondantes* MN *et* OM' *à l'ellipse et au cercle principal est le cercle de centre* O *et de rayon* $a+b$.

Le théorème des transversales appliqué au triangle OPM' coupé par NMQ (*fig.* 1) donne, en effet,

$$\frac{OQ}{M'Q} = \frac{ON}{NP} \cdot \frac{PM}{MM'} = \frac{a^2-b^2}{b^2} \cdot \frac{b}{a-b} = \frac{a+b}{b},$$

d'où

$$\frac{OQ}{OM'} = \frac{a+b}{a+b-b} = \frac{a+b}{a},$$

et, puisque $OM' = a$,

$$OQ = a+b. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

SUR LA THÉORIE DES PARALLÈLES

Par M. **G. Fontené**.

I. — On démontre, indépendamment de l'axiome des parallèles, ce théorème : *Un angle extérieur d'un triangle est plus grand qu'un angle intérieur non adjacent;* la même chose n'a plus lieu pour un triangle sphérique, et c'est la notion expérimentale de surface plane qui permet de faire la démonstration pour un triangle plan. On peut conclure de ce théorème que *les angles* A, B, C *d'un triangle plan satisfont à la relation*

$$A + B + C \leqslant 2^{dr}.$$

En effet, soit le triangle ABC de la figure 1. Menons la médiane BD, et prenons $DC' = BD$: en supposant, par exemple, que le plus petit des deux angles en B est $\widehat{ABD}$, ou en considérant celui-là quand ils sont égaux, menons AC'; l'égalité des triangles CDB et ADC' montre que la somme des angles est la même dans les deux triangles ABC et ABC'. Il est donc démontré que l'on peut, sans altérer la somme des angles, remplacer un triangle ABC par un triangle, que nous appellerons A'B'C', dans lequel on a

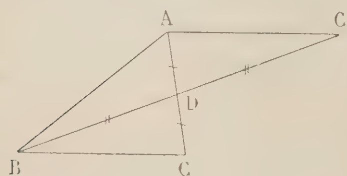


Fig. 1

$$B' \leqslant \frac{B}{2}.$$

En continuant ainsi, on arrivera à un triangle $\alpha\beta\gamma$ dans lequel l'angle β sera aussi petit que l'on voudra. Cela posé, comme on a (*fig.* 2)

$$\alpha < \widehat{x\gamma\alpha},$$

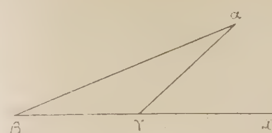


Fig. 2

x étant le prolongement de $\beta\gamma$, on a $\alpha+\beta+\gamma < \widehat{x\gamma\alpha}+\beta+\gamma < 2^{dr}+\beta$; or, si la somme $\alpha+\beta+\gamma$ dépassait deux angles droits d'une quantité θ, on aurait

$$\theta < \beta,$$

et cela est faux, puisque β est aussi petit que l'on veut. Donc...

Il ne paraît pas impossible que la notion expérimentale de surface plane puisse donner un théorème qui permette de démontrer l'inégalité contraire :

$$A + B + C \geqslant 2^{dr};$$

on aurait alors nécessairement

$$A + B + C = 2^{dr},$$

et l'axiome des parallèles deviendrait un théorème.

J'ajoute, pour ceux qui savent, que le théorème de l'angle extérieur est commun à la géométrie du plan et à celle des surfaces pseudosphériques, sans être applicable à la sphère; il faudrait obtenir un théorème commun à la géométrie du plan et à celle de la sphère sans être applicable aux surfaces pseudosphériques.

II. — Lorsqu'on a démontré que deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles, on peut établir immédiatement, sans l'axiome des parallèles, que deux droites faisant avec une sécante des angles alternes-internes égaux sont parallèles; presque tous les auteurs prennent ce théorème comme réciproque, et le démontrent alors en se servant deux fois de l'axiome; je crois cependant me rappeler que la marche indiquée ici est celle du Traité de Géométrie de MM. Bourget et Housel.

III. — Le théorème de l'angle extérieur montre immédiatement que, d'un point O à une droite $x'x$, on ne peut pas mener plus d'une droite OM sous la condition

$$\widehat{OMx} = \alpha.$$

On peut d'abord en conclure que deux triangles sont égaux s'ils ont

$$\widehat{B} = \widehat{B'}, \qquad \widehat{C = C'}, \qquad AB = A'B',$$

ce qui généralise, indépendamment de l'axiome des parallèles, un cas d'égalité classique des triangles rectangles.

Le même fait permet de démontrer directement que deux droites faisant avec une sécante des angles correspondants égaux sont parallèles, de la même manière que l'on fait pour deux perpendiculaires à une même droite : cette remarque complète celle du no **II**.

CERTIFICAT D'APTITUDE AU PROFESSORAT

des Écoles normales et des Écoles primaires supérieures (Aspirants).

4447. — *Définition et recherche de la racine carrée d'un nombre* A *à* $\frac{n}{p}$ *près, en supposant connue l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier à une unité près.*

Exemple : *Calculer la racine carrée de* $\frac{4}{7}$ *à* $\frac{3}{11}$ *près.*

Démontrer que si l'entier q *est un multiple de l'entier* p, *la racine carrée de* A *à* $\frac{1}{q}$ *près, par défaut, est au moins égale à la racine carrée de* A *à* $\frac{1}{p}$ *près par défaut.*

Définition. — On appelle racine carrée à moins de $\frac{n}{p}$ d'un nombre quelconque A, le plus grand multiple de $\frac{n}{p}$ dont le carré soit inférieur ou au plus égal à A.

Recherche de la racine. — En désignant par x un nombre entier, la racine cherchée est donc de la forme $x \cdot \frac{n}{p}$, et doit satisfaire à la double inégalité

$$\left(x \cdot \frac{n}{p}\right)^2 \leqslant A < \left((x+1) \cdot \frac{n}{p}\right)^2.$$

Multiplions les trois membres de cette inégalité par $\frac{p^2}{n^2}$, carré de l'inverse de la fraction d'approximation ; elle devient

$$x^2 \leqslant A \times \frac{p^2}{n^2} < (x+1)^2 ; \qquad (1)$$

cette nouvelle inégalité exprime que x est la racine carrée à une unité près du nombre $A \times \frac{p^2}{n^2}$. Ce dernier nombre n'est pas nécessairement entier ; on est donc ramené à la recherche de la racine carrée entière d'un nombre *quelconque*.

Soient A′ la partie entière de $A \times \frac{p^2}{n^2}$ et x' la racine carrée à une unité près de A′ ; on aura

$$x'^2 \leqslant A' < (x'+1)^2.$$

Cette inégalité ne sera pas troublée si on augmente A′ de la fraction *plus petite que l'unité* qui forme la différence entre $A\frac{p^2}{n^2}$ et A′ ; donc on a aussi

$$x'^2 < A\frac{p^2}{n^2} < (x+1)^2. \qquad (2)$$

La comparaison des inégalités (2) et (1) montre que $x' = x$.

On conclut de là la règle suivante.

Règle. — Pour extraire à moins de $\frac{n}{p}$ près la racine carrée d'un nombre donné :

1° On multiplie le nombre par le carré de l'inverse de la fraction d'approximation ;

2° On détermine la partie entière du produit ;

3° On extrait la racine carrée à une unité près de cette partie entière ;

4° On multiplie cette racine par $\frac{n}{p}$, fraction d'approximation.

Exemple. — Calculer la racine carrée de $\frac{4}{7}$ *à* $\frac{3}{11}$ *près.*

1re opération : Produit de $\frac{4}{7}$ par $\left(\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{4 \times 121}{63} = \frac{484}{63}$;

2e opération : Partie entière de $\frac{484}{63} = 7$;

3e opération : Racine carrée entière de $7 = 2$.

4e opération : Produit de 2 par $\frac{3}{11} = \frac{6}{11}$.

La racine carrée de $\frac{4}{7}$ à $\frac{3}{11}$ près est égale à $\frac{6}{11}$.

Supposons que l'entier q soit égal à mp. Soient $a' \times \frac{1}{q}$ la racine carrée de A à $\frac{1}{q}$ près et $a \times \frac{1}{p}$ sa racine carrée à $\frac{1}{p}$ près.

D'après la définition donnée précédemment, les entiers a et a' vérifient les inégalités

$$\left(\frac{a}{p}\right)^2 \leqslant A < \left(\frac{a+1}{p}\right)^2,$$

$$\left(\frac{a'}{q}\right)^2 \leqslant A < \left(\frac{a'+1}{q}\right)^2 ;$$

en chassant les dénominateurs, elles s'écrivent

$$a^2 \leqslant Ap^2 < (a+1)^2,$$

$$a'^2 \leqslant Aq^2 < (a'+1)^2.$$

Multiplions les trois membres de la première par m^2, remplaçons q^2 par m^2p^2 dans la seconde, il vient

$$(am)^2 \leqslant Am^2p^2 < [(a+1)m]^2,$$

$$a'^2 \leqslant Am^2p^2 < (a'+1)^2.$$

La première signifie que am est *un entier* dont le carré est contenu dans Am^2p^2 ; la seconde signifie que a' est le *plus grand entier* dont le carré est contenu dans Am^2p^2 ; donc

$$am \leqslant a'.$$

Divisant le premier membre par mp, le second par le nombre égal q, il vient

$$\frac{a}{p} \leqslant \frac{a'}{q}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(BOUZY, instituteur en congé.)

[Ont résolu la même question : MM. V. Bonzom, B. Carrière, Ed. Chaineau, J.-M. Chalvin, J. Fiton, H. Janois, X. Lacreuse, J. Ménéchal, E. Ménissier, E. Gernez-Pfanmatter, instituteurs ; Bayor ; J. Delpont ; Donnadieu ; L. Ecoffard ; V. Guillemin ; E. Le Maigre ; M. Oger ; A. Pichon ; Raynaud ; J. Rigal ; G. Schoonheere ; J. Sire ; R. Thomas ; J. Vignier.]

4448. — *On donne une demi-circonférence de rayon* R, *limitée par le diamètre* AA′. *En un point* M *de cette demi-circonférence on trace la tangente* MC *jusqu'à sa rencontre en* C *avec la tangente au point* A ; *on joint* M *et* A *et on mène la perpendiculaire* MP *sur* AA′, *puis on fait tourner la figure autour de* AA′.

Déterminer le point M, *en prenant pour inconnue la distance* AP = x, *de telle sorte que le volume engendré par le triangle* AMC *soit au volume du cône circulaire droit ayant* AC *pour rayon de base et* R *pour hauteur dans un rapport donné* m.

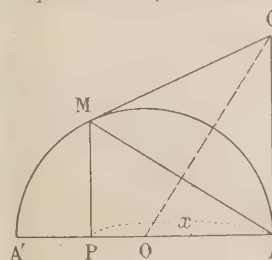
Discussion par rapport à m.

Pour certaines valeurs de m *on trouve deux points* M′ *et* M″ *répondant à la question, desquels on mène les perpendiculaires* M′P′ *et* M″P″ *sur* AA′. *Evaluer, en fonction de* m *et de* R, *la somme* S *des volumes des cônes engendrés par les triangles* AM′P′ *et* AM″P″ *en tournant autour de* AA′.

Quelle valeur faut-il donner à m *pour que la somme* S *des volumes des deux cônes précédents soit au volume de la sphère de rayon* R *dans un rapport donné* p ? *Entre quelles limites peut varier le nombre* p ?

Application numérique : $p = \frac{1}{2}$; $R = 1$. *Calculer les valeurs correspondantes de* x.

Equation du problème. — Le volume engendré par le triangle AMC est la différence entre les volumes du tronc de cône et du cône, de même hauteur x, engendrés respectivement par le trapèze ACMP et le triangle AMP. En égalant ce volume à m fois le volume $\frac{\pi}{3}\overline{AC}^2.R$ du cône considéré (engendré par le triangle AOC), on a



$$\frac{\pi x}{3}\left(\overline{MP}^2 + \overline{AC}^2 + MP.AC\right) - \frac{\pi x}{3}.\overline{MP}^2 = \frac{\pi}{3}\overline{AC}^2.R.m ;$$

ou, en supprimant les deux termes qui se détruisent et divisant ensuite par $\frac{\pi AC}{3}$,

$$x(AC + MP) = AC.Rm.$$

Or les triangles semblables COA, AMP donnent

$$\frac{AC}{R} = \frac{x}{MP}, \qquad \text{d'où} \qquad AC = \frac{Rx}{MP};$$

d'ailleurs $\qquad MP = \sqrt{AP.PA'} = \sqrt{x(2R - x)}.$

L'équation du problème devient alors

$$\frac{Rx}{\sqrt{x(2R - x)}} + \sqrt{x(2R - x)} = \frac{R^2 m}{\sqrt{x(2R - x)}},$$

ou, en chassant le dénominateur et simplifiant,

$$f(x) = x^2 - 3Rx + mR^2 = 0.$$

Discussion. — Pour qu'une valeur de x convienne au problème, il faut et il suffit qu'elle soit réelle, positive et inférieure à $2R$.

Formons $f(0)$, $f(2R)$ et le discriminant ρ de l'équation; on obtient

$$f(0) = mR^2,$$
$$f(2R) = (m - 2)R^2,$$
$$\rho = (9 - 4m)R^2.$$

Pour qu'il n'y ait qu'une solution, il faut et il suffit que $f(0)$ et $f(2R)$ soient de signes contraires, ce qui suppose $m < 2$.

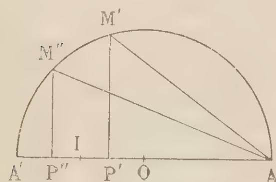
Pour que le problème admette deux solutions, on doit avoir à la fois

$$f(0) > 0, \qquad f(2R) > 0,$$
$$\rho > 0, \qquad 0 < \frac{3R}{2} < 2R.$$

La première et les deux dernières inégalités sont toujours vérifiées ; la seconde et la troisième inégalité exigent qu'on ait

$$m > 2 \qquad \text{et} \qquad m \leqslant \frac{9}{4},$$

c'est-à-dire $\qquad 2 < m \leqslant \frac{9}{4}.$



Lorsque cette double condition est remplie, aux deux valeurs de x correspondent deux points P′ et P″, symétriques par rapport au milieu I de A′O. Evaluons alors en fonction de m et R la somme S des volumes des cônes engendrés par les triangles AM′P′ et AM″P″ en tournant autour de AA′. On a

$$S = \frac{\pi}{3}\overline{M'P'}^2 . AP' + \frac{\pi}{3}\overline{M''P''}^2 . AP''$$
$$= \frac{\pi}{3}[x'^2(2R - x') + x''^2(2R - x'')]$$
$$= \frac{\pi}{3}[2R(x'^2 + x''^2) - (x'^3 + x''^3)].$$

Or $\qquad x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = (9 - 2m)R^2,$

$$x'^3 + x''^3 = (x' + x'')^3 - 3x'x''(x' + x'') = 9(3 - m)R^3.$$

Donc

$$S = \frac{\pi R^3}{3}(18 - 4m - 27 + 9m) = \frac{\pi R^3}{3}(5m - 9).$$

Écrivons que le volume S est dans un rapport donné p avec le volume de la sphère de rayon R ; nous aurons

$$\frac{\pi R^3}{3}(5m - 9) = p \cdot \frac{4}{3}\pi R^3,$$

ou $\qquad 5m - 9 = 4p,$

d'où l'on tire $\qquad m = \frac{4p + 9}{5}.$

Cette valeur de m n'est acceptable qu'autant qu'on a

$$2 < \frac{4p + 9}{5} \leqslant \frac{9}{4}$$

ou, en résolvant par rapport à p,

$$\frac{1}{4} < p \leqslant \frac{9}{16}.$$

Application numérique. — Pour $p = \frac{1}{2}$, on trouve $m = \frac{11}{5}$, et l'équation correspondante est

$$x^2 - 3Rx + \frac{11R^2}{5} = 0;$$

on en déduit, en supposant $R = 1$,

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{5}}{10} = \begin{cases} 1,276.. \\ 1,724.. \end{cases}$$

(J.-M. CHALVIN, instituteur à Vinay.)

[Ont résolu la même question : MM. V. Bonzom, Bouzy, B. Carrière, A. Chapron, J. Fiton, R. Henry, X. Lacreuse, P. Le Hénaff, E. Le Maigre, J. Ménéchal, E. Gernez-Pfanmatter, instituteurs ; C. Barbe ; Bayor ; L. Bois ; J. Boulay, A. Brodbeck ; Burgat ; H. Damoiseau ; J. Delpont ; Donnadieu ; G. H. D. O. ; L. Ecoffard ; P. Fournel ; G. Jullian ; F. Leulliot ; M. Oger ; F. Pégorier ; Raynaud ; J. Rigal ; G. Schoonhecre ; J. Sire ; F. Sol ; N. Teryep; R. Thomas ; H. Tourrette ; E. Vaunac ; Vial.]

ALGÈBRE

4303. — *Si* $\qquad a + b + c = 0,$
on a les deux identités

$$(a^2+b^2-ab)(b^2+c^2-bc)(a^2+c^2-ac)+8a^2b^2c^2+3(ab+bc+ac)^3 = 0,$$
$$50(a^7 + b^7 + c^7)^2 = 49(a^4 + b^4 + c^4)(a^5 + b^5 + c^5)^2.$$

Posons

$$p = bc + ca + ab, \qquad q = -abc;$$

on peut écrire identiquement

$$a^3 + pa + q = a^3 + a(bc + ca + ab) - abc = a^2(a + b + c) = 0,$$

puisque par hypothèse $a + b + c$ est nul. Les valeurs de p et q étant symétriques en a, b, c, on a donc les trois identités

$$(1) \qquad \begin{cases} a^3 + pa + q = 0, \\ b^3 + pb + q = 0, \\ c^3 + pc + q = 0. \end{cases}$$

D'ailleurs $\quad a^2 + b^2 - ab = \frac{a^3 + b^3}{a + b} = -\frac{a^3 + b^3}{c}.$

Donc

$$(a^2+b^2-ab)(b^2+c^2-bc)(c^2+a^2-ac) = -\frac{(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)}{abc}$$
$$= \frac{(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)c^3 + a^3)}{q}.$$

Les identités (1) donnent

$$a^3 + b^3 = -p(a + b) - 2q = pc - 2q,$$
$$b^3 + c^3 = -p(b + c) - 2q = pa - 2q,$$
$$c^3 + a^3 = -p(c + a) - 2q = pb - 2q.$$

Donc

$$(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3) = p^3abc - 2qp^2(bc + ca + ab)$$
$$+ 4q^2p(a + b + c) - 8q^3 = -p^3q - 2qp^3 - 8q^3 = -3qp^3 - 8q^3.$$

Donc la première identité à vérifier s'écrit

$$\frac{-3qp^3 - 8q^3}{q} + 8q^2 + 3p^3 = 0.$$

Elle est maintenant évidente.

Pour vérifier la seconde, nous allons calculer les sommes

$$S_7 = a^7 + b^7 + c^7, \qquad S_5 = a^5 + b^5 + c^5, \qquad S_4 = a^4 + b^4 + c^4.$$

Les identités (1), ajoutées membre à membre, donnent

$$S_3 + pS_1 + 3q = 0\,;$$

et comme $S_1 = a + b + c = 0$, il vient

$$S_3 = -3q.$$

Multipliant les deux membres des identités (1) respectivement par a, b, c et ajoutant, il vient

$$S_4 + pS_2 + qS_1 = 0,$$

d'où

$$S_4 = -pS_2\,;$$

en les multipliant par a^2, b^2, c^2 et ajoutant, on trouve

$$S_5 + pS_3 + qS_2 = 0\,;$$

d'où

$$S_5 = -pS_3 - qS_2 = 3pq - qS_2.$$

D'ailleurs

$$S_2 = a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(bc + ca + ab) = -2p.$$

Donc

$$S_4 = 2p^2\,;$$

$$S_5 = 3pq + 2pq = 5pq.$$

Pour calculer S_7 multiplions les deux membres des identités (1) par a^4, b^4, c^4 et ajoutons, il vient

$$S_7 + pS_5 + qS_4 = 0,$$

ou

$$S_7 + 5p^2q + 2p^2q = 0, \qquad S_7 = -7p^2q.$$

L'identité à vérifier est alors

$$50(-7p^2q)^2 = 49(2p^2)(5pq)^2\,;$$

elle est évidente.

[Ont résolu cette question : MM. E. Ardin-Delteil ; P. J. Avram, A. Smântânescu, lycée de Jassy ; Burgat, école normale d'Albertville ; E. Chaineau ; A. Gourdin ; F. Ladevèze, lycée de Toulouse ; F. Leulliot, collège de Compiègne ; A. Maître ; G. Méry de Montigny ; L. P. ; P. Reboul ; E. Sinturel, collège de Cusset ; A. Vergnole, lycée Gay-Lussac.]

4441. — *On considère une circonférence de diamètre* AB ; *on construit un trapèze isocèle tel que trois de ses côtés soient tangents à la circonférence, l'un d'eux étant parallèle à* AB ; *le quatrième côté se trouve sur* AB. *Déterminer la demi-longueur* x *du côté parallèle à* AB *de façon que la surface engendrée par le périmètre du trapèze en tournant autour de* AB *soit égale à une surface donnée.*

Interpréter les valeurs de x *plus grandes que* R.

Soit CDEF le trapèze isocèle considéré.

La surface engendrée par le périmètre en tournant autour de AB est égale au double de la surface latérale du cône engendrée par CD plus la surface latérale du cylindre de même base engendrée par DE ; son expression est donc

$$2\pi R\,.\,CD + 2\pi R\,.\,2x = 2\pi R(CD + 2x). \qquad (1)$$

Pour évaluer CD, on remarque que les triangles rectangles CDH, COK ayant un angle commun opposé à deux côtés égaux à R sont égaux ; donc

$$CD = CO,$$

et, en considérant le triangle rectangle CDH, on peut écrire

$$\overline{CD}^2 = (CD - x)^2 + R^2,$$

d'où

$$CD = \frac{R^2 + x^2}{2x}.$$

Il est bon d'observer ici que cette valeur de CD s'applique à toute valeur positive de x.

Remplaçons maintenant dans l'expression de la surface engendrée (1), CD par sa valeur ; il vient

$$2\pi R\left(\frac{R^2 + x^2}{2x} + 2x\right) = \frac{\pi R(R^2 + 5x^2)}{x}.$$

Si l'on désigne alors par $2\pi m^2$ la surface donnée, on a l'équation

$$\frac{R(R^2 + 5x^2)}{x} = 2m^2,$$

ou

$$5Rx^2 - 2m^2x + R^3 = 0.$$

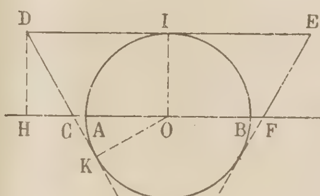
Discussion. — L'équation précédente a ses deux racines positives lorsqu'elles sont réelles, ce qui suppose

$$m^4 - 5R^4 \geqslant 0,$$

ou

$$m^2 \geqslant R^2\sqrt{5}.$$

Aux deux points D définis par les racines correspondent visiblement deux trapèzes répondant à la question. Suivant que $x <$ ou $>$ R, la base DE est la plus petite ou la plus grande des deux bases de l'un de ces trapèzes. Dans le second cas (fig. ci-contre), on voit que les côtés latéraux CD, EF sont tangents au cercle O par leurs prolongements.



Pour savoir combien de trapèzes de l'une ou l'autre espèce répondent à une valeur donnée de m^2, comparons R aux deux racines de l'équation. En désignant le premier membre de cette équation par $f(x)$, on a

$$f(R) = 2R(3R^2 - m^2).$$

Si $R^2\sqrt{5} \leqslant m^2 < 3R^2$, $f(R)$ est positif ou du signe du coefficient de x^2 ; R est extérieur aux racines. D'ailleurs, leur demi-somme, $\dfrac{m^2}{5R}$, reste inférieure à $3R^2.\dfrac{1}{5R} = \dfrac{3}{5}R$, quantité inférieure à R ; donc les deux racines sont moindres que R et correspondent à deux trapèzes de la forme indiquée par la première figure.

Si $m^2 > 3R^2$, $f(R)$ est négatif, et R est compris entre les deux racines, dont l'une correspond alors à un trapèze de la première figure et l'autre à un trapèze de la seconde figure.

Dans le cas particulier où $m^2 = 3R^2$, l'une des racines vaut R ; l'un des trapèzes devient un rectangle ; l'autre trapèze est du même genre que celui de la première figure, puisque la seconde racine vaut $\dfrac{R^3}{5R^2} = \dfrac{R}{5} < R$.

(A. Bouzy, instituteur.)

[Ont résolu la même question : MM. J. de Bersaucourt ; E. Baudot ; L. Curt ; L. Fabia ; J. Fiton ; J. Ménéchal ; J. Moisson ; E. Gernez-Pfanmatter ; L. Pont ; Remondet ; J. Rigal ; J. de Saint-Julien ; J. Sire ; G. Schoonheere ; H. Tourrette ; Venet.]

GÉOMÉTRIE

4420. — *On joint un point* M *d'un plan à deux points fixes* A *et* B *de ce plan. On projette* M *en* C *et* D *sur les droites* AC *et* BD *telles que les angles* CAM *et* MBD *soient respectivement égaux à des angles donnés* α *et* β. *La longueur* CD *étant supposée constante :*

1° *Trouver le lieu du point* M ;

2° *Trouver l'enveloppe de la droite* CD ;

3° *Construire le quadrilatère* ACDB *de surface donnée.*

1° Menons ME perpendiculaire sur AB et remarquons que les quadrilatères inscriptibles AEMC, BDME donnent

$$\widehat{CEM} = \widehat{CAM} = \alpha,$$

$$\widehat{DEM} = \widehat{DBM} = \beta.$$

Traçons le cercle circonscrit au quadrilatère AEMC; menons par A la corde AF faisant avec AB l'angle EAF, égal à α; la corde MF sera perpendiculaire à AF, puisque MA est évidemment un diamètre du cercle; de plus $MF = CE$, à cause de l'égalité des arcs CME et MEF.

De même si on trace le cercle circonscrit au quadrilatère BDME, et si on y inscrit l'angle $EBG = \beta$, la corde MG sera perpendiculaire à BG et égale à DE.

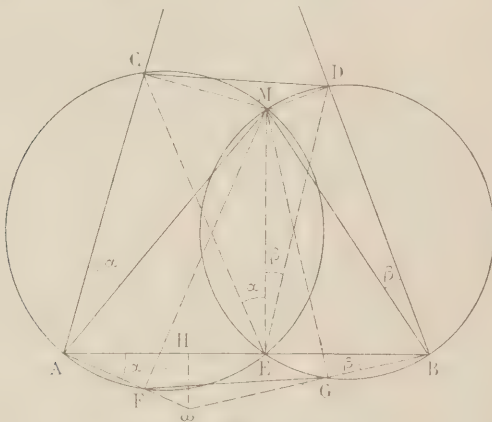
On aura en même temps

$$\widehat{EMF} = \widehat{EAF} = \alpha,$$

$$\widehat{EMG} = \widehat{EBG} = \beta,$$

d'où
$$\widehat{FMG} = \alpha + \beta = \widehat{CMD}.$$

Les deux triangles CDE et FMG ont donc un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun et donnent par



suite $FG = CD$. Le cercle circonscrit au triangle MGF passe par le point ω, point de rencontre des droites fixes AF et BF, et son diamètre est $M\omega$; d'ailleurs ce diamètre est constant, puisque dans le triangle MGF le côté FG et l'angle opposé sont constants; ωM est donc constant et le point M se trouve sur une circonférence de centre ω, de rayon égal à cette longueur constante. D'ailleurs la construction montre que le point M et le point ω sont nécessairement de part et d'autre de la droite AB. La seule partie de la circonférence trouvée qui puisse convenir est donc celle qui est par rapport à AB du côté opposé à celui où se trouve le point ω.

Inversement, prenons un point M sur cette partie; menons les perpendiculaires MF et MG sur $A\omega$ et $B\omega$; l'angle FMG sera égal à $\alpha + \beta$; par suite, d'après la manière dont le cercle a été déterminé, FG est égal à la longueur constante donnée. Les cercles de diamètres AM et BM se coupent en E sur AB et les angles CEM et DEM seront respectivement égaux à α et β; par suite $EC = MF$ et $ED = MG$; il en résulte l'égalité des triangles MFG et CED; donc CD est égal à FG et par suite à la longueur constante donnée. Comme enfin MC et MD sont visiblement perpendiculaires à AC et AD, le point M est bien un point du lieu.

Nous avons supposé sur la figure les angles $CAM = \alpha$ et $DBM = \beta$ extérieurs au triangle AMB, et nous avons de même construit les angles $EAF = \alpha$ et $EBF = \beta$ extérieurement au triangle AMB. On peut imaginer que l'un de ces angles ou même tous les deux deviennent intérieurs au triangle AMB. Il y a donc en tout quatre combinaisons possibles, donnant quatre circonférences.

2° Cherchons le lieu du point C, troisième sommet du triangle AMC; ce triangle a ses angles constants; le sommet A est fixe; le sommet M décrit un cercle; le sommet C se construit en faisant tourner AM d'un angle α dans un sens déterminé et en abaissant de M la perpendiculaire MC sur la nouvelle position de AM. Le lieu du point C est donc une circonférence dont on obtient le centre en faisant tourner de l'angle α la droite $A\omega$ sur laquelle se trouve le centre ω de la circonférence M, ce qui donne la droite AB, et en abaissant de ω la perpendiculaire ωH sur AB. On verrait de même que le lieu du point D est une circonférence de centre H. La droite CD, ayant une longueur constante et s'appuyant par ses deux extrémités C et D sur deux circonférences de centre H, a elle-même pour enveloppe une circonférence de centre H.

3° La surface du triangle CHD est connue, puisque ses trois côtés ont des longueurs constantes. La surface du quadrilatère étant donnée, on connaît par suite la somme des aires des triangles AHC et BHD. Appelons Cc et Dd les hauteurs de ces triangles relatives à AB; cette somme connue sera égale à

$$\frac{1}{2}(AH \times Cc + BH \times Dd) = \frac{1}{2}k.$$

Appliquons en C et D des masses mesurées par les mêmes nombres que AH et BH; le centre de gravité P de ces masses sera en un point de CD tel que

$$\frac{CP}{PD} = \frac{AH}{BH};$$

et le moment de la masse résultante, appliquée en P, par rapport à AB, vaudra

$$(AH + BH)Pp = AB \times Pp = k,$$

Pp désignant la distance de P à la droite AB; cette distance est par suite une longueur connue. D'autre part, puisque deux points de la droite CD décrivent des cercles de centre H, il en est de même du point P. On construira donc ce point en prenant l'intersection du cercle, lieu de P, avec une parallèle à AB, à la distance Pp, choisie du côté convenable par rapport à la droite AB. Le point P étant connu, on en déduit CD en menant de ce point la tangente au cercle enveloppe de CD; les points d'intersection de cette droite avec les cercles, lieux de C et de D, font connaître les points C et D, et par suite le quadrilatère ABCD.

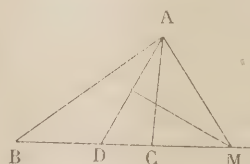
A. N.

4457. — *Les perpendiculaires élevées aux milieux des bissectrices intérieures d'un triangle rencontrent les côtés opposés aux sommets d'où partent ces bissectrices en trois points en ligne droite.*

Première démonstration. — D'après la réciproque du théorème des transversales, on sait que trois points M, N, P situés sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle sont en ligne droite si l'on a

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1.$$

Dans le cas actuel, il suffit donc de chercher une expression du rapport $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$ lorsque M est situé sur la perpendiculaire élevée au milieu de la bissectrice AD.



Tirons la droite MA. Le triangle isocèle MAD donne

$$\widehat{MDA} = \widehat{MAD}$$

ou $$\widehat{MBA} + \frac{A}{2} = \widehat{MAC} + \frac{A}{2}$$

ou $$\widehat{MBA} = \widehat{MAC},$$

ce qui établit la similitude des triangles MBA et MAC. Donc

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}},$$

ou, en égalant le produit des deux premiers rapports au carré du troisième,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

On aurait de même

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{BA}^2},$$

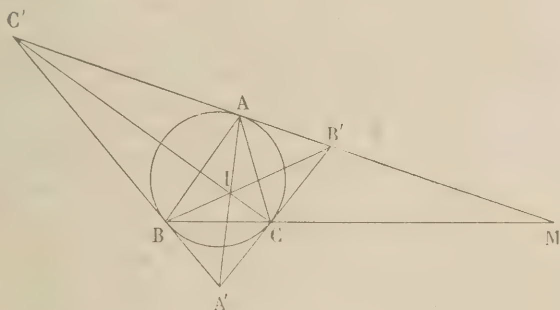
$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{CA}^2}{\overline{CB}^2}.$$

En multipliant ces valeurs membre à membre, on tombe sur la relation (1) qu'il fallait établir.

(Jules SIRE, à Belverne.)

Deuxième démonstration. — Traçons le cercle circonscrit au triangle. L'angle MAC étant égal à l'angle inscrit MBA (voir plus haut), a même mesure que la moitié de l'arc AC, ce qui montre que MA est tangent en A au cercle circonscrit.

Par suite la polaire de M par rapport au cercle est la droite AA' qui joint les pôles des droites MA et MBC. On verrait de même que la polaire du point N est la droite BB' et la polaire du point P la droite CC'. Or dans le triangle A'B'C', circonscrit au cercle ABC, on a



$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = 1, \qquad \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = 1, \qquad \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = 1,$$

et, en multipliant membre à membre,

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = 1,$$

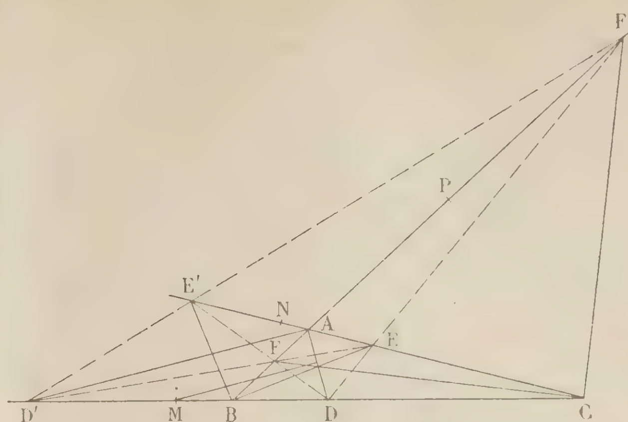
ou, en permutant et changeant les signes des dénominateurs,

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{BC'}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{CA'}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}} = -1.$$

En vertu de la réciproque du théorème de Céva, cette relation montre que les trois droites AA', BB', CC' concourent en un même point I. Les trois points M, N, P sont donc situés sur la polaire du point I par rapport au cercle.

(J. SIRE.)

Troisième démonstration. — Considérons la bissectrice extérieure AD'. Dans le triangle ADD', rectangle en A, la perpendiculaire élevée au milieu de AD passe par le milieu de DD' comme parallèle à AD'. De même, si l'on mène les bissectrices extérieures BE' et CF', N est le milieu de EE' et P le milieu de FF'. Mais on sait que, dans un triangle, les pieds des six bissectrices sont trois à trois en ligne droite. Ces pieds sont donc les



sommets d'un quadrilatère complet qui admet les segments DD' EE', FF' comme diagonales; par suite les milieux M, N, P de ces diagonales sont en ligne droite (propriété connue).

(G. H. D. O., à Châlons-sur-Marne.)

[Ont résolu la même question : MM. H. Carpentier, lycée de Charleville ; A. Fadeuille, collège de Béziers ; E. Foucart ; G. Foucry ; L. Hubert ; G. Jullian ; M. Maigret, lycée Saint-Louis ; H. Michel, lycée de Douai ; M. Rivière, à Foix ; G. Tastet, lycée de Bordeaux ; E. Vaunac ; Ménissier.]

PHYSIQUE

4467. — *Dans un vase hermétiquement clos se trouve une balance réduite à son fléau.*

On attache aux deux bouts :

1° une sphère S *de* 1^{lit} *de volume et pesant* $p = 502^{gr}$;

2° une sphère S' *de* 0,000025 *formée d'un corps de densité* 20.

On demande à quelle pression il faut porter l'acide carbonique contenu dans la boîte pour que, à 100°, *il y ait équilibre entre les deux sphères.*

Densité de CO^2, 1,529.

(*Bacc. lettres-math., Toulouse, juillet 1898.*)

Le poids de la sphère S' est égal à

$$20 \times 25 = 500^{gr}.$$

Appelons x la pression à laquelle il faut porter le gaz carbonique contenu dans la boîte pour que, à 100°, il y ait équilibre entre les deux sphères.

La poussée subie par la sphère S a pour valeur

$$1 \times 1{,}293 \times 1{,}529 \times \frac{x}{76} \times \frac{1}{1+100\alpha},$$

et la poussée subie par la sphère S',

$$0{,}025 \times 1{,}293 \times 1{,}529 \times \frac{x}{76} \times \frac{1}{1+100\alpha}.$$

On a donc, en négligeant la dilatation des sphères,

$$502 - 1 \times 1{,}293 \times 1{,}529 \times \frac{x}{76} \times \frac{1}{1+100\alpha}$$
$$= 500 - 0{,}025 \times 1{,}293 \times 1{,}529 \times \frac{x}{76} \times \frac{1}{1+100\alpha},$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{2 \times 76 \times 373}{0{,}975 \times 1{,}293 \times 1{,}529 \times 273}.$$

Effectuant les calculs, il vient

$$x = 107^{cm},7.$$

(P. MARION.)

[Ont résolu la même question : Mlle Croizet ; MM. E. Ardin-Delteil ; L. Aula-

gnier ; E. Bergeret ; V. Bonzom ; A. Chapron ; Delpont ; Delolme ; C. Dujardin ; J. Fiton ; Gernez-Pfanmatter ; R. Lavallée ; A. Lescure ; F. Le Goïc ; H. Lorcerie ; E. Le Maigre ; G. Le Sage ; Mackerey ; Michel ; J. Moisson ; J. Mouchet ; M. Oger ; L. Raush ; Raynaud ; Remondet ; G. Schoonheere ; G. Tastet ; M. Teulié ; A. Texonnière ; P. Tribier ; J. Trouillé ; Venet ; Vial.]

4468. — *Deux petites sphères identiques, électrisées positivement, sont placées à une certaine distance l'une de l'autre, et donnent lieu à une répulsion égale à 1. On les rapproche jusqu'à ce qu'elles se touchent, puis on les éloigne à une distance égale à la moitié de la précédente, et l'on a une répulsion égale à 4,5. On demande le rapport des charges électriques primitives des deux sphères.*

(*Bacc. lettres-math., Lyon, juillet 1898.*)

Soient q et q' les charges initiales des deux sphères. Après le contact, les nouvelles charges sont chacune $\frac{q+q'}{2}$.

D'après la loi de Coulomb, l'action répulsive à la distance primitive d est exprimée par la relation

$$\frac{qq'}{d^2} = 1, \qquad \text{d'où} \qquad qq' = d^2 \qquad (1)$$

et ensuite, à la distance $\frac{d}{2}$, par la relation

$$\frac{\left(\frac{q+q'}{2}\right)^2}{\frac{d^2}{4}} = 4{,}5, \qquad \text{d'où} \qquad q+q' = d\sqrt{4{,}5}. \qquad (2)$$

Des relations (1) et (2) se déduit l'équation

$$X^2 - Xd\sqrt{4{,}5} + d^2 = 0,$$

dont les racines sont les quantités q et q'.

En résolvant, on trouve

$$x' = \frac{d}{2}\sqrt{4{,}5} + \sqrt{\frac{d^2}{4} \times 4{,}5 - d^2} = \frac{d(\sqrt{4{,}5} + \sqrt{0{,}5})}{2},$$

$$x'' = \frac{d}{2}\sqrt{4{,}5} - \sqrt{\frac{d^2}{4} \times 4{,}5 - d^2} = \frac{d(\sqrt{4{,}5} - \sqrt{0{,}5})}{2}.$$

Le rapport cherché sera donc

$$\frac{q}{q'} = \frac{d(\sqrt{4{,}5} + \sqrt{0{,}5})}{d(\sqrt{4{,}5} - \sqrt{0{,}5})} = \frac{2}{1},$$

rapport qui est indépendant de la distance d.

(A. LESCURE.)

[Ont résolu la même question : MM. Arcizet ; E. Ardin-Delteil ; Aulagnier ; E. Bergeret ; V. Bonzom ; C. Bourveau ; A. Chapron ; R. Conral ; Curt ; Delpont ; Depasse ; C. Dujardin ; L. Ecoffard ; A. Gay ; Gernez-Pfanmatter ; G. Girod ; A. Guichon ; R. Henry ; Herrmann ; L. Hubert ; C. Labille ; F. Ladevèze ; J. Lamotte ; Legros ; E. Léotard ; Le Sage ; J. Leulliot ; H. Lorcerie ; E. Le Maigre ; Mackerey ; P. Marion ; Mathieu ; Michel ; Millevoye ; Moisson ; Nuzeret ; M. Oger ; J. Orsini ; Palin ; Pavard ; Prost ; Raynaud ; L. Rausch ; Remondet ; Roure ; A. Rozier ; G. Schoonheere ; Smântânescu ; G. Tastet ; M. Teulié ; Thomas ; P. Tribier ; J. Trouillé ; A. Vergnole ; Vial ; Vien ; E. Sevin ; Venet.]

QUESTIONS PROPOSÉES

4479. — Trouver un nombre de trois chiffres et un système de numération tel que la valeur de ce nombre supposé écrit dans le système décimal soit la moitié de la valeur de ce même nombre supposé écrit dans le système inconnu.

Démontrer qu'il n'y a qu'un seul système de numération donnant des nombres de trois chiffres répondant à la question.

(R. MANEN, petit séminaire de Massals.)

4480. — Quel que soit n, l'expression

$$6^{10n+1} + 5^{11n-1}$$

est divisible par 31.

(A. SAINTE-LAGUË, à Agen).

4481. — On considère dans un plan les trapèzes isocèles dont un des côtés égaux AB reste fixe et dont les diagonales AC et BD ont une même longueur donnée.

1° Trouver le lieu géométrique du point de rencontre des diagonales.
2° Déterminer celui de ces trapèzes qui a le périmètre minimum.

(*Bacc. lettres-math., Bordeaux, novembre 1897.*)

4482. — On considère un segment sphérique à deux bases parallèles appartenant à une sphère de rayon R. Déterminer les rayons des bases sachant que la hauteur du segment est égale à R et son volume à $\frac{1}{6}\pi m^3$. — Maximum et minimum de m^3 pour une valeur donnée de R.

(*Bacc. lettres-math., Caen, novembre 1897.*)

4483. — On donne une circonférence O et sur cette circonférence trois points fixes A, B, C. On joint les points B et C à un point variable D de la circonférence, et par le point A on mène les parallèles à DB et DC ; soit AEDF le parallélogramme ainsi formé.

1° Prouver que la diagonale EF du parallélogramme passe par un point fixe P ;

2° On projette le point B en M et N sur AE et AF et le point C en M' et N' sur ces mêmes droites ; trouver l'enveloppe de chacune des droites MN, M'N' ;

3° Supposant que le point A se déplace sur la circonférence O, trouver le lieu géométrique du point P.

(M. REBEIX, lycée du Puy.)

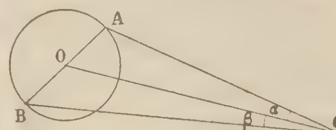
4484. — P étant un point quelconque de la circonférence circonscrite au triangle ABC, on tire les droites PA, PB, PC, que l'on désigne respectivement par α, β, γ ; en représentant comme d'ordinaire par a, b, c, A, B, C, S et R les côtés, les angles, l'aire et le rayon du cercle circonscrit, démontrer la relation

$$4S = \alpha^2 \sin 2A + \beta^2 \sin 2B + \gamma^2 \sin 2C.$$

Que devient cette relation quand on place le point P aux différents sommets A, B, C et enfin à l'extrémité du diamètre passant par A ?

(P. LEDUC.)

4485. — Un observateur placé en C, à une distance OC = 1348^m,27 du centre O de la « grande roue de Paris », voit les deux rayons OA et OB de cette roue situés sur un même diamètre AB sous des angles



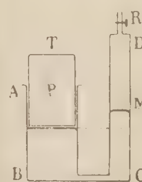
$$\alpha = 1^\circ 5' 51'',06,$$
$$\beta = 1^\circ 1' 43'',22.$$

Déduire de ces données le diamètre de la roue, ainsi que les valeurs des angles BAC et ABC.

On se servira des tables de logarithmes relatives au calcul des petits angles.

(*Admission à l'école des Ponts et Chaussées, Cours spéciaux 1898.*)

4486. — Un cylindre AB, d'une section intérieure de 40^{cq}, est muni d'un piston P mobile sans frottement, et communique, par sa partie inférieure, avec un tube de verre CD dont la section intérieure est de 5cq. Ce tube porte à la partie supérieure un robinet R actuellement ouvert. La partie inférieure du cylindre, ainsi que celle du tube et le canal de communication, renferment du mercure dont le niveau, dans le tube CD, s'arrête en un point M situé à une distance MD = 50^{cm} de l'extrémité D.



On ferme le robinet R et on demande quel poids on doit mettre sur la tête T du piston pour réduire à moitié le volume de l'air emprisonné dans la partie supérieure du tube CD. On calculera le déplacement du piston et on supposera la température de 0° et la pression atmosphérique de 730^{mm} de mercure.

(*Bacc. lettres-math., Clermont, juillet 1898.*)

4487. — Une lentille biconvexe dont les deux faces ont 30^{cm} de rayon de courbure est placée à 20^{cm} d'un écran. Si on lui accole une lentille plan-convexe de 50^{cm} de rayon de courbure, les objets placés à l'infini sont vus nettement sur l'écran. On demande quel est l'indice de réfraction de la première lentille, l'indice de la seconde étant $\frac{3}{2}$.

(*Bacc. lettres-math. et lettres-sciences, Besançon, juillet 1898.*)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

23e Année. — N° 6. JOURNAL Paris, le 15 Décembre 1898

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL..............	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE

DES

VARIATIONS DU TRINOME BICARRÉ

par M. **P. Barrieu**, professeur au lycée de Périgueux.

Nous rappellerons d'abord deux lemmes qui sont d'un fréquent usage dans l'étude des variations des fonctions.

Lemme I. — *Une variable et son carré varient dans le même sens, ou en sens contraire, suivant que la variable est positive ou négative.*

En effet, si une variable positive va en croissant, sa valeur absolue augmente, et par suite son carré va en croissant.

Si une variable négative va en croissant, sa valeur absolue diminue, et par suite son carré va en décroissant.

Lemme II. — *Si* X *est une variable et si* a *est une constante, les fonctions* X *et* aX *varient dans le même sens, ou en sens contraire, suivant que* a *est positif ou négatif.*

En effet, soit h un accroissement quelconque, positif ou négatif pris par la fonction X, et soit k l'accroissement correspondant de la fonction aX ; on aura

$$k = a(X + h) - aX,$$

d'où

$$k = ah.$$

Donc, si a est positif, les accroissements h et k sont de même signe, et par suite les fonctions X et aX varient dans le même sens.

Si au contraire a est négatif, les accroissements h et k sont de signe contraire, et par suite les fonctions X et aX varient en sens contraire. C. q. f. d.

Considérons maintenant le trinome

$$ax^4 + bx^2 + c.$$

En désignant par y la valeur du trinome, on a successivement

$$\begin{aligned} y &= ax^4 + bx^2 + c \\ &= a\left(x^4 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^4 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left[\left(x^4 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]. \qquad (1) \end{aligned}$$

Si maintenant nous posons

$$z = \left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}, \qquad (2)$$

nous aurons

$$y = az, \qquad (3)$$

et les variations de y se déduiront des variations de z par application du lemme II.

Nous sommes donc conduits à étudier les variations de z, qui dépendent elles-mêmes des variations de la fonction

$$\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Mais nous savons, d'après le lemme I, que la fonction $\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)$ et son carré $\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2$ varient dans le même sens, ou en sens contraire, suivant que la fonction $x^2 + \frac{b}{2a}$ est positive ou négative. Nous avons donc à nous occuper d'abord du signe de cette fonction.

Or on voit immédiatement que si $\frac{b}{a}$ est positif, le binome $x^2 + \frac{b}{2a}$ est toujours positif quelle que soit la valeur de x. Si au contraire $\frac{b}{a}$ est négatif, le binome $x^2 + \frac{b}{2a}$ s'annule quand x^2 passe par la valeur positive $x^2 = -\frac{b}{2a}$; il demeure négatif tant que x^2 est moindre que $-\frac{b}{2a}$; tandis qu'il devient positif quand x^2 devient supérieur à $-\frac{b}{2a}$.

Nous aurons donc deux cas à examiner suivant que $\frac{b}{a}$ sera positif ou négatif.

1er *cas* : $\frac{b}{a} > 0$.

Dans ce cas le binome $x^2 + \frac{b}{2a}$ est toujours positif, et, par conséquent, ce binome et son carré $\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2$ varient toujours dans le même sens.

Cela posé, l'application des lemmes I et II donne immédiatement le tableau suivant :

Variables.	Variations.				
x	$-\infty$	croît	0	croît	$+\infty$
x^2	$+\infty$	décroît	0	croît	$+\infty$
$x^2 + \frac{b}{2a}$	$+\infty$	décroît	$\frac{b}{2a}$	croît	$+\infty$
$\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty$	décroît	$\frac{b^2}{4a^2}$	croît	$+\infty$
z	$+\infty$	décroît	$\frac{c}{a}$	croît	$+\infty$
y $a > 0$	$+\infty$	décroît	c (*min.*)	croît	$+\infty$
y $a < 0$	$-\infty$	croît	c (*max.*)	décroît	$-\infty$

Les variations de x^2 se déduisent des variations de x par application du lemme I.

Les variations de $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$ se déduisent des variations de $x^2+\frac{b}{2a}$ par application du même lemme, en observant que la fonction $x^2+\frac{b}{2a}$ est toujours positive.

Les valeurs de z s'obtiennent en ajoutant aux valeurs de la ligne précédente la constante $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$; par conséquent pour $x=0$ la valeur de z est $\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=\frac{c}{a}$.

Enfin les valeurs de y s'obtiennent en multipliant par a les valeurs de z, et en observant, d'après le lemme II, que y varie dans le même sens que z si a est positif, en sens contraire si a est négatif.

2° *cas* : $\frac{b}{a}<0$.

Dans ce cas, le binome $x^2+\frac{b}{2a}$ est positif ou négatif suivant que x^2 est plus grand ou plus petit que le nombre positif $-\frac{b}{2a}$. Ce binome change donc de signe, et par suite les variations de son carré changent de sens, quand x^2 passe par la valeur positive $-\frac{b}{2a}$; c'est-à-dire quand x passe par l'une des deux valeurs réelles $-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ et $+\sqrt{-\frac{b}{2a}}$. Il faudra donc faire passer x par ces deux valeurs.

Cela posé, l'application des lemmes I et II donne le tableau suivant $\left(\text{on observera que } \frac{b}{2a} \text{ est négatif}\right)$:

Variables.	Variations.							
x	$-\infty$	cr.	$-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$	cr.	0	cr.	$+\sqrt{-\frac{b}{2a}}$	cr.	$+\infty$
x^2	$+\infty$	décr.	$-\frac{b}{2a}$	décr.	0	cr.	$-\frac{b}{2a}$	cr.	$+\infty$
	>0			<0				>0	
$x^2+\frac{b}{2a}$	$+\infty$	décr.	0	décr.	$\frac{b}{2a}$	cr.	0	cr.	$+\infty$
$\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty$	décr.	0	cr.	$\frac{b^2}{4a^2}$	décr.	0	cr.	$+\infty$
z	$+\infty$	décr.	$\frac{4ac-b^2}{4a^2}$	cr.	$\frac{c}{a}$	décr.	$\frac{4ac-b^2}{4a^2}$	cr.	$+\infty$
y $a>0$	$+\infty$	décr.	$\frac{4ac-b^2}{4a}$ (*min.*)	cr.	c (*max.*)	décr.	$\frac{4ac-b^2}{4a}$ (*min.*)	cr.	$+\infty$
y $a<0$	$-\infty$	cr.	$\frac{4ac-b^2}{4a}$ (*max.*)	décr.	c (*min.*)	cr.	$\frac{4ac-b^2}{4a}$ (*max.*)	décr.	$-\infty$

Les variations de x^2 se déduisent des variations de x d'après le lemme I.

Les variations de $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$ se déduisent des variations de $x^2+\frac{b}{2a}$ en observant, d'après le lemme I, que $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$ varie dans le même sens que $x^2+\frac{b}{2a}$ lorsque $x^2+\frac{b}{2a}$ est positif, et en sens contraire lorsque $x^2+\frac{b}{2a}$ est négatif.

Pour les variations de z et de y, mêmes observations que pour le premier tableau.

Nous laissons au lecteur le soin de tracer la courbe de la fonction, ce qui n'offre aucune difficulté en se servant des deux dernières lignes de chaque tableau. Nous n'avons eu d'autre but que d'être utile aux candidats à l'École de Saint-Cyr en leur indiquant une méthode simple pour étudier les variations du trinome bicarré sans avoir recours à la Théorie des dérivées qui n'est plus dans le programme d'admission à l'École.

INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

4389. — *Variations de la fonction* $y=\frac{8x^2+9x-14}{x^2+x-1}$ *quand x prend toutes les valeurs possibles. — Courbe correspondante.*

Pour abréger les calculs effectuons d'abord la division indiquée par la fonction ; il vient

$$y=8+\frac{x-6}{x^2+x-1}.$$

On est alors ramené à étudier les variations de la fraction plus simple

$$z=\frac{x-6}{x^2+x-1}.$$

Maximum et minimum de z. — A une valeur donnée de z correspondent pour x deux valeurs fournies par l'équation

$$zx^2+(z-1)x-z+6=0.$$

En écrivant que le discriminant de cette équation est positif ou nul, on a

$$(z-1)^2+4z(z-6)\geqslant 0$$

ou

$$5z^2-26z+1\geqslant 0.$$

Cette inégalité n'a lieu que pour les valeurs de z non comprises entre les deux valeurs qui annulent le premier membre ; on doit donc avoir

$$z < \frac{13-2\sqrt{41}}{5}, \qquad \text{ou} \qquad z > \frac{13+2\sqrt{41}}{5}.$$

La fonction z admet ainsi un maximum et un minimum relatifs, fournis respectivement par les valeurs de z :

$$z_1 = \frac{13-2\sqrt{41}}{5} = 0{,}03, \qquad z_2 = \frac{13+2\sqrt{41}}{5} = 5{,}16 ;$$

les valeurs correspondantes de x sont, en observant que $z_1 z_2 = \frac{1}{5}$,

$$x_1 = -\frac{z_1 - 1}{2z_1} = -\frac{\frac{1}{5} - z_2}{\frac{2}{5}} = 6 + \sqrt{41} = 12{,}40,$$

$$x_2 = -\frac{z_2 - 1}{2z_2} = -\frac{\frac{1}{5} - z_1}{\frac{2}{5}} = 6 - \sqrt{41} = -0{,}40.$$

Discontinuités de la fonction z. — La fonction z devient infinie pour les valeurs de x qui annulent le dénominateur sans annuler le numérateur. Ces valeurs, fournies par l'équation

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

sont

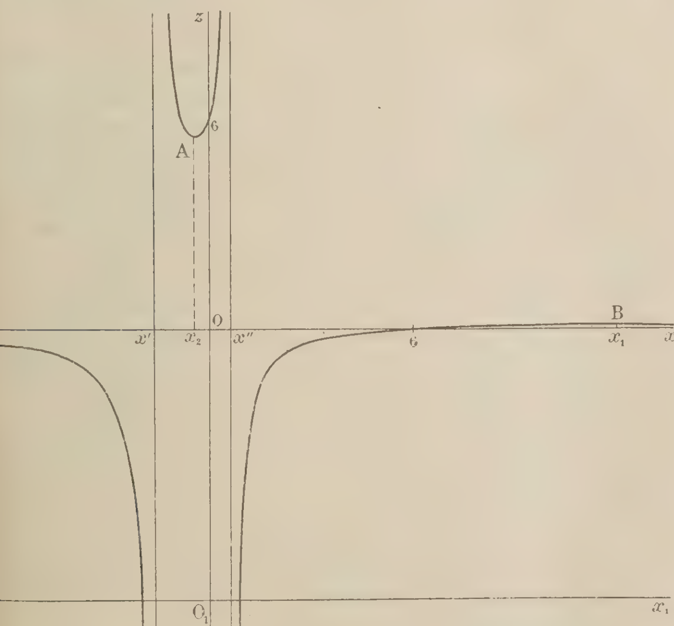
$$x' = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = -1{,}61, \qquad x'' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}61.$$

En remarquant que les quatre valeurs de x se classent ainsi :

$$x' < x_2 < x'' < x_1$$

et que pour $x = \pm\infty$, la fonction z tend vers zéro (on le voit en divisant haut et bas par x^2), on forme facilement le tableau suivant qui permet de suivre les variations de z :

x	$-\infty$		x'		x_2		x''		x_1		$+\infty$
z	0	déc.	$-\infty$ | $+\infty$	déc.	*Min.*	cr.	$+\infty$ | $-\infty$	cr.	*Max.*	déc.	0



D'après ce tableau, la courbe figurative a des points à l'infini sur l'axe Ox et sur les parallèles à Oz, d'abscisses x' et x'' ; ces trois droites sont donc asymptotes à la courbe. En déterminant ensuite les points A et B relatifs au minimum et au maximum, puis le point $x = 6$, situé sur Ox, et le point $z = 6$, situé sur l'axe Oz, la courbe se trace alors sans difficulté. Si l'on augmente de 8 chaque ordonnée de la courbe, ce qui revient à prendre pour Ox la parallèle O_1x_1 à Ox d'ordonnée -8, on voit que la courbe représente également les variations de y.

(F. PÉGORIER.)

[Ont résolu la même question : MM. G. Bernard ; A. Bouzy ; J. Bruyas ; G. Damien ; P. Herrmann ; E. Madet ; C. Marie ; L. Patin ; L. Tarin.]

4390. — *Calculer les côtés d'un trapèze isocèle circonscrit à un cercle de rayon* R, *sachant que le volume engendré lorsqu'il tourne autour de sa plus grande base est égal à* $8\pi a R^2$. *Discussion.*

Soit le trapèze isocèle ABCD, circonscrit à un cercle de rayon R. Il faut calculer les trois quantités

$$AB = 2x, \qquad CD = 2y \qquad \text{et} \qquad AC = BD = z.$$

La condition énoncée revient à écrire que le volume engendré par le demi-trapèze AII'C en tournant autour de CI' est égal à $4\pi a R^2$. Or, en menant la hauteur AA', ce volume peut être considéré comme la somme d'un cylindre et d'un cône ayant même rayon de base 2R et pour hauteurs respectives $AI = x$ et $CA' = y - x$.

On peut donc écrire

$$\pi(2R)^2\left[x + \frac{1}{3}(y-x)\right] = 4\pi a R^2,$$

ou

$$2x + y = 3a. \qquad (1)$$

D'ailleurs, les tangentes au cercle issues de A ou C étant égales, on a $AE = x$, $CE = y$, d'où, en ajoutant,

$$z = x + y. \qquad (2)$$

Le triangle rectangle ACA' donne comme troisième relation entre x, y, z,

$$z^2 = 4R^2 + (y - x)^2. \qquad (3)$$

En éliminant z entre (2) et (3), il vient, après réduction,

$$xy = R^2,$$

relation qu'on aurait pu écrire de suite en joignant les points A, E, C au centre du cercle de rayon R et observant qu'on forme ainsi un triangle rectangle dont la hauteur passe en E

Le problème est donc résolu par le système des équations

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 3a, \\ xy &= R^2, \\ z &= x + y. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Pour que des valeurs de x et de y, tirées de ces équations, puissent convenir, il faut qu'elles vérifient les conditions

$$x > 0, \qquad y > 0, \qquad y > x, \qquad z > 0. \qquad (5)$$

Ces conditions *nécessaires* sont aussi *suffisantes*. Supposons en effet que les équations (4) aient fourni pour les inconnues des valeurs satisfaisant aux conditions (5). Avec les longueurs x, y, 2R on peut reconstruire le trapèze isocèle ABCD ; reste à montrer que ce trapèze isocèle est circonscriptible à un cercle de rayon R, que son côté oblique est égal à z, que le volume engendré par lui en tournant autour de CD vaut $8\pi a R^2$.

La première propriété résulte de ce que x et y vérifient la relation $xy = R^2$; appelant en effet ω le milieu de II', on en conclut aisément la similitude des triangles AIω, CI'ω, rectangles

en I et I'. L'angle $A\omega C$ est donc droit ; par suite

$$\overline{AC}^2 = \overline{A\omega}^2 + \overline{\omega C}^2 = x^2 + y^2 + 2R^2 = (x+y)^2;$$
$$AC = x + y.$$

Le trapèze est donc circonscriptible; nous venons de montrer que son côté oblique est égal à $x + y$; ce côté n'est donc autre que z, en vertu de la relation supposée vérifiée

$$z = x + y.$$

Enfin la condition du volume résulte immédiatement de ce que x et y vérifient la relation

$$2x + y = 3a.$$

Les conditions (5) sont donc bien suffisantes.

Pour résoudre le système (4), on tire de la première équation

$$y = 3a - 2x; \qquad (6)$$

on porte dans la seconde, qui donne

$$x(3a - 2x) = R^2; \qquad (7)$$

la troisième donne enfin pour z une valeur positive si x et y sont positifs. Les conditions $y > 0$ et $y > x$ se ramènent à la condition unique

$$3a - 2x > x \qquad \text{ou} \qquad x < a.$$

Le problème admet donc autant de solutions que l'équation (7) a de racines comprises entre 0 et a.

Cette équation s'écrit

$$f(x) = 2x^2 - 3ax + R^2 = 0,$$

et donne

$$f(0) = R^2, \qquad f(a) = R^2 - a^2.$$

Pour que le problème admette une seule solution, il faut et il suffit que $f(0)$ et $f(a)$ soient de signes contraires, donc

$$a > R.$$

Pour que le problème admette deux solutions, il faut et il suffit :

1° Que $f(0)$ et $f(a)$ soient tous deux de même signe que le coefficient de x^2, donc positifs ; d'où

$$a < R;$$

2° Que la demi-somme des racines, $\frac{3a}{4}$, soit comprise entre 0 et a, condition évidemment vérifiée ;

3° Que le discriminant soit positif, c'est-à-dire

$$9a^2 - 8R^2 \geqslant 0,$$
$$a \geqslant \frac{2R\sqrt{2}}{3}.$$

Cette condition est compatible avec $a < R$; il faut donc que

$$\frac{2R\sqrt{2}}{3} \leqslant a < R.$$

Calcul des expressions de $2x$, $2y$ et z. — On a

$$2x = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 8R^2}}{2},$$
$$2y = 2(3a - 2x) = 3a \mp \sqrt{9a^2 - 8R^2},$$
$$z = x + y = \frac{9a \mp \sqrt{9a^2 - 8R^2}}{4},$$

les signes supérieurs ou inférieurs étant pris ensemble.

(A. BOUZY, instituteur à Vervins.)

[Ont résolu la même question : MM. Herrmann, collège Chaptal ; E. Madet ; L. Patin.]

4391. — *Un tuyau vertical plonge dans l'eau d'un réservoir de grande capacité et contient un piston dont la base est séparée du liquide par une colonne d'air de $0^m,50$ à la pression atmosphérique. On élève le piston jusqu'à 6^m au-dessus du niveau du réservoir : sachant que la hauteur du baromètre en eau égale 10^m, calculer la hauteur de l'eau située dans le tube.*

Désignons par s la section du tuyau, par x la hauteur qu'occupe l'eau lorsque le piston s'élève à 6^m au-dessus du niveau dans le réservoir.

La colonne d'air située au-dessous du piston occupait d'abord un volume $s \times 0,5$ sous la pression atmosphérique représentée par 10^m d'eau. Après l'ascension du piston, la même masse d'air occupe un volume $s(6 - x)$ sous la pression $10 - x$.

En appliquant la loi de Mariotte, on a

$$s \times 0,5 \times 10 = s(6 - x)(10 - x),$$

d'où l'on tire $\qquad x^2 - 16x + 55 = 0.$

La plus petite racine, inférieure à 6^m, est seule acceptable ; elle a pour valeur 5^m.

(P. BONNOT.)

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil ; G. Beaudun ; L. Bellour ; F. Beynas ; M. Boutry ; L. Delavergnas ; J. Delpont ; L. Gourdet ; E. Madet ; E. Le Maigre ; J. Ménéchal ; J. Mouchet ; M. Oger ; L. Perret ; M. Rebeix ; J. Rigal ; A. Rozier ; L. Tarrin ; M. Teulié.]

4392. — *On donne un plan P passant par xy (xy est le petit axe de la feuille) et faisant avec la partie antérieure du plan horizontal et au-dessus de ce plan un angle de 30°.*

Dans ce plan est situé un pentagone régulier ABCDE dont le rayon du cercle circonscrit est 4^{cm} ; le sommet A est à une distance de xy égale à 16^{cm}. Ce sommet se projette sur le grand axe de la feuille et est le point le plus en avant du périmètre du pentagone.

Ce pentagone est la base d'une pyramide, située au-dessus du plan P, dont la hauteur est 12^{cm} et dont le sommet se projette horizontalement en un point s situé à 8^{cm} à droite du grand axe et à 3^{cm} en avant du petit axe.

On demande de représenter par deux projections (parties vues et cachées) la portion du volume de cette pyramide comprise entre le plan P et le plan bissecteur de l'angle dièdre aigu que fait le plan P avec le plan vertical.

Projections de la pyramide. — Prenons comme plan vertical auxiliaire celui dont la trace horizontale se confond avec le grand axe x_1y_1 de la feuille. Le plan P étant de bout par rapport à ce nouveau plan, sa trace verticale $\alpha P'_1$ fait un angle de 30° avec la trace verticale αy_1 du plan horizontal de projection ; en prenant sur $\alpha P'_1$ la longueur $\alpha a'_1 = 16^{cm}$, on obtient la projection verticale auxiliaire a'_1 de A, d'où l'on déduit aisément les projections (a, a').

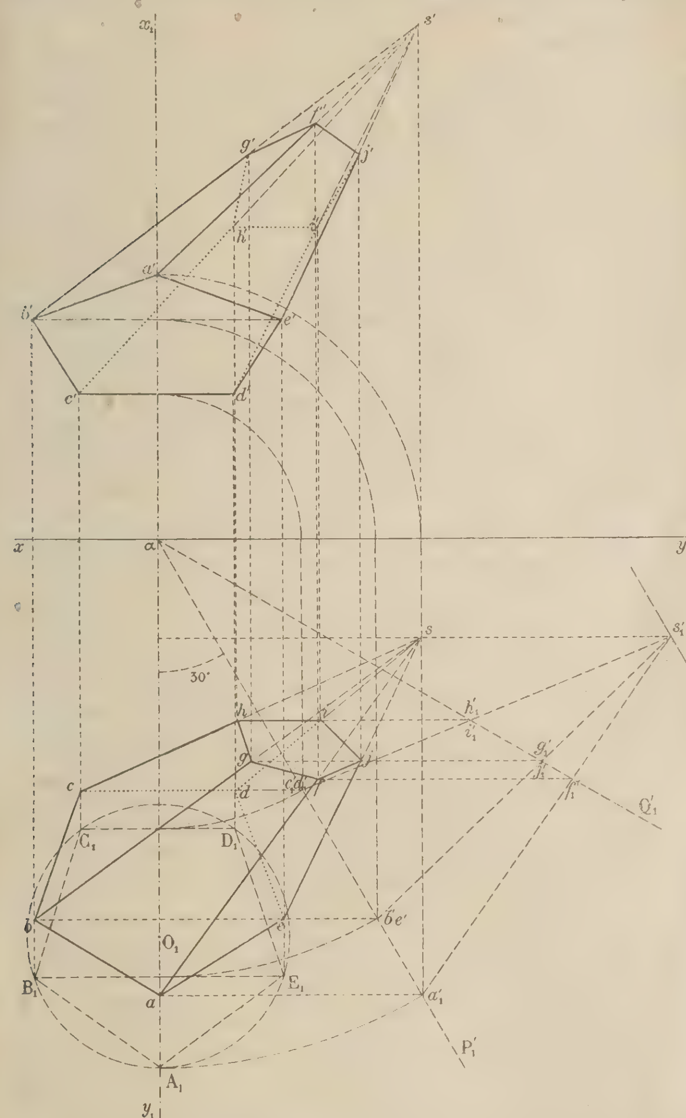
En rabattant le plan P autour de sa trace horizontale xy, le cercle circonscrit au pentagone se rabat suivant le cercle O_1, dont le centre s'obtient en prenant sur $A_1\alpha$ (A_1 étant le rabattement de A) la longueur $A_1O_1 = 4^{cm}$; inscrivons dans ce cercle le pentagone $A_1B_1C_1D_1E_1$, puis relevons successivement les divers sommets en (a, a'_1), (b, b'_1), (c, c'_1), etc. ; la projection verticale $a'b'c'd'e'$ du pentagone se déduit sans peine de la projection verticale $a'_1b'_1c'_1d'_1e'_1$.

On connaît la projection horizontale du sommet S de la pyramide ; comme la hauteur de cette pyramide se projette en vraie grandeur sur le second plan vertical, la projection verticale s'_1 est à l'intersection de la ligne de rappel de s avec la parallèle à $\alpha P'_1$ menée à 12^{cm} de distance.

Les projections de la pyramide sont donc ($sabcde$, $s'a'b'c'd'e'$).

Section par le plan bissecteur du dièdre formé par le plan P et

le plan vertical de projection. — Ce plan bissecteur a tous ses points projetés sur le second plan vertical suivant la bissectrice $\alpha Q'_1$ de l'angle $y\alpha P'_1$. Les points de rencontre de $\alpha Q'_1$ avec les arêtes $s'_1a'_1$, $s'_1b'_1, \ldots$ déterminent les projections



$f'_1, g'_1, h'_1, i'_1, j'_1$ des points où les arêtes SA, SB,... percent le plan sécant. On conclut facilement de là que la section plane est représentée par le pentagone $(fghij, f'g'h'i'j')$.

Ponctuation. — La portion de la pyramide comprise entre le plan P et le plan sécant est seule représentée, comme le veut l'énoncé. En projection horizontale, les trois arêtes issues du sommet caché (d, d') sont cachées ; il en est de même, en projection verticale, pour les arêtes aboutissant aux sommets cachés (h, h') et (i, i').

(L. DELAVERGNAS, à Eymoutiers.)

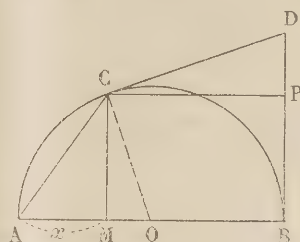
[Ont envoyé des épures exactes : MM. L. Curt, école normale de Bourg ; G. Damien ; L. Gourdet.]

ALGÈBRE

4453. — *On donne une demi-circonférence construite sur* AB *comme diamètre. Par un point* C *de cette demi-circonférence, on abaisse la perpendiculaire* CM *sur* AB *et la perpendiculaire* CP *sur la tangente en* B ; *enfin on mène la tangente au point* C, *qui rencontre en* D *la tangente* BP. *Cela posé, comment faut-il choisir le point* C *pour que les deux triangles* CDP *et* ACM *soient équivalents ?*

(*Bacc. lettres-math., Bordeaux, juillet 1898.*)

Posons $AB = 2R$ et $AM = x$. L'équivalence des triangles rectangles CDP et ACM s'exprime par l'égalité



$$CP.PD = AM.CM.$$

Or $CP = MB = 2R - x$,

$$\overline{CM}^2 = AM.MB = x(2R - x) ;$$

d'ailleurs, en tirant le rayon OC, les triangles semblables CPD, CMO (côtés perpendiculaires) donnent

$$\frac{PD}{PC} = \frac{MO}{MC}, \qquad \text{d'où} \qquad PD = \frac{(R-x)(2R-x)}{\sqrt{x(2R-x)}}.$$

L'équation du problème est donc

$$\frac{(R-x)(2R-x)^2}{\sqrt{x(2R-x)}} = x\sqrt{x(2R-x)}$$

ou
$$(R-x)(2R-x)^2 = x^2(2R-x)$$

ou, en divisant par le facteur commun $2R - x$, différent de zéro,

$$(R-x)(2R-x) = x^2,$$

d'où l'on tire
$$x = \frac{2}{3}R.$$

Cette valeur de x montre que le point C est à la rencontre du cercle O avec la perpendiculaire à AB élevée au tiers de AB à partir de A.

Le cas de figure considéré suppose implicitement le point M entre A et O, puisque la valeur $MO = R - x$ doit rester positive ; lorsque M tombe entre O et B, l'équation du problème devient

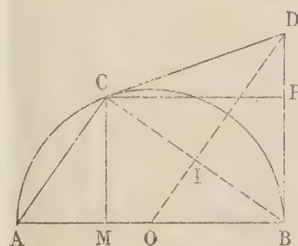
$$-(R-x)(2R-x) = x^2,$$

ou
$$2x^2 - 3Rx + 2R^2 = 0.$$

Cette équation a ses deux racines imaginaires en sorte que le problème n'admet d'autre solution que celle déjà trouvée.

(P. DELOLME, instituteur au Puy.)

Solution géométrique. — Tirons la corde CB qui coupe en I la droite OD.



Si, aux triangles CDP, ACM, supposés équivalents, on ajoute les triangles CPB, CMB, équivalents comme moitiés d'un rectangle, on obtient les triangles équivalents CDB, ACB. Or ces deux derniers triangles ayant même base CB, leurs hauteurs DI, AC doivent être égales, et comme $AC = 2OI$, $DI = 2OI$; donc, dans le triangle rectangle OBD, la hauteur issue de B a son pied I au tiers de l'hypoténuse à partir de O. Le triangle semblable ACB $(\widehat{CAB} = \widehat{BOD})$ jouissant de la même propriété, le point M se trouve au tiers de l'hypoténuse AB, à partir de A.

(A. BRODBECK.)

[Ont résolu la même question : MM. P. Barbier ; F. Beynas ; H. Carpentier, lycée de Charleville ; B. Carrière ; J. Delpont ; A. Pichon ; P. Vien, collège de Lure.]

4463. — *La surface d'un triangle de côtés $2n^2+2$, $2n^2$, $2n^2-2$ est quadruple de celle d'un triangle de côtés $2n+1$, $2n$, $2n-1$. Déterminer pour quelle valeur de n.*

D'après la formule $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, les surfaces des deux triangles sont respectivement

$$S=\sqrt{3n^2(n^2-2)n^2(n^2+2)}=n^2\sqrt{3(n^4-4)},$$
$$S'=\sqrt{3n(n-1)n(n+1)}=n\sqrt{3(n^2-1)}.$$

L'équation du problème est donc

$$n^2\sqrt{3(n^4-4)}=4n\sqrt{3(n^2-1)},$$

ou, en élevant au carré et supprimant le facteur commun $3n^2$, différent de zéro,

$$n^2(n^4-4)=16(n^2-1),$$

ce qui peut s'écrire

$$n^2(n^4-16)=4n^2-16,$$

ou, en mettant en évidence le facteur commun n^2-4,

$$(n^2-4)(n^4+4n^2-4)=0.$$

Dans cette dernière équation, le second facteur est toujours positif, puisque, S devant être réel, on a $n^4-4>0$. La seule solution possible est donc

$$n^2=4, \qquad \text{ou} \qquad n=2;$$

les deux triangles correspondants ont respectivement pour côtés

$$10,\ 8,\ 6 \qquad \text{et} \qquad 5,\ 4,\ 3.$$

On voit que ces triangles sont des triangles rectangles semblables dont le rapport de similitude est 2 et qui ont chacun leurs côtés en progression arithmétique.

Remarque. — On aurait pu obtenir *a priori* ce résultat en remarquant que le quart de la surface du premier triangle est représenté par un triangle semblable dont les côtés n^2+1, n^2, n^2-1 sont les moitiés de ceux de ce triangle. Or ce dernier triangle est visiblement égal au triangle de côtés $2n+1$, $2n$, $2n-1$ lorsque $n=2$.

(J. MOISSON.)

[Ont résolu la même question : MM. L. Barberot, à Valdoie ; L. Bois ; L. Curt, école normale de Bourg ; F. Lalescu et A. Popescu, lycée de Jassy.]

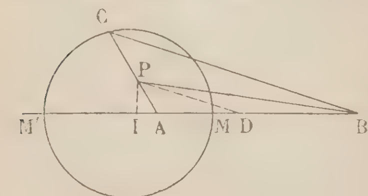
GÉOMÉTRIE

4464. — *On donne deux points A et B dans un plan. Sachant que les nombres m et n sont tels que*

$$(1-m)(1-n)>0,$$

évaluer l'aire de la région du plan contenant des points P tels que le rapport $\frac{PA}{PB}$ soit compris entre m et n.

On sait que le lieu des points du plan dont le rapport des distances à A et B est un nombre donné m est une circonférence décrite sur MM′ comme diamètre, M et M′ étant les deux points du lieu situés sur la droite AB. Suivant qu'un point quelconque P du plan est intérieur ou extérieur à cette circonférence, le rapport $\frac{PA}{PB}$ est inférieur ou supérieur à m



(ceci suppose $m<1$; si $m>1$, ce serait l'inverse qui aurait lieu).

En effet, considérons par exemple le point intérieur P ; tirons la droite AP qui coupe la circonférence en C et par P menons la parallèle PD à CB ; il s'agit d'établir que

$$\frac{AP}{PB}<\frac{AC}{CB},$$

ou, en remplaçant le second rapport par son égal $\frac{AP}{PD}$,

$$\frac{AP}{PB}<\frac{AP}{PD},$$

ou

$$PD<PB.$$

Or l'hypothèse $AP<AC$ entraîne

$$AD<AB,$$

et par suite en ajoutant ou retranchant IA selon que I tombe sur AM′ ou sur AM,

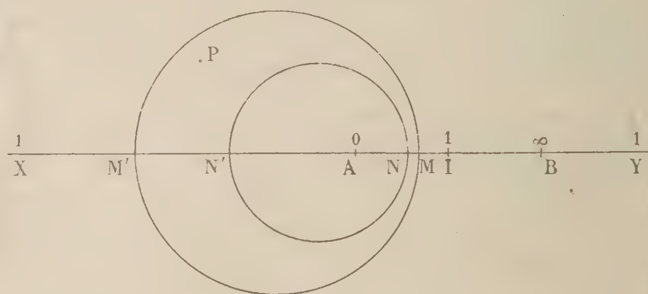
$$ID<IB;$$

on déduit de là l'inégalité $PD<PB$, qu'il fallait établir. Le même raisonnement subsiste pour un point extérieur P : il suffit de changer le sens des inégalités.

Revenons au problème posé. La condition $(1-m)(1-n)>0$ signifie que les nombres m et n sont tous deux inférieurs ou tous deux supérieurs à 1 ; ces deux nombres jouant entre eux le même rôle, on peut supposer par exemple

$$n<m<1.$$

En se rappelant que le rapport $\frac{MA}{MB}$ varie entre 0 et 1 lorsque M est pris sur la demi-droite XAI (I étant le milieu de AB) et



entre 1 et ∞ lorsque M est sur la demi-droite IBY, on conclut de ce qui précède que tous les points P tels que

$$n<\frac{PA}{PB}<m$$

sont intérieurs à un cercle de diamètre MM′ et extérieurs à un cercle de diamètre NN′.

Ces deux cercles ne pouvant avoir aucun point commun (puisque $m\neq n$) sont intérieurs l'un à l'autre, et la différence de leurs aires représente l'aire de la région considérée. Cette aire a donc pour expression

$$S=\pi\left(\frac{MM'}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{NN'}{2}\right)^2.$$

Or, en posant $AB=a$, on a

$$\frac{AM}{a-AM}=\frac{AM'}{a+AM'}=\frac{m}{1}$$

et par suite

$$MM'=AM+AM'=\frac{am}{m+1}+\frac{am}{1-m}=\frac{2am}{1-m^2};$$

de même $$NN' = \frac{2an}{1-n^2}.$$

Donc $$S = \pi a^2\left[\frac{m^2}{(1-m^2)^2} - \frac{n^2}{(1-n^2)^2}\right] = \pi a^2 \frac{(m^2-n^2)(1-m^2n^2)}{(1-m^2)^2(1-n^2)^2}.$$

(J. MOISSON.)

[Ont résolu la même question : MM. Croze ; L. Curt ; P. Delolme ; H. Dourif, école Duvignau de Lanneau ; L. Hubert ; G. Jullian ; M. Maigret, lycée Saint-Louis ; E. Montagut ; G. Nugeret ; M. Oger ; R. Thomas.]

PHYSIQUE

4477. — *Dans un calorimètre de poids négligeable on introduit* 1^{lit} *d'eau à* 10° *et* 100^{gr} *de glace à* 0°. *Quel poids de vapeur d'eau à* 100° *faudra-t-il y condenser pour que la température finale soit de* 80° ?

Chaleur latente de fusion de la glace, 80.

Chaleur de vaporisation de l'eau à 100°, 537.

(*Bacc. lettres-math., Nice, juillet 1898.*)

1^{lit} d'eau, pour passer de 10° à 80°, absorbe $1000 \times 70 = 70\,000^{cal}$. Les 100^{gr} de glace absorbent d'abord $100 \times 80 = 8\,000^{cal}$ pour fondre sans changer de température, puis $100 \times 80 = 8000^{cal}$ pour passer de 0° à 80°.

D'un autre côté, si x représente la quantité de vapeur d'eau que l'on doit faire condenser dans le mélange précédent pour que la température finale soit de 80°, la quantité de chaleur cédée par la vapeur d'eau aura pour valeur $x \times 537 + x(100-80)$.

En écrivant que la chaleur gagnée par l'eau et la glace est égale à la chaleur cédée par la vapeur, on a

$$70\,000 + 8000 + 8\,000 = 537x + 20x,$$

d'où on tire $$x = 154^{gr},4.$$

(E. LE MAIGRE.)

[Ont résolu la même question : MM^lles^ M. Pont ; L. Ségala ; MM. A. Arcizet ; Ardin-Delteil ; Aulagnier ; Aupy ; L. Barberot ; E. Baudot ; F. Bolloc ; F. Beynas ; J. Le Bihan ; C. Billionnet ; V. Bonzom ; Borgey ; M. Boucly ; J. Bouvier ; Cavaillié ; J. Chalvin ; A. Chapron ; G. Charpentier ; G. Chiché ; F. Deit ; G. Delolme ; R. Depasse ; C. Dujardin ; L. Ecoffard ; L. Fabia ; E. Fourmon ; P. Girard ; G. Girot ; E. Gernez ; J. Grey ; D. Henry ; Hinstin ; L. Hubert ; C. Labille ; E. Labeurie ; A. Lescure ; M. Mathieu ; Méheurs ; J. Ménéchal ; P. Millevoye ; F. Montaland ; M. Oger ; Ollivier ; L. Patin ; A. Prost ; Remondet ; E. Rousset ; A. Rozier ; E. Rimour ; Saffrey ; Schoonheere ; G. Simonard ; G. Tastet ; Thomas ; P. Tribier ; E. Vaunac ; Chautemps ; Gay ; Le Goïc ; Venet ; Orsini.]

4478. — *Le courant fourni par une pile de 20 éléments associés en série traverse un conducteur en cuivre ayant* 4^{mmq} *de section et* 10^m *de longueur ; son intensité est de 9,4 ampères ; s'il traverse un conducteur en fer ayant même longueur et même section que le conducteur de cuivre, l'intensité se réduit à 8,96 ampères. La résistance du cuivre évaluée en ohms est 0,016 par millimètre carré de section et par mètre de longueur, celle du fer est 0,096. Calculer :*

1° *la force électromotrice de chaque élément exprimée en volts ;*

2° *la résistance intérieure d'un élément en ohms ;*

3° *l'intensité d'un courant qui traverserait le conducteur de cuivre si les éléments étaient associés en surface.*

(*Bacc. lettres-sciences, Caen, juillet 1898.*)

La résistance d'un conducteur est proportionnelle à sa longueur et inversement proportionnelle à sa section ; par suite, la résistance du conducteur en cuivre est de $\frac{0{,}016 \times 10}{4} = 0^{ohm},04$

et celle du conducteur en fer, de $\frac{0{,}096 \times 10}{4} = 0^{ohm},24$.

L'application de la loi d'Ohm donne, dans le cas du cuivre,

$$9{,}4(0{,}04 + 20R) = 20E, \qquad (1)$$

R désignant la résistance intérieure d'un élément, E sa force électromotrice.

On a, dans le cas du fer,

$$8{,}96\,(0{,}24 + 20R) = 20E. \qquad (2)$$

Egalant les deux relations (1) et (2), il vient

$$9{,}4(0{,}04 + 20R) = 8{,}96\,(0{,}24 + 20R),$$

d'où l'on tire $$R = 0^{ohm},2016.$$

La résistance en ohms d'un élément est donc de $0^{ohm},2016$.

En portant cette valeur dans la relation (1) et résolvant par rapport à E, on obtient, par réductions successives,

$$E = 0{,}47 \times 4{,}072 = 1^{volt},91384 ;$$

telle est la valeur en volts de la force électromotrice de chaque élément.

Enfin, si les 20 éléments sont associés en surface, l'intensité du courant traversant le conducteur de cuivre est donnée par la relation

$$I = \frac{E}{\frac{R}{20} + r} = \frac{20 \times 1{,}91384}{20 \times 0{,}04 + 0{,}2016} = 38^{amp},215.$$

Cette intensité est donc plus de 4 fois supérieure à celle que donne, avec le même conducteur, l'association en série des 20 éléments.

(ARDIN-DELTEIL.)

[Ont résolu la même question : Mlle Croizet ; MM. A. Arcizet ; Aupy ; L. Barberot ; Baudot ; F. Belloc ; C. Billionnet ; Bonzom ; Bouvier ; J. Chalvin ; J. Coupat ; R. Depasse ; Delolme ; J. Fiton ; M. Frisson ; Gernez ; P. Girard ; R. Henry ; Hinstin ; L. Hubert ; E. Labernie ; J. Lamotte ; A. Lescure ; E. Méline ; E. Le Maigre ; F. Montaland ; M. Oger ; A. Prost ; Remondet ; F. Ségala ; Seguenot ; M. Teulié ; Thomas ; P. Tribier ; H. Varennes ; F. Vérot ; Venet ; F. Le Goïc.]

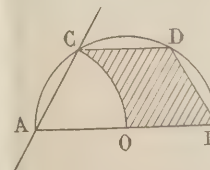
CONCOURS DE 1898

ÉCOLE NATIONALE ET SPÉCIALE DES BEAUX-ARTS

Section d'architecture.

Mathématiques.

I. — **4488.** On donne une demi-circonférence de centre O, de rayon R, décrite sur AB comme diamètre ; de A comme centre, avec AO pour rayon, on décrit un arc de cercle qui coupe en C la demi-circonférence ; soit D le milieu de l'arc BC ; on mène les cordes BD, CD.



1° Trouver les expressions du volume V et de la surface S du solide engendré par la figure ombrée OCDBO en tournant autour de la droite AC ;

2° Calculer R par logarithmes, sachant que $V = 3^{mc},4567$; mettre tous les calculs.

II. — **4489.** Former et résoudre l'équation qui donne les valeurs de x qui satisfont aux deux équations aux deux inconnues x et y,

$$5x^2 - 12xy + 9y^2 - 6y + 4 = 0,$$

$$mx - y = 3m - 2\,;$$

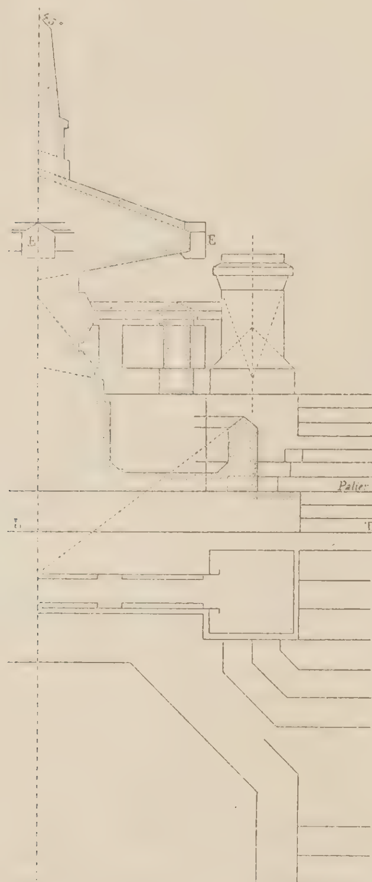
puis chercher pour quelles valeurs de m les valeurs de x existent; mettre tous les calculs.

(*2e session, 25 octobre. — Durée : 2 heures.*)

Géométrie descriptive.

On suppose une fontaine entre deux perrons limités par des piédestaux.

La fontaine et sa vasque sont octogonales, suivant le profil hachuré;



au milieu de chacune des huit faces de la fontaine est ménagé en saillie un épannelage E en attente de sculpture.

Entre les deux piédestaux se trouve une balustrade pleine avec panneaux évidés.

L'épure à faire consiste :

1° A représenter les projections horizontale et verticale de la fontaine, de sa vasque, des perrons, de la balustrade et des deux piédestaux;

2° A tracer les ombres (rayon lumineux ayant ses deux projections à 45°) en projection horizontale *seulement*, y compris l'ombre portée sur l'intérieur de la vasque; le tracé des ombres en projection horizontale devra être complet, sans s'arrêter à la ligne de terre.

Placer l'axe au milieu de la feuille.

(*2e session, 26 octobre. — Durée : 8 heures.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4490. — Si un nombre *abc* est divisible par 27, il en est de même du nombre *bca*.

(V. Bonzom, à Viella.)

4491. — Vérifier l'identité

$$(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)^2 = (ab+bc+ca)^2 + (a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2).$$

4492. — Quel est mon âge? — A cette question je répondrai en donnant, outre l'âge demandé, le rang du mois et le quantième du mois dans lequel je suis né. La somme des cubes de ces trois nombres, retranchée du cube de leur somme, vaut 117264.

Le quantième du mois surpasse son rang.

(E. Bloume.)

4493. — Construire un triangle connaissant l'angle A, le périmètre $2p$ et la somme $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{l}$.

(A. Rozier, lycée de Bordeaux.)

4494. — On considère tous les couples de cercles passant par deux points fixes A et B, et on détermine leurs centres d'homothétie S et S'.

1° O et O' étant les centres de deux de ces cercles, démontrer que le cercle circonscrit au triangle OAO' est orthogonal au cercle de diamètre SS';

2° Trouver le minimum de SS';

3° Trouver le lieu des centres des cercles OAO', lorsque les quatre points A, B, S, S' sont supposés fixes.

(C. Hugon, professeur au lycée de Nîmes.)

4495. — On donne un triangle ABC rectangle en A et le cercle circonscrit de centre O. Aux triangles AOC et AOB on circonscrit deux cercles de centres O_1 et O_2.

1° Démontrer que les tangentes en A aux deux cercles O_1 et O_2 sont rectangulaires.

2° Démontrer que la tangente en A au cercle O est parallèle à la ligne des centres O_1O_2.

3° Démontrer que le quadrilatère AO_1OO_2 est inscriptible.

4° Le point A étant supposé fixe et le point O décrivant la droite OA, trouver le lieu du point γ, centre du cercle circonscrit au quadrilatère AO_1OO_2.

5° Trouver entre les rayons des cercles O, γ, O_1, O_2 une relation qui ne renferme pas les côtés du triangle. (Luiz Hémois).

4496. — Un aérostat, de parois inextensibles, complètement gonflé d'hydrogène à la pression extérieure de 76cm et dont les agrès pèsent 100kg, possède au départ une force ascensionnelle de 10kg. A quelle hauteur s'élèvera-t-il si l'on admet que la température ne varie pas, mais que la pression atmosphérique diminue régulièrement de 1mm par 10m d'ascension?

Densité de l'hydrogène 0,07.

(*Bacc. lettres-math., Poitiers, juillet 1898.*)

4497. — Etant donnée une lentille convergente de distance focale *f*, on demande pour quelle position d'un objet la distance entre cet objet et son image sera minimum.

(*Bacc. lettres-math., Bastia, juillet 1898.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

23e Année. — N° 7. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 1er Janvier 1899.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

VARIATIONS DE LA FONCTION

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'},$$

par M. **J. Girod**, professeur au lycée de Versailles.

Pour étudier les variations de cette fonction sans faire appel au signe de la dérivée, on a proposé diverses méthodes de transformation du quotient qui ont le but de rendre plus directement visible la marche de la fonction.

Ces méthodes, très claires en théorie, présentent l'inconvénient pratique d'exiger des calculs qui rebutent les élèves. Il semble que l'ancienne méthode, dite indirecte, qui est celle à laquelle les élèves reviennent d'eux-mêmes parce qu'ils la trouvent commode, peut fournir des résultats démontrés d'une manière satisfaisante, si en l'appliquant on tient un compte suffisant des propriétés de la fonction qu'il s'agit d'étudier.

A ce sujet, nous traiterons successivement deux questions *distinctes :*

1° Déterminer les *limites* des valeurs que prend la fonction y, lorsqu'on attribue à x des valeurs arbitrairement choisies;

2° Fixer le *sens* de la variation de y lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$.

Nous étudierons la première question en supposant que les coefficients soient représentés par des lettres, afin d'établir une classification des cas qui peuvent se présenter.

Quant à la seconde question, nous la diviserons en examinant chacun des principaux cas signalés par la discussion précédente.

Première question : *limites de* y.

Nous supposons que les deux termes de la fraction n'ont aucune racine commune, car dans l'hypothèse contraire l'étude des variations de y se ramène à celle des variations d'une expression de la forme $y = \frac{px + q}{p'x + q'}$ ou bien y est une constante, pour des valeurs de x différentes d'une racine commune.

Si dans l'égalité $\quad y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}, \quad$ (1)

qui définit la fonction y, on chasse le dénominateur, on obtient une équation entière et du second degré par rapport à x,

$$y(a'x^2 + b'x + c') = ax^2 + bx + c. \qquad (2)$$

Vérifions que les valeurs prises par la fonction y lorsqu'on remplace dans la formule (1) la variable x par des nombres arbitraires sont exactement les mêmes que celles qu'il faut attribuer d'avance à y dans l'équation (2) pour que cette équation du second degré par rapport à x ait ses racines réelles.

En effet, soit α une valeur arbitraire de x (qui ne soit pas égale toutefois à une racine du dénominateur) et représentons par β la valeur correspondante de y. De l'hypothèse

$$\beta = \frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{a'\alpha^2 + b'\alpha + c'}$$

résulte, d'après la définition même du quotient,

$$\beta(a'\alpha^2 + b'\alpha + c') = a\alpha^2 + b\alpha + c. \qquad (3)$$

Or si dans l'équation (2) on remplace y par β, on obtient l'équation

$$\beta(a'x^2 + b'x + c') = ax^2 + bx + c,$$

et cette équation a évidemment ses racines réelles, puisque l'égalité (3) montre que α est une racine.

Réciproquement, soit β une valeur qui, mise à la place de y dans l'équation (2), détermine une équation ayant ses racines réelles.

Si on représente par α une de ces racines, on a par hypothèse

$$\beta(a'\alpha^2 + b'\alpha + c') = a\alpha^2 + b\alpha + c.$$

Or le polynome $a'\alpha^2 + b'\alpha + c'$ n'est pas nul, car si on avait $a'\alpha^2 + b'\alpha + c' = 0$, l'égalité précédente entraînerait $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite au début que les deux termes de la fraction n'ont aucune racine commune. Donc on peut diviser les deux membres de l'égalité par

$$a'\alpha^2 + b'\alpha + c',$$

ce qui donne

$$\beta = \frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{a'\alpha^2 + b'\alpha + c'};$$

d'où l'on conclut que β est une des valeurs possibles de la fonction y, puisque c'est celle que prend y pour $x = \alpha$.

Donc les *limites* des valeurs de la fonction y sont les mêmes que les *limites* des valeurs qu'il faut attribuer d'avance à y dans l'équation (2) pour que cette équation ait ses racines réelles.

Traitons donc le problème ainsi modifié.

L'équation (2) prend la forme réduite

$$(a'y - a)x^2 + (b'y - b)x + c'y - c = 0. \qquad (5)$$

Ecrivons la condition pour que les racines soient réelles ; c'est

$$(b'y - b)^2 - 4(a'y - a)(c'y - c) \geqslant 0,$$

ou $\quad (b'^2 - 4a'c')y^2 + 2(2ac' + 2ca' - bb')y + b^2 - 4ac \geqslant 0. \quad (6)$

Supposons d'abord $b'^2 - 4a'c' \neq 0$, pour que cette inégalité soit du second degré, ce qui est le cas général.

Pour la résoudre, on calcule d'abord le discriminant du premier membre, à savoir

$$\Delta = (2ac' + 2ca' - bb')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c').$$

Trois cas peuvent se présenter :

$$\Delta < 0, \qquad \Delta = 0, \qquad \Delta > 0.$$

Premier cas : $\Delta < 0$. — Alors le trinome

$$\varphi(y) = (b'^2 - 4a'c')y^2 + 2(2ac' + 2ca' - bb')y + b^2 - 4ac$$

garde le signe de son premier coefficient $b'^2 - 4a'c'$ et ne peut pas s'annuler.

Supposons $b'^2 - 4a'c' > 0$. Alors l'inégalité $\varphi(y) > 0$ est vérifiée indépendamment de la valeur de y ; par suite l'équation

(5) a ses racines réelles et *distinctes* quelle que soit la valeur attribuée à y. Donc la fonction y passe *deux fois* (c'est-à-dire pour deux valeurs de x différentes) par une valeur quelconque choisie d'avance arbitrairement.

Supposons $b'^2 - 4a'c' < 0$. L'inégalité $\varphi(y) \geqslant 0$ n'a aucune solution; donc il n'existe aucune valeur qui puisse être prise par la fonction y. Mais cette conclusion est absurde, car à toute valeur de x qui n'est pas racine du dénominateur correspond une valeur de y que l'on peut calculer. Donc les hypothèses simultanées $\Delta < 0$ et $b'^2 - 4a'c' < 0$ ne se rencontrent jamais dans les exemples numériques.

Deuxième cas : $\Delta = 0$. — Ce cas ne se rencontre pas non plus dans les exemples numériques, si on a pris la précaution de vérifier que les deux termes de la fraction proposée n'ont aucune racine commune. Si cette vérification a été omise, et si dans le cours du calcul précédent on rencontre l'égalité $\Delta = 0$, on sera par là averti que les deux termes ont au moins une racine commune. En effet, la condition pour que les deux équations

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

admettent une racine commune est

$$(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') = 0. \ (*)$$

Désignons par R le premier membre de cette égalité, qui est une fonction entière des coefficients, et que l'on appelle le résultant des deux trinomes. On vérifie, en groupant convenablement les termes du développement de

$$\Delta = (2ac' + 2ca' - bb')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c'),$$

que l'on a

$$\Delta = 4R.$$

Troisième cas : $\Delta > 0$. — Alors le trinome $\varphi(y)$ a ses racines réelles et inégales.

Soient y' et y'' ces racines, et supposons $y' < y''$.

Si l'on a $b'^2 - 4a'c' < 0$, l'inégalité $\varphi(y) \geqslant 0$ entraîne $y' \leqslant y \leqslant y''$.

La fonction y passe deux fois par toute valeur *comprise* entre y' et y'', une seule fois par chacune des limites y' et y'', et ne prend aucune valeur extérieure à l'intervalle de ces limites.

Pour $y = y'$ ou pour $y = y''$, on a $\varphi(y) = 0$, et par suite l'équation (5) admet une racine double donnée par la formule $x = -\dfrac{b'y - b}{2(a'y - a)}$. On calcule les valeurs x' et x'' qui correspondent aux limites y' et y'' en remplaçant dans cette formule y successivement par y' et y''.

Supposons $b'^2 - 4a'c' > 0$. Alors l'inégalité $\varphi(y) \geqslant 0$ impose à y les conditions $y \leqslant y'$ ou $y \geqslant y''$. Donc la fonction y passe *deux* fois par toute valeur non comprise entre y' et y'', *une seule* fois par chacun de ces nombres, et ne prend *aucune* valeur comprise entre ces limites.

En résumé, les limites de y, lorsqu'elles existent, sont les valeurs de y pour lesquelles l'équation (5) a une racine double, et l'unique valeur de x qui correspond à chaque limite est précisément cette racine double.

Reprenons maintenant l'hypothèse $b'^2 - 4a'c' = 0$ que nous avons écartée.

Dans ce cas, l'inégalité (6) se réduit à une inégalité du premier degré :

$$2(2ac' + 2ca' - bb')y + b^2 - 4ac \geqslant 0. \qquad (7)$$

Posons $$y_1 = -\frac{b^2 - 4ac}{2(2ac' + 2ca' - bb')}.$$

(*) Voir *Algèbre* de Cor et Riemann, page 148.

Si le coefficient de y est positif, l'inégalité (7) entraîne $y \geqslant y_1$; s'il est négatif, elle impose à y la condition $y \leqslant y_1$.

Il n'y a plus qu'une limite y_1. La fonction y passe deux fois par toute valeur convenablement placée par rapport à cette limite, et une seule fois par la valeur limite y_1.

Nous pouvons conclure de cette discussion que les divers exemples numériques que l'on peut rencontrer appartiennent à quatre cas principaux :

1° y prend deux fois toutes les valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$;

2° y reste compris entre deux limites;

3° y prend toutes les valeurs non comprises entre deux limites;

4° y prend toutes les valeurs inférieures ou supérieures à une limite.

Deuxième question : *Disposition de la courbe, et sens de la variation de la fonction.*

Rappelons d'abord que lorsque x croît indéfiniment par valeurs positives ou négatives, la fonction $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ a pour limite le rapport $\dfrac{a}{a'}$ des coefficients de x^2. Nous écartons ici l'hypothèse où l'on aurait $a' = 0$, qui sera reprise plus loin, mais on peut supposer $a = 0$. (*)

Si on construit la droite Δ qui a pour équation $y - \dfrac{a}{a'} = 0$, en d'autres termes la parallèle à OX d'ordonnée égale à $\dfrac{a}{a'}$, cette droite est une asymptote, puisque le point mobile décrivant la courbe s'en approche indéfiniment lorsque son abscisse x croît au-delà de toute limite dans les deux directions de OX.

Cette asymptote Δ coupe la courbe en un seul point à distance finie. En effet, l'équation

$$(a'y - a)x^2 + (b'y - b)x + c'y - c = 0,$$

qui détermine les abscisses des points de rencontre de la courbe avec une parallèle à OX d'ordonnée égale à y, devient une équation du premier degré par rapport à x lorsqu'on remplace y par $\dfrac{a}{a'}$. Ce point pourrait lui-même être rejeté à l'infini si on avait accidentellement $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$, parce qu'alors le coefficient de x deviendrait nul en même temps que celui de x^2. Mais il est impossible, dans le cas où nous nous sommes placés, que l'asymptote Δ coupe la courbe en plus d'un point à distance finie, puisque cette hypothèse exigerait que le coefficient de x et le terme constant deviennent nuls en même temps que celui de x^2, et par suite que l'on ait $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$. On serait ramené au cas où les termes de la fraction ont leurs deux racines communes. La droite Δ appartiendrait à la courbe, réduite alors à un système de droites.

Etudions maintenant *a priori* la disposition de la courbe, et la marche de la fonction y dans chacun des quatre cas.

Premier cas : y prend deux fois une valeur quelconque.

Puisque y peut devenir aussi grand que l'on veut, on prévoit d'avance que le dénominateur a ses racines réelles, ce qui est confirmé d'ailleurs par l'inégalité $b'^2 - 4a'c' > 0$, que nous avons trouvée nécessaire dans ce cas. Soient x' et x'' les racines réelles de l'équation $a'x^2 + b'x + c' = 0$. Nous ne devons pas attribuer à x les valeurs x' et x'', puisqu'à ces nombres ne correspond aucune valeur pour la fonction y. Si donc on trace

(*) Voir *Algèbre* de Cor et Riemann, page 240.

les droites AA′ et BB′ parallèles à OY, et d'abscisses égales à x' et à x'', ces droites ne contiennent aucun point de la courbe. Puisque toute autre parallèle à OY rencontre la courbe en un point dont on peut calculer l'ordonnée y, la courbe se composera nécessairement de *trois* branches distinctes, séparées par les droites AA′ et BB′, et chacune de ces branches ne présente pas de solution de continuité.

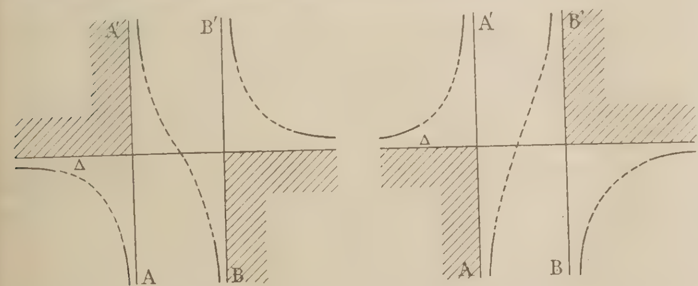
La droite AA′ est une asymptote commune aux deux branches qu'elle sépare, et ces deux branches se rapprochent de leur asymptote l'une dans un sens de AA′, l'autre dans la direction opposée. Car lorsque x tend vers x', par valeurs supérieures, ou par valeurs inférieures à x', le dénominateur tend vers zéro, le numérateur ne tend pas vers zéro (puisqu'il tend vers le nombre $ax'^2+bx'+c$ qui est différent de zéro par hypothèse), donc y croît indéfiniment par valeurs positives ou négatives. D'ailleurs, pour deux valeurs de x *comprenant* x' et suffisamment rapprochées de x', le dénominateur prend des valeurs de signes contraires, tandis que le numérateur conservant des valeurs voisines du nombre $A=ax'^2+bx'+c$ garde le signe de ce nombre A. Donc les ordonnées des deux points correspondants sont de signes contraires.

Le raisonnement s'applique à la droite BB′.

La branche qui est comprise entre les asymptotes AA′ et BB′ va de l'une à l'autre de ces asymptotes dans deux directions opposées. Car si elle se dirigeait d'un même côté de OX vers les deux asymptotes, par exemple au-dessus de OX, il existerait un certain point K d'ordonnée inférieure à celle de tous les autres points de la courbe. Une parallèle MN à OX dont l'ordonnée irait en décroissant jusqu'à l'ordonnée du point K couperait la courbe en deux points, qui finiraient par se confondre en K, ce qui est impossible, puisque par hypothèse il n'existe aucune valeur de y pour laquelle l'équation qui détermine les abscisses ait une racine double.

Puisque cette branche sans solution de continuité va d'une direction de AA′ à la direction opposée de BB′, elle rencontre nécessairement l'asymptote Δ parallèle à OX. Donc les deux autres branches qui ne peuvent couper Δ (puisque Δ ne rencontre le système des trois branches qu'en un point), sont placées chacune d'un seul côté de l'asymptote Δ. Leur disposition est liée à celle de la branche comprise entre AA′ et BB′ par ce fait établi précédemment que les deux branches asymptotes à AA′ sont dirigées dans les deux sens opposés de AA′.

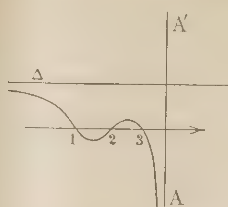
Les deux branches situées en dehors des parallèles AA′ et BB′ sont donc elles-mêmes de part et d'autre de Δ.



La conclusion est que les deux dispositions esquissées ci-dessus sont les seules possibles. — Il est inutile d'y faire figurer les axes de coordonnées.

La marche de la fonction résulte maintenant de cette propriété de la courbe d'être rencontrée en deux points seulement par toute parallèle à OX.

Dans le cas de la première figure, l'ordonnée d'un point de la branche située à gauche de AA′ décroît *constamment* de $\frac{a}{a'}$ à $-\infty$ lorsque x croît de $-\infty$ à x'. Car si cette ordonnée passait par des alternatives de croissance et de décroissance, une parallèle à OX pourrait couper la courbe en trois points au moins.



Le même raisonnement montre que pour chacune des trois branches, le sens de la variation de y demeure le même.

Pour distinguer auquel de ces deux types se rattache une fonction donnée numériquement, et pour laquelle on a constaté préalablement que y prend deux fois toutes les valeurs, il suffit de placer par rapport à l'asymptote Δ parallèle à OX un point de l'une des deux branches non comprises entre AA′ et BB′. Le point de rencontre de OY avec la courbe est tout indiqué pour cet usage lorsque les asymptotes AA′ et BB′ sont d'un même côté de OY, c'est-à-dire lorsque les racines du dénominateur ont le même signe. Dans le cas contraire, on peut se servir des racines du numérateur, car il importe de remarquer, d'après la disposition de la courbe, qu'elles sont toujours réelles, distinctes, et qu'une seule est comprise entre les racines du dénominateur. Pour s'en rendre compte, il suffit de constater qu'une parallèle quelconque à OX et la droite OX elle-même coupent en un seul point la branche comprise entre AA′ et BB′, et en un second point l'une des deux autres branches.

Par conséquent, lorsqu'on aura placé celui des points de rencontre de OX et de la courbe qui n'est pas situé entre AA′ et BB′, on pourra achever approximativement le tracé.

La réciproque de la propriété précédente des racines des deux termes de la fraction est vraie, c'est-à-dire que : si les racines de l'un des trinomes séparent celles de l'autre, la fonction y passe deux fois par une valeur quelconque et par suite la courbe a la forme de l'une de ces deux figures.

En effet, représentons cette fraction par $y=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$; il s'agit de démontrer que l'équation $y\varphi(x)-f(x)=0$ a ses racines réelles et distinctes, quelle que soit la valeur de y, si les deux racines réelles x' et x'' de $\varphi(x)$ comprennent une seule des racines de $f(x)$. Remplaçons x par x' et par x'' dans le premier membre de cette équation, et soient R′ et R″ les résultats obtenus. Puisqu'on a par hypothèse $\varphi(x')=0$ et $\varphi(x'')=0$, on obtient $R'=-f(x')$, et $R''=-f(x'')$. Or ces résultats ont des signes contraires, car $f(x')$ et $f(x'')$ ont des signes contraires en vertu de cette hypothèse que x' et x'' ne comprennent qu'une racine de $f(x)$. Donc l'équation $y\varphi(x)-f(x)=0$ a ses racines réelles, distinctes, dont une seule est comprise entre x' et x'', et la fonction y prend deux fois une valeur quelconque. Géométriquement, toute parallèle à OX coupe la courbe en deux points, dont un seul est situé entre les deux asymptotes parallèles à OY.

Cette réciproque permet de se dispenser de tout calcul pour tracer la courbe, si les racines des deux trinomes sont en évidence, et si les racines de l'un séparent celles de l'autre. Le numérateur peut être du premier degré : il suffit que sa racine soit située entre celle du dénominateur, car l'axe OX est alors une asymptote, et l'autre racine du numérateur doit être considérée comme devenue infinie.

Deuxième cas : y prend toutes les valeurs comprises entre deux limites y' et y''.

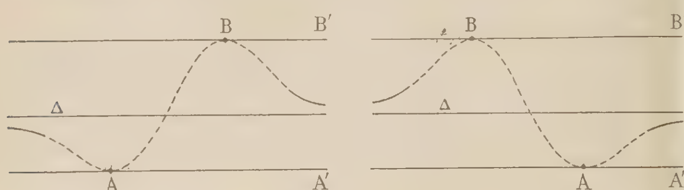
Après avoir calculé chacune des valeurs x' et x'' qui corres-

pondent uniquement à y' et à y'', on construit les deux points A et B qui ont pour coordonnées $x'y'$ et $x''y''$. Si par ces points on mène les parallèles AA′ et BB′ à OX, la courbe sera sans solution de continuité tout entière comprise entre ces deux parallèles. Les droites AA′ et BB′ contiendront chacune seulement le point A et le point B et toute autre parallèle à OX comprise dans leur intervalle coupera la courbe en deux points.

On construit la droite Δ qui a pour équation $y = \frac{a}{a'}$. Une première vérification consiste à voir si cette droite est située entre AA′ et BB′, comme l'exige la théorie.

L'arc de courbe qui va de A à B sans solution de continuité traverse nécessairement l'asymptote Δ; donc les branches extrêmes de la courbe, situées en dehors des parallèles à OY menées par A et B demeurent tout entières l'une d'un côté, l'autre de l'autre côté de l'asymptote Δ.

Deux dispositions seulement sont possibles, suivant que l'abscisse x' du point A qui a la plus petite ordonnée y' est inférieure ou supérieure à celle du point B qui a la plus grande ordonnée y''. Il est inutile pour les esquisser de représenter les axes de coordonnées.



Dans la première figure, lorsque x croît de $-\infty$ à x', l'ordonnée y décroît constamment de $\frac{a}{a'}$ à y', pour la même raison que dans le cas étudié précédemment; puis x croissant de x' à x'', y croît de y' à y''; enfin, x croissant de x'' à $+\infty$, y décroît de y'' à $\frac{a}{a'}$. Les valeurs y' et y'' sont donc le maximum et le minimum de y, et ce sont les seuls maximum et minimum de la fonction.

(La fin au prochain numéro.)

ARITHMÉTIQUE

4449. — *Dans une table où les nombres premiers sont rangés par ordre de grandeur croissante, on prend deux nombres premiers consécutifs quelconques a et b plus grands que 2, a étant le plus petit ; on fait leur somme $a+b$. Démontrer :*

1° Que cette somme n'est pas un nombre premier ;

2° Que tous ses diviseurs premiers sont plus petits que a.

(Certif. d'apt. au professorat des écoles norm., aspirantes, 1898.)

1° Tout nombre premier supérieur à 2 étant impair, la somme $a+b$ est celle de deux nombres impairs, c'est-à-dire un nombre pair, et par suite, non premier.

2° Tout diviseur premier de $a+b$ autre que 2 divise $\frac{a+b}{2}$. Or, $\frac{a+b}{2}$ étant compris entre les deux nombres a et b, supposés premiers consécutifs, le plus grand nombre premier inférieur à $\frac{a+b}{2}$ est a. Ce nombre a ne peut d'ailleurs diviser $\frac{a+b}{2}$ ou $a+b$, puisque divisant une partie de $a+b$, il devrait diviser l'autre partie b, qui est un nombre premier. Il résulte de là que tous les diviseurs premiers de $a+b$ sont inférieurs à a.

On peut remarquer que la première partie de l'énoncé s'applique à deux nombres premiers quelconques autres que 2.

(VIAL, à Dompierre.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Ballé; G. Bidaux; L. Bois; V. Bonzom; C. Bourvéau ; Burgat ; B. Carrière ; J.-M. Chalvin ; A. Chapron ; L. Constans; M. Cryé; J. Delpont ; Donnadieu ; Famechon; J. Fiton ; E. Foucart; G. Foucry ; G. H. D. O. ; E. Gernez-Pfanmatter ; G. Girot ; R. Henry ; H. Janois ; G. Jullian ; C. Labille ; L. Lacomblez ; X. Lacreuse ; A. Ste Laguë ; L. Lassence ; Ch. Lefebvre ; E. Le Maigre ; E. de Luca ; J. Ménéchal ; F. Morel ; M. Oger ; A. Pichon ; N. Plakhowo ; J.-B. Poitevin ; L. Pont ; A. Prost ; A. Redon ; E. Rousset ; G. Schoonheere ; J. Sire ; N. Teryep ; R. Thomas.]

ALGÈBRE

4473. — *Simplifier l'expression*

$$\frac{\sqrt[11]{\left[\left(\sqrt[3]{a^4b^2c}\right)^5.\left(\sqrt{a^3b^2c}\right)^4\right]^3}}{a^{5/11}}.$$

Le cube du produit entre crochets s'écrit successivement

$$\left(\sqrt[3]{a^4b^2c}\right)^{5\times3}.\left(\sqrt{a^3b^2c}\right)^{4\times3}$$
$$= \left(\sqrt[3]{a^4b^2c}\right)^{3\times5}.\left(\sqrt{a^3b^2c}\right)^{2\times6}$$
$$= (a^4b^2c)^5.(a^3b^2c)^6.$$

Comme d'ailleurs $a^{5/11} = \sqrt[11]{a^5}$, l'expression devient alors

$$\sqrt[11]{\frac{(a^4b^2c)^5.(a^3b^2c)^6}{a^5}} = \sqrt[11]{(a^3b^2c)^5.(a^3b^2c)^6} = \sqrt[11]{(a^3b^2c)^{5+6}} = a^3b^2c.$$

(G. FOUCRY, école normale de Châlons-sur-Marne.)

Autre solution. — En remplaçant les radicaux par des exposants fractionnaires, l'expression prend successivement les formes suivantes :

$$\frac{\left[(a^4b^2c)^{\frac{5}{3}}.(a^3b^2c)^2\right]^{\frac{3}{11}}}{a^{\frac{5}{11}}} = \frac{(a^4b^2c)^{\frac{5}{11}}}{a^{\frac{5}{11}}}\cdot(a^3b^2c)^{\frac{6}{11}}$$
$$= (a^3b^2c)^{\frac{5}{11}}.(a^3b^2c)^{\frac{6}{11}}$$
$$= (a^3b^2c)^{\frac{5}{11}+\frac{6}{11}} = a^3b^2c.$$

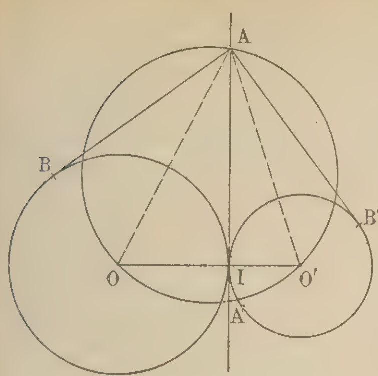
(H. JANOIS, instituteur à Nogent-le-Bernard.)

[Ont résolu la même question : Mlles Croizet; M. Pont ; MM. G. Anastasiu ; A. Arcizet ; J. Aupy ; L. Barberot ; R. Bellencourt ; F. Beynas ; C. Billionnet ; L. Bois ; V. Bonzom ; C. Bourvéau ; A. Brodbeck ; Burgat ; B. Carrière ; H. Casse ; Cavaillé ; Chalvin ; G. Charpentier ; Delbès ; Delolme ; Delort ; F. Deville ; J. Fiton ; L. Famechon ; P. Fouche ; E. Gernez-Pfanmatter ; R. Henry ; E. Kornis ; J. Lacampagne ; M. Lagarde ; L. Lassence ; R. Lavallée ; H. Lefèvre ; F. Le Goïc ; R. Manen ; G. Marquet ; J. Mayoud ; Meheust-Bily ; M. Oger ; F. Ollivier ; P. Plisson ; A. Popescu ; Poude ; A. Prost ; P. Reboul ; J. Reynaud ; P. Reynier ; A. Rozier ; R. Ruchon ; de Rycker ; Saffrey ; Ste Laguë ; Sasvari ; Schoonheere ; P. Ségala ; A. Tardieu ; G. Tastet ; R. Thomas ; G. Trannoy ; P. Tribier ; H. Varennes ; E. Vaunac ; Venet ; F. Vérot O. Bailly ; F. Lalescu ; A. Pichon ; N. Plakhowo ; Roure ; Sichitiu.]

GÉOMÉTRIE

4455. — *Étant donnés deux cercles O et O′ tangents, on demande de trouver sur leur axe radical un point A tel que les tangentes AB et AB′ menées de ce point aux deux cercles soient rectangulaires. — Discussion.*

Il y a deux cas de figure à considérer, suivant que les cercles sont tangents extérieurement ou intérieurement.



1° *Cercles tangents extérieurement.* — Tirons les droites OA, O'A. L'angle OAO' étant formé par les bissectrices des angles BAI, IAB', est la moitié de l'angle BAB', et comme ce dernier est supposé égal à un droit, l'angle OAO' est de 45° ou de 180° — 45°, suivant que les deux points O et O' sont tous deux intérieurs ou tous deux extérieurs à l'angle BAB'.

Le point A est donc à la rencontre de l'axe radical avec les segments capables de 45° et 180° — 45° décrits sur OO' comme base. La circonférence de ces segments coupe l'axe radical en un second point, A', répondant aussi à la question.

En considérant la circonférence symétrique de la précédente par rapport à OO', on aurait deux autres points A symétriques de A et A' par rapport à I.

Le problème est évidemment toujours possible.

2° *Cercles tangents intérieurement.* — La solution reste la même que dans le cas précédent, mais ici pour que l'axe radical coupe la circonférence contenant les segments capables, il faut que sa distance DI à la perpendiculaire à OO' en son milieu D ne surpasse pas le rayon OC du segment :

$$DI \leqslant OC. \qquad (1)$$

Or comme $\widehat{OCD} = \widehat{OAO'} = 45°$, le triangle OCD est rectangle isocèle; donc

$$OC = OD\sqrt{2} = \frac{(R - R')\sqrt{2}}{2},$$

R et R' désignant les rayons des cercles O,O'; d'ailleurs D étant le milieu de OO',

$$DI = \frac{OI + O'I}{2} = \frac{R + R'}{2}.$$

La condition (1) devient alors

$$R + R' \leqslant (R - R')\sqrt{2}$$

ou

$$R' \leqslant R(\sqrt{2} - 1)^2.$$

Lorsque $R' = R(\sqrt{2} - 1)^2$, les deux points A et A' se confondent en un seul.

(G. FOUCRY, école normale de Châlons.)

Généralisation. — Comme on le voit aisément, la solution précédente n'est applicable qu'à des cercles tangents. On peut cependant traiter le même problème lorsque les cercles O, O' sont quelconques; nous nous bornerons à indiquer la solution sur un cas particulier de figure.

Soit à mener les tangentes rectangulaires AB, AB' aux cercles quelconques O, O', le point A étant situé sur l'axe radical des cercles.

Prolongeons les rayons BO, B'O' jusqu'à leur rencontre, en D. Les tangentes AB, AB' étant issues d'un point de l'axe radical sont égales. La figure ABDB' ayant ainsi deux côtés égaux et trois angles droits est un carré; donc

$$BD = DB',$$

ou $\quad R + OD = DO' + R', \quad (1)$

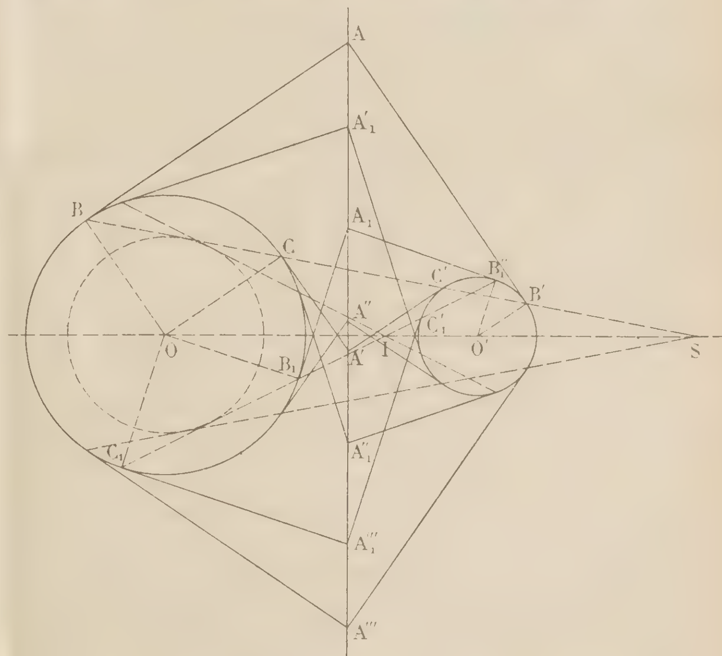
ou $\quad DO' - DO = R - R'.$

On est ainsi ramené à construire le triangle rectangle ODO' connaissant l'hypoténuse OO' et la différence des deux côtés de l'angle droit, — problème connu.

Il est bon d'observer que la relation (1) change avec la position relative des points B, O, D et D, O', B', de sorte que pour traiter complètement la question, il convient d'examiner les divers cas de figures possibles.

(C. BOURVÉAU, instituteur à Quimperlé.)

Autre solution générale. — On sait que si d'un point de l'axe radical de deux cercles on leur mène des tangentes, les points de contact sont des points anti-homologues; la droite qui les joint passe par l'un des centres d'homothétie des deux cercles. Si les centres O et O' sont dans la même région par rapport aux



deux tangentes, la droite passe par le centre d'homothétie directe; dans le cas contraire, elle passe par le centre d'homothétie inverse.

Soit donc en premier lieu A un point de l'axe radical tel que l'on puisse mener de ce point aux deux cercles deux tangentes rectangulaires AB et AB' laissant O et O' dans une même région; la droite BB' passe par le centre d'homothétie directe S. Elle rencontre le cercle de plus grand rayon O en un second point C qui sera l'homologue de B' par rapport à S; par suite OC est parallèle à O'B', c'est-à-dire perpendiculaire à OB. La corde BC est donc tangente à un cercle concentrique au cercle O, dont le rayon est égal à la moitié du côté du carré inscrit dans ce cercle. On construira donc cette corde BC en menant par S une tangente à ce cercle; elle détermine le point B; le point A est à l'intersec-

tion de l'axe radical et de la tangente en B. D'ailleurs, en considérant le second couple de points anti-homologues C et C', on trouve une seconde solution A'. Le problème admet donc 0 ou 4 solutions.

Pour qu'il en admette réellement quatre, il faut que le point S soit extérieur au cercle concentrique au cercle O. Désignant par R et R' $(R > R')$ les rayons des deux cercles, par d la distance de leurs centres, on trouve sans difficulté que $SO = \frac{dR}{R - R'}$; la condition cherchée est donc

$$\frac{dR}{R - R'} > \frac{R}{\sqrt{2}},$$

ou bien

$$d > \frac{R - R'}{\sqrt{2}}.$$

Cette condition est toujours remplie tant que les deux cercles ne sont pas intérieurs l'un à l'autre; elle peut ne pas l'être quand ils occupent cette position. Quand elle est remplie, on trouve les quatre points A, A', A'', A'''.

Considérons en second lieu un point A_1 de l'axe radical d'où on peut mener aux deux cercles des tangentes rectangulaires telles que O et O' ne soient pas dans une même région par rapport à elles. La droite qui joint les points de contact B_1 et B'_1 passera par le centre d'homothétie inverse I; elle rencontre le cercle O en un second point, C_1; on démontrera comme précédemment que B_1OC_1 est un angle droit, de telle sorte que B_1C_1 sera une tangente menée du point I à la même circonférence que précédemment.

La condition de possibilité sera

$$IO > \frac{R}{\sqrt{2}},$$

ou (ainsi qu'on le trouve aisément)

$$\frac{dR}{R + R'} > \frac{R}{\sqrt{2}},$$

ou

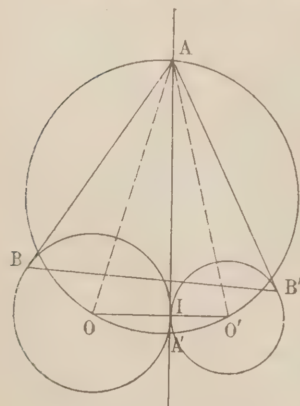
$$d > \frac{R + R'}{\sqrt{2}}.$$

Cette condition est toujours remplie tant que les deux cercles ne sont pas sécants $(d \geqslant R + R')$; elle peut ne pas l'être dès qu'ils occupent cette position : si elle est remplie, on trouve les quatre points A_1, A'_1, A''_1, A'''_1.

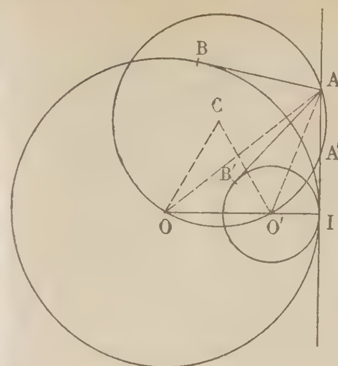
[Ont résolu la même question : MM. Bouzy; H. Carpentier, lycée de Charleville; R. Coural, collège de Narbonne; E. Foucart; G. H. O. D.; L. Hubert; E. Léotard, lycée de Dijon; G. Marquet; E. Ménissier; Remondet; R. Ruchon; J. Sire; J. Trouillé; Venet; Roure.]

4456. — *Avec les données du problème précédent, trouver sur l'axe radical un point* A *tel que le triangle* ABB' *soit équilatéral.*

On peut traiter ce nouveau problème en suivant une marche analogue à celle qui a été suivie dans le problème précédent (N° 4455).



1° *Cercles tangents extérieurement.* — Le triangle ABB' devant être équilatéral, l'angle BAB' est de 60°, et par suite, l'angle OAO' est de 30° ou de 180° — 30° suivant que les points O et O' sont tous deux intérieurs ou tous deux extérieurs à l'angle BAB'. Le point A se trouve donc ici à l'intersection de l'axe radical avec les segments capables de 30° et 180° — 30° décrits sur OO' comme base; ces segments forment une seule circonférence.



Le problème, toujours possible, admet généralement quatre solutions symétriques deux à deux par rapport à I.

2° *Cercles tangents intérieurement.* — La solution reste la même que dans le cas précédent, seulement les points A et A' n'existent que si l'on a

$$DI < OC.$$

Le triangle isocèle OCO' ayant l'angle en C de 60° est équilatéral; donc

$$OC = OO' = R - R'.$$

D'ailleurs, on a vu plus haut que

$$DI = \frac{R + R'}{2}.$$

La condition de possibilité devient donc

$$\frac{R + R'}{2} < R - R',$$

ou

$$R' < \frac{R}{3}.$$

Quand $R' = \frac{R}{3}$, les deux points A et A' coïncident.

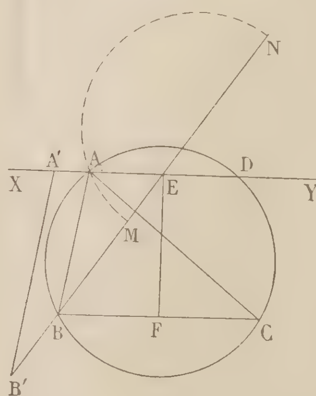
(G. FOUCRY.)

Remarque. — On pourrait donner de ce problème une solution générale analogue à la dernière du n° 4455.

[Ont résolu la même question : MM. R. Coural, collège de Narbonne; H. Carpentier, lycée de Charleville; E. Foucart; G. H. D. O.; M. Oger, école normale de Poitiers; R. Ruchon; J. Sire; J. Trouillé; Venet; Roure.]

4474. — *Construire un triangle connaissant le côté a, la hauteur h relative à ce côté et sachant que l'angle* B *est le double de l'angle* C.

Première solution. — La base BC étant connue, tout revient à déterminer le sommet A.



Un premier lieu de A est la parallèle XY à BC menée à la distance h de BC.

Traçons le cercle circonscrit au triangle, et soit D son second point de rencontre avec XY. La condition $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ revient à

$$\widehat{ADC} = 2\widehat{AB},$$

ou, en retranchant de part et d'autre les arcs égaux DC, AB,

$$\widehat{AD} = \widehat{AB}.$$

Les cordes AD et AB sont donc égales. Or on connaît le milieu E de la corde AD, situé à l'intersection de XY avec la perpendiculaire à BC élevée en son milieu F. Comme $AB = 2AE$, on voit qu'un second lieu de A est fourni par la circonférence lieu des points tels que le rapport de leurs distances aux points B et E soit égal à 2; cette circonférence admet pour diamètre MN, M et N étant deux points tels que $3ME = BE = EN$.

Le point A devant toujours se trouver sur la demi-droite XE

d'après la condition $\widehat{B} = 2\widehat{C}$, le problème ne comporte visiblement qu'une seule solution ; il est d'ailleurs toujours possible, puisque le point E est intérieur à la circonférence de diamètre MN.

(J. MARCHAND, à Paris.)

On peut aussi obtenir le point A en menant de B une parallèle à la droite A'B' qui joint un point quelconque A' de XY au point B' de BE tel que $A'B' = 2A'E$.

(A. AMBLARD.)

Deuxième solution. — Joignons le point C au point D, déjà défini plus haut. On a

$$CD = AB = AD\,;$$

le triangle ACD est donc isocèle. Menons les médianes CE et AK ; elles sont égales et se coupent en un point G qui les divise dans le rapport de 2 à 1. La médiane EC étant connue, il en est de même de G, et le point A est à l'intersection de la droite XY avec l'arc de cercle de centre G et de rayon GC.

(BURGAT, école normale d'Albertville.)

Troisième solution. — Le prolongement AT du côté BA fait avec AY, parallèle à BC, un angle égal à l'angle B ; la droite AC', symétrique du côté AC par rapport à XY, fait avec AY un angle égal à l'angle CAI, égal lui-même à l'angle C.

L'hypothèse $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ se ramène donc à $\widehat{TAI} = 2\widehat{C'AI}$, ce qui montre que AC' est bissectrice de l'angle TAY, et par suite le point C' est équidistant des droites AB et XY. On obtiendra donc le côté AB en menant de B une tangente au cercle C' tangent à XY et dont le centre C' est symétrique du point connu C par rapport à XY.

La seconde tangente BT' fournit le triangle BA'C pour lequel on a

$$\widehat{T'A'I} = 2\widehat{C'A'I},$$

ou, comme $\widehat{T'A'I} = 180° - B$ et $\widehat{C'A'I} = 180° - C$,

$$2C - B = 180°.$$

(G. SCHOONHEERE, école professionnelle de Vierzon.)

Quatrième solution. — Décrivons le cercle O de diamètre BC ; ce cercle rencontre le côté AC en un point M tel que

$$\widehat{MOB} = 2\widehat{MCB} = \widehat{ABC}.$$

Par suite les droites BA et OM déterminent avec BO un triangle isocèle BOE ; la hauteur DE de ce triangle coupe XY en un point I, milieu du segment intercepté par les prolongements des côtés de l'angle OMC ; dès lors la droite IM passe par le milieu N de OC.

Pour obtenir le point M, il suffit donc d'élever au milieu D de BO la perpendiculaire qui rencontre XY au point I, puis de joindre I au milieu N de OC par une droite qui coupe en M le cercle connu O. En traçant ensuite la droite CM, sa rencontre avec XY donne le sommet A.

(VIAL, à Dompierre.)

Cinquième solution. — Menons la hauteur AH ; prolongeons CH d'une longueur égale HC' et traçons AC'.

Le triangle ABC' est isocèle, puisque l'angle C' est égal à l'angle C, moitié de l'angle ABC extérieur à ce triangle ; par suite les médianes AD, C'E sont égales et se coupent mutuellement en G, au tiers de leur longueur à partir des pieds E ou D. D'ailleurs D étant le milieu de BC', on a

$$2\overline{HD} = \overline{HC'} + \overline{HB} = \overline{CH} + \overline{HB} = \overline{CB} \quad \text{ou } a.$$

De là cette construction : on construit le triangle rectangle AHD ayant pour côtés de l'angle droit $AH = h$ et $HD = \frac{a}{2}$; sur l'hypoténuse AD, on prend le point G tel que $GD = \frac{1}{3}AD$; de G comme centre avec GA pour rayon on décrit un arc de cercle coupant le prolongement de HD en C'. Il ne reste plus qu'à prendre les symétriques B et C de C' par rapport à D et H.

(E. VAUNAC, instituteur à Rouffignac.)

[Ont résolu la même question : MM. L. Bois ; A. Brodbeck ; C. H. G. B. ; H. Charpentier ; B. Carrière ; A. Doué ; J. Fiton ; E. Fourmon ; E. Garry ; G. H. D. O. ; H. Janois ; E. Kornis ; J.-M. Lagarde ; R. Lavallée ; E. Le Doaré ; E. Léotard ; Roubieu ; Sasvari Géza ; G. Tastet ; P. Tribier.]

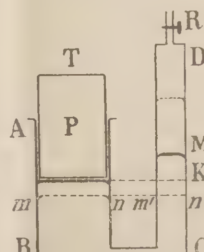
PHYSIQUE

4486. — *Un cylindre AB, d'une section intérieure de 40cq, est muni d'un piston P mobile sans frottement, et communique, par sa partie inférieure, avec un tube de verre CD dont la section intérieure est de 5cq. Ce tube porte à la partie supérieure un robinet R actuellement ouvert. La partie inférieure du cylindre, ainsi que celle du tube et le canal de communication, renferment du mercure dont le niveau, dans le tube CD, s'arrête en un point M situé à une distance MD = 50cm de l'extrémité D.*

On ferme le robinet R et on demande quel poids on doit mettre sur la tête T du piston pour réduire à moitié le volume de l'air emprisonné dans la partie supérieure du tube CD. On calculera le déplacement du piston et on supposera la température de 0° et la pression atmosphérique de 730mm de mercure.

(*Bacc. lettres-math., Clermont, juillet 1898.*)

La section intérieure du tube de verre étant 8 fois plus petite que celle du cylindre, le poids de la colonne de mercure MK est égal à $\frac{P}{8}$, P désignant le poids du piston. Quand on a placé sur la tête du piston P le poids x, le mercure s'élève dans le tube de verre de 25^{cm} ; il s'abaisse donc dans le cylindre de $\frac{25}{8} = 3^{cm},125$.



Les pressions par centimètre carré dans les deux branches, sur le plan horizontal qui passe par mn, doivent être égales entre elles.

La pression par centimètre carré de la tranche $m'n'$ est égale à

$$73 \times 2 + 25 + 3,125 + \frac{P}{8 \times 5},$$

ou, exprimée en poids, à

$$174,125 \times 13,6 + \frac{P}{40} = 2368^{gr},10 + \frac{P}{40}.$$

La pression par centimètre carré de la tranche mn est égale à

$$\frac{x+P}{40} + 73 \times 13,6 = \frac{x}{40} + \frac{P}{40} + 992^{gr},8.$$

On doit donc avoir

$$\frac{x}{40} + \frac{P}{40} + 992,8 = 2368,10 + \frac{P}{40},$$

d'où $$\frac{x}{40} = 1375^{gr},30$$

et $$x = 55^{kg},012.$$

(R. BELLENCOURT.)

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil ; Audiffret ; J. Billionnet ; H. Carpentier ; Ecoffard ; E. Framboise ; Filon ; M. Gaillot ; R. Huë ; Javelot ; J. Le Bihan ; A. Lescure ; Lorcerie ; Méline ; Michel ; M. Oger ; Pouzet ; Sallin ; Simonard ; A. Texonnière ; P. Tribier ; E. Vaunac ; Venet ; Voilaire.]

4487. — *Une lentille biconvexe dont les deux faces ont* 30^{cm} *de rayon de courbure est placée à* 20^{cm} *d'un écran. Si on lui accole une lentille plan-convexe de* 50^{cm} *de rayon de courbure, les objets placés à l'infini sont vus nettement sur l'écran. On demande quel est l'indice de réfraction de la première lentille, l'indice de la seconde étant* $\frac{3}{2}$.

(*Bacc. lettres-math. et lettres-sciences, Besançon, juillet 1898.*)

La distance focale principale f d'une lentille est donnée par la formule

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

dans laquelle n désigne l'indice de réfraction, R et R' les rayons de courbure.

En représentant par x l'indice de réfraction de la lentille biconvexe, et en remarquant que $R = R'$, cette formule devient

$$\frac{1}{f} = (x-1)\frac{2}{R} = \frac{x-1}{15}.$$

On a de même pour la lentille plan-convexe, dont $R' = \infty$,

$$\frac{1}{f'} = \left(\frac{3}{2} - 1\right)\frac{1}{R} = \frac{1}{100}.$$

La lentille plan-convexe a pour effet de faire converger davantage les rayons émanés de la lentille biconvexe. On peut donc assimiler les deux lentilles à une lentille convergente, de distance focale F, telle que les rayons issus de l'objet lumineux placé à l'infini viennent converger à son foyer; on aurait alors

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'}.$$

En remplaçant $\frac{1}{f}$ et $\frac{1}{f'}$ par leurs valeurs, il vient

$$\frac{1}{20} = \frac{x-1}{15} + \frac{1}{100},$$

d'où l'on tire $$x = \frac{8}{5}.$$

(GERNEZ-PFANMATTER.)

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil ; Aulagnier ; L. Barberot ; E. Bergeret ; Broc ; Ecoffard ; P. Girard ; R. Henry ; A. Lescure ; Lorcerie ; L. Michel ; M. Oger ; Remondet ; E. Rousset ; Sallin ; E. Schultz ; Schoonheere ; P. Tribier ; E. Vaunac ; Voilaire.]

QUESTIONS PROPOSÉES

4498. — Trouver les trois plus petits nombres entiers consécutifs tels que la somme de leurs cubes soit divisible par 10^m, m étant un nombre entier quelconque.

(G. BRICCHI.)

4499. — Décomposer $3x^4 + y^4$ en une somme de trois carrés.

4500. — Résoudre l'équation $x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$ sachant que la somme des coefficients est égale à (-768) et que l'on a en outre :

$$C + 3B = 0, \qquad E = AD, \qquad C = AB, \qquad B^2 - AC = 2B - 3E - 11A.$$

(LUIZ HÉMOIS.)

4501. — Deux cercles O et O' se coupent en A et B. Par A on mène les sécantes ACD et AEF, qui rencontrent respectivement le cercle O en C, E et le cercle O' en D, F.

1° Démontrer que

$$\frac{BE}{EC} = \frac{BF}{FD},$$

et déduire de là le théorème de Ménélaüs.

2° Lieu du point M de EF tel que $\frac{ME}{MF} = m$.

(St. FEINTUCH, collège Chaptal.)

4502. — Si dans un triangle, $B - C = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\frac{2}{a^2} = \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(b-c)^2};$$

le démontrer géométriquement.

(G. DELAHAYE, à Roye.)

4503. — Lorsque sur une circonférence les points C et D sont conjugués harmoniques par rapport aux points A et B :

1° La moitié de la droite AB est moyenne proportionnelle entre les distances de son milieu O aux deux points conjugués C et D, et réciproquement ;

2° On a $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$, et réciproquement.

(J. SIRE, à Belverne.)

4504. — Démontrer que

$$\sin x > \frac{x}{12}\left(4 - \frac{x^2}{9}\right)\left(3 - \frac{x^2}{9}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9}\right) \qquad \text{si} \quad x < \frac{\pi}{6}.$$

4505. — Sur le circuit d'une pile est intercalé un galvanomètre dont la résistance est 10^{ω}. On shunte ce galvanomètre par une résistance de 2^{ω}. On demande quelle doit être la résistance qu'il faut introduire dans le circuit principal pour que le courant y garde la même valeur que lorsque le galvanomètre était seul interposé.

(*Bacc. lettres-sciences, Alger, juillet 1898.*)

4506. — Une solution saline de densité 1,32 marque 35° à un aréomètre de Baumé. Quel poids d'eau faut-il ajouter à 100^{gr} de la dissolution pour qu'elle marque 25°, en supposant nulle la contraction du mélange?

(*Bacc. lettres-math., Rennes, juillet 1898.*)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

23e Année. — N° 8. JOURNAL Paris, le 15 Janvier 1899.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

VARIATIONS DE LA FONCTION

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'},$$

par M. **J. Girod**, professeur au Lycée de Versailles (*Fin.*)

Troisième cas : y prend toutes les valeurs non comprises entre deux limites y' et y''. ($y' < y''$).

On construit les deux points A et B qui ont pour coordonnées x', y' et x'', y'', et par ces points on mène les parallèles à OX. La courbe n'a aucun point dans la région comprise entre ces deux parallèles, et ne rencontre l'une d'elles qu'au point A, l'autre au point B. On trace l'asymptote Δ parallèle à OX, qui a pour équation $y = \frac{a}{a'}$, et on vérifie qu'elle n'est pas située entre AA′ et BB′, pour contrôler l'exactitude des calculs.

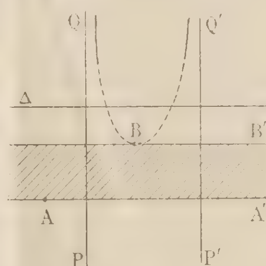
Comme dans le premier cas, le dénominateur doit avoir ses racines réelles, puisque cette condition fait partie de l'hypothèse et aussi parce que y peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut. Désignons par x_1 et x_2 ces racines.

Nous allons démontrer qu'une seule est toujours comprise entre les abscisses x' et x'' des points A et B.

En effet, s'il ne s'en trouvait aucune entre x' et x'', on pourrait joindre A et B par un arc continu, ce qui est impossible, puisque la courbe ne pénètre pas entre les droites parallèles AA′ et BB′.

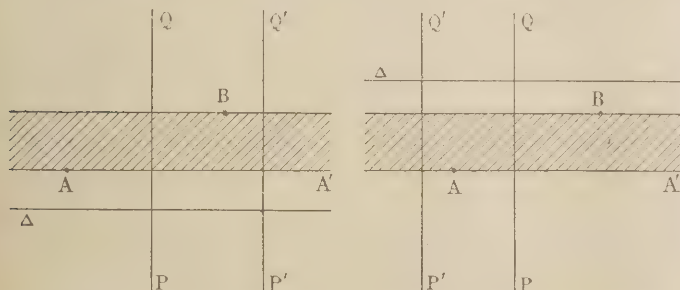
Si les deux racines x_1 et x_2 étaient comprises entre x' et x'', on pourrait tracer deux asymptotes PQ, P′Q′ parallèles à OY, et n'enfermant entre elles ni le point A, ni le point B. La branche comprise entre ces deux asymptotes, ne pouvant ni traverser ni même toucher la région située entre AA′ et BB′, resterait d'un côté de cette région. Supposons par exemple qu'elle soit placée au-dessous de AA′. Il existerait alors un point K, d'ordonnée supérieure à celles de tous les autres points de cette branche, et si on coupait la courbe par une sécante variable dont l'ordonnée croisse jusqu'à l'ordonnée du point K, on obtiendrait deux points d'intersection qui tendraient à se confondre avec le point K, ce qui est impossible puisque les droites AA′ et BB′ sont les seules qui jouissent de la propriété de couper la courbe en deux points confondus en A ou en B. Donc si on désigne par PQ celle des deux asymptotes parallèles à OY dont l'abscisse est comprise entre x' et x'', l'autre asymptote P′Q′ sera en dehors des parallèles à OY menées par A et B.

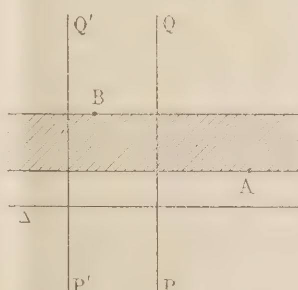
On peut déterminer *a priori* de quel côté sera P′Q′, si on a préalablement tracé l'asymptote Δ, conformément aux indications de ce plan. Montrons que PQ et P′Q′ devront enfermer celui des deux points A et B qui est le plus éloigné de l'asymptote Δ. Supposons, pour fixer les idées, que la droite Δ soit située au-dessus de B. Si PQ et P′Q′ comprenaient le point B, la branche de courbe qui passe par B, et qui s'élève à l'infini au-dessus de B entre les deux asymptotes, sans solution de continuité, couperait deux fois l'asymptote Δ, ce qui est impossible.

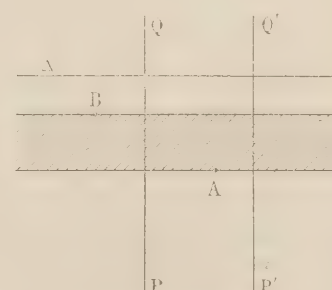


Donc lorsqu'on a placé par rapport aux axes de coordonnées les points A et B, ainsi que l'asymptote Δ, on peut fixer d'avance les régions où se trouvent les asymptotes parallèles à OY, ce qui fournit une vérification des calculs.

Quatre dispositions sont possibles, suivant que l'abscisse x' du







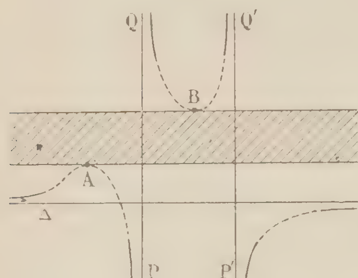
point A est inférieure ou supérieure à l'abscisse x'' du point B et suivant que la droite Δ est au-dessous de AA′ ou au-dessus de BB′.

Dans ces quatre figures, les asymptotes PQ, P′Q′ ont été placées conformément aux règles précédentes.

Considérons la première figure.

La courbe se compose de trois branches distinctes, séparées par les asymptotes PQ et P′Q′. La branche située à gauche de PQ, devant passer par le point A situé au-dessous de la région ombrée, est tout entière au-dessous de AA′. Cette branche coupe nécessairement l'asymptote Δ, puisqu'elle contient le point A situé au-dessus de cette asymptote, et que l'ordonnée d'un point mobile de cette branche prend des valeurs négatives

aussi grandes que l'on veut lorsque ce point se rapproche de l'asymptote PQ. Donc la portion de la courbe qui s'étend depuis le point A jusqu'à l'infini du côté des x négatifs reste au-dessus de la droite Δ. La branche comprise entre PQ et P'Q' est évidemment placée au-dessus du point B. Quant à la troisième branche, elle est nécessairement au-dessous de la région ombrée, puisque les deux branches qui admettent P'Q' comme asymptote sont dirigées dans les deux sens opposés de cette droite ; de plus elle demeure au-dessous de l'asymtote Δ, puisque déjà la première branche coupe Δ. On a donc l'esquisse ci-contre.



Il n'existe pas d'autres changements dans le sens de la variation de y que ceux qui se produisent lorsque x traverse l'une des valeurs x' et x'', puisque si on effectuait un tracé dans l'hypothèse contraire, une parallèle à OX pourrait couper la courbe en trois points. Donc l'ordonnée y' du point A est un maximum relativement à la branche de gauche, l'ordonnée y'' du point B est un minimum relativement à la branche médiane.

D'une manière identique dans les autres cas on déterminerait *a priori* la disposition des trois parties séparées de la courbe.

Lorsque, dans un exemple numérique, le dénominateur de la fraction a ses racines réelles et distinctes, cet exemple se range dans le premier ou dans le troisième cas. Nous avons vu comment on peut opérer la distinction en considérant les racines du numérateur : la condition nécessaire et suffisante qui caractérise le premier cas est que les racines de l'un des trinomes séparent celles de l'autre. Si les racines du numérateur sont imaginaires, ou si elles ne sont pas séparées par les racines réelles du dénominateur, l'exemple considéré appartient au troisième cas. La simplicité de ce procédé se perd lorsque les deux termes de la fraction ont leurs racines réelles incommensurables, puisqu'alors la comparaison directe n'est pas aisée généralement, et qu'il faut avoir recours au signe du résultant(*) ce qui revient en définitive à effectuer le calcul du discriminant Δ qu'on voulait éviter.

Voici une remarque, communiquée par M. Kéraval, qu'il convient alors d'appliquer.

Dans le premier cas, le point de rencontre de la courbe avec l'asymptote Δ parallèle à OX est situé entre les deux asymptotes parallèles à OY, dans le troisième cas il se trouve en dehors de la région comprise entre ces droites. Ce résultat est évident sur la figure, puisque dans le premier cas la branche médiane coupe Δ, et dans le troisième cas elle ne peut pas rencontrer cette asymptote. D'ailleurs ce fait est une conséquence particulière de cette propriété générale qu'une sécante quelconque parallèle à OX coupe une courbe du premier genre en deux points dont un seul est toujours situé entre les asymptotes parallèles à OY ; et que, s'il s'agit d'une courbe du troisième genre, les points de rencontre, lorsqu'ils existent, se trouvent en nombre pair, 0 ou 2, entre ces deux mêmes asymptotes. Pour retrouver la règle précédente, il suffit de considérer l'asymptote Δ comme une sécante rencontrant la courbe en un point rejeté à l'infini.

L'abscisse du point unique à distance finie est la racine de l'équation $(ab' - ba')x + ac' - ca' = 0$, que l'on obtient en remplaçant y par $\dfrac{a}{a'}$ dans l'équation

$$(a'y - a)x^2 + (b'y - b)x + c'y - c = 0.$$

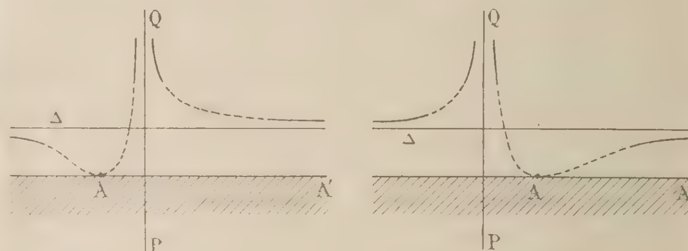
On substitue cette racine dans le trinome $a'x^2 + b'x + c'$, pour la comparer aux racines du dénominateur. On pourrait s'intéresser, en effectuant ce calcul avec les lettres, à retrouver la propriété caractéristique du résultant, et constater ainsi que la méthode revient à opérer plus commodément un calcul que l'on voulait éviter.

Quatrième cas : y prend toutes les valeurs supérieures ou inférieures à une limite y_1.

On construit le point A qui a pour ordonnée y_1 et pour abscisse l'unique valeur de x correspondante, et par ce point on mène la parallèle AA' à OX. Supposons, pour fixer les idées, que la condition obtenue pour y soit $y \geqslant y_1$. Tous les points de la courbe, sauf le point A, se trouveront au-dessus de AA'.

On construit de même l'asymptote Δ parallèle à OX, qui doit aussi se placer dans cette même région. Puisqu'on a par hypothèse $b'^2 - 4a'c' = 0$, il existe une asymptote PQ, parallèle à OY, dont l'abscisse est la racine double du dénominateur, mais les deux branches distinctes séparées par cette asymptote sont dirigées dans le même sens, du côté des y positifs, puisque la courbe est tout entière dans cette région par rapport à AA'. D'ailleurs, le dénominateur ne change pas de signe lorsque x traverse la racine, puisque le trinome $a'x^2 + b'x + c'$ garde le signe de son premier coefficient.

Deux dispositions seulement sont possibles :



La demi-branche qui part de A et qui se rapproche de l'asymptote PQ rencontre nécessairement l'asymptote Δ; donc l'autre demi-branche demeure au-dessous de Δ, et la deuxième branche, située de l'autre côté de l'asymptote PQ, reste audessus de l'asymptote Δ. Les deux esquisses précédentes sont donc les seules possibles. Comme dans tous les cas précédents, on peut conclure qu'il n'existe pas d'autres changements dans le sens de la variation de y que celui qui a lieu lorsque le point mobile passe au point A, d'ordonnée minimum.

En retournant la figure autour de AA', on aurait les deux dispositions qui correspondent à la condition $y \leqslant y_1$.

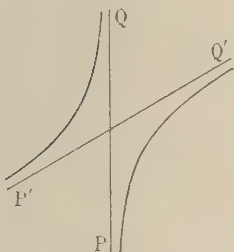
Enfin, terminons par l'hypothèse $a' = 0$, que nous avons écartée. Puisque la fraction $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{b'x + c'}$ peut prendre des valeurs positives et négatives aussi grandes que l'on veut lorsque x se rapproche de la racine du dénominateur, ce cas se range dans le premier ou le troisième de la théorie générale. Construisons la droite PQ, qui a pour abscisse la racine x_1 du dénominateur ; cette droite ne contient aucun point de la courbe, et deux branches distinctes, situées de part et d'autre de PQ, sont asymptotes à cette droite, l'une du côté des y positifs, l'autre du côté des y négatifs.

Supposons que y puisse prendre deux fois toutes les valeurs (1er cas) et, pour fixer les idées, que la branche de gauche soit asymptote à PQ du côté des y positifs, et celle de droite du côté

(*) Voir *Algèbre* de Cor et Riemann, page 132.

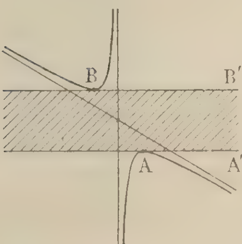
des y négatifs. Nous remarquons que y prend des valeurs qui, abstraction faite du signe, croissent indéfiniment lorsque x croît au delà de toute limite, dans les deux sens de OX. Or, pour un point de la branche de gauche, la valeur algébrique de y est constamment croissante en même temps que celle de x, car s'il existait un certain point K de cette branche d'ordonnée inférieure à celle de tous les autres, la parallèle à OX menée par K couperait la courbe en deux points *confondus* en K, ce qui est impossible.

Même raisonnement pour la branche de droite. La disposition nécessaire est donc celle de l'esquisse ci-dessous.



Supposons maintenant qu'on ait trouvé pour y les conditions $y < y'$ ou $y > y''$ (3e cas). On construit, comme dans le troisième cas, les points A et B, qui ont pour coordonnées x', y' et x'', y'' ; par ces points on mène les parallèles AA' et BB' à OX. En supposant toujours que la branche de gauche soit asymptote à PQ du côté des y positifs, on a la disposition nécessaire figurée dans l'esquisse ci-contre.

L'ordonnée y' du point A est un maximum, relativement à la branche de droite, l'ordonnée y'' du point B est un minimum relativement à la branche de gauche.



On montre facilement que, si on effectue la division algébrique, on peut mettre y sous la forme

$$y = mx + n + \frac{B}{b'x + c'}$$

et on conclut que la droite qui a pour équation $Y = mx + n$ est une deuxième asymptote, ne rencontrant la courbe en aucun point, de telle sorte que les deux branches, déjà séparées par l'asymptote PQ, le sont encore par cette deuxième asymptote.

Nous avons figuré cette deuxième asymptote P'Q', qu'il est indispensable de déterminer pour obtenir un tracé plus exact de la courbe.

Avant tout calcul, on peut prévoir auquel de ces deux cas se rapporte un exemple numérique ; dans le premier cas une sécante quelconque parallèle à OX coupe la courbe en deux points situés de part et d'autre de PQ ; dans le troisième cas, les points de rencontre, lorsqu'ils existent, sont d'un même côté de PQ. Donc une fonction numérique sera représentée par une courbe du premier genre si la racine du dénominateur sépare celles du numérateur, par une courbe du troisième genre dans toutes les hypothèses contraires.

CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (1898)

PHYSIQUE (Paris).

Solution par M. **E. Pouvin**, élève du lycée Hoche, Lauréat du concours (1er prix).

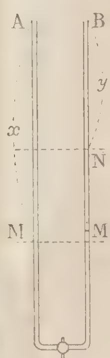
4469. — *L'expérience montre que des colonnes gazeuses superposées par ordre de densité dans des tubes fins se mêlent difficilement et se comportent tout d'abord comme des colonnes liquides. Deux tubes verticaux* A *et* B, *très étroits, de même longueur, s'ouvrant par le haut dans l'atmosphère, peuvent être mis en communication par leur partie inférieure au moyen d'un robinet.*

La communication étant fermée, on remplit A *d'un gaz dont on veut avoir la densité, et* B *de gaz carbonique, puis on ouvre la communication; une partie du gaz carbonique passe de* B *en* A, *chassant devant lui le gaz du tube* A, *dont une partie s'échappe dans l'atmosphère, et faisant place en* B *à une colonne d'air. L'équilibre établi, on ferme la communication, et il ne reste plus qu'à mesurer les colonnes. Mais celles-ci sont invisibles. On les détermine par le procédé suivant : on ferme les extrémités supérieures des tubes, et, par une manipulation qu'il est inutile de décrire, on absorbe dans chacun des tubes le gaz carbonique qu'il contient et on ramène le gaz restant à la pression atmosphérique. Le premier gaz occupe alors en* A *une hauteur* h, *et l'air, en* B, *une hauteur* h'.

La densité cherchée étant représentée par d, *celle de l'air par* d' *et celle du gaz carbonique par* δ, *on demande d'établir l'équation d'équilibre et d'en tirer la valeur de* d.

Application : $h = 105^{cm},8$, $h' = 112^{cm},4$, $d' = 1$, $\delta = 1,529$.

Soient deux tubes étroits reliés entre eux, contenant : l'un, A, le gaz de densité inconnue; l'autre, B, du gaz carbonique. Puisque les gaz se comportent d'abord comme des liquides, en établissant la communication il se produira un mouvement de gaz jusqu'à l'équilibre.



Soient M le niveau du gaz carbonique dans le tube A lorsque l'équilibre est établi, N son niveau dans le tube B, x la hauteur de la colonne du gaz de densité inconnue dans le tube A, y la hauteur de la colonne d'air dans le tube B. Appliquons le principe des fluides en équilibre : *Des aires égales prises dans un même plan horizontal supportent des pressions égales.*

Prenons des aires égales à l'unité dans chacun des deux tubes dans le plan horizontal MM'. La pression atmosphérique s'exerçant à l'extrémité de chaque tube, il suffit d'écrire que les pressions exercées par les colonnes gazeuses sur l'aire 1 dans chaque tube sont égales. Dans le tube A, l'aire 1 supporte le poids de la colonne de gaz de hauteur x, c'est-à-dire, d'après l'équation de Gay-Lussac, $\frac{1 \times x \times d \times H}{(1 + \alpha t)76}$, d désignant la densité inconnue, H la pression atmosphérique, t la température au moment de l'expérience. Dans le tube B, l'aire 1 supporte le poids d'une colonne d'air de hauteur y et le poids d'une colonne de gaz carbonique de hauteur $x - y$, soit

$$\frac{y \times d' \times H}{(1 + \alpha t)76} + \frac{(x - y)\delta \times H}{(1 + \alpha t)76}.$$

L'équation d'équilibre est

$$\frac{xdH}{(1 + \alpha t)76} = \frac{yd'H}{(1 + \alpha t)76} + \frac{(x - y)\delta H}{(1 + \alpha t)76},$$

d'où

$$xd = yd' + (x - y)\delta.$$

Il reste à calculer x et y.

Lorsque l'équilibre est établi, la masse de gaz de densité inconnue occupe une hauteur x sous la pression H; à la fin de l'expérience, elle occupe une hauteur h sous une pression qui peut être regardée comme égale à H, l'expérience ne durant que peu de temps. La température peut être aussi supposée constante : donc $x = h$. De même, la masse d'air occupe d'abord une hauteur y, puis une hauteur h' sous la même pression et à la même

température; donc

$$y = h'.$$

L'équation d'équilibre devient alors

$$hd = h'd' + (h - h')\delta,$$

d'où

$$d = \frac{h'd' + (h - h')\delta}{h}.$$

Application. — $d = \dfrac{112{,}4 - (112{,}4 - 105{,}8)1{,}529}{105{,}8} = 0{,}967.$

C'est la densité de l'oxyde de carbone.

[Ont résolu la même question : M[lle] M. Pont ; L. Ségala ; MM. Arcizet ; Ardin-Delteil ; L. Barberot ; Baudot ; F. Bellec ; F. Breynaert ; Chalvin ; P. Delolme ; E. Gernez ; A. Girondé ; R. Henry ; Hinstin ; L. Hubert ; H. Janois ; H. Lefèvre ; M. Mathieu ; M. Oger ; L. Patin ; G. Schoonheere ; M. Teulié ; Thomas.]

ARITHMÉTIQUE

4471. — *m étant un nombre composé de la forme $\alpha\beta\gamma$, on trouve la racine m^e d'un nombre à une unité près en extrayant à une unité près la racine d'indice α du nombre donné, puis à une unité près la racine d'indice β de cette première racine, et ainsi de suite.*

Soit à extraire à une unité près la racine m^e de A. Désignons par a la racine d'indice α de A, par b la racine d'indice β de a, par c la racine d'indice γ de b, toutes ces racines étant évaluées à une unité près. On a par définition

$$a^\alpha \leqslant A < (a+1)^\alpha,$$

$$b^\beta \leqslant a < (b+1)^\beta,$$

$$c^\gamma \leqslant b < (c+1)^\gamma.$$

Considérons les inégalités de gauche :

$$a^\alpha \leqslant A, \qquad (1)$$

$$b^\beta \leqslant a, \qquad (2)$$

$$c^\gamma \leqslant b; \qquad (3)$$

élevons (3) à la puissance β ; il vient,

$$c^{\gamma\beta} \leqslant b^\beta,$$

ou, en tenant compte de (2),

$$c^{\gamma\beta} \leqslant a;$$

élevant cette dernière inégalité à la puissance α, on obtient

$$c^{\gamma\beta\alpha} \leqslant a^\alpha,$$

ou, en tenant compte de (1),

$$c^{\alpha\beta\gamma} \leqslant A. \qquad (4)$$

En considérant les inégalités de droite, on peut écrire

$$A < (a+1)^\alpha, \qquad (1')$$

$$a + 1 \leqslant (b+1)^\beta, \qquad (2')$$

$$b + 1 \leqslant (c+1)^\gamma; \qquad (3')$$

on en déduit comme plus haut

$$A < (c+1)^{\alpha\beta\gamma}. \qquad (4')$$

Des inégalités (4) et (4'), il résulte que c est bien la racine m^e de A à une unité près.

(Lucien Écoffard, école primaire supérieure de Dôle.)

[Ont résolu la même question : M[lle] Croizet ; MM. C. Billionnet ; M. Bily, école normale de S[t]-Brieuc ; C. Bourveau ; A. Brodbeck ; Burgat, école normale d'Albertville ; R. Van Cauwenberghe ; J. Chalvin ; J. Coupat ; L. Famechon, école normale d'Amiens ; J. Fiton ; G. Foucry, école normale de Châlons-sur-Marne ; G. H. D. O. ; E. Gernez-Pfanmatter ; R. Henry ; L. Hubert ; H. Janois ; P. Letourneur ; P. Millevoye, lycée de Lyon ; Ollivier ; L. Robert.]

4480. — *Quel que soit n, l'expression*

$$6^{10n+1} + 5^{11n-1}$$

est divisible par 31.

Première solution. — On peut, sans changer les conditions de divisibilité, multiplier l'expression par le nombre 5^{10n+1}, premier avec 31. La nouvelle expression s'écrit alors successivement

$$\begin{aligned} 6^{10n+1}.5^{10n+1} &+ 5^{11n-1}.5^{10n+1} \\ &= 30^{10n+1} + 5^{21n} = (m.31 - 1)^{10n+1} + (5^3)^{7n} \\ &= m.31 - 1 + 125^{7n} \\ &= m.31 - 1 + (m.31 + 1)^{7n} \\ &= m.31 - 1 + m.31 + 1 = m.31. \end{aligned}$$

(E. Audiffret.)

Seconde solution. — Formons le tableau des restes des carrés et des cubes de 6 et 5 par rapport au diviseur 31. On a

$6 = m.31 + 6$	$5 = m.31 + 5$
$6^2 = m.31 + 5$	$5^2 = m.31 - 6$
$6^3 = m.31 - 1$	$5^3 = m.31 + 1$

D'après ces résultats, on peut écrire

$$6^{10n+1} = (6^3)^{2n}(6^2)^{2n}6 = (m.31 + 1)(m.31 + 5^{2n})6 = m.31 + 6.5^{2n};$$

$$5^{11n-1} = (5^3)^{3n}5^{2n-1} = (m.31 + 1)5^{2n-1} = m.31 + 5^{2n-1}.$$

En ajoutant membre à membre, il vient

$$\begin{aligned} 6^{10n+1} + 5^{11n-1} &= m.31 + 6\ 5^{2n} + 5^{2n-1} \\ &= m.31 + 5^{2n-1}(6.5 + 1) = m.31. \end{aligned}$$

(G. Schoonheere, école professionnelle de Vierzon.)

[Ont résolu la même question : MM. L. Barberot ; R. Bellencourt ; L. Bois ; E. Bouby ; A. Brodbeck ; L. Ecoffard ; Famechon ; J. Fiton ; G. Foucry ; A. Girondé ; R. Henry ; R. Hüe ; H. Janois ; E. Kornis ; F. Lalescu ; H. Le Bihan ; P. Le Verrier ; A. Lescure ; P. Marion ; G. Nazare ; M. Oger ; F. Ollivier ; Ph. Plisson ; E. Framboise ; Pouzet ; Eug. Rousset ; R. Ruchon ; E. de Rycker ; A. Sainte-Laguë ; J. Sire ; P. Tribier ; E. Vaunac ; J. Ménéchal.]

4490. — *Si un nombre* abc *est divisible par* 27, *il en est de même du nombre* bca.

Le nombre abc étant supposé divisible par 27, on peut écrire

$$100a + bc = m.27,$$

ou

$$bc = m.27 - 100a.$$

Multiplions chaque membre par 10 et ajoutons a de part et d'autre ; il vient

$$\begin{aligned} 10bc + a &= m'.27 - 1000a + a \\ &= m'.27 - 999a. \end{aligned}$$

Or $999 = 9 \times 111 = 9 \times 3 \times 37 = 27 \times 37$; donc le nombre $10bc + a$ ou bca est bien divisible par 27.

Cette démonstration montre que la propriété reste vraie lorsqu'on remplace le diviseur 27 par 37 ou par 999.

(Raymond Coural, à Narbonne.)

Puisque le nombre bca est divisible par 27, on peut lui appliquer la propriété énoncée ; donc les trois nombres abc, bca, cab sont toujours divisibles par 27 en même temps que l'un d'eux.

(Donnadieu, à Mézin.)

Généralisation. — Par un raisonnement identique à celui qui a été fait plus haut, on démontre facilement que si le nombre de n chiffres : $abc\ldots l$ est divisible par l'un des diviseurs du nombre $10^n - 1$, ce diviseur divise aussi le nombre $bc\ldots la$.

(G. Nuzeret, à Argenteuil.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Arcizet ; E. Bernard ; C. Billionnet ; L. Bois ; E. Bouby ; G. Boudon ; H. Carpentier ; G. Casse ; Cavaillé ; F. Clabaut ; L. Curt ; P. Delolme ; Duval ; Famechon ; J. Fiton ; G. Foucry ; L. Giboin ; A. Girondé ; M. Gondran ; R. Henry ; H. Janois ; F. Lalescu ; G. Lallier ; Ch. Lefebvre ; H. Lefèvre ; P. Le Verrier ; G. Magniny ; R. Manen ; P. Millevoye ;

Nazore ; M. Oger ; Ollivier ; J. Pémartin ; Poujol ; A. Prost ; R. Ruchon ; J. Sallaud ; F. Saraudy ; G. Schoonheere ; G. Tastet ; P. Tribier ; R. Van Cauwenberghe ; H. Varennes ; F. Verot ; Vial ; R. Bellencourt ; Lehmann ; A. Thorin ; Venet ; J. Poirier.]

ALGÈBRE

4472. — *Trouver un nombre de quatre chiffres sachant que le produit des deux premiers chiffres est égal au 4e, que leur somme est égale au 3e, et que le produit des quatre chiffres est égal à 576.*

Appelons x, y, z, u les quatre chiffres du nombre cherché. On doit avoir par hypothèse

$$xy = u, \qquad (1)$$

$$x + y = z, \qquad (2)$$

$$xyzu = 576. \qquad (3)$$

Remplaçons dans (3), xy par sa valeur (1) ; il vient

$$zu^2 = 576,$$

d'où

$$u^2 = \frac{576}{z}.$$

z étant au plus égal à 9, cette valeur du u^2 est au moins égale à

$$\frac{576}{9} = 64.$$

Les seules valeurs possibles du chiffre u sont donc 8 et 9. Comme 9 ne divise pas 64, 576 n'est pas divisible par 9^2 ; la valeur $u = 9$ ne fournit pas de valeur entière pour z. Il reste alors

$$u = 8, \qquad \text{d'où} \qquad z = 9.$$

En portant ces valeurs dans (1) et (2), on a

$$xy = 8, \qquad x + y = 9,$$

système du second degré visiblement vérifié par les solutions entières

$$x = 1, \quad y = 8 ; \quad \text{ou} \quad x = 8, \quad y = 1.$$

Les nombres qui répondent à la question sont donc 1898 et 8198, et ce sont les seuls.

(J. FITON, instituteur à Agen.)

[Ont résolu la même question : MMlles Croizet ; M. Pont ; L. Ségala : M. Turpain ; MM. A. Amblard ; G. Anastasiu ; A. Arcizet ; J. Aupy ; L. Barberot ; E. Baudot ; F. Bellec : F. Beynas ; C. Billionnet ; P. Blanc ; L. Bois ; V. Bonzom ; Borgey ; C. Bourvéau ; J. Bouvier ; A. Brodbeck ; Burgat ; H. Carpentier ; B. Carrière ; Cavaillé ; J. M. Chalvin ; G. Charpentier ; G. Chiché ; F. Clabault ; J. Coupat ; H. Damoiseau ; Delbès ; F. Deville : L. Ecoffard ; Fabia ; L. Famechon ; J. Favin ; G. Foucry ; E. Fourmon ; E. Gernez-Pfanmatter : S. Géxa ; C. Godard ; Gordien ; A. Guichon ; R. Henry ; L. Hubert ; H. Janois ; C. Labille ; F. Ladevèze ; L. Lassence ; R. Lavallée ; J. Le Bihan ; F. Le Goïc ; E. Le Maigre ; E. Léotard ; P. Letourneur ; R. Manen ; C. Marie ; P. Marion ; G. Marquet ; Méheust-Bily ; E. Méline ; P. Millevoye ; M. Oger ; F. Ollivier ; E. Paris ; L. Patin ; A. Pichon ; E. Piguet ; P. Plisson ; Ponde ; A. Popescu ; Remondet : M. Rivière ; A. Rozier ; R. Ruchon ; Saffrey ; A. Ste Laguë ; A. Sallin ; G. Schoonheere ; A. Tardieu ; G. Tastet ; M. Teulié ; R. Thomas ; G. Trannoy ; P. Tribier ; R. Van Cauwenberghe ; Vascon ; E. Vaunac ; H. Varennes ; Venet ; F. Vérot ; Vial ; J. Vignier ; M. Vimont ; L. Deschamps.]

4491. — *Vérifier l'identité*

$$(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)^2 = (ab + bc + ca)^2 + (a + b + c)^2(a^2 + b^2 + c^2).$$

Posons $a^2 + b^2 + c^2 = A$, $ab + bc + ca = B$; on en déduit

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = A + 2B.$$

L'identité à vérifier s'écrit alors

$$(A + B)^2 = B^2 + (A + 2B)A,$$

ou

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2,$$

et se transforme ainsi en une identité connue.

(Pierre MILLEVOYE, lycée de Lyon.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Arcizet ; Ed. Ardin-Delteil ; Aulagnier ; L. Barberot ; V. Barol ; F. Bellec ; E. Bernard ; F. Beynas ; C. Billionnet ; L. Bois ; Borgey ; E. Bouby ; G. Boudon ; J. Bouvier ; C. Broutin ; G. Canel ; H. Carpentier ; E. Chardiny ; G. Chiché ; F. Clabault ; R. Coural ; L. Curt ; F. Deit ; G. Delahaye : P. Delolme ; L. Deschamps ; F. Deville ; R. Dickson ; J. Fiton ; G. Foucry ; E. Framboise ; E. Gernez-Pfanmatter ; L. Giboin ; M. Gondran ; R. Henry ; P. Herrmann ; H. Janois ; Javelot ; C. Labille ; F. Lalescu ; R. Lavallée ; A. Lecontour ; C. Lefebvre ; P. Letourneur ; P. Le Verrier ; P. Macherey ; P. Marion ; J. Monneret ; G. Nazare ; G. Nuzeret ; M. Oger ; F. Ollivier ; J. Pémartin ; A. Picnon ; Pinet-Libertie ; Ph. Plisson ; A. Popescu ; A. Prost ; H. Roure ; A. Rozier ; R. Ruchon ; J. de Saint-Julien ; J. Sallaud ; G. Schoonheere ; G. Tastet ; A. Texonnière ; P. Tribier ; Uzan ; H. Varennes ; F. Vérot ; Vial ; Vien ; J. Vignier ; E. Wach ; B. Carrière ; H. Casse ; A. Girondé ; Le Maigre ; L. Leroux ; A Lescure ; Bellencourt ; M. Jousset ; H. Lefèvre ; J. Sire ; Venet.]

GÉOMÉTRIE

4493. — *Construire un triangle connaissant l'angle* A, *le périmètre* $2p$ *et la somme* $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{l}$.

Supposons le problème résolu : soit ABC le triangle cherché. On sait que le demi-périmètre p est égal au segment AD compris entre A et le point de contact D du cercle O exinscrit dans l'angle A.

D'ailleurs, si par le pied I de la bissectrice AO, on mène IK parallèle au côté AC, on a

$$\frac{AK}{KB} = \frac{CI}{IB} = \frac{b}{c};$$

on déduit de là

$$\frac{AK}{AK + KB} = \frac{b}{b + c},$$

ou

$$AK = \frac{bc}{b + c} = l.$$

Le point K est alors connu, ce qui conduit à cette construction :

Sur le côté AX de l'angle donné XAY, on prend $AD = p$ et $AK = l$; on mène la bissectrice de l'angle XAY qui rencontre en O la perpendiculaire élevée en D à AX et en I la parallèle à AY issue de K ; on décrit le cercle de centre O et de rayon OD, puis de I on mène à ce cercle une tangente qui détermine les sommets B et C du triangle.

Discussion. — Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que le point I soit compris entre A et le cercle O, c'est-à-dire que l'on ait

$$AI < AO - OD.$$

Or, AI, base du triangle isocèle AIK, a pour valeur $2AI' = 2l \cos\frac{A}{2}$; d'autre part, le triangle rectangle AOD donne

$$AO = \frac{p}{\cos\frac{A}{2}}, \qquad OD = p \operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

La condition de possibilité devient donc

$$2l \cos\frac{A}{2} < \frac{p}{\cos\frac{A}{2}} - p \operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

ou, en divisant par $\cos\frac{A}{2}$, facteur toujours positif,

$$2l < \frac{p\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)}{\cos^2\frac{A}{2}},$$

ou encore
$$2l < \frac{p}{1+\sin\frac{A}{2}}.$$

(G. SCHOONHEERE, école professionnelle de Vierzon.)

[Ont résolu cette question : MM. C. Billionnet ; L. Bois ; H. Carpentier ; J. Fiton ; M. Gondran ; E. Kornis ; Lehmann ; Oger ; J. Poirier ; H. L. ; P. Le Verrier ; G. Tastet ; P. Tribier ; Vial.]

4495. — *On donne un triangle* ABC *rectangle en* A *et le cercle circonscrit de centre* O. *Aux triangles* AOC *et* AOB *on circonscrit deux cercles de centres* O_1 *et* O_2.

1° *Démontrer que les tangentes en* A *aux deux cercles* O_1 *et* O_2 *sont rectangulaires.*

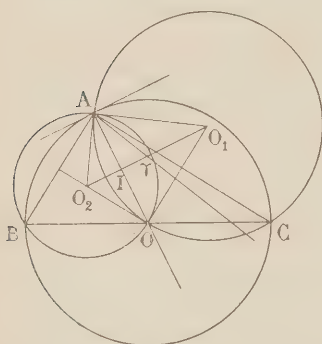
2° *Démontrer que la tangente en* A *au cercle* O *est parallèle à la ligne des centres* O_1O_2.

3° *Démontrer que le quadrilatère* AO_1OO_2 *est inscriptible.*

4° *Le point* A *et la direction* BC *étant supposés fixes, trouver le lieu du point* γ, *centre du cercle circonscrit au quadrilatère* AO_1OO_2 *lorsque le point* O *décrit la droite* OA.

5° *Trouver entre les rayons des cercles* O, γ, O_1, O_2 *une relation qui ne renferme pas les côtés du triangle.*

1° Les deux triangles AO_1O_2, OO_1O_2 ayant un côté commun et deux côtés égaux sont égaux.



Or les côtés OO_1, OO_2 du second triangle sont respectivement perpendiculaires aux milieux des cordes AC, AB, communes au cercle O et aux cercles O_1, O_2 ; l'angle O_1OO_2 est donc droit comme supplément de l'angle droit BAC. Dès lors les rayons AO_1 et AO_2 sont rectangulaires, et comme tels, tangents respectivement aux cercles O_2, O_1, ce qui établit la première partie.

2° La tangente en A au cercle O et la ligne des centres O_1O_2 étant toutes deux perpendiculaires à la droite AO sont parallèles.

3° Le quadrilatère AO_1OO_2 ayant les angles opposés A et O droits est inscriptible dans un cercle de diamètre O_1O_2.

4° Le côté BC fait par hypothèse un angle constant avec la médiane fixe AO du triangle ABC ; dans le triangle AO_2O_1, semblable à ABC, l'angle $A\gamma O_2$ homologue de AOB est donc constant, ainsi que son complément $IA\gamma$. La droite $A\gamma$ faisant ainsi un angle constant avec la droite fixe AO est fixe et représente le lieu du point γ.

Tout point γ de cette droite appartient d'ailleurs au lieu, puisqu'à ce point correspond toujours sur AO un point O tel que $\gamma O = \gamma A$.

5° Égalons deux expressions du double de l'aire du triangle rectangle AO_2O_1 ; nous aurons

$$AO_1.AO_2 = AI.O_2O_1,$$

ou, comme

$$AI = \frac{AO}{2} \qquad \text{et} \qquad O_2O_1 = 2A\gamma,$$

$$AO_1.AO_2 = AO.A\gamma.$$

Cette dernière relation exprime que le produit des rayons des cercles O_1 et O_2 est égal au produit des rayons des cercles O et γ.

(VIAL, à Tournus.)

[Ont résolu cette question : Mlle M. Turpain ; MM. V. Barol ; R. Bazin ; F. Beynas ; C. Billionnet ; L. Bois ; E. Bonjan ; J. Borgey ; E. Bouby ; G. Canel ; H. Carpentier ; G. Delahaye ; P. Delolme ; R. Dickson ; C. Dujardin ; Famechon ; G. Foucry ; E. Framboise ; E. Garry ; R. Henry ; H. Janois ; H. L. ; C. Labille ; Ch. Lefebvre ; E. Le Maigre ; E. Leotard ; Le Révérend ; L. Leroux ; P. Letourneur ; E. Loffler ; Ch. Marrot ; P. Macherey ; J. Monneret ; M. Oger ; M. Pinçon ; Ph. Plisson ; H. Roure ; E. de Rycker ; G. Schoonheere ; E. Schultz ; G. Tastet ; P. Tribier ; L. Troin ; F. Vérot ; P. Vien ; Clabault ; Coural ; L. Deschamps ; Herrmann.]

PHYSIQUE

4496. — *Un aérostat, de parois inextensibles, complètement gonflé d'hydrogène à la pression extérieure de* 76^{cm} *et dont les agrès pèsent* 100^{kg}, *possède au départ une force ascensionnelle de* 10^{kg}. *A quelle hauteur s'élèvera-t-il si l'on admet que la température ne varie pas, mais que la pression atmosphérique diminue régulièrement de* 1^{mm} *par* 10^{m} *d'ascension ?*

Densité de l'hydrogène 0,07.

(*Bacc. lettres-math., Poitiers, juillet 1898.*)

La force ascensionnelle d'un ballon est égale à la différence entre le poids de l'air déplacé et le poids du gaz augmenté du poids des agrès. On a donc, V désignant le volume du ballon exprimé en mètres cubes,

$$10 = V \times 1^{kg},293 - (V \times 1^{kg},293 \times 0,07 + 100),$$

d'où l'on tire

$$V = \frac{110}{1,293 \times 0,93}.$$

Désignons par x la hauteur atteinte par le ballon. A cette hauteur, la pression de l'hydrogène et la pression extérieure sont égales à $76 - \frac{x}{100}$, ou $\frac{7600 - x}{100}$. Lorsque le ballon s'arrête, la force ascensionnelle est devenue nulle ; on a donc l'équation

$$V \times 1,293 \times \frac{7600 - x}{7600} - V \times 1,293 \times 0,07 \times \frac{7600 - x}{7600} - 100 = 0.$$

En remplaçant V par sa valeur, il vient

$$100 = \frac{11(7600 - x)}{0,93 \times 760} - \frac{11 \times 0,07(7600 - x)}{0,93 \times 760},$$

ou
$$100 \times 0,93 \times 760 = 11(7600 - x)(1 - 0,07),$$

d'où l'on tire
$$x = 690^{m},90.$$

(LE RÉVÉREND, à Coutances.)

[Ont résolu la même question : MM. L. Barberot ; C. Billionnet ; L. Bois ; J. Bouvier ; L. Curt ; R. Depasse ; Famechon ; P. Marion ; M. Oger ; A. Pichon ; E. Schultz ; G. Verlinden ; N. Casse ; J. Coupat.]

4497. — *Etant donnée une lentille convergente de distance focale* f, *on demande pour quelle position d'un objet la distance entre cet objet et son image sera minimum.*

(*Bacc. lettres-math., Bastia, juillet 1898.*)

Posons
$$p + p' = d.$$

On a

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{d-p} = \frac{1}{f},$$

d'où
$$p^2 - dp + df = 0$$

et
$$p = \frac{d \pm \sqrt{d(d-4f)}}{2}.$$

La condition de réalité exige que l'on ait

$$d - 4f \geqslant 0;$$

donc $4f$ est le minimum demandé.

On a alors

$$p = p' = 2f,$$

c'est-à-dire que l'objet et son image sont à une distance de la lentille égale au double de la distance focale principale ; l'image est égale à l'objet.

(ARDIN-DELTEIL.)

[Ont résolu la même question ; Mlle A. Compana ; MM. C. Billionnet ; L. Bois ; Borgey ; E. Bouly ; P. Delolme ; R. Depasse ; R. Dickson ; J. Fiton ; E. Gernez ; R. Henry ; H. Janois ; G. Lallière ; J. Lamotte ; E. Le Maigre ; A. Lescure ; P. Letourneur ; Liaudat ; P. Macherey ; J. Ménéchal ; M. Oger ; A. Sallin ; P. Tribier ; Via! ; Viesq ; M. Jousset ; M. Pinçon.]

CONCOURS DE 1898

ÉCOLE MILITAIRE DE L'ARTILLERIE ET DU GÉNIE

(Versailles.)

I. — Division de l'Artillerie et du Génie.

(Candidats de l'artillerie et du génie.)

Arithmetique.

I. — Extraction de la racine carrée.

Raisonner sur le nombre 74529.

II. — Si un nombre entier qui divise le produit de deux autres nombres entiers est premier avec l'un de ces nombres, il divise l'autre. Démonstration.

III. — On place une somme de 14716fr en rentes 3 1/2 %, à un moment où le cours de la rente est 106,15. Quel revenu aura-t-on par trimestre ?

IV. — Un train est remorqué de Paris à Rouen par deux locomotives dont les roues ont respectivement 2m,04 et 2m,12 de diamètre. A l'arrivée à Rouen, les roues de la première ont fait 824 tours de plus que celles de la deuxième. Quelle est, en kilomètres, la distance de Paris à Rouen ? Prendre $\pi = 3,14$.

(*2 décembre, de 1 h. 1/2 à 5 h. 1/2.*)

Algèbre.

I. — Comment fait-on l'addition, la soustraction, la multiplication, la division de deux radicaux ?

Application aux deux radicaux

$$\sqrt{\frac{a+b}{a-b}x^2 + ax} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{a-b}{a+b}x^2 + bx}.$$

II. — Effectuer la division du binome $a^5 - b^5$ par le binome $a - b$.

III. — Résoudre l'équation bicarrée $2x^4 - 11x^2 + 12 = 0$.

IV. — Résoudre le système d'équations

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{1}{4}, \qquad x - y = \frac{17}{48}.$$

V. — Mener dans un cylindre un plan parallèle à la base à une distance telle que le cône ayant pour base la section ainsi déterminée et pour sommet le centre de la base du cylindre, ait un volume égal au quart du volume du cylindre.

(*3 décembre, de 1 h. 1/2 à 5 h. 1/2.*)

Géométrie.

I. — Démontrer que les médianes d'un triangle se coupent en un même point situé aux 2/3 de leur longueur à partir du sommet.

II. — Par un point A, extérieur à une circonférence, mener une sécante ABC, telle que la partie extérieure AB soit égale à la corde BC interceptée sur cette circonférence.

III. — Connaissant le côté a d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon R, calculer le côté a' du polygone régulier inscrit d'un nombre de côtés double.

IV. — Qu'appelle-t-on figures semblables, côtés homologues, rapport de similitude ? Enoncer et démontrer les cas de similitude des triangles.

(*5 décembre, de 1 h. 1/2 à 5 h. 1/2.*)

Trigonométrie.

I. — Connaissant les lignes trigonométriques des arcs a et b, calculer celles des arcs $a + b$ et $a - b$.

II. — Résoudre le triangle dans lequel on connaît :

$a = 45\,325,46$, $\quad B = 33^\circ\,34'\,49'',6$, $\quad C = 76^\circ\,43'\,53'',6$.

Calculer A, b, c et S.

Les calculs doivent être reproduits sur la copie.

(*Trigonométrie et Topographie, 6 décembre, de 7 h. 1/2 à 11 h. 1/2.*)

II. — Division du train des équipages.

(Candidats de l'artillerie, du génie, de la cavalerie et du train des équipages militaires.)

Arithmétique.

I. — Donner, en raisonnant sur les fractions $\frac{5}{8}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{9}{20}$, la théorie de la réduction des fractions au plus petit dénominateur commun.

II. — Il a fallu 7 jours 1/2 à 25 ouvriers travaillant 9 heures par jour pour creuser un fossé de 925mc. Combien faudrait-il de temps à 17 ouvriers travaillant 8 h. 1/2 par jour pour creuser un fossé de 1450mc ?

III. — Combien peut-on fabriquer de pièces de 0fr,50 avec un lingot de 848gr au titre de 0,900, sachant que la pièce de 0fr,50 pèse 2gr,5 et qu'elle est au titre de 0,835 ? La tolérance légale sur le titre étant 0,002, peut-on en usant de cette tolérance fabriquer une pièce de plus ?

IV. — Un terrain vaut 2fr,90 le mètre carré. Combien paiera-t-on une parcelle de 1 hectare 49 ares 25 centiares ? Quel est le rapport de l'are et de l'hectare au kilomètre carré ?

(*8 décembre, de 1 h. 1/2 à 5 h. 1/2.*)

Géométrie.

I. — Somme des angles d'un triangle. — Somme des angles d'un polygone convexe. — Enoncé et démonstration.

II. — Etant donnés une circonférence et un point intérieur, trouver la plus petite corde qui passe par ce point.

III. — Calculer en décimètres cubes le volume d'une pyramide ABCDE qui a pour hauteur EH = 1m,35 et pour base un trapèze dont les dimensions sont les suivantes : hauteur NM = 1m,10, grande base AB = 0m,90, petite base CD = 0m,50.

(*Géométrie et Topographie, 9 décembre, de 1 h. 1/2 à 5 h. 1/2.*)

BACCALAURÉATS

PARIS

SESSION DE JUILLET 1898

Lettres-mathématiques.

I. — Un rectangle dont les côtés sont a et b tourne autour d'un axe passant par un de ses sommets et situé dans son plan.

On demande de déterminer l'angle φ de cet axe avec le côté du rectangle dont la longueur est a, de telle façon que le volume engendré par le rectangle soit égal à V. — Discuter.

II. — *1er sujet.* — Centre des forces parallèles.

II. — *2e sujet.* — Composition des forces appliquées à un corps solide.

II. — *3e sujet.* — Théorie des couples.

I. — **4507**. Un cylindre disposé verticalement dans l'air est fermé à la partie inférieure par une paroi rigide et fixe, et à la partie supérieure par un piston P, parfaitement mobile, qui pèse sur le gaz contenu dans ce cylindre et le comprime. Le gaz occupe dans le cylindre une hauteur de 60cm.

On retourne l'appareil de manière à placer le haut en bas. Le piston descend de 5cm, la température étant restée constante.

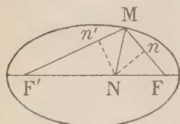
On demande quel est le poids de ce piston.

La pression atmosphérique est mesurée par une colonne de mercure de 75cm à 0°.

Densité du mercure 13,6.
La section du cylindre est de 75^{cq}.
II. — *1er sujet.* — Hauteur des sons ; sa mesure.
II. — *2e sujet.* — Vibrations transversales des cordes. Harmoniques.
II. — *3e sujet.* — Émission et absorption de la chaleur.

Lettres-sciences.

I. — **4508.** Par un point M d'une ellipse définie par son grand axe $2a$ et sa distance focale $2c$ on mène la normale MN jusqu'à la rencontre du grand axe en N, et les rayons vecteurs MF et MF′. On projette la normale MN sur les deux rayons vecteurs en Mn et Mn' :



1° Démontrer que ces projections sont égales à $\dfrac{a^2-c^2}{a}$;

2° Exprimer la surface du quadrilatère $MnNn'$ et trouver la position de M pour laquelle ce quadrilatère est maximum ;

3° Exprimer la valeur de la tangente de l'angle α des deux rayons vecteurs pour le cas où la surface du quadrilatère vaut la moitié de celle du quadrilatère maximum ;

4° Déterminer graphiquement la position du point M dans ce cas, en supposant $2a = 10$ et $2c = 8$.

II. — *1er sujet.* — Rotations : applications à la détermination de la vraie grandeur d'un segment de droite ; à l'inclinaison d'une droite sur chacun des plans de projection et à l'inclinaison d'un plan sur les plans de projection.

II. — *2e sujet.* — Ombre propre et ombre portée d'une sphère donnée par les projections de ses contours apparents sur les plans de projection. Le rayon de lumière vient de l'infini et a pour direction celle de la droite LL′ donnée par ses projections.

II. — *3e sujet.* — Application de la méthode des plans cotés à la détermination de l'intersection de deux plans et de l'intersection d'une droite et d'un plan.

I. — De l'air saturé de vapeur d'eau, à 11° et sous la pression de 768^{mm} de mercure, occupe un volume de 10^{lit}. Que deviendra le volume de cet air complètement desséché à la température de 15° et sous la pression de 750^{mm} de mercure ? La pression maximum de la vapeur d'eau à 11° est de $10^{mm},074$.
II. — *1er sujet.* — Manomètre à air comprimé. — Siphon.
II. — *2e sujet.* — Lois fondamentales des courants.
II. — *3e sujet.* — Spectroscope ; analyse spectrale.

SESSION D'OCTOBRE

Lettres-mathématiques.

I. — **4509.** Soit N un nombre entier ; on effectue sur lui l'opération de la racine carrée. Soient a la racine carrée à une unité près par défaut et r le reste de l'opération.

On divise N par a et l'on appelle r' le reste de cette division. Dans quel cas r' sera-t-il égal à r ; et, s'il n'est par égal à r, à quoi r' est-il égal ?
II. — *1er sujet.* — Expliquer le système métrique.
II. — *2e sujet.* — Propriété de la tangente à l'hélice.
II. — *3e sujet.* — Qu'est-ce que diviser une droite en moyenne et extrême raison ? Application au décagone régulier.

I. — **4510.** On dispose d'un certain nombre d'éléments de pile ayant chacun 1^{ohm} de résistance intérieure et 2^{volts} de force électromotrice. Combien doit-on associer en tension de ces éléments pour obtenir un courant de $\frac{1}{2}$ ampère avec une résistance extérieure à la pile de 54^{ohms} ?

Quelle est la quantité de chaleur dégagée en une minute dans le fil conjonctif de 54^{ohms}, sachant qu'un courant d'un ampère dégage en une seconde dans un fil d'un ohm $\frac{1}{4,18}$ de petite calorie ?
II. — *1er sujet.* — Lunette astronomique.
II. — *2e sujet.* — Télescope de Newton.
II. — *3e sujet.* — Microscope composé.

Lettres-sciences.

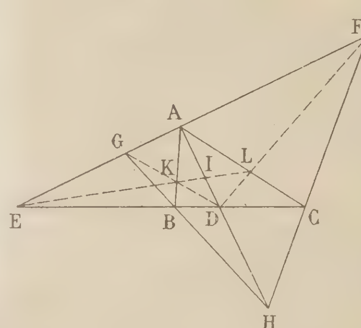
I. — **4511.** On donne un triangle rectangle ABC dont les côtés ont pour mesure a, b, c et l'on construit sur ces trois côtés, extérieurement au triangle et dans son plan, des carrés. Calculer les distances du centre de gravité de la surface de la figure ainsi formée aux deux côtés de l'angle droit, de façon à déterminer la position de ce centre de gravité. Appliquer les résultats obtenus au cas où c, le plus petit côté du triangle, vaut la moitié de a, l'hypoténuse.

II. — *1er sujet.* — Démontrer que l'équation $Ax + By + C = 0$ représente une droite. Construire cette droite pour $A = 5$, $B = -3$, $C = -7$, et en faire connaître le coefficient angulaire.
II. — *2e sujet.* — Étudier la variation de la fonction
$$y = ax^2 + bx + c.$$
II. — *3e sujet.* — Faire connaître la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, en appuyant chaque réponse d'une démonstration.

I. — Dans un premier vase, on a de l'eau à 4° ; dans un second, de l'eau à 84°. Combien doit-on prendre de kilogrammes d'eau dans chacun d'eux pour former un bain de 120^{kg} à 24° ?
II. — *1er sujet.* — Machines thermiques : machine à vapeur, machine à gaz.
II. — *2e sujet.* — Vibrations transversales des cordes ; lois expérimentales.
II. — *3e sujet.* — Intervalles musicaux ; gammes.

QUESTIONS PROPOSÉES

4512. — Éliminer x et y entre les équations
$$x + \frac{1}{x} = a, \qquad y + \frac{1}{y} = b, \qquad xy + \frac{1}{xy} = c.$$



4513. — Étant donné un triangle ABC, on construit le triangle FGH formé par les bissectrices extérieures des angles A, B, C ; soient D et E les points où les bissectrices de l'angle A rencontrent le côté BC ; K le point de rencontre de DG et de AB ; L le point de rencontre de DF et de AC. Prouver que les points E, K, L sont en ligne droite avec le centre I du cercle inscrit au triangle.

(M. Rebeix, lycée du Puy.)

4514. — Étant données deux circonférences O et O′ tangentes en A et B à une de leurs tangentes communes, on trace une troisième circonférence O″ tangente aux deux premières respectivement en C et D. Démontrer que :

1° les droites AC et BD se coupent en un point M de la circonférence O″ ;

2° les quatre points A, B, C, D sont sur une même circonférence ;

3° la tangente en M à la circonférence O″ est parallèle à la droite AB.

(Collot, professeur au lycée de Chaumont.)

4515. — Dans un triangle rectangle ABC, on dirige à volonté les droites qui portent les côtés BC, CA, AB du triangle, et l'on désigne par α, β, γ ces droites dirigées : on pose
$$a = \overline{BC}, \qquad b = \overline{CA}, \qquad c = \overline{AB}, \qquad a + b + c = 2p.$$
1° On a
$$4p^2 = 2(a+b)(a+c), \qquad 4p(p-a) = 2bc.$$
2° Si l'on appelle pseudo-bissectrice de l'angle (x, y) de deux droites dirigées la bissectrice de l'angle adjacent supplémentaire, et si l'on considère les pseudo-bissectrices BE et CF des angles (α, γ) et (α, β), lesquelles se coupent au centre I du cycle inscrit au triangle (1), on a
$$\overline{BE}^2 = \frac{2ac^2}{a+c}, \qquad \overline{CF}^2 = \frac{2ab^2}{a+b},$$
et l'on peut écrire
$$\overline{BE} \times \overline{CF} = 2a\sqrt{2}(p-a),$$
ce produit étant positif lorsque le cycle inscrit est le cercle inscrit.
3° On a
$$\frac{\overline{BI}}{\overline{BE}} \times \frac{\overline{CI}}{\overline{CF}} = \frac{1}{2}.$$

(G. Fontené.)

4516. — Montrer que $\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{13\pi}{10} = -\frac{1}{4}$.

(1) Cf. *Géométrie dirigée*, lib. Nony.

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

23e Année. — N° 9. **JOURNAL** PARIS. le 1er Février 1899

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

ÉCOLE NORMALE PRIMAIRE SUPÉRIEURE DE SAINT-CLOUD (1898)

4425. — *Démontrer que le produit de trois nombres entiers consécutifs est toujours divisible par 504 si le nombre intermédiaire est un cube parfait.*

Soit n le nombre intermédiaire ; il faut démontrer que le produit

$$(n^3-1)n^3(n^3+1)$$

est divisible par

$$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7.$$

Il suffit d'établir cette divisibilité par chacun des facteurs 2^3, 3^2 et 7.

Divisibilité par 2^3. — Si n est pair, n^3 est multiple de 2^3 ; si n est impair, n^3 l'est également, n^3-1 et n^3+1 sont deux nombres pairs consécutifs, dont l'un au moins est divisible par 4 ; leur produit est donc divisible par $2\times 4 = 2^3$.

Divisibilité par 3^2. — Si $n = m.3$, la divisibilité par 3^2 est manifeste ; si $n = m.3+1$,

$$n^3-1 = (n-1)(n^2+n+1) = m.3 \times m'.3 = m''.3^2 ;$$

si $n = m.3-1$,

$$n^3+1 = (n+1)(n^2-n+1) = m.3\times m'.3 = m''.3^2.$$

Divisibilité par 7. — Si n est divisible par 7, la divisibilité est évidente ; s'il ne l'est pas, il faut prouver que n^3-1 ou n^3+1 l'est. Or, un nombre entier qui n'est pas multiple de 7 est de l'une des formes

$$m.7\pm 1, \qquad m.7\pm 2, \qquad m.7\pm 3 ;$$

par conséquent son cube, comme on le voit en faisant le développement, est de l'une des formes

$$m'.7\pm 1, \qquad m'.7\pm 8, \qquad m'.7\pm 27 ;$$

c'est-à-dire

$$m''.7\pm 1, \qquad m''.7\pm 1, \qquad m''.7\pm 1,$$

et le cube augmenté ou diminué d'une unité est divisible par 7.

Remarque. — En appliquant le théorème de Fermat, on voit immédiatement que $(n^3-1)(n^3+1) = n^6-1 = n^{7-1}-1$ est divisible par 7 lorsque n ne l'est pas.

(L. CURT, école normale de Bourg.)

[Ont résolu la même question : Mlle Maria Pont ; MM. C. Barbe ; E. Baudoin ; L. Blanc ; V. Bonzom ; C. Bourvéau ; Bouzy ; Burgat ; E. Chaineau ; A. Chapron ; M. Cryé ; H. Damoiseau ; M. Drovin ; C. Dupuis ; J. Fiton ; G. Foucry ; E. Gernez-Pfanmatter ; G. Girot ; P. Guillemin ; R. Henry ; L. Hubert ; R. Hüe ; H. Janois ; Ch. Lefebvre ; P. Le Hénaff ; Lehmann ; G. Le Sage ; R. Manen ; J. Ménéchal ; M. Oger ; N. Plakhowo ; L. Pont ; M. Rebeix ; Remondet ; J. Rigal ; E. Rousset ; C. Rouxbédat ; F. Sol ; G. Tastet ; R. Thomas ; H. Tourrette ; P. Tribier ; E. Vaunac.]

4426. — *Résoudre et discuter le système des trois équations*

$$(m+2)x-(3m+4)y-z = 7m^2-6m-16,$$
$$-(3m+4)x+(m+2)y-z = 7m^2-6m-16,$$
$$x+y+(2m+1)z+7m^2-6m-16 = 0 ;$$

ceci fait, chercher entre quelles limites doit varier m *pour que les valeurs de* x, *de* y, *de* z *soient comprises entre* $(73-70m)$ *et* $(70m-67)$.

Retranchons membre à membre les deux premières équations ; il vient

$$(4m+6)x-(4m+6)y = 0, \qquad (1)$$

ce qui donne $x = y$,

en supposant le coefficient $4m+6$ différent de zéro.

Remplaçons alors x par y dans l'une des deux premières équations et dans la troisième ; nous aurons

$$\left.\begin{aligned} -2(m+1)y-z &= 7m^2-6m-16 \\ 2y+(2m+1)z &= -(7m^2-6m-16) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

et, en ajoutant membre à membre,

$$-2my+2mz = 0,$$

ce qui entraîne $y = z$ en supposant $m \neq 0$.

On déduit ensuite facilement de l'une des équations (2),

$$x = y = z = \frac{7m^2-6m-16}{-(2m+3)}.$$

Cette solution unique résout le système proposé, sauf dans les cas réservés où $m = -\frac{3}{2}$ et $m = 0$.

Dans le cas de $m = -\frac{3}{2}$, l'équation (1) devient une identité, ce qui prouve que les deux premières équations du système donné deviennent identiques ; les trois équations proposées se réduisent à deux ; il y a indétermination si ces équations sont compatibles, impossibilité si elles ne le sont pas.

Faisons $m = -\frac{3}{2}$ dans la première et la dernière équation ; elles deviennent

$$\left(-\frac{3}{2}+2\right)x-\left(-\frac{9}{2}+4\right)y-z = 7\frac{9}{4}+6\frac{3}{2}-16,$$

$$x+y-2z+7\frac{9}{4}+6\frac{3}{2}-16 = 0 ;$$

c'est-à-dire

$$x+y-2z = \frac{83}{2},$$

$$x+y-2z = -\frac{83}{2} ;$$

elles sont évidemment *incompatibles*.

Pour $m = 0$, on peut toujours former l'équation (1) et par suite en conclure $x = y$; on peut ensuite former les équations

(2) ; en y faisant $m = 0$, elles deviennent identiques, et fournissent l'équation unique

$$2y + z = 16.$$

Le système se réduit donc aux deux équations

$$\begin{cases} x = y, \\ 2y + z = 16 ; \end{cases}$$

il est *indéterminé*. Une inconnue est arbitraire.

Revenons maintenant au cas général.

Pour que la valeur de x soit comprise entre les quantités $73 - 70m$ et $70m - 67$, il faut et il suffit que l'on ait

$$[x - (73 - 70m)][x - (70m - 67)] < 0.$$

Remplaçons x par sa valeur ; cette inégalité devient

$$\left(\frac{7m^2 - 6m - 16}{2m + 3} + 73 - 70m\right)\left(\frac{7m^2 - 6m - 16}{2m + 3} + 70m - 67\right) < 0,$$

ou, en multipliant par le nombre positif $(2m + 3)^2$ et simplifiant,

$$(-133m^2 - 70m + 203)(147m^2 + 70m - 217) < 0,$$

ou, en supprimant le facteur commun 7 dans chaque parenthèse,

$$(-19m^2 - 10m + 29)(21m^2 + 10m - 31) < 0.$$

Après décomposition de chaque trinome en un produit, l'inégalité s'écrit

$$-19(m - 1)\left(m + \frac{29}{19}\right) \times 21(m - 1)\left(m + \frac{31}{21}\right) < 0,$$

ou, en divisant par le facteur négatif $-19 \times 21(m - 1)^2$,

$$\left(m + \frac{29}{19}\right)\left(m + \frac{31}{21}\right) > 0.$$

Cette dernière inégalité est satisfaite pour toute valeur de m extérieure à l'intervalle

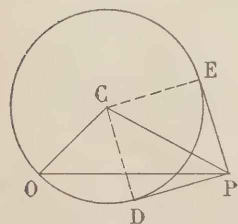
$$\left(-\frac{29}{19}, \ -\frac{31}{21}\right).$$

(M. OGER, école normale de Poitiers.)

[Ont résolu la même question : MM. C. Bourvéau, à Kernével ; A. Bouzy, à Vervins ; Burgat, école normale d'Albertville ; Lehmann, à Alger-Bouzaréah ; C. Rouxbédat, à Mortagne-sur-Sèvre ; H. Tourrette, école normale du Puy.]

4427. — *Étant donnés deux points* O *et* P, *on considère, en géométrie plane, tous les cercles qui passent par* O *et qui sont tels que les deux tangentes menées à chacun d'eux par le point* P *soient rectangulaires : 1° déterminer géométriquement un cercle répondant aux conditions précédentes, sachant en outre que son rayon est donné ; 2° déterminer par le calcul le centre d'un cercle répondant aux conditions primitivement données, sachant que ce centre doit se trouver sur une droite donnée* AB *rencontrant la droite* OP *en un point* A *et faisant avec cette droite un angle donné* α. — *Discuter.* — *On posera* $OP = d$, $OA = a$.

1° Soit C un cercle passant par le point O et tel que les deux tangentes PD, PE soient rectangulaires.



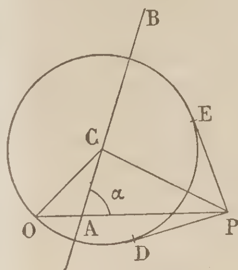
Tirons les rayons CO, CD, CE et la droite CP. Le quadrilatère CDPE ayant les angles en D, P, E droits et les côtés CD, CE égaux est un carré ; donc $CP = R\sqrt{2}$. Tout revient alors à construire le triangle OPC, dont la base $OP = d$ est connue, ainsi que la grandeur des deux autres côtés : $OC = R$ et $CP = R\sqrt{2}$.

La seule condition de possibilité est

$$R\sqrt{2} - R \leqslant d \leqslant R + R\sqrt{2} ;$$

lorsqu'elle est remplie, il existe deux points C symétriques par rapport à OP. Ces points se confondent en un seul situé sur OP dès que l'on donne à d sa plus petite ou sa plus grande valeur possible.

2° Nous pouvons supposer que l'angle α donné représente l'angle aigu formé par AB avec OP. Proposons-nous alors de déterminer la distance $AC = x$ de façon que la condition $CP = OC\sqrt{2}$, qui définit les cercles C, soit remplie.



Dans le triangle ACP, le côté CP est opposé à l'angle α compris entre les côtés $AC = x$ et $AP = d - a$; donc

$$\overline{CP}^2 = x^2 + (d - a)^2 - 2x(d - a)\cos\alpha. \quad (1)$$

Le triangle OAC donne de même, en observant que $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$,

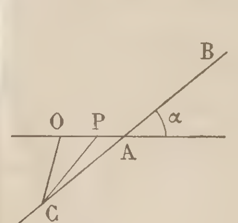
$$\overline{OC}^2 = x^2 + a^2 + 2xa\cos\alpha. \quad (2)$$

La condition $CP = OC\sqrt{2}$ ou $\overline{CP}^2 = 2\overline{OC}^2$ devient alors

$$x^2 + (d - a)^2 - 2x(d - a)\cos\alpha = 2x^2 + 2a^2 + 4xa\cos\alpha,$$

ou $\quad f(x) = x^2 + 2(d + a)\cos\alpha . x + 2a^2 - (d - a)^2 = 0.$

La mise en équation suppose le point A compris entre O et P, et le point C du même côté que B par rapport à A. En prenant C du côté opposé à B par rapport à A, il est aisé de voir que l'équation correspondante ne diffère de la précédente que par le changement du signe de x ; toute racine négative de l'équation $f(x) = 0$, portée sur AB prolongé, convient donc au problème. Examinons maintenant ce qui arrive lorsque le point A est pris sur l'un des prolongements de OP.



1er *Cas de figure*. — CP est opposé à l'angle α compris entre les côtés $AC = -x$ et $AP = a - d$; la relation (1) n'étant pas altérée par le changement simultané du signe de $d - a$ et de x subsiste. La relation (2) s'étend d'ailleurs à cette nouvelle figure, et par suite l'équation du problème ne change pas.

2e *Cas de figure*. — CP est opposé à l'angle α compris entre les côtés $AC = x$ et $AP = a + d$; pour que la relation (1) subsiste, il faut alors prendre négativement le segment $OA = a$, qui a changé de sens. OC est opposé à l'angle α compris entre les côtés $AC = x$ et $AO = a$; la relation (2), dans laquelle a et $\cos\alpha$ changent de signe en même temps, reste la même.

Il résulte de là que l'équation

$$f(x) = x^2 + 2(d + a)\cos\alpha . x + 2a^2 - (d - a)^2 = 0$$

s'applique à tous les cas de figure si l'on considère les valeurs positives ou négatives de x et de a.

Discussion. — D'après ce qui précède, le problème admet toujours deux solutions pourvu que les deux racines de l'équation $f(x) = 0$ soient réelles. La condition de réalité est

$$(d + a)^2\cos^2\alpha - 2a^2 + (d - a)^2 \geqslant 0,$$

ou, en remplaçant $\cos^2\alpha$ par $1 - \sin^2\alpha$ et simplifiant,

$$2d^2 - (d + a)^2\sin^2\alpha \geqslant 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$[(d + a)\sin\alpha - d\sqrt{2}][(d + a)\sin\alpha + d\sqrt{2}] \leqslant 0,$$

d'où l'on déduit

$$-d\sqrt{2} \leqslant (d + a)\sin\alpha \leqslant d\sqrt{2}$$

et $$-d\left(\frac{\sqrt{2}}{\sin\alpha}+1\right) \leqslant a \leqslant d\left(\frac{\sqrt{2}}{\sin\alpha}-1\right).$$

Lorsqu'on donne à a sa plus petite ou sa plus grande valeur, les deux valeurs de x deviennent égales, et leur valeur commune est

$$x = -(d+a)\cos\alpha.$$

Les deux points C correspondant à toute autre valeur intermédiaire de a sont de part et d'autre de A quand le produit des racines est négatif :

$$2a^2 - (d-a)^2 \leqslant 0,$$

inégalité satisfaite en posant

$$-a\sqrt{2} \leqslant d - a \leqslant a\sqrt{2},$$

ou $$-d(\sqrt{2}+1) \leqslant a \leqslant d(\sqrt{2}-1).$$

Ces limites de a sont nécessairement comprises dans l'intervalle des valeurs possibles de a, attendu que deux racines de signes contraires sont toujours réelles.

Pour toute valeur possible de a non comprise entre

$$-d(\sqrt{2}+1) \quad \text{et} \quad d(\sqrt{2}-1),$$

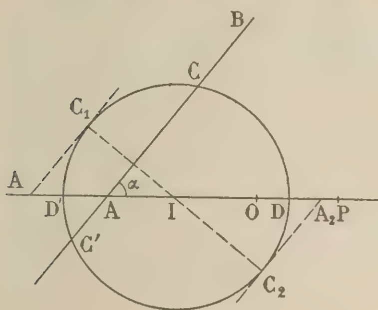
les deux points C sont d'un même côté par rapport à A. Ce côté sera celui de B si la somme des racines, $-2(d+a)\cos\alpha$, est positive, ce qui entraîne $a < -d$, puisque $\cos\alpha$ est positif, α ayant été supposé aigu.

Comme $-d$ est compris entre $-d(\sqrt{2}+1)$ et $d(\sqrt{2}-1)$, on voit que les deux points C sont sur la droite AB ou sur son prolongement, suivant que l'on a

$$-d\left(\frac{\sqrt{2}}{\sin\alpha}+1\right) \leqslant a < -d(\sqrt{2}+1),$$

ou $$d(\sqrt{2}-1) < a \leqslant d\left(\frac{\sqrt{2}}{\sin\alpha}-1\right).$$

Solution géométrique. — Le lieu des centres C des cercles considérés est le même que celui des points C du plan tels que $\frac{CP}{CO} = \sqrt{2}$. Or ce dernier lieu est, comme on sait, une circonférence de diamètre DD', D et D' étant les deux points du lieu situés sur OP. Cette circonférence rencontre généralement la droite donnée AB en deux points C et C' répondant à la question.



Pour que ces points existent, il faut et il suffit que la droite AB soit comprise entre les deux tangentes au cercle A_1C_1 et A_2C_2 menées parallèlement à AB. On doit donc avoir

$$OA \leqslant OA_1 \quad \text{et} \quad OA \leqslant OA_2,$$

c'est-à-dire

$$-OA_1 \leqslant a \leqslant OA_2.$$

Les points C et C' sont d'ailleurs de part et d'autre de A tant que l'on a

$$-OD' < a < OD.$$

Il reste à exprimer les segments OA_1, OA_2, OD et OD' en fonction de $OP = d$ et de α. On a d'abord

$$\frac{d+OD'}{OD'} = \sqrt{2} = \frac{d-OD}{OD};$$

d'où $$OD' = \frac{d}{\sqrt{2}-1} = d(\sqrt{2}+1),$$

$$OD = \frac{d}{\sqrt{2}+1} = d(\sqrt{2}-1).$$

Puis

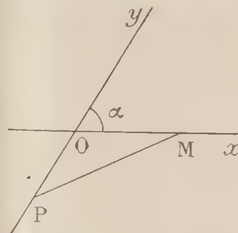
$$OA_1 = OI + \frac{IC_1}{\sin\alpha} = \frac{OD'-OD}{2} + \frac{OD'+OD}{2\sin\alpha}$$
$$= d + \frac{d\sqrt{2}}{\sin\alpha} = d\left(\frac{\sqrt{2}}{\sin\alpha}+1\right);$$

$$OA_2 = \frac{IC_2}{\sin\alpha} - OI = d\left(\frac{\sqrt{2}}{\sin\alpha}-1\right).$$

On retrouve ainsi les résultats de la discussion algébrique.

(C. BOURVÉAU, instituteur à Kernével.)

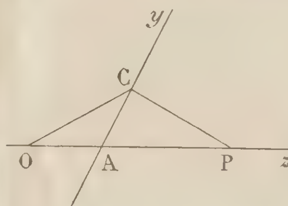
On pourrait se proposer de faire la mise en équation de manière qu'elle convienne à tous les cas et qu'on ne soit pas obligé de faire toutes les figures possibles.



Considérons deux droites orientées, sur lesquelles on a choisi les directions positives Ox et Oy, et soit α l'angle xOy (aigu ou obtus). En prenant sur Ox un point arbitraire M, sur Oy un point arbitraire P, on démontre aisément qu'on a toujours

$$\overline{MP}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OP}^2 - 2\overline{OM}.\overline{OP}\cos\alpha.$$

Revenons alors au problème proposé. Prenons sur OP la direction OP comme direction positive Oz et désignons le segment $\overline{OA}$ par a, ce nombre étant positif ou négatif suivant que OA et Oz sont de même sens ou de sens opposé. Prenons de même sur la droite donnée le sens positif Ay, et posons



$$x = \overline{AC}, \qquad \alpha = \widehat{yAz}.$$

On aura toujours en grandeur et en signe

$$\overline{CP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AP}.\overline{AC}\cos\alpha,$$
$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AC}.\overline{AO}\cos\alpha;$$

mais $\overline{AP} = \overline{OP} - \overline{OA} = d - a$, $\qquad \overline{AO} = -a$;

en exprimant que $\overline{CP}^2 = 2\overline{OC}^2$, on obtient ainsi l'équation cherchée

$$(d-a)^2 + x^2 - 2(d-a)x\cos\alpha = 2[a^2 + x^2 + 2dx\cos\alpha];$$

grâce à la généralité des relations employées, cette équation convient à tous les cas possibles.

(Ont résolu la même question : MM. L. Curt, école normale de Bourg ; G. H. D. O. ; L. Hubert, à Cigné ; M. Oger ; L. Ollié, à Auch ; C. Rouxbédat ; Salvetat ; H. Tourrette ; H. Janois.)

4428. — *Un ballon, dont le volume est supposé invariable, contient de l'air saturé d'humidité ; la température est 10°. Il communique avec l'air extérieur par une étroite ouverture munie d'un robinet. Celui-ci étant ouvert, on porte le ballon à la température de 20°. On demande quel sera l'état hygrométrique de l'air intérieur.*

La tension maximum de la vapeur à 10° est 9mm,2 et à 20° elle est 17mm,4. La pression atmosphérique extérieure reste constante pendant l'expérience.

Tout se passe comme si le ballon était fermé par une soupape

de poids négligeable. Quand on chauffe le ballon, une certaine quantité d'air humide s'échappe jusqu'à ce que la pression à l'intérieur du ballon soit la même que dans l'atmosphère.

Appelons V le volume du ballon. Le poids P de vapeur d'eau qu'il contient au début de l'expérience est

$$P = V \times 1{,}293 \times 0{,}622 \times \frac{9{,}2}{760} \times \frac{1}{1+10\alpha}.$$

En portant le mélange gazeux à 20°, son volume deviendrait, si la pression ne changeait pas, $\dfrac{V(1+20\alpha)}{1+10\alpha}$.

Il s'échappe donc du ballon un volume gazeux égal à

$$\frac{V(1+20\alpha)}{1+10\alpha} - V = \frac{V \times 10\alpha}{1+10\alpha}.$$

Cherchons le poids de vapeur d'eau que contient ce volume gazeux.

Un volume $\dfrac{V(1+20\alpha)}{1+10\alpha}$ contient un poids P de vapeur ;

— $\dfrac{V \times 10\alpha}{1+10\alpha}$ — x —

On a donc

$$x = \frac{P \times 10\alpha}{1+20\alpha}.$$

Il reste par suite dans le ballon un poids de vapeur égal à

$$P - \frac{P \times 10\alpha}{1+20\alpha} = \frac{P(1+10\alpha)}{1+20\alpha},$$

ou encore, en remplaçant P par sa valeur,

$$V \times 1{,}293 \times 0{,}622 \times \frac{9{,}2}{760} \times \frac{1}{1+20\alpha}. \qquad (1)$$

D'un autre côté, pour saturer l'atmosphère du ballon, il faut un poids de vapeur représenté par

$$V \times 1{,}293 \times 0{,}622 \times \frac{17{,}4}{760} \times \frac{1}{1+20\alpha}. \qquad (2)$$

L'état hygrométrique e étant le quotient de l'expression (1) par (2), on a

$$e = \frac{9{,}2}{17{,}4} = \frac{46}{87}.$$

(ROUXBÉDAT, à Mortagne-sur-Sèvre.)

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil ; Gernez ; R. Henry ; H. Perdrix ; Rebeix ; Remondet ; H. Tourrette ; E. Vaunac.]

ARITHMÉTIQUE

4498. — *Trouver les trois plus petits nombres entiers consécutifs tels que la somme de leurs cubes soit divisible par* 10^m, *m étant un nombre entier quelconque.*

Soient $x-1$, x, $x+1$ les trois nombres consécutifs. La somme de leurs cubes est

$$(x-1)^3 + x^3 + (x+1)^3 = 3x(x^2+2).$$

Pour que cette somme soit divisible par 10^m, il faut et il suffit qu'elle soit divisible séparément par les facteurs 2^m et 5^m, premiers entre eux.

Condition de divisibilité par 2^m. — Comme le diviseur 2^m est premier avec 3, il doit diviser l'un des nombres x ou x^2+2, ou tous les deux à la fois. Or la première hypothèse ne peut se présenter ici, puisque les nombres x et x^2+2 sont de même parité ; comme d'autre part le nombre x^2+2 est au plus divisible par 2 lorsque x est pair, on doit avoir au moins

$$x = \text{mult. } 2^{m-1},$$

condition d'ailleurs suffisante, sauf si $m=1$, cas examiné plus loin.

Condition de divisibilité par 5^m. — Le diviseur 5^m, premier avec 3, ne peut que diviser x, car s'il divisait x^2+2, ce nombre serait terminé par les chiffres 0 ou 5 et x^2 par

$$10-2=8 \qquad \text{et} \qquad 5-2=3,$$

ce qui est impossible : aucun carré parfait n'étant terminé par les chiffres 3 ou 8. On peut donc poser

$$x = \text{mult. } 5^m.$$

Le plus petit nombre x satisfaisant à la fois aux deux conditions précédentes est dès lors

$$x = 2^{m-1}.5^m = 5.10^{m-1}.$$

Dans le cas particulier où $m=1$, le nombre x devant être pair et divisible par 5 est au moins égal à 10, et les trois plus petits nombres demandés sont alors 9, 10, 11.

(PH. PLISSON, instituteur aux Brûleries.)

[Ont résolu la même question : MM. J. Bordas, instituteur à St-Martin-Sepert ; E. Bouby ; G. Bricchi ; H. Janois ; A. Thorin, à Tours ; R. Van Cauwenberghe.]

ALGÈBRE

4370. — *M étant un point du plan d'un triangle équilatéral* ABC, *soient a, b, c, les distances de* M *aux sommets* A, B, C ; *calculer le côté du triangle équilatéral en fonction de a, b, c.*

Construction géométrique du triangle.

Discussion.

Solution algébrique. — Soit x le côté du triangle équilatéral et M le point dont les distances aux sommets A, B, C sont égales à a, b, c. Adoptons pour sens de rotation celui de AB vers AC ; appelons β l'angle dont il faut faire tourner AB pour l'appliquer sur AM, γ l'angle dont il faut faire tourner AC pour l'appliquer sur AM ; l'angle dont il faut faire tourner AB pour l'appliquer sur AC sera égal à 60° et l'on aura, quelle que soit la position du point M dans le plan,

$$\beta - \gamma = 60°. \qquad (1)$$

Les triangles MAB, MAC donneront toujours les équations

$$b^2 = x^2 + a^2 - 2ax\cos\beta, \qquad (2)$$

$$c^2 = x^2 + a^2 - 2ax\cos\gamma. \qquad (3)$$

On aura donc l'équation en x en éliminant α et β entre les équations (1), (2), (3).

A cet effet prenons les cosinus des deux membres de (1) ; il vient

$$\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma = \frac{1}{2},$$

ou

$$2\cos\beta\cos\gamma - 1 = 2\sin\beta\sin\gamma ;$$

mais

$$\sin\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2\beta}, \qquad \sin\gamma = \pm\sqrt{1-\cos^2\gamma} ;$$

donc

$$2\cos\beta\cos\gamma - 1 = \pm 2\sqrt{(1-\cos^2\beta)(1-\cos^2\gamma)}.$$

On a le droit d'élever au carré les deux membres ; les angles β et γ pouvant varier de 0 à 360°, leurs sinus seront positifs ou

négatifs suivant la position du point M ; il vient ainsi, toutes réductions faites,

$$4\cos^2\beta + 4\cos^2\gamma - 4\cos\beta\cos\gamma - 3 = 0.$$

Portons dans cette équation les valeurs de $\cos\beta$ et $\cos\gamma$ tirées des équations (2) et (3) et chassons le dénominateur ; on trouve

$$4(x^2 + a^2 - b^2)^2 + 4(x^2 + a^2 - c^2)^2 - 4(x^2 + a^2 - b^2)(x^2 + a^2 - c^2) - 12a^2x^2 = 0,$$

équation qui devient finalement

$$f(x^2) \equiv x^4 - (a^2 + b^2 + c^2)x^2 + a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2 = 0. \quad (4)$$

On peut observer que cette équation est symétrique en a, b, c, et même symétrique en a, b, c, x.

Pour qu'une valeur de x^2 tirée de l'équation (4) puisse convenir, il faut d'abord qu'elle soit réelle et positive, ce qui permet la construction du triangle équilatéral ABC. Il faut ensuite qu'on puisse placer le point M par rapport à ce triangle, ce qui exige par exemple qu'on puisse construire le triangle MBC. Il faut pour cela que x soit compris entre $b + c$ et la valeur absolue de $b - c$, ou bien

$$(b - c)^2 < x^2 < (b + c)^2.$$

D'ailleurs la symétrie de l'équation (4) en a, b, c montre que dans ces conditions, la valeur de x^2 sera aussi comprise entre $(a - c)^2$ et $(a + c)^2$, $(b - a)^2$ et $(b + a)^2$.

En résumé le problème a autant de solutions que l'équation (4) a de racines comprises entre $(b - c)^2$ et $(b + c)^2$.

Discussion. — Remplaçons x^2 par $(b - c)^2$ et $(b + c)^2$ dans l'équation (4) ; il vient

$$f[(b - c)^2] = (b - c)^4 - (a^2 + b^2 + c^2)(b - c)^2 + a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2 ;$$

ordonnons par rapport à a ; on trouve sans peine que

$$f[(b - c)^2] = (a^2 - b^2 - c^2 + bc)^2 ;$$

il vient de même

$$f[(b + c)^2] = (a^2 - b^2 - c^2 - bc)^2.$$

Ces deux résultats de substitution étant de même signe que le coefficient de x^4 dans l'équation (4), le problème ne peut admettre que 0 ou 2 solutions. Pour qu'il en admette 2, il faut et il suffit :

1° Que la demi-somme des racines de (4) soit comprise entre $(b - c)^2$ et $(b + c)^2$;

2° Que le discriminant de (4) soit positif.

La première condition s'exprime par

$$(b - c)^2 < \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} < (b + c)^2,$$

ou

$$2(b - c)^2 < a^2 + b^2 + c^2 < 2(b + c)^2,$$

ou

$$(b - c)^2 - 2bc < a^2 < (b + c)^2 + 2bc. \quad (5)$$

La seconde condition s'écrit

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 4(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2) \geqslant 0 ;$$

effectuant les calculs et réduisant, elle devient

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 \leqslant 0,$$

et en ordonnant par rapport à a,

$$a^4 - 2a^2(b^2 + c^2) + (b^2 - c^2)^2 \leqslant 0 ;$$

ou bien encore

$$[a^2 - (b^2 + c^2)]^2 - 4b^2c^2 \leqslant 0,$$

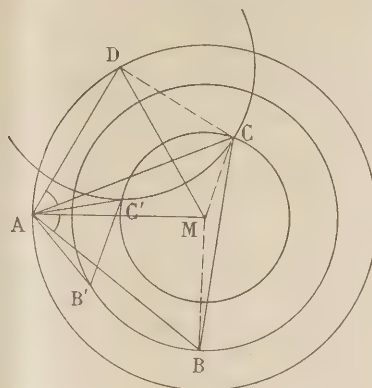
$$[a^2 - (b - c)^2][a^2 - (b + c)^2] \leqslant 0,$$

qui exige que

$$(b - c)^2 \leqslant a^2 \leqslant (b + c)^2. \quad (6)$$

Les limites imposées à a^2 par les conditions (6) étant plus restreintes que celles imposées par les conditions (5), les conditions (6) sont nécessaires et suffisantes pour que le problème admette *deux solutions*. Elles expriment qu'on peut former un triangle avec les trois longueurs données a, b, c.

Construction géométrique. — Si du point M comme centre avec a, b, c pour rayons nous décrivons trois circonférences, le problème proposé revient à construire un triangle équilatéral ayant un sommet sur chacune d'elles. Nous pouvons d'ailleurs placer un sommet en un point quelconque d'une de ces circonférences. Le point A par exemple étant choisi, le problème sera résolu si l'on sait déterminer le point C.



Soit ABC le triangle cherché ; construisons le triangle équilatéral de côté AM ; son troisième sommet D se trouve sur la circonférence du point A. Les triangles BAM et CAD ont $AD = AM$, $AC = AB$, et de plus l'angle CAD est égal à l'angle MAB, puisqu'il suffit d'ajouter à chacun d'eux l'angle CAM pour obtenir un angle de 60°. Ces triangles sont donc égaux et par suite $\overline{DC} = MB$. On obtiendra donc le point C en décrivant de D comme centre une circonférence de rayon b et prenant son intersection avec la circonférence de rayon c.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les deux circonférences se coupent, ce qui exige qu'on puisse construire un triangle ayant pour côtés a, b, c. Cette condition remplie, il y a deux points d'intersection C et C', et par suite deux solutions.

(J. DELPONT.)

Deuxième solution. — Construisons le triangle équilatéral $A_1B_1C_1$ dont le côté égale l'unité.

Déterminons : sur A_1B_1 les points D et D' tels que

$$\frac{D'A_1}{D'B_1} = \frac{DA_1}{DB_1} = \frac{a}{b} ;$$

sur B_1C_1 les points E et E' tels que

$$\frac{EB_1}{EC_1} = \frac{E'B_1}{E'C_1} = \frac{b}{c} ;$$

et sur C_1A_1 les points F et F' tels que

$$\frac{FC_1}{FA_1} = \frac{F'C_1}{F'A_1} = \frac{c}{a}.$$

Les trois circonférences décrites sur DD', EE' et FF' comme diamètres se coupent en deux points M dont les distances aux points A_1, B_1, C_1 sont respectivement proportionnelles aux longueurs a, b et c (question de cours — propriétés harmoniques). — Deux solutions.

De là résulte que si l'on prolonge ou si l'on réduit les directions connues MA_1, MB_1 et MC_1 jusqu'aux points A, B et C tels que $MA = a$, $MB = b$ et $MC = c$, le triangle résultant ABC sera semblable au triangle primitif $A_1B_1C_1$, c'est-à-dire équilatéral. Et le problème sera résolu.

On trouverait la même condition de possibilité qu'à la première solution en exprimant que la distance des centres des

circonférences prises deux à deux doit être inférieure à la somme des rayons correspondants.

(GEORGES LEMAIRE, à Saïgon.)

[Ont résolu la même question : MM. F. Pégorier, à Cette ; M. Rebeix, lycée du Puy ; P. Tarnier, à Dijon.]

GÉOMÉTRIE

4313. — *Construire un triangle* ABC, *connaissant le côté* AB, *l'angle* A *et le rapport* m *du côté* BC *à la médiane relative à ce côté.*

Conditions de possibilité du problème.

Il est clair que le problème est résolu si l'on sait déterminer le point M. Ce point se trouve d'abord sur la parallèle IM menée au côté AC par le milieu I de AB. Cette parallèle Iz est connue, car elle fait avec la direction IB un angle égal à l'angle donné A.

L'énoncé donne la condition

$$\frac{BC}{AM} = m;$$

elle peut s'écrire

$$\frac{MB}{MA} = \frac{m}{2};$$

le point M appartient donc aussi au lieu géométrique des points tels que le rapport de leurs distances aux points A et B soit égal à $\frac{m}{2}$. Ce lieu est une circonférence ayant pour diamètre la distance DD′ des deux points de AB tels que

$$\frac{DB}{DA} = \frac{D'B}{D'A} = \frac{m}{2}.$$

D'ailleurs on peut évidemment ne considérer que les triangles dont les sommets C sont au-dessus de AB. Si donc la demi-droite Iz rencontre la demi-circonférence de diamètre DD′ située au-dessus de AB en un point M, ce point fournira une solution du problème.

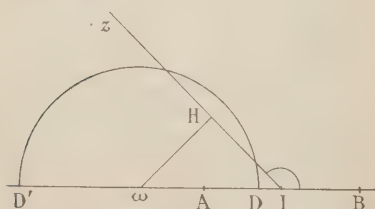
Discussion. — On sait que les points D et D′ sont toujours d'un même côté par rapport au milieu I de la droite AB ; ils sont plus près de A si $\frac{m}{2} > 1$, et plus près de B si $\frac{m}{2} < 1$.

Si les deux points D et D′ sont plus près de A, la demi-circonférence de diamètre DD′ ne rencontre certainement pas Iz si l'angle A est aigu ; la rencontre ne peut avoir lieu que si l'angle A est obtus.

Si les deux points D et D′ sont plus près de B, la rencontre n'a certainement pas lieu si A est obtus ; elle ne peut avoir lieu que si A est aigu.

1er *Cas.* $m > 2$ et A obtus.

Traçons la demi-circonférence de diamètre DD′ et abaissons de son centre ω la perpendiculaire ωH sur Iz. La condition de rencontre est



$$\omega H \leqslant \omega D.$$

Le triangle rectangle ωHI donne

$$\omega H = \omega I \sin A;$$

d'autre part,

$$\omega I = \frac{1}{2}(ID + ID'),$$

$$\omega D = \frac{1}{2}(ID' - ID);$$

la condition de possibilité devient donc

$$(ID' + ID) \sin A \leqslant ID' - ID.$$

Soit $AB = c$; un calcul bien connu donne

$$ID = \frac{c(m-2)}{2(m+2)}, \qquad ID' = \frac{c(m+2)}{2(m-2)};$$

remplaçant ID et ID′ par leurs valeurs, la condition devient

$$\frac{c(m^2+4)}{m^2-4} \sin A < \frac{c.4m}{m^2-4}.$$

Par hypothèse m est plus grand que 2 ; on peut donc, sans troubler l'inégalité, chasser le dénominateur positif $m^2 - 4$; on trouve

$$m^2 \sin A - 4m + 4 \sin A < 0.$$

Ce trinome en m a deux racines réelles, $2 \operatorname{cotg} \frac{A}{2}$ et $2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}$; l'angle A étant par hypothèse plus grand que 90°, $\frac{A}{2}$ est plus grand que 45°, et $2 \operatorname{cotg} \frac{A}{2}$ est la plus petite racine. D'ailleurs en remplaçant m par 2 on trouve le résultat négatif $8 \sin A - 8$; donc 2 est compris entre les racines. Donc puisque m doit être plus grand que 2 et être compris entre les racines du trinome, les conditions de possibilité sont

$$2 < m < 2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

2e *Cas.* $m < 2$ et A aigu.

On devra exprimer comme précédemment que

$$\omega H \leqslant \omega D.$$

Des calculs entièrement semblables aux précédents conduisent encore à la condition

$$(4 + m^2) \sin A \leqslant 4m,$$

ou

$$m^2 \sin A - 4m + 4 \sin A \leqslant 0.$$

Cette fois la plus petite racine est $2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}$, puisque A est plus petit que 45° ; 2 est toujours compris entre les racines ; comme m doit être plus petit que 2, la condition de possibilité est donc

$$2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} < m < 2.$$

(L. TARRIN, à Naves.)

[Ont résolu la même question : MM. A. B., à Reims ; A. Ballé ; E. Bordas ; A. Bouzy ; Bréthous-Guichot ; L. Curt ; L. Cussenot ; G. Dazier ; Feintuch ; Fontaine ; E. Garès ; L. Gourdet ; L. Hémois ; Jouanneau ; A. Jupeau ; Laguarigue de Survilliers ; F. Leulliot ; D. Limongelli ; E. Madet ; de Mendiry ; H. Michel ; F. Morel ; A. Nayel ; F. Pégorier ; J. Pillard ; J. Plisson ; Raynaud ; Remondet ; de Sabbathier ; E. Sevin ; E. Sinturel ; V. R. T. ; B. Verbuigge ; Vial.]

4494. — *On considère tous les couples de cercles passant pa deux points fixes* A *et* B, *et on détermine leurs centres d'homothétie* S *et* S′.

1° O *et* O′ *étant les centres de deux de ces cercles, démontrer que le cercle circonscrit au triangle* OAO′ *est orthogonal au cercle de diamètre* SS′ ;

2° *Trouver le minimum de* SS′ ;

3° *Trouver le lieu des centres des cercles* OAO′, *lorsque les quatre points* A, B, S, S′ *sont supposés fixes.*

1° Les centres d'homothétie S et S' des deux cercles de centres O, O' sont deux points de la ligne OO' tels que

$$\frac{SO}{SO'} = \frac{S'O}{S'O'} = \frac{AO}{AO'}.$$

Par suite les droites AS, AS' ne sont autres que les bissectrices de l'angle en A du triangle AOO'. Ces bissectrices étant comme on sait à angle droit, le cercle de diamètre SS' passe par A; il s'agit alors de montrer que le centre ω de ce cercle est situé sur la tangente en A au cercle C circonscrit au triangle AOO' ou, ce qui revient au même, que l'on a

$$\overline{\omega A}^2 = \omega O . \omega O'.$$

Or les points O et O' divisant harmoniquement le segment SS', on peut écrire

$$\omega O . \omega O' = \overline{\omega S}^2 = \overline{\omega A}^2.$$

C. q. f. d.

2° Parmi tous les cercles de diamètre SS' passant par les deux points fixes A et B, le plus petit est évidemment celui ayant AB pour diamètre; d'après le 1°, ce dernier cercle correspond à des couples de cercles O, O' tels que le cercle C, circonscrit au triangle AOO', est tangent en A à AB (en particulier le cercle de diamètre AB et la droite AB forment un de ces couples).

3° Les points A, B, S, S' étant supposés fixes, le cercle ω reste invariable. Tous les cercles OAO', orthogonaux au cercle fixe ω, ont donc leurs centres C sur la tangente en A au cercle ω. Il est facile de voir que la portion utile du lieu est extérieure au segment $C_1C'_1$, C_1 et C'_1 étant les positions du centre C pour lesquelles les points O et O' se confondent en S ou S'.

(G. SCHOONHEERE, école professionnelle de Vierzon.)

[Ont résolu cette question : MM. R. Dickson, à Angoulême ; H. L. ; Alfred Girondé, à Fougères ; M. Oger, à Poitiers ; P. Tribier, à Guéret.]

TRIGONOMÉTRIE

4290. — *Si les trois côtés d'un triangle* $a > b > c$ *forment une progression arithmétique de raison* r :

1° *On a* $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$.

2° *Le rayon du cercle inscrit est égal à* $\dfrac{2r}{3\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} - \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)}$.

Cas particulier où l'angle A *est droit.*

1° On a

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\rho}{p-a}, \qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{\rho}{p-c}, \qquad (1)$$

ρ désignant le rayon du cercle inscrit.

Par suite, $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{C}{2} = \dfrac{\rho^2}{(p-a)(p-c)}$,

ou, en observant que $\rho = \dfrac{S}{p} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$,

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{p-b}{p}.$$

Mais d'après l'hypothèse faite sur a, b, c,

$$2p = b + r + b + b - r = 3b;$$

donc $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{C}{2} = \dfrac{3b - 2b}{3b} = \dfrac{1}{3}$.

2° Des formules (1), on déduit

$$p - a = \frac{\rho}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}, \qquad p - c = \frac{\rho}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}},$$

puis, par soustraction,

$$a - c = \rho\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}} - \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}\right),$$

d'où $\rho = \dfrac{(a-c)\operatorname{tg}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A}{2} - \operatorname{tg}\frac{C}{2}}$.

Comme $a - c = b + r - (b - r) = 2r$ et $\operatorname{tg}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$, cette expression de ρ prend bien la forme annoncée :

$$\rho = \frac{2r}{3\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} - \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)}.$$

Examen du cas particulier $A = 90°$. — On a dans ce cas

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \operatorname{tg} 45° = 1,$$

et, en vertu de la première relation,

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3},$$

puis $\rho = r$,

ce qui montre que le rayon du cercle inscrit est alors égal à la raison de la progression.

(P. SICKLER, professeur à Marseille.)

[Ont résolu la même question : MM. Anastasiu ; E. Ardin-Delteil ; L. Barberot ; E. Baudot ; L. Blanc ; L. Bois ; V. Bourquin ; Boutignon ; A. Bouzy ; F. Brière ; B. Carrière ; C. Carteron ; E. Chaineau ; J. Coupat ; L. Delavergnas ; R. Dupland ; G. Fauvernier ; Feintuch ; Geltzenlichter ; L. Gourdet ; G. Hierlaux ; G. Jarreton ; E. Le Maigre ; F. Leulliot ; L. Magne ; A. Maître ; A. Maniez ; J. Méhu ; F. Morel ; A. Nayel ; Kornis Odon ; M. Rebeix ; E. Sinturel ; A. Smântânescu ; E. Vaicle ; Vial.

PHYSIQUE

4505. — *Sur le circuit d'une pile est intercalé un galvanomètre dont la résistance est* 10^{ω}. *On shunte ce galvanomètre par une résistance de* 2^{ω}. *On demande quelle doit être la résistance qu'il faut introduire dans le circuit principal pour que le courant y garde la même valeur que lorsque le galvanomètre était seul interposé.*

(*Bacc. lettres-sciences, Alger, juillet 1898.*)

L'introduction du shunt, en diminuant la résistance opposée au passage du courant, augmente son intensité.

Désignons par x la résistance à introduire pour que le courant principal ne soit pas modifié. La force électromotrice de la pile étant constante, l'intensité ne variera pas si la résistance totale ne varie pas.

Sans shunt, la résistance est $R + 10^{\omega}$ (en désignant par R la résistance du circuit). Le shunt établi, le courant se partage

entre les deux fils du galvanomètre de résistance 10^{ω} et du shunt de résistance 2^{ω}. On sait que, dans ce cas, les deux fils se comportent comme un seul dont la résistance est

$$\frac{10 \times 2}{10+2} = \frac{5^{\omega}}{3}.$$

Pour que l'intensité ne soit pas changée, il faut donc que l'on ait

$$R + 10 = R + x + \frac{5}{3},$$

d'où
$$x = 8^{\omega}\frac{1}{3}.$$

(H. DAMOISEAU, à Bar-sur-Seine.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Gernez ; R. Henry ; R. Mazières.]

4506. — *Une solution saline de densité 1,32 marque 35° à un aréomètre de Baumé. Quel poids d'eau faut-il ajouter à 100gr de la dissolution pour qu'elle marque 25°, en supposant nulle la contraction du mélange?*

(Bacc. lettres-math., Rennes, juillet 1898.)

Désignons par V le volume de l'aréomètre jusqu'au 0, par v le volume d'une division. L'instrument flottant dans l'eau affleure au 0 ; le volume de l'eau déplacée est alors V ; le poids de l'aréomètre est exprimé par le même nombre que V.

Dans la solution saline de densité 1,32, le volume déplacé est $V - 35v$; et comme le poids du liquide déplacé doit être égal au poids de l'aréomètre, on a

$$V = (V - 35v)\,1{,}32,$$

d'où
$$\frac{v}{V} = \frac{0{,}32}{35 \times 1{,}32}.$$

Soit d la densité de la solution après l'addition de l'eau; le volume déplacé sera $V - 25v$. On a donc

$$V = (V - 25v)d,$$

d'où
$$\frac{v}{V} = \frac{d-1}{25d}.$$

Egalant les deux valeurs du rapport $\frac{v}{V}$, il vient

$$\frac{0{,}32}{35 \times 1{,}32} = \frac{d-1}{25d},$$

d'où l'on tire
$$d = 1{,}209.$$

Soit x le poids de l'eau ajoutée; le poids total est alors $100 + x$ et le volume total $\frac{100}{1{,}32} + x$. On doit donc avoir

$$100 + x = \left(\frac{100}{1{,}32} + x\right)1{,}209,$$

d'où
$$x = 40^{gr},23.$$

(E. LE MAIGRE, à Pleyben.)

[Ont résolu la même question : E. Ardin-Delteil ; Bouby ; R. Bellencourt ; C. Bourvéau ; Chédaille : Ch. Doumerc ; G. Dubois ; E. Gernez ; C. Godard ; E. Hauville ; Hébrard ; R. Henry ; R. Lavallée ; A. Lescure ; Le Révérend ; P. Marion ; L. Rausch ; E. Roncaglia ; J. Thèbes ; Van Cauwenberghe.]

QUESTIONS PROPOSÉES

4517. — Résoudre le système d'équations

$$4(x^3 + y^3) = a^3 + 3ab^2,$$
$$x + y = a.$$

4518. — Construire un triangle rectangle d'hypoténuse donnée a, tel que la somme d'un des côtés de l'angle droit et de la hauteur soit égale à l'autre côté.

(A. CARON, professeur au collège de Blois.)

4519. — Les côtés d'un triangle sont en progression arithmétique de raison d ; R et r sont les rayons des cercles circonscrit et inscrit à ce triangle, a et c le plus petit et le plus grand côté ; démontrer les relations

$$6Rr = ac,$$
$$d = \sqrt{2r(R-2r)}.$$

4520. — Dans un triangle ABC on mène les bissectrices intérieures et extérieures $A\alpha$, $A\alpha'$; $B\beta$, $B\beta'$; $C\gamma$, $C\gamma'$, et on décrit les cercles de diamètres $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, qu'on appelle les cercles d'Apollonius du triangle ABC ; démontrer :

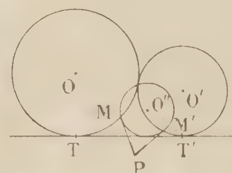
1° que ces trois cercles se coupent en deux points M et M' ;

2° que la droite MM' passe par le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ;

3° que la polaire de chacun des points M et M' par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC passe par l'autre point.

(P. BARROUÉ, lycée de Brest.)

4521. — On donne deux cercles O et O' tangents extérieurement en A. Soit TT' la tangente commune extérieure.



Un cercle variable O'' passant par A et tangent à TT' coupe les cercles O et O' en M et M'.

1° Lieu du pôle P de MM' dans le cercle O''.

2° Lieu du point de rencontre de PA avec le cercle O''.

3° Lieu du point de rencontre de PA avec MM'.

(A. D., à Castres.)

4522. — Lorsque $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$, on a

$$\frac{(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)(1+\operatorname{tg}\gamma)}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma} = 2.$$

4523. — Dans 2^{mc} d'eau à 20°, on condense de la vapeur d'eau à 100° et à la pression 76^{cm}, la température s'élève à 80° ; quel est le nombre de litres de vapeur d'eau qu'on a condensés ?

On prendra 537 pour la chaleur de vaporisation de l'eau à 100° et $\frac{5}{8}$ pour la densité de la vapeur d'eau.

(Bacc. lettres-math., Lille, juillet 1898.)

4524. — Le poids d'un échantillon de quartz aurifère est de 100^{gr} ; sa densité est de 8. On demande quel est le poids d'or qu'il renferme. La densité de l'or est de 19,36, celle du quartz est de 2,65.

(Bacc. lettres-sciences, Grenoble, juillet 1898.)

ERRATUM. — Problème 4492. — Il faut 110544 au lieu de 117264.

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

23e Année. — N° 10. JOURNAL Paris, le 15 Février 1899.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie **Nony** et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

NOTE RELATIVE A LA

DISTINCTION, SUR UNE SÉCANTE A UNE CONIQUE,

ENTRE LES POINTS INTÉRIEURS ET EXTÉRIEURS A CETTE COURBE

par M. **Vogt**, professeur à l'Université de Nancy.

La lecture de l'excellent *Traité de Géométrie* de M. Guichard m'a suggéré une démonstration, que je crois nouvelle, du théorème qui fait l'objet de cette note, théorème que l'on considère trop souvent comme évident sans se donner la peine de le déduire logiquement des définitions. Je pense qu'elle pourra intéresser les professeurs aussi bien que les élèves. Je suppose connue la construction classique des points de rencontre d'une droite et d'une conique, et la définition des points intérieurs ou extérieurs à une telle courbe.

Théorème. — *Si une droite n'a aucun point commun avec une conique, tous ses points sont extérieurs à cette courbe.*

Si une droite a un seul point commun avec une ellipse, ou bien avec une parabole sans être parallèle à l'axe de cette courbe, ou encore avec une hyperbole sans être parallèle à une asymptote, tous ses points, sauf le point commun, sont extérieurs à la courbe.

Si une droite a deux points communs avec une ellipse ou une parabole, tous les points du segment compris entre ces deux points sont intérieurs à la courbe, et tous les autres points de la droite lui sont extérieurs.

Si une droite a deux points communs avec une hyperbole, tous les points du segment compris entre ces deux points sont intérieurs à la courbe et tous les autres extérieurs, ou inversement, suivant que la parallèle à la droite menée par le centre est comprise dans les angles des asymptotes qui ne renferment pas les sommets, ou dans les angles qui renferment ces points.

Je considérerai successivement le cas de la parabole, de l'ellipse et de l'hyperbole.

1° Parabole.

Une droite D non parallèle à l'axe n'a aucun point commun avec la courbe, en a un ou bien deux, suivant que le symétrique φ du foyer F par rapport à cette droite est par rapport à la directrice HH' du côté opposé au foyer, ou bien sur la directrice, ou bien du même côté que le foyer.

Dans le premier cas (*fig.* 1), le cercle décrit d'un point quelconque P de la droite comme centre, avec PF comme rayon, passe par φ et coupe la directrice; le point P est donc plus près de la directrice que du foyer, et est extérieur à la parabole.

Dans le second cas (*fig.* 2), le seul point commun à la droite et à la parabole est le point M de rencontre de la droite et de la parallèle à l'axe menée par φ; le cercle décrit d'un autre point

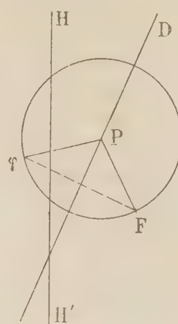


Fig. 1

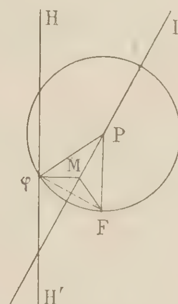


Fig. 2

P de la droite comme centre, avec PF comme rayon, passe par φ et coupe la directrice; le point P est extérieur à la courbe.

Dans le troisième cas (*fig.* 3), on décrit du point de rencontre Q

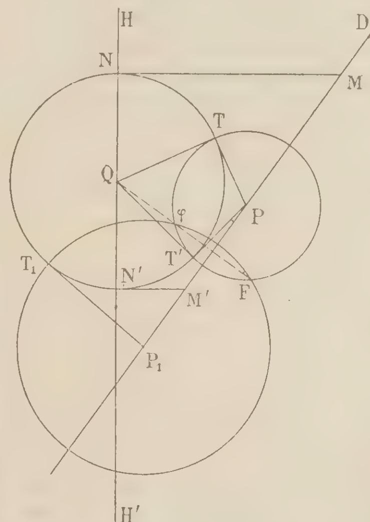


Fig. 3

de Fφ avec la directrice une circonférence dont le rayon est la moyenne proportionnelle entre Qφ et QF; elle coupe la directrice HH' en deux points N, N', et les parallèles à l'axe menées par ces points coupent la droite D en ses points M, M' communs avec la parabole.

Remarquons que la circonférence de centre Q que l'on vient de tracer ne coupe pas la droite D et coupe orthogonalement tous les cercles passant par F et φ, d'après la construction de son rayon.

Si l'on prend alors sur D un point P entre M et M', la circon-

férence de centre P et de rayon PF passe par φ et est orthogonale à la circonférence Q ; elle la coupe aux points de contact T et T' des tangentes qu'on peut lui mener du point P, et est tangente en ces points aux deux côtés de l'angle TQT' ; mais, d'après la position de P, T et T' sont tous les deux sur la demi-circonférence de diamètre NN' située du même côté que F ; par suite la circonférence de centre P, qui est tout entière dans l'angle TQT', ne peut couper la directrice, et le point P est plus près du foyer que de la directrice, ce qu'il fallait démontrer.

Si l'on prend maintenant sur D un point P_1 en dehors du segment MM', l'une des tangentes menées de ce point à la circonférence Q aura son point de contact T_1 sur la demi-circonférence de diamètre NN' située du côté différent de F par rapport à la directrice ; la circonférence de centre P_1 et de rayon P_1F passera par φ et T_1 et coupera la directrice ; par suite P_1 sera plus près de la directrice que du foyer, et sera extérieur à la parabole.

Il n'y a rien à changer à ce raisonnement si les points F et φ sont intervertis sur la figure.

Le cas où la droite D est perpendiculaire à l'axe se traite immédiatement et est bien connu ; si M est le point commun à la droite et à la courbe (*fig.* 4), on a pour tout point P situé de côté différent de N par rapport à M

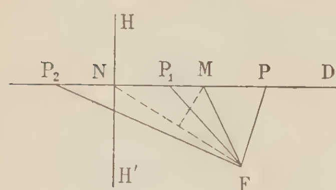


Fig. 4

$$PF < PM + MF \quad \text{ou} \quad < PN$$

et pour tout point P_1 ou P_2 situé du même côté que N par rapport à M

$$P_1F > MF - MP_1 \quad \text{ou} \quad > P_1N,$$
$$P_2F > MP_2 - MF \quad \text{ou} \quad > P_2N.$$

2° **Ellipse.**

Une droite D n'a aucun point commun avec la courbe, en a un ou bien deux suivant que le symétrique φ d'un foyer F par rapport à cette droite est en dehors du cercle directeur décrit de l'autre foyer F' comme centre, ou bien sur ce cercle, ou à son intérieur.

Dans le premier cas (*fig.* 5), tout point P de la droite est tel que $PF + PF'$ ou $P\varphi + PF'$ est supérieur au rayon du cercle directeur, et se trouve par suite à l'extérieur de la courbe. Il en est de même dans le deuxième cas (*fig.* 6), sauf si le point P est confondu avec le point M commun à la droite et à la courbe.

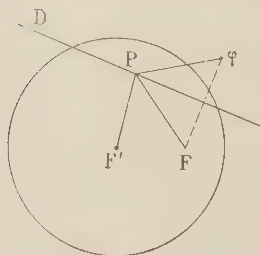


Fig. 5

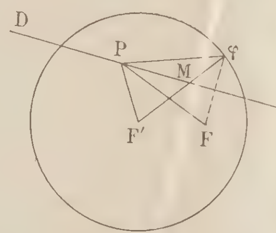


Fig. 6

Dans le troisième cas (*fig.* 7), on prend sur la droite $F\varphi$ le point Q situé à l'intersection de cette droite et de l'axe radical du cercle directeur de centre F' et d'un cercle quelconque passant par F et φ, et de ce point Q comme centre on décrit un cercle dont le rayon est la moyenne proportionnelle entre QF et $Q\varphi$; ce cercle, qui ne coupe pas la droite D, est orthogonal a tous les cercles passant par F et φ, et aussi au cercle directeur qu'il coupe en deux points N et N' ; les rayons F'N et F'N' coupent D aux deux points M et M' communs à cette droite et à l'ellipse.

Remarquons que ces points, qui sont les centres de cercles tangents intérieurement au cercle directeur aux points N et N', sont toujours situés sur les rayons F'N et F'N', de sorte que le segment MM' est toujours compris dans l'angle NF'N'.

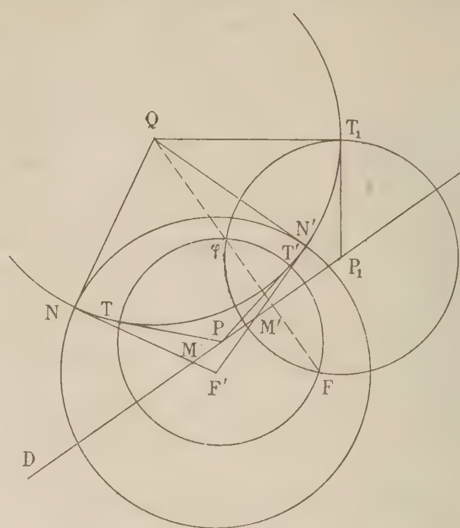


Fig. 7

Cela posé, si l'on prend sur la droite D un point P entre M et M' et si l'on mène de ce point les tangentes PT et PT' au cercle Q, les points de contact sont tous deux sur l'arc NN' intérieur au cercle directeur. La circonférence de centre P passant par F et φ passe aussi par T et T' et est orthogonale à la circonférence Q ; elle ne peut couper le cercle directeur, car l'axe radical de ce dernier cercle avec le cercle de centre P doit passer par Q et être perpendiculaire à la ligne des centres F'P ; il n'est donc pas dans l'angle NQN' et ne coupe pas le cercle directeur ; celui-ci n'a, par suite, aucun point commum avec le cercle P.

On en conclut que ce dernier cercle est tout entier intérieur au cercle directeur ; le rayon $2a$ de celui-ci est dès lors supérieur à la somme de la distance des centres F'P et du rayon PF, autrement dit le point P est intérieur à l'ellipse.

Si l'on prend maintenant un point P_1 sur la droite D en dehors du segment MM', l'une au moins des tangentes au cercle Q, telle que P_1T_1, a son point de contact en dehors du cercle directeur. Le cercle de centre P_1 passant par F et φ passe aussi par T_1, et la somme $P_1F' + P_1F$ ou $P_1F' + P_1T_1$ est supérieure à $F'T_1$ et *a fortiori* à $2a$, ce qui montre que le point P_1 est extérieur à la courbe.

Le même raisonnement s'applique au cas où la droite D coupe le segment FF' ; la figure, dans ce cas, est identique à la précédente dans laquelle on aurait interverti les deux lettres F et φ. Si la droite D passe par F', on peut changer le rôle des deux foyers F et F', ou faire un raisonnement direct qui ne présente aucune difficulté.

3° **Hyperbole.**

Une droite D non parallèle à une asymptote n'a aucun point commun avec la courbe, en a un, ou bien deux, suivant que le symétrique φ d'un foyer F par rapport à cette droite est à l'intérieur du cercle directeur ayant pour centre l'autre foyer, ou bien sur ce cercle, ou bien à l'extérieur. Si la droite $F\varphi$ est dans l'angle des tangentes au cercle directeur issues de F, la parallèle à D menée par le centre est comprise dans les angles des asymptotes qui ne renferment pas les sommets, et les deux points communs sont situés sur une même branche ; dans le cas contraire, la parallèle à D est comprise dans les autres angles des asymptotes

et les deux points communs sont situés sur deux branches différentes.

Dans le cas où φ est intérieur au cercle directeur (*fig.* 8), tout point P de la droite D est tel que $PF' - P\varphi$ ou $P\varphi - PF'$ est inférieur à $F'\varphi$ et *a fortiori* au rayon $2a$ du cercle directeur;

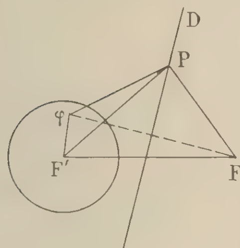


Fig. 8

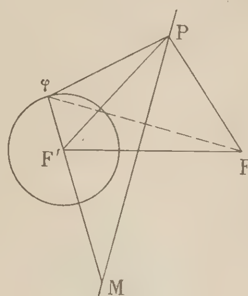


Fig. 9

comme $P\varphi$ est égal à PF, le point P est extérieur à la courbe. Il en est de même, dans le cas où φ est sur le cercle directeur, pour tout point P de la droite distinct du point M qu'elle a en commun avec l'hyperbole (*fig.* 9).

Dans les autres cas, les raisonnements sont entièrement analogues à ceux qui ont été faits dans le cas d'une ellipse et j'en

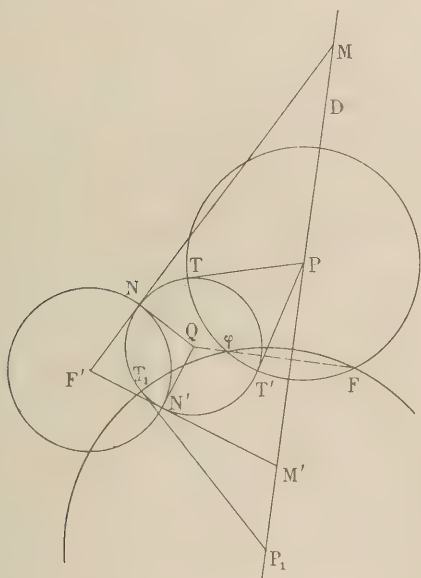


Fig. 10

indique simplement les résultats. Supposons d'abord (*fig.* 10) que la droite indéfinie $F\varphi$ coupe le cercle directeur, et que φ soit extérieur à ce cercle; on décrit le cercle de centre Q orthogonal à la fois au cercle directeur et à tous les cercles passant par F et φ, et les droites F′N, F′N′ déterminent les points communs M et M′ à la droite et à l'hyperbole; ils sont toujours sur les rayons F′N, F′N′ ou sur les prolongements de l'un et de l'autre au-delà de F′. Si l'on prend un point P entre M et M′, le cercle de centre P passant par F et φ ne coupe jamais le cercle directeur, de sorte que la distance des centres PF′ est supérieure à la somme des rayons $2a + PF$ ou inférieure à leur différence $PF - 2a$; dans tous les cas, P est intérieur à la courbe.

Au contraire, le cercle ayant pour centre un point P_1 extérieur au segment MM′, et passant par F et φ va passer par un point T_1 intérieur au cercle directeur, et P_1 est extérieur à l'hyperbole.

Si nous supposons maintenant (*fig.* 11) que la droite indéfinie $F\varphi$ ne coupe pas le cercle directeur, il suffit d'effectuer des constructions analogues aux précédentes, mais cette fois les points M et M′ sont situés l'un sur l'un des rayons F′N, F′N′, et l'autre sur le prolongement de l'autre rayon au-delà de F′; on voit alors,

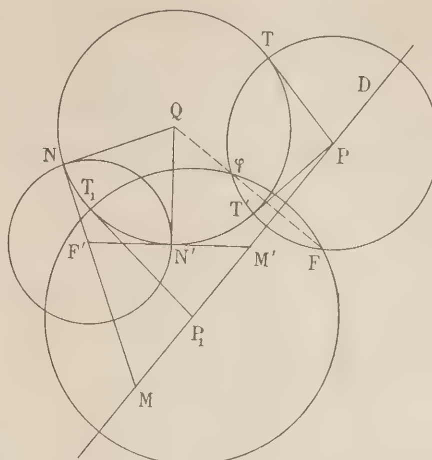


Fig. 11

en répétant les mêmes raisonnements, que tous les points P extérieurs au segment MM′ sont les centres de cercles passant par F et φ et ne coupant pas le cercle directeur; ces points sont intérieurs à la courbe; les points P_1 compris entre M et M′ sont au contraire les centres de cercles coupant le cercle directeur et sont extérieurs à l'hyperbole.

Le cas où la droite D est parallèle à une asymptote, c'est-à-dire où $F\varphi$ est tangente au cercle directeur, est analogue aux précédents, avec cette seule différence que l'un des points N ou N′ est confondu avec le point de contact de $F\varphi$ avec le cercle directeur, et que le point M correspondant n'existe plus, ou, comme on dit, est rejeté à l'infini. Les conclusions que l'on peut tirer dans ce cas sont assez simples et je laisse au lecteur le soin de les énoncer.

ALGÈBRE

3912. — *Décomposer en un produit de facteurs l'expression*

$$(x^3 - y^3 + 6x^2y + 3xy^2)^3 + (y^3 - x^3 + 6y^2x + 3yx^2)^3.$$

D'après la formule

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3,$$

l'expression peut s'écrire

$$[(x-y)^3 + 9x^2y]^3 + [-(x-y)^3 + 9xy^2]^3.$$

Si l'on applique maintenant la même formule au développement de chaque cube, il vient

$$(x-y)^9 + 27(x-y)^6x^2y + 9 \times 27(x-y)^3x^4y^2 + \overline{27}^2x^6y^3$$
$$-(x-y)^9 + 27(x-y)^6xy^2 - 9 \times 27(x-y)^3x^2y^4 + \overline{27}^2x^3y^6,$$

ou, en réduisant et mettant le facteur commun $27xy$ en évidence,

$$27xy[(x-y)^6(x+y) + 9(x-y)^3xy(x^2-y^2) + 27x^2y^2(x^3+y^3)].$$

Le facteur $x + y$ étant visiblement commun aux trois termes entre crochets, on peut le mettre en facteur et écrire l'expression sous la forme

$$27xy(x+y)[(x-y)^6 + 9(x-y)^4xy + 27x^2y^2(x^2+y^2-xy)].$$

D'ailleurs, comme $x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy$, la quantité

entre crochets s'écrit encore

$$(x-y)^6+9(x-y)^4xy+27(x-y)^2x^2y^2+27x^3y^3,$$

et sous cette forme elle représente visiblement le développement du cube de $(x-y)^2+3xy$, ou x^2+y^2+xy.

L'expression devient alors

$$27xy(x+y)(x^2+y^2+xy)^3.$$

(F. PÉGORIER, à Toulouse.)

[Ont résolu la même question : MM. J. Bordas, à Palisse ; P. Bresson, à St-Étienne ; H. Julien, à Laon ; R. Lacape, à Saintes.]

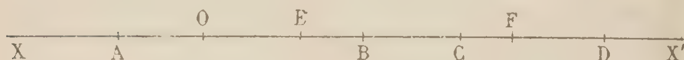
4400. — *On porte sur une droite orientée, à partir d'une origine arbitraire, quatre segments mesurés par les racines x_1 et x_2, x_3 et x_4 de deux équations du second degré*

$$ax^2+bx+c=0,$$
$$a'x^2+b'x+c'=0.$$

Trouver sur la droite un couple de points qui soient conjugués harmoniques aussi bien par rapport aux extrémités des segments x_1 et x_2 que par rapport à celles des segments x_3 et x_4.

Sur la droite orientée XX′ prenons les segments

$$\overline{OA}=x_1,\qquad \overline{OB}=x_2,\qquad \overline{OC}=x_3,\qquad \overline{OD}=x_4,$$



et posons $\overline{OE}=x$, $\overline{OF}=y$.

Pour que les points E, F soient conjugués harmoniques par rapport aux points A, B, on doit avoir

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}}=-\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}.$$

Or $\overline{EA}=\overline{OA}-\overline{OE}=x_1-x$, $\overline{FA}=\overline{OA}-\overline{OF}=x_1-y$,

$\overline{EB}=\overline{OB}-\overline{OE}=x_2-x$, $\overline{FB}=\overline{OB}-\overline{OF}=x_2-y$.

La condition précédente devient donc

$$\frac{x_1-x}{x_2-x}=-\frac{x_1-y}{x_2-y},$$

ou $2(x_1x_2+xy)-(x_1+x_2)(x+y)=0,$

ou, comme $x_1x_2=\frac{c}{a}$ et $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$,

$$2xy+\frac{b}{a}(x+y)+\frac{2c}{a}=0. \qquad (1)$$

En vertu de la relation (1), les points E, F seront également conjugués harmoniques par rapport au couple de points C, D, analogue au couple A, B, si l'on a

$$2xy+\frac{b'}{a'}(x+y)+\frac{2c'}{a'}=0. \qquad (2)$$

Des équations (1) et (2), on déduit facilement

$$x+y=-2\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'},\qquad xy=\frac{bc'-cb'}{ab'-ba'}.$$

x et y sont donc racines de l'équation

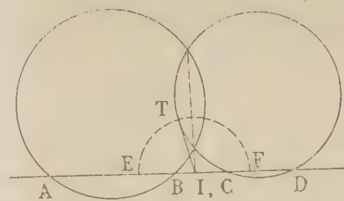
$$X^2+2\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}X+\frac{bc'-cb'}{ab'-ba'}=0.$$

Pour que les valeurs de x et y soient réelles, il faut et il suffit qu'on ait

$$\left(\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}\right)^2-\frac{bc'-cb'}{ab'-ba'}\geqslant 0,$$

ou $(ac'-ca')^2-(ab-ba')(bc'-cb')\geqslant 0. \qquad (3)$

Construction géométrique des points E, F. — Sur AB et CD comme cordes on construit deux cercles sécants ; on mène leur corde commune qui coupe AD en I, puis la tangente IT à l'un des cercles : le cercle de centre I et de rayon IT détermine sur AD les points cherchés. En effet, les relations



$$IA.IB=\overline{IT}^2=IC.ID$$

montrent que les couples de points A, B et C, D sont conjugués harmoniques par rapport au couple E, F.

La tangente IT n'existe (et par suite aussi les points E, F) qu'autant que le point I est extérieur aux deux cercles, ce qui exige que les points C, D soient placés d'un même côté par rapport à chacun des points A et B.

Cette condition se traduit algébriquement par l'inégalité (3), ainsi qu'on peut s'en assurer. La construction précédente est d'ailleurs celle qui détermine les points doubles de l'involution définie par les deux couples (A, B), (C, D).

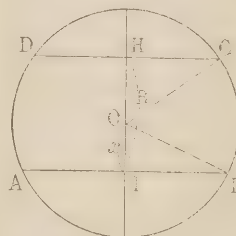
(A. ROUSSEL.)

[Ont résolu la même question : MM. Feintuch ; L. Gourdet ; M. Rebeix.]

4482. — *On considère un segment sphérique à deux bases parallèles appartenant à une sphère de rayon R. Déterminer les rayons des bases sachant que la hauteur du segment est égale à R et son volume à $\frac{1}{6}\pi m^3$. — Maximum et minimum de m^3 pour une valeur donnée de R.*

(*Bacc. lettres-math., Caen, novembre 1897.*)

On sait que le volume d'un segment sphérique équivaut au volume d'un cylindre de même hauteur dont la base est la moyenne arithmétique entre les deux bases, augmenté du volume d'une sphère de diamètre égal à la hauteur du segment.



On doit donc avoir

$$R\cdot\frac{\pi\overline{IB}^2+\pi\overline{HC}^2}{2}+\frac{\pi R^3}{6}=\frac{1}{6}\pi m^3,$$

ou $3R(\overline{IB}^2+\overline{HC}^2)+R^3=m^3.$

En posant $OI=x$ et en remarquant que, puisque $HI=R$, les deux points H et I sont de part et d'autre de O, les triangles rectangles OIB, OHC donnent

$$IB=\sqrt{R^2-x^2}\qquad\text{et}\qquad HC=\sqrt{R^2-(R-x)^2}. \qquad (1)$$

L'équation du problème est alors

$$3R[2R^2-x^2-(R-x)^2]+R^3=m^3,$$

ou $6Rx^2-6R^2x+m^3-4R^3=0.$

Discussion. — Pour qu'une valeur de x convienne, il faut et il suffit qu'elle soit réelle et comprise entre 0 et R. Une telle valeur, portée dans les formules (1), détermine les rayons des deux bases, dont les valeurs sont d'ailleurs visiblement réelles et moindres que R.

Formons $f(0)$, $f(R)$ et le discriminant Δ de l'équation (1) dont on représente le premier membre par $f(x)$. On obtient

$$f(0)=m^3-4R^3,$$
$$f(R)=m^3-4R^3,$$
$$\Delta=33R^6-6m^3.$$

Comme $f(0)$ et $f(\mathrm{R})$ sont de même signe, le cas d'une solution unique est à écarter.

Pour que le problème admette deux solutions, il faut et il suffit qu'on ait

$$f(0) > 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta > 0,$$

puisque la demi-somme $\frac{\mathrm{R}}{2}$ des racines est comprise entre 0 et R. Cette double condition se trouve remplie en prenant

$$4\mathrm{R}^3 \leqslant m^3 \leqslant \frac{11\,\mathrm{R}^3}{2}.$$

Lorsque m^3 prend sa valeur maximum $\frac{11\,\mathrm{R}^3}{2}$, $x' = x'' = \frac{\mathrm{R}}{2}$, et les rayons des deux bases ont pour valeur commune $\frac{\mathrm{R}\sqrt{3}}{2}$.

Lorsque m^3 prend sa valeur minimum $4\mathrm{R}^3$, on a

$$f(0) = f(\mathrm{R}) = 0, \quad x' = 0, \quad x'' = \mathrm{R}\,;$$

le segment sphérique devient alors un hémisphère.

(REMONDET, instituteur à Augisey.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Audiffret ; L. Aulagnier ; E. Bergeret ; C. Billionnet ; L. Bois ; E. Caiveau ; Cavaillé ; Donnadieu ; L. Ecoffard ; J. Fiton ; G. Foucry ; R. Hüe ; R. Henry ; H. Janois ; M. Jousset ; Lehmann ; E. Le Maigre ; A. Lescure ; P. Marion ; G. Nazare ; M. Oger ; L. Patin ; Ph. Plisson ; A. Popescu ; L. Pont ; Rivoire ; Eug. Rousset ; A. Sallin ; G. Schoonheere ; E. Séclin ; M. Teulié ; P. Tribier ; Vial ; Vien.]

4499. — *Décomposer* $3x^4 + y^4$ *en une somme de trois carrés.*

On a identiquement

$$\begin{aligned} 3x^4 + y^4 &= 2x^4 + x^4 + y^4 \\ &= 2x^4 + 2x^2y^2 + x^4 + y^4 - 2x^2y^2 \\ &= 2(x^4 + x^2y^2) + (x^2 - y^2)^2. \end{aligned}$$

En appliquant ensuite l'identité

$$2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2,$$

il vient

$$3x^4 + y^4 = (x^2 + xy)^2 + (x^2 - xy)^2 + (x^2 - y^2)^2.$$

On établirait de même la formule plus générale

$$(k^4 + 2)\,x^4 + y^4 = (x^2 + kxy)^2 + (x^2 - kxy)^2 + (k^2x^2 - y^2)^2.$$

(Ph. PLISSON, instituteur aux Brûleries.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Arcizet ; J. Bordas ; F. Deville ; R. Henry ; H. Janois ; Nibal ; P. P. F. ; Pinet-Libertie ; J. Sallaud ; A. Thorin.]

4512. — *Eliminer x et y entre les équations*

$$x + \frac{1}{x} = a, \tag{1}$$

$$y + \frac{1}{y} = b, \tag{2}$$

$$xy + \frac{1}{xy} = c. \tag{3}$$

Première solution. — On peut considérer les équations (2) et (3) comme formant un système du premier degré par rapport à y et $\frac{1}{y}$. Pour déduire y et $\frac{1}{y}$ de ce système, multiplions successivement les deux membres de l'équation (2) par x et $\frac{1}{x}$, puis retranchons de chaque résultat membre à membre l'équation (3) ; nous aurons ainsi

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{y} = bx - c,$$

$$\left(\frac{1}{x} - x\right)y = \frac{b}{x} - c.$$

En multipliant membre à membre ces deux équations, on élimine y, et il vient

$$-\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = (bx - c)\left(\frac{b}{x} - c\right),$$

ou, en développant le second membre et tenant compte de (1),

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = abc - b^2 - c^2. \tag{4}$$

Il reste alors à éliminer x entre l'équation (4) et l'équation

$$x + \frac{1}{x} = a. \tag{1}$$

Pour cela, il suffit de retrancher l'équation (4) de l'équation (1) élevée au carré ; on obtient ainsi la relation cherchée :

$$4 = a^2 - (abc - b^2 - c^2)$$

ou

$$abc + 4 = a^2 + b^2 + c^2.$$

(CHOLLET, instituteur à Largeane.)

Seconde solution. — Multiplions membre à membre (1) et (2) et retranchons (3) du résultat. Il vient

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = ab - c. \tag{4}$$

Si l'on multiplie maintenant (3) et (4) membre à membre, on obtient

$$\left(xy + \frac{1}{xy}\right)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = c(ab - c),$$

ou

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} = abc - c^2.$$

Or de (1) et (2) on déduit par l'élévation au carré,

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2, \qquad y^2 + \frac{1}{y^2} = b^2 - 2.$$

La relation précédente devient donc

$$a^2 - 2 + b^2 - 2 = abc - c^2,$$

ou

$$a^2 + b^2 + c^2 = abc + 4.$$

(P. LE VERRIER, lycée Janson de Sailly.)

[Ont résolu la même question : MM. Ed. Ardin-Delteil, à Montpellier ; Bily-Méheust, école normale de St-Brieuc ; L. Bois, école nationale professionnelle de Vierzon ; J. Chapron, commis des postes, à Lyon ; H. Carpentier, lycée de Charleville ; R. Henry, instituteur à Ste-Savine ; R. Hüe ; J. Sallaud, pensionnat N.-D. de Toutes-Aides, à Doulon ; R. Van Cauwenberghe ; F. Vérot, école professionnelle de St-Etienne.]

GÉOMÉTRIE

4481. — *On considère dans un plan les trapèzes isocèles dont un des côtés égaux* AB *reste fixe et dont les diagonales* AC *et* BD *ont une même longueur donnée.*

1° *Trouver le lieu géométrique du point de rencontre des diagonales.*

2° *Déterminer celui de ces trapèzes qui a le périmètre minimum.*

(*Bacc. lettres-math., Bordeaux, novembre 1897.*)

1° Soit I un point du lieu. Le triangle BIC étant isocèle, on a

$$IB = IC,$$

et en ajoutant AI de part et d'autre,

$$AI + IB = AI + IC = AC.$$

La somme des distances du point I aux points fixes A, B est ainsi égale à la longueur donnée des diagonales. Le lieu de I est donc une ellipse dont les foyers sont A et B et le grand axe égal à AC.

2° Le minimum du périmètre ABCDA est évidemment atteint en même temps que la somme AD + BC des deux côtés variables.

Or le trapèze isocèle ABCD étant inscriptible, on peut lui appliquer le théorème de Ptolémée, ce qui donne

$$AD.BC + \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2,$$

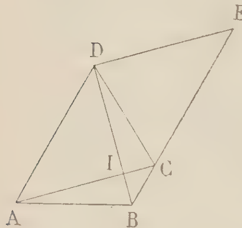
ou

$$AD.BC = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2.$$

Les deux bases variables AD, BC ont ainsi un produit constant ; le minimum de leur somme sera donc atteint lorsque ces bases seront égales, ce qui transforme le trapèze en un rectangle.

(E. MÉLINE, à Remiremont.)

Autre solution de la seconde partie. — Par D menons la parallèle à AC qui coupe le côté BC prolongé en E. Comme AD = CE, la somme AD + BC est représentée par BE. Or BE étant la base du triangle isocèle BDE, dont les côtés égaux sont constants, devient minimum en même temps que l'angle opposé BDE ou que son égal BIC. Le minimum de l'angle BIC correspond d'ailleurs au maximum de son supplément AIB. Ce dernier angle étant l'angle formé par les rayons vecteurs du point I devient maximum lorsque I se confond avec l'un des sommets du petit axe de l'ellipse ; les diagonales AC, BD se coupent alors en leurs milieux, et le trapèze prend la forme d'un rectangle.



(P. COULBOIS, aux Voves.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Audiffret ; L. Barberot ; R. Bellencourt ; E. Bergeret ; L. Bois ; E. Bouby ; A. Brodbeck ; G. Canel ; H. Carpentier ; R. Dickson ; Donnadieu ; L. Ecoffard ; G. Foucry ; A. Girondé ; R. Hüe ; Javelot ; M. Jousset ; J. Lacampagne ; G. Lallier ; J. Lamotte ; F. Le Goïc ; A. Lescure ; H. Lorcerie ; L. Michel ; M. Oger ; A. Pichon ; Ph. Plisson ; Pouzet ; J. Rigal ; E. de Rycker ; J. de St-Julien ; G. Schoonheere ; G. Simonard ; J. Sire ; G. Tastet ; G. Trannoy ; P. Tribier ; Vial.]

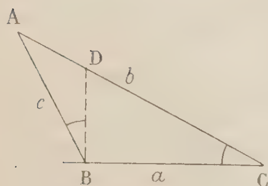
4502. — *Si, dans un triangle,* $B - C = \frac{\pi}{2}$, *on a*

$$\frac{2}{a^2} = \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} ;$$

le démontrer géométriquement.

De l'hypothèse $B - C = \frac{\pi}{2}$, il résulte que si l'on mène dans l'angle B une droite faisant avec l'un des côtés AB ou BC l'angle C, cette droite est perpendiculaire à l'autre côté. Cette remarque conduit à l'une des deux démonstrations suivantes.

Première démonstration. — Menons BD perpendiculaire à BC. L'angle ABD est égal à l'angle C, d'après ce qui précède; les triangles ABD, ACB ayant ainsi un angle commun et un angle égal sont semblables. On peut donc écrire



$$\frac{AD}{c} = \frac{BD}{a} = \frac{c}{b},$$

d'où

$$AD = \frac{c^2}{b}, \qquad BD = \frac{ac}{b}.$$

D'ailleurs le triangle BDC, rectangle en B, donne

$$\overline{DC}^2 = a^2 + \overline{BD}^2,$$

ou, en remplaçant BD par $\frac{ac}{b}$ et DC par $b - AD = b - \frac{c^2}{b}$,

$$\left(b - \frac{c^2}{b}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2c^2}{b^2},$$

ou

$$(b^2 - c^2)^2 = a^2(b^2 + c^2).$$

Comme

$$b^2 - c^2 = (b-c)(b+c) \quad \text{et} \quad b^2 + c^2 = \frac{(b-c)^2 + (b+c)^2}{2},$$

cette dernière relation s'écrit

$$2(b-c)^2(b+c)^2 = a^2[(b-c)^2 + (b+c)^2],$$

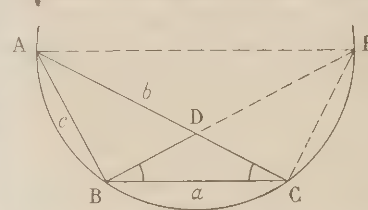
ou

$$\frac{2}{a^2} = \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(b-c)^2}.$$

C. q. f. d.

(P. MAZIÈRES, petit séminaire de Carcassonne.)

Seconde démonstration. — La droite BD, perpendiculaire à AB, fait ici avec BC un angle égal à l'angle C, de sorte que le triangle BCD est isocèle. Par suite, si l'on trace le cercle circonscrit au triangle ABC, qui coupe BD prolongé en E, les arcs CE, AB sont égaux comme sous-tendus par des angles inscrits égaux. Le quadrilatère ABCE est donc un trapèze isocèle et en lui appliquant le théorème de Ptolémée, on a



$$b^2 = c^2 + a.AE,$$

d'où

$$AE = \frac{b^2 - c^2}{a}.$$

Mais AE est l'hypoténuse du triangle rectangle ACE dont les côtés de l'angle droit sont $AC = b$ et $CE = c$; donc

$$\overline{AE}^2 = b^2 + c^2,$$

et, en remplaçant AE par sa valeur,

$$\frac{(b^2 - c^2)^2}{a^2} = b^2 + c^2,$$

relation d'où l'on déduit comme plus haut la relation énoncée.

(CHOLLET, à Largeasse.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Arcizet ; L. Barberot ; L. Bois ; J. Bordas ; C. Bourvéau ; G. Charpentier ; Chédaille ; L. Curt ; G. Delahaye ; R. Dickson ; J. Ectors ; G. Foucry ; E. Gernez-Pfanmatter ; Ch. Godard ; M. Gondran ; L. Hébrard ; R. Henry ; H. Janois ; M. Jousset ; H. Lefèvre ; Le Révérend ; H. L. ; Pouzet ; J. de St-Julien ; J. Sallaud ; G. Tastet ; Thèbes ; R. Van Cauwenberghe ; Venet ; F. Lalescu ; L. Rausch.]

4503. — *Lorsque sur une circonférence les points* C *et* D *sont conjugués harmoniques par rapport aux points* A *et* B :

1° *La moitié de la droite* AB *est moyenne proportionnelle entre les distances de son milieu* O *aux deux points conjugués* C *et* D, *et réciproquement ;*

2° *On a* $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$, *et réciproquement.*

1° Par définition les points A, B, C, D sont les points de rencontre de la circonférence avec un faisceau harmonique ayant son sommet en un point quelconque de cette circonférence.

Si donc on prolonge la droite CO jusqu'à son second point de rencontre, D', avec la circonférence, le faisceau D'(ACBD) est harmonique; la droite AB étant divisée en parties égales par trois des rayons de ce faisceau, est parallèle au quatrième rayon D'D, d'où il suit que le triangle OD'D est isocèle et que $OD' = OD$. Donc

$$OA.OB = OC.OD',$$

ou

$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = OC.OD.$$

Réciproquement, si cette relation est satisfaite, on a

$$OC.OD = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = OC.OD', \qquad \text{ou} \qquad OD = OD';$$

on conclut de là que D'D est parallèle à AB, et par suite que le faisceau D'(ACBD) est harmonique.

2° En considérant les triangles semblables AOC, D'OB, on a

$$\frac{AC}{BD'} = \frac{AO}{OD'},$$

ou, comme $BD' = AD$ et $OD' = OD$,

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AO}{OD}.$$

On aurait de même

$$\frac{BC}{BD} = \frac{OB}{OD}.$$

Ces deux égalités ayant des seconds membres égaux, on en déduit

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}.$$

Réciproquement, lorsque $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$, les points C, D sont conjugués harmoniques par rapport à A, B. En effet, d'après ce qu'on vient de voir, le conjugué harmonique D_1 de C par rapport à A, B est tel que

$$\frac{CA}{CB} = \frac{D_1A}{D_1B};$$

donc

$$\frac{DA}{DB} = \frac{D_1A}{D_1B},$$

ce qui n'est possible que si D se confond avec D_1, autrement la circonférence donnée aurait plus de deux points communs avec la circonférence lieu des points M du plan tels que

$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB}.$$

(CHÉDAILLE, lycée de Laon.)

[Ont résolu la même question : MM. H. L. ; G. Tastet ; A. Thorin.]

TRIGONOMÉTRIE

4516. — *Montrer que* $\sin\frac{\pi}{10} \cdot \sin\frac{13\pi}{10} = -\frac{1}{4}$.

Deux arcs supplémentaires ayant même sinus,

$$\sin\frac{13\pi}{10} = \sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right) = -\sin\frac{3\pi}{10},$$

et l'égalité à démontrer revient à

$$\sin\frac{\pi}{10} \cdot \sin\frac{3\pi}{10} = \frac{1}{4}.$$

Or $\sin\frac{\pi}{10}$ représente la moitié du côté du décagone régulier, et $\sin\frac{3\pi}{10}$ la moitié du côté du décagone régulier étoilé ; donc

$$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

$$\sin\frac{3\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\sin\frac{\pi}{10} \cdot \sin\frac{3\pi}{10} = \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}{16} = \frac{5-1}{16} = \frac{1}{4}.$$

C. q. f. d.

(P. LE VERRIER, lycée Janson de Sailly.)

[Ont résolu la même question ; Mlle M. Pont ; MM. A. Amblard ; A. Arcizet ; Ed. Ardin-Delteil ; L. Barberot ; C. Billionnet ; L. Bois ; J. Bois ; E. Bouby ; Boudeville; A. Brodbeck ; G. Canel ; P. Catinat ; G. Charpentier ; G. Chédaille ; G. Chollet ; J. Danchaud ; P. Delolme ; G. Desplats ; P. Deville ; R. Dickson ; L. Ecoffard ; G. Foucry ; E. Gernez-Pfanmatter ; C.-N. Georgescu ; A. Girondé ; M. Gondran ; Petrus Gutton ; R. Henry ; R. Hüe ; H. Janois ; Ed. Kornis ; J.-M. Lagarde ; F. Lalescu ; G. Lallier ; J. Lamotte ; E. Le Maigre ; C. Nazare ; Le Révérend ; A. Lescure ; C. Marandon ; C. Marie ; P. Marion ; M. Oger ; J. Pariset ; J. Pila : M. Pinçon ; A. Popescu ; Poujol ; Quilichini ; Raynaud ; H. Roure ; G. Schoonheere ; G. Tastet ; R. Van Cauwenberghe ; J. Vignier ; B. Carrière ; J. Coupat ; J. Fiton.]

PHYSIQUE

4507. — *Un cylindre disposé verticalement dans l'air est fermé à la partie inférieure par une paroi rigide et fixe, et à la partie supérieure par un piston P, parfaitement mobile, qui pèse sur le gaz contenu dans ce cylindre et le comprime. Le gaz occupe dans le cylindre une hauteur de* 60cm.

On retourne l'appareil de manière à placer le haut en bas. Le piston descend de 5cm, *la température étant restée constante.*

On demande quel est le poids de ce piston.

La pression atmosphérique est mesurée par une colonne de mercure de 75cm *à* 0°.

Densité du mercure 13,6.

La section du cylindre est de 75cq.

(*Bacc. lettres-math., Paris, juillet 1898.*)

Soient P le poids du piston, h la pression du gaz contenu dans le cylindre lorsque celui-ci occupe sa première position, h' la pression de ce gaz lorsqu'on a renversé le cylindre, enfin H la pression atmosphérique.

Lorsque le piston est au-dessus du gaz et le comprime, le poids du piston, augmenté de la pression atmosphérique, fait équilibre à la pression du gaz contenu dans le cylindre. On a donc

$$h = P + H. \qquad (1)$$

Lorsqu'on renverse le cylindre, on a

$$H = h' + P. \qquad (2)$$

Désignons par s la section du cylindre. Dans le premier cas, le gaz occupe un volume $60s$ sous la pression h; dans le second cas, cette même masse de gaz occupe un volume $65s$ sous la pression h'. Appliquons la loi de Mariotte :

$$60sh = 65sh',$$

d'où

$$h' = \frac{12h}{13}.$$

Portons cette valeur dans l'équation (2), il vient

$$H = \frac{12h}{13} + P,$$

d'où $$h = \frac{13H - 13P}{12}.$$

L'équation (1) donne alors

$$p = \frac{H}{25}.$$

H représente une colonne de mercure de 75^{cm} de hauteur et d'une section de 75^{cq}. On a donc

$$H = (75)^2 \times 13,6.$$

Par suite $$P = \frac{(75)^2 \times 13,6}{25} = 3060^{gr}.$$

(M. GONDRAN, lycée de Caen.)

[Ont résolu la même question : MM. Arcizet ; Ardin-Delteil ; Aulagnier ; E. Baudot ; E. Baudouin ; Billionnet ; L. Bois ; J. Bordas ; C. Bourveau ; E. Bouby ; J. Bouvier ; G. Canel ; P. Calinat ; G. Charpentier ; R. Coural ; Danchaud ; R. Depasse ; Doumerc ; Ecoffard ; Girardeau ; Girondé ; A. Guichon ; Hébrard ; R. Henry ; Hubert ; R. Hüe ; M. Jousset ; R. Lavallée ; Lescure ; E. Le Maigre ; P. Marion ; Mathieu ; Mazieres ; Ménéchal ; G. Moro ; Nuzeret ; M. Oger ; M. Pinçon ; A. Prost ; Raynaud ; J. Sallaud ; Schoonheere ; Texonnière ; Venet ; Viest.]

4510. — *On dispose d'un certain nombre d'éléments de pile ayant chacun 1^{ohm} de résistance intérieure et 2^{volts} de force électromotrice. Combien doit-on associer en tension de ces éléments pour obtenir un courant de $\frac{1}{2}$ ampère avec une résistance extérieure à la pile de 54^{ohms} ?*

Quelle est la quantité de chaleur dégagée en une minute dans le fil conjonctif de 54^{ohms}, sachant qu'un courant d'un ampère dégage en une seconde dans un fil d'un ohm $\frac{1}{4,18}$ de petite calorie ?

(*Bacc. lettres-math., Paris, octobre 1898.*)

1° L'intensité du courant produit par un certain nombre d'éléments de pile associés en série ou tension est exprimée par la formule

$$I = \frac{xe}{xR + r},$$

dans laquelle x désigne le nombre d'éléments, e et R la force électromotrice et la résistance intérieure de chaque élément, r la résistance extérieure.

On a donc, en remplaçant les lettres par leur valeur,

$$\frac{1}{2} = \frac{2x}{x + 54},$$

d'où $$x = 18.$$

Il faut donc grouper 18 éléments en tension.

2° D'après la loi de Joule, la quantité de chaleur dégagée dans un circuit en une seconde par le courant électrique est proportionnelle au carré de l'intensité du courant et à la résistance du conducteur :

$$Q = \frac{I^2 rt}{4,18}.$$

Comme $I = \frac{1}{2}$, $r = 54$, $t = 60$, il vient

$$Q = \frac{\frac{1}{4} \times 54 \times 60}{4,18} = 193^{cal},779.$$

(E. LE MAIGRE, à Pleyben.)

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil ; Aulagnier ; L. Barberot ; Beynas ; C. Billionnet ; Bordas ; Borgey ; Bouvier ; E. Chedeville ; Coupat ; Doumerc ; Ecoffard ; J. Fiton ; P. Girard ; E. Gernez ; R. Henry ; Hubert ; M. Jousset ; P. Marion ; F. Montaland ; Nuzeret ; M. Oger ; G. Le Page ; M. Pinçon ; A. Prost ; J. Sallaud ; Schoonheere ; G. Tastet ; Turpain ; Venet ; J. Desplat.]

QUESTIONS PROPOSÉES

4525. — Démontrer que si m, n, $\frac{mn}{m+n}$ sont des nombres entiers, D le plus grand commun diviseur de m et n, m' et n' les quotients de m et n par D, D est divisible par la somme $m' + n'$.

(A. Redon, école normale de Châteauroux.)

4526. — Résoudre le système

$$3^{1-x-y} = 4^{-y},$$
$$2^{2x-y} = 3^{3y-x}.$$

4527. — Dans un triangle, au plus grand angle correspond la plus petite hauteur. (Ne pas se servir de l'expression ordinaire de l'aire d'un triangle.)

(A. Moreaux, lycée de Nancy.)

4528. — La somme des perpendiculaires abaissées d'un point d'un côté d'un triangle sur les deux autres côtés varie entre les hauteurs correspondant à ces deux derniers. — Cas où le point est sur le prolongement du côté considéré, dans un sens ou dans l'autre.

(A. Moreaux.)

4529. — On considère un triangle ABC et le cercle inscrit tangent en D, E, F aux côtés BC, CA, AB. Démontrer que les trois droites DA, DE, DF interceptent des segments égaux sur toute parallèle au côté BC.

Si l'on remplace le cercle inscrit par l'un des cercles exinscrits la relation est-elle encore vraie ?

(G. Bieber, collège Chaptal.)

4530. — Lorsque, dans un quadrilatère ABCD, l'un des côtés AB passe par le centre du cercle circonscrit au triangle CDF que forment les trois autres côtés, les cercles décrits sur les diagonales AC, BD, EF du quadrilatère comme diamètres passent tous par deux points P et P', qui appartiennent l'un au cercle circonscrit au triangle CDF, l'autre au cercle des neuf points relatif au même triangle.

Déduire de ce théorème la construction du quadrilatère ABCD, connaissant le triangle CDF formé par trois des côtés et sachant que le quatrième côté AB passe par le centre du cercle CDF et détermine le triangle BCE ayant le centre du cercle circonscrit sur le côté AD.

(C. Blanc, professeur à Lyon.)

4531. — Démontrer que

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{A}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{A}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin A.$$

4532. — Une balance porte à une extrémité du fléau un ballon de verre fermé dont le volume extérieur est 1500^{cc}, équilibré à l'autre extrémité par une masse en laiton qui, dans le vide, pèse 122^{gr}. Calculer la force qui fera pencher la balance lorsqu'on porte le tout dans une atmosphère composée à volumes égaux d'air et de gaz d'éclairage.

Densité du laiton	8,5,
Densité du gaz d'éclairage par rapport à l'air . . .	0,6.
Poids d'un centimètre cube d'air	$1^{mmgr},3$.

On admettra que l'air et le mélange gazeux sont à 0° et 760^{mm}.

(*Bacc. lettres-math., Montpellier, juillet 1898.*)

4533. — Dans un baromètre à cuvette de rayon indéfini on introduit un centigramme de gaz carbonique ; on demande de combien baissera le mercure dans le tube, sachant que la pression est normale et que la longueur du tube au-dessus du mercure est 1^m.

Section du tube.	1^{cq}.
Densité de CO^2	1,524.

(*Bacc. lettres-math., Besançon, juillet 1898.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

23e Année. — N° 11. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 1er Mars 1899.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numeros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

Abonnements.... Librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

SUR LA DIVISION EN ARITHMÉTIQUE

Par M. **G. Fontené**, professeur au collège Rollin.

I

Au début de l'arithmétique, on définit la division exacte, quand elle est possible, par la relation

$$\text{Diviseur} \times \text{Quotient} = \text{Dividende}, \qquad (1)$$

c'est-à-dire que l'on se place au point de vue qui a donné le mot *quotient* ; on observe que l'on peut écrire

$$\text{Quotient} \times \text{Diviseur} = \text{Dividende}, \qquad (1')$$

ce qui correspond à l'idée de partage, et explique les mots *dividende* et *diviseur*. Si la division exacte est impossible, on définit le quotient entier (qui sera plus tard la partie entière du quotient exact) par les inégalités

$$B \times Q < A < B \times (Q+1), \qquad (2)$$

d'où résulte

$$A = B \times Q + R, \qquad R < B; \qquad (3)$$

on observe que l'on peut écrire

$$Q \times B < A < (Q+1) \times B, \qquad (2')$$

$$A = Q \times B + R. \qquad (3')$$

Il importerait, dans la suite, de rester fidèle au point de vue initial, et de dire par exemple, dans la théorie des fractions : Le quotient est le nombre *par lequel on doit multiplier* le diviseur pour reproduire le dividende, tandis que l'on dit souvent : Le quotient est le nombre qui, multiplié par le diviseur, donne un produit égal au dividende. Par exemple, lorsqu'on veut démontrer que l'on a

$$3 : 7 = \frac{3}{7},$$

avec la définition (1), on doit démontrer

$$7 \times \frac{3}{7} = 3,$$

ou

$$\frac{3}{7} \text{ de } 7 = 3,$$

ce qui est à peu près évident ; tandis que, avec la définition (1'), on doit démontrer

$$\frac{3}{7} \times 7 = 3,$$

ou

$$\frac{3 \times 7}{7} = 3,$$

ou

$$\frac{7 \times 3}{7} = 3,$$

ou

$$\frac{7}{7} \times 3 = 3;$$

on a dû changer l'ordre des facteurs d'un produit d'entiers, parce que ce changement est celui qui fait passer de (1') à (1).

La même observation s'applique aux quotients approchés de la théorie des nombres décimaux, et l'on doit écrire par exemple

$$B \times \frac{m}{100} < A < B\,\frac{m+1}{100}. \qquad (4)$$

La notion de rapport, qui termine l'arithmétique élémentaire, confirme cette manière de voir. On dit que le rapport de a à b est $\frac{2}{3}$ si l'on a

$$a = \frac{2}{3} \text{ de } b,$$

ou

$$a = b \times \frac{2}{3},$$

de sorte que le rapport est donné par le quotient tel que le définit la formule (1). Et il est à remarquer que, dans la théorie des quaternions, où l'ordre des facteurs n'est plus indifférent, on prend la relation (1), et non la relation (1'), pour définir le quotient.

II

Dans la théorie des nombres décimaux, il me semble que l'on doit faire la conversion approchée d'une fraction ordinaire en fraction décimale avant la division : on cherche une fraction décimale qui diffère de la fraction donnée de moins de $\frac{1}{100}$ par exemple, et l'on traduit cette définition par l'écriture

$$\frac{m}{100} < \frac{A}{B} < \frac{m+1}{100},$$

d'où l'on déduit

$$m < \frac{A \times 100}{B} < m+1,$$

de sorte que m est la partie entière du nombre intermédiaire :

$$m = E\left(\frac{A \times 100}{B}\right),$$

E voulant dire *partie entière*.

La division approchée se traduit par l'écriture (4), et l'on doit observer que le quotient approché $\frac{m}{100}$ est une valeur approchée d'un quotient exact, dont le seul tort est de n'être pas décimal. Si A et B sont entiers, ce quotient exact est la fraction $\frac{A}{B}$, et le problème de la division approchée ne diffère pas du problème de la conversion approchée.

Relativement à la conversion approchée, on doit d'ailleurs écrire

$$\frac{A}{B} = \text{lim. } 0,\, IP_1P_2\ldots P_n, \qquad (n = G),$$

I étant l'ensemble des chiffres irréguliers, P étant la période, G indiquant un infiniment grand, c'est-à-dire un nombre qui croît au-delà de toute limite. Dans le problème inverse, on démontre

$$\lim.\ 0,\ IP_1P_2\ldots P_n = \frac{A}{B}, \qquad (n = G),$$

d'où il suit que, si $\frac{A}{B}$ est une fraction, non convertible exactement en fraction décimale, elle est la génératrice de la fraction décimale donnée ; c'est d'ailleurs ce qui arrive, *à moins que la période ne soit* 9.

III

Pour la théorie du quotient entier, on peut imiter le procédé adopté pour la racine carrée entière, et démontrer ce théorème : On obtiendra le nombre des unités d'un ordre *quelconque* du quotient en divisant le nombre des unités de cet ordre au dividende par le diviseur ; on écrit par exemple

$$95 \times [m \times 100] \leqslant 547.856 < 95 \times [(m+1) \times 100],$$

d'où l'on déduit

$$m = E(5478 : 95),$$

E voulant dire quotient entier. Comme on veut revenir au cas déjà traité où le quotient n'a qu'un chiffre, on prend dans le dividende autant de chiffres qu'il en faut pour former un nombre contenant le diviseur sans le contenir dix fois ; dans l'exemple ci-dessus, il faut prendre 547 : 95, le quotient a des mille, dont on saura trouver le nombre. Il est inutile de déterminer à l'avance le nombre des chiffres du quotient.

ÉCOLE NORMALE DE SÈVRES (1898)

4393. — *Le carré d'un nombre entier est terminé par* 9 ; *quel peut être le chiffre des dizaines de ce carré? De même, en admettant que ce chiffre des dizaines soit* 2, *quelles valeurs peut prendre le chiffre des centaines?*

Les chiffres qui terminent les carrés des nombres entiers sont les mêmes que ceux qui terminent les carrés des nombres

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\ ;$$

savoir

$$0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 6,\ 5,\ 6,\ 9,\ 4,\ 1.$$

Le carré considéré étant terminé par 9, sa racine carrée est donc terminée par 3 ou par 7 ; elle est donc de l'une des deux formes

$$10a + 3, \qquad 10a + 7,$$

a étant un entier.

1er Cas. Elle est de la forme $10a + 3$.

Son carré est alors égal à

$$100a^2 + 60a + 9\ ;$$

le chiffre des dizaines de cette somme ne provient que du second terme $6a$ dizaines ; c'est celui qui termine les produits de la forme $6a$; le dernier chiffre de ces produits est le même que celui des produits

$$6\times 0,\ 6\times 1,\ 6\times 2,\ 6\times 3,\ 6\times 4,\ 6\times 5,\ 6\times 6,\ 6\times 7,\ 6\times 8,\ 6\times 9\ ;$$

savoir

$$0,\ 6,\ 2,\ 8,\ 4,\ 0,\ 6,\ 2,\ 8,\ 4,$$

donc 0, 2, 4, 8, 6.

2e Cas. Elle est de la forme $10a + 7$.

Son carré vaut

$$100a^2 + 140a + 49\ ;$$

le chiffre des dizaines de cette somme est égal à 4 plus le chiffre des unités de $14a = 10a + 4a$; ce dernier est le même que celui de $4a$. Le chiffre cherché est donc celui qui termine le nombre $4a + 4 = 4(a+1)$, si a est terminé par

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,$$

$4(a+1)$ l'est par

$$4,\ 8,\ 2,\ 6,\ 0,\ 4,\ 8,\ 2,\ 6,\ 0.$$

Le chiffre des dizaines du carré considéré est donc encore

$$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8.$$

On suppose maintenant que le chiffre des dizaines du carré est 2. En se reportant aux raisonnements précédents, on voit alors que a est terminé par 2 ou par 7 ; la racine carrée étant d'ailleurs terminée par 3 ou par 7, on voit que le nombre formé par les deux derniers chiffres de cette racine sera l'un des quatre nombres

$$23,\ 27,\ 73,\ 77\ ;$$

cette racine sera donc de l'une des formes

$$A_1 = 100b + 23, \quad A_2 = 100b + 27, \quad A_3 = 100b + 73, \quad A_4 = 100b + 77.$$

Remarquons que $A_3 = A_1 + 50$, $A_4 = A_2 + 50$. Donc

$$A_3^2 = A_1^2 + 100A_1 + 2500,$$
$$A_4^2 = A_2^2 + 100A_2 + 2500.$$

Le chiffre des centaines de A_3^2 ou A_4^2 est donc égal à celui des centaines de A_1^2 ou A_2^2, augmenté du chiffre des unités de A_1 ou A_2, plus 5.

Cherchons donc d'abord les chiffres des centaines de A_1^2 ou A_2^2 ; on a

$$A_1^2 = 10000b^2 + 46 \times 100 \times b + 23^2 = 10000b^2 + 46b \times 100 + 529.$$

Le chiffre des centaines de cette somme est celui qui termine la somme $46b + 5$ ou $6b + 5$. En donnant à b la suite des valeurs 0, 1, ..., 9, on trouve que $6b + 5$ est terminé par

$$5,\ 1,\ 7,\ 3,\ 9,\ 5,\ 1,\ 7,\ 3,\ 9,$$

c'est-à-dire un des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9.

A_1 étant terminé par 3, on aura le chiffre des centaines de A_3^2 en ajoutant aux chiffres précédents $3 + 5 = 8$; les derniers chiffres des sommes obtenues sont encore 1, 3, 5, 7, 9.

De même $A_2^2 = 10000b^2 + 54b \times 100 + 729$; le chiffre des centaines est celui qui termine la somme $54b + 7$ ou $4b + 7$. En raisonnant comme précédemment, on trouve que c'est encore un des chiffres 1, 3, 5, 7, 9.

[Ont résolu cette question : MM. F. Beynas ; A. Bouzy ; L. Magne ; M. Oger ; O. Oholnikoff ; L. Perret.]

4394. — *On donne un plan* P *et une droite* d *qui se coupent en un point* A. *Par le point* A *et dans le plan* P *on mène une droite* d'. *On demande d'étudier la variation de l'angle des deux droites* d *et* d' *lorsque, la droite* d *restant fixe, la droite* d' *tourne autour de* A *dans le plan* P. *Qu'arrive-t-il si la droite* d *fait des angles égaux avec trois positions distinctes de la droite* d'?

Soit b la projection d'un point quelconque B de la droite d

sur le plan P ; sur la droite d' prenons $AB' = Ab$ et menons les droites BB', bB'. Dans le triangle isocèle bAB', l'angle A croît ou décroît avec le côté opposé bB', puisque les deux autres côtés ont une longueur invariable ; pour la même raison, dans le triangle BAB', l'angle BAB' croît ou décroît avec le côté opposé BB'. Or on sait que l'oblique BB' varie dans le même sens que sa projection bB' sur le plan P ; donc la variation de l'angle α des droites d et d' est de même sens que celle de l'angle α' formé par la droite d' avec la projection Ab de la droite d sur le plan P.

Lorsque la droite d' pivote autour de A en partant de la position particulière Ab, l'angle α' croît de 0 à 180°, puis reprend en sens inverse les mêmes valeurs ; dans les mêmes conditions, l'angle BAB' des droites d et d' croît constamment depuis l'angle minimum BAb jusqu'à l'angle maximum $BAc = 180° - \widehat{BAb}$, puis repasse ensuite par les mêmes valeurs prises en sens contraire.

D'après ce qui précède, quand la droite d est oblique au plan P et fait des angles égaux avec deux positions particulières de la droite d', elle se projette sur le plan P suivant la bissectrice de l'angle formé par ces deux positions. Dans l'hypothèse faite, elle devrait donc se projeter suivant les bissectrices des trois angles formés par les trois droites considérées deux à deux, ce qui est impossible. Donc, si la droite d fait des angles égaux avec trois positions particulières de d', on ne peut la supposer oblique au plan P : elle est donc perpendiculaire à ce plan.

(L. TARRIN, à Naves.)

Remarque. — On peut encore démontrer que les angles α et α' varient dans le même sens en remplaçant le point B' par le pied de la perpendiculaire abaissée de b sur d' ; les triangles bAB' et BAB' deviennent alors deux triangles rectangles ayant leurs hypoténuses fixes.

Autre solution de la dernière partie.

Supposons que la droite d fasse des angles égaux avec trois droites distinctes du plan P passant par A. Prenons sur ces droites, à partir de A, les longueurs égales

$$AC = AD = AE$$

et traçons BC, BD, BE.

Les trois triangles BAC, BAD, BAE sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. Donc

$$BC = BD = BE ;$$

par suite la projection du point B sur le plan P doit être équidistante des trois points C, D, E ; elle se confond donc avec le point A, ce qui prouve que, dans l'hypothèse faite, la droite AB est perpendiculaire au plan P.

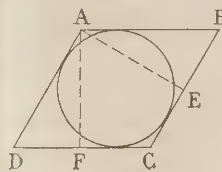
(F. PÉGORIER, à Cette.)

[Ont résolu la même question : Mlle M. Pont ; MM. G. Bernard ; G. Bidaux ; P. Bonnot ; M. Boutry ; A. Bouzy ; Custaud ; Gernez-Pfanmatter ; L. Gourdet ; G. Hiernaux ; L. Magne ; J. Ménéchal ; M. Oger ; L. Patin ; L. Perret ; M. Rebeix ; J. Rigal.]

4395. — *Démontrer que tout parallélogramme circonscrit à un cercle est un losange. Parmi tous les losanges circonscrits à un cercle, celui qui a le plus petit périmètre ou la plus petite surface est un carré.*

Calculer le côté d'un losange circonscrit à un cercle de rayon donné R, connaissant la somme 2a des diagonales de ce losange.

1° Soit le parallélogramme ABCD circonscrit au cercle O. Pour démontrer que ce parallélogramme est un losange, il suffit d'établir l'égalité de deux côtés consécutifs.



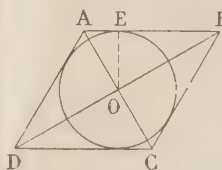
Si l'on mène les perpendiculaires AE, AF sur les côtés BC, CD, ces droites sont évidemment égales au diamètre du cercle ; par suite les triangles rectangles ABE, ADF sont égaux comme ayant les côtés AE, AF égaux et opposés aux angles égaux B, D du parallélogramme. Il en résulte que $AB = AD$. C. q. f. d.

Le périmètre du losange ABCD est égal à 4AB et sa surface à $AB \times AF$.

Comme AF est constant, on voit que ce périmètre et cette surface deviennent minimum en même temps que AB, c'est-à-dire lorsque $AB = AE$; le point E se confond alors avec B, et le losange ayant l'angle en B droit se transforme en un carré, circonscrit au cercle O.

2° Calculons le côté x du losange pour lequel on a

$$AC + BD = 2a. \qquad (1)$$



Les deux diagonales AC, BD appartenant à un losange sont perpendiculaires entre elles et se coupent mutuellement en leurs milieux, au centre O du cercle inscrit. Par suite $AC = 2OA$, $BD = 2OB$, et la condition (1) revient à

$$OA + OB = a.$$

En élevant les deux membres au carré, il vient

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + 2OA.OB = a^2.$$

Or, le triangle AOB, rectangle en O, donne

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = x^2 \qquad \text{et} \qquad OA.OB = OE.AB = Rx.$$

L'équation du problème est dès lors

$$x^2 + 2Rx - a^2 = 0.$$

Cette équation ayant ses termes extrêmes de signes différents, admet deux racines réelles et de signes contraires. Pour que la racine positive convienne au problème, il faut et il suffit qu'elle soit au moins égale à 2R, ce qui revient à exprimer que 2R est compris entre les deux racines :

$$f(2R) \leqslant 0,$$

ou

$$8R^2 - a^2 \leqslant 0,$$

ou

$$a \geqslant 2R\sqrt{2}.$$

Ainsi la plus petite valeur possible de a est représentée par la diagonale du carré circonscrit au cercle O.

(L. TARRIN, à Naves.)

[Ont résolu la question : complètement : MM. G. Bidaux ; P. Bonnot ; A. Bouzy ; E. Madet ; L. Magne ; — partiellement : Mlle M. Pont ; MM. M. Boutry ; Custaud ; G. Damien ; E. Gernez-Pfanmatter ; L. Gourdet ; G. Hiernaux ; E. Le Maigre ; A. Nayel ; M. Oger ; L. Patin ; F. Pégorier ; L. Perret ; N. Plakhowo ; J. Rigal ; A. Smantanescu ; G. Tastet ; G. Videlaine.]

4396. — *a étant un entier, indiquer le plus grand entier contenu dans l'expression*

$$\sqrt{a^2 + \sqrt{4a^2 + \sqrt{16a^2 + 8a + 3}}}.$$

Si l'on remplace le troisième radical par sa valeur $4a+1$, évaluée à une unité près par défaut, l'expression prend une valeur entière au moins égale à

$$\sqrt{a^2+\sqrt{4a^2+4a+1}} = \sqrt{a^2+2a+1} = a+1.$$

Pour prouver que le nombre $a+1$ représente le plus grand entier contenu dans l'expression, il suffit de prouver que cette expression reste inférieure à $a+2$. En effet, on peut écrire successivement

$$4a+1 < \sqrt{16a^2+8a+3} < 4a+2,$$

ou, en ajoutant $4a^2$ à chaque membre et extrayant les racines carrées,

$$2a+1 < \sqrt{4a^2+\sqrt{16a^2+8a+3}} < \sqrt{4a^2+4a+2} < 2a+2,$$

ou, en ajoutant de même a^2 et extrayant les racines,

$$a+1 < \sqrt{a^2+\sqrt{4a^2+\sqrt{16a^2+8a+3}}} < \sqrt{a^2+2a+2} < a+2.$$

(L. MAGNE, à Beaumont-du-P.)

[M. F. Pégorier, à Cette, a résolu la même question.]

On peut encore raisonner de la manière suivante.

Posons $$R = \sqrt{a^2+\sqrt{4a^2+\sqrt{16a^2+8a+3}}}$$

et désignons par $E(R)$ la partie entière de ce radical. En posant

$$R' = a^2+\sqrt{4a^2+\sqrt{16a^2+8a+3}},$$

on sait qu'il suffit de déterminer la partie entière de R' et d'en extraire la racine carrée à une unité près. Cette partie entière se compose de a^2 et de la partie entière du radical

$$\sqrt{4a^2+\sqrt{16a^2+8a+3}}.$$

Pour déterminer cette dernière, on cherche la partie entière de

$$R'' = 4a^2+\sqrt{16a^2+8a+3}$$

et on en extrait la racine carrée. Cette partie entière se compose de $4a^2$ et de la partie entière de

$$\sqrt{16a^2+8a+3} = \sqrt{(4a+1)^2+2}\,;$$

cette dernière est évidemment égale à $4a+1$. Donc

$$E(R'') = 4a^2+4a+1 = (2a+1)^2.$$

Par suite $$E(R') = a^2+2a+1 = (a+1)^2\,;$$

donc $$E(R) = a+1.$$

4397. — *Quel est le poids de bioxyde de manganèse pur qu'il faudrait employer pour obtenir* 1^{lit} *de chlore à* $20°$ *et sous la pression de* 740^{mm} *? Quel serait le poids de fer pur avec lequel on pourrait par la décomposition de l'eau préparer l'hydrogène nécessaire à la transformation totale du chlore obtenu en gaz chlorhydrique ?*

On prendra pour poids atomique de l'hydrogène, de l'oxygène, du chlore, du manganèse et du fer les nombres 1, 16, 35,5, 55 *et* 56, *pour coefficient de dilatation du chlore* $\frac{1}{273}$, *pour densité de ce gaz,* 2,5 *et pour poids d'un litre d'air* $1^{\text{gr}},293$ *à* $0°$ *et sous la pression* 760^{mm}.

1° L'équation qui représente la réaction est



$$\underset{87}{MnO^2} + 4HCl = MnCl^2 + 2H^2O + \underset{71}{2Cl}.$$

Le poids d'un litre de chlore à $20°$ et sous la pression de 740^{mm} est de

$$1{,}293 \times 2{,}5 \times \frac{740}{760} \times \frac{1}{1+\frac{20}{273}} = 2^{\text{gr}},932,$$

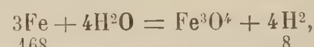
et le poids de bioxyde de manganèse pur qu'il faut employer pour obtenir ces $2^{\text{gr}},932$,

$$\frac{87 \times 2{,}932}{71} = 3^{\text{gr}},592.$$

2° Le poids d'hydrogène qui doit s'unir à $2^{\text{gr}},932$ de chlore a pour valeur

$$\frac{2{,}932}{35{,}5} = 0^{\text{gr}},0826.$$

D'après l'équation



$$\underset{168}{3Fe} + 4H^2O = Fe^3O^4 + \underset{8}{4H^2},$$

on voit que la quantité de fer nécessaire pour produire la décomposition de l'eau donnant ce poids d'hydrogène est de

$$\frac{168 \times 0{,}0826}{8} = 1^{\text{gr}},7346.$$

(ARDIN-DELTEIL.)

[Ont résolu la même question : MM. L. Gourdet ; E. Madet ; L. Magne ; E. Le Maigre ; J. Ménéchal ; L. Perret ; J. Rigal ; L. Tarrin.]

ARITHMÉTIQUE

4479. — *Trouver un nombre de trois chiffres et un système de numération tel que la valeur de ce nombre supposé écrit dans le système décimal soit la moitié de la valeur de ce même nombre supposé écrit dans le système inconnu.*

Démontrer qu'il n'y a qu'un seul système de numération donnant des nombres de trois chiffres répondant à la question.

Soit $100x+10y+z$ le nombre cherché, représenté dans le système décimal ; dans le système de base b, ce nombre est représenté par

$$b^2x+by+z.$$

On doit avoir par hypothèse

$$100x+10y+z = \frac{1}{2}(b^2x+by+z),$$

ou $$z = (b^2-200)x+(b-20)y.$$

Le coefficient b^2-200 de x ne peut être que positif, car s'il était négatif, on aurait $b < \sqrt{200} < 20$, et z serait négatif.

La plus petite valeur de b est donc égale à la partie entière de $\sqrt{200}$, augmentée d'une unité, c'est-à-dire à 15. Dans ce cas, l'expression de z devient

$$z = 25x - 5y.$$

Le chiffre z devant ainsi être multiple de 5, ne peut être que 0 ou 5.

Pour $z=0$, on a

$$25x = 5y, \qquad \text{ou} \qquad y = 5x.$$

Le chiffre y devant être un multiple de 5 différent de 0 (x ne pouvant s'annuler) est égal à 5, et par suite $x=1$, d'où la solution 150.

Pour $z=5$, on a

$$5 = 25x - 5y, \qquad \text{ou} \qquad y+1 = 5x.$$

Le nombre $y+1$ devant être un multiple de 5 différent de zéro et ne pouvant surpasser 10, est égal à 5 ou 10. Aux deux valeurs possibles 4 et 9 de y correspondent pour x les valeurs 1 et 2, d'où les deux nouvelles solutions, 145 et 295.

Il reste à démontrer que tout système de numération dont la base est supérieure à 15 ne peut fournir de nouvelles solutions.

En effet, on a

$$z = (b^2-200)x - (20-b)y.$$

Or pour $b \geqslant 16$, on peut écrire

$$(b^2 - 200)x > (\overline{16}^2 - 200)1 \qquad \text{et} \qquad (20 - b)y \leqslant (20 - 16)y,$$

et, en retranchant membre à membre,

$$z > 56 - 4y.$$

Comme $z < 10$, il faut donc qu'on ait

$$56 - 4y < 10, \qquad \text{ou} \qquad y > \frac{46}{4},$$

ce qui est impossible, puisque $y < 10$.

(C. BILLIONNET.)

[Ont résolu la même question : MM. L. Bois ; G. Foucry ; R. Henry ; E. Kornis ; J. Le Bihan ; R. Manen ; G. Schoonheere.]

ALGÈBRE

4517. — *Résoudre le système d'équations*

$$4(x^3 + y^3) = a^3 + 3ab^2,$$
$$x + y = a.$$

La première équation peut s'écrire

$$4(x + y)(x^2 - xy + y^2) = a(a^2 + 3b^2),$$

ou, en divisant membre à membre les deux équations,

$$4(x^2 - xy + y^2) = a^2 + 3b^2.$$

Or $\quad x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = a^2 - 2xy$;

l'équation précédente devient alors

$$4(a^2 - 3xy) = a^2 + 3b^2,$$

d'où l'on déduit facilement

$$xy = \frac{a^2 - b^2}{4}.$$

Le produit et la somme de x et y étant connus, ces quantités sont les racines de l'équation

$$X^2 - aX + \frac{a^2 - b^2}{4} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{a \pm b}{2}.$$

Remarque. — La division effectuée au début suppose $x + y$ ou a différent de zéro. Si $a = 0$, le système se réduit aux deux équations

$$x^3 + y^3 = 0, \qquad x + y = 0,$$

et est visiblement indéterminé dans ce cas particulier.

(PIERRE MILLEVOYE, lycée de Lyon.)

[Ont résolu la même question : Mlles R. Campana ; Turpain : MM. A. Arcizet ; E. Ardin-Delteil ; Aulagnier ; J. F. d'Avillez ; A. B., à Reims ; L. Barberot ; P. Barbier ; V. Barol ; E. Baudot ; L. Bayor ; R. Bellencourt ; F. Bernard ; F. Beynas ; G. Bieber ; C. Billionnet ; Bily-Meheust ; L.-A. Blanc ; P. Blaser ; L. Bloch ; L. Bois ; Es Bonjan ; J. Borgey ; E. Bouby ; E. Boudier ; G. Bouju ; G. Boulestin ; C. Bourvéau ; Brobecker ; G. Casse ; Cavaillé ; G. Charpentier ; E. Chedaille ; G. Chiché ; Chosson ; F. Clabault ; S. Collin ; Cougnoux ; Croze ; J. Danchaud ; G. Delahaye ; P. Delolme ; R. Depasse ; G. Desplats ; F. Deville ; Donnadieu ; C. Doumerc ; G. Dubois ; C. Dujardin ; G. Dumas ; H. Dutordoir ; A. Duval ; V. Duval ; G. Edely ; E. Foucart ; G. Foucry ; H. Gallay ; E. Gernez-Pfanmatter ; P. Girard ; M. Giraud ; M. Gondran ; G. Gordien ; J. Grey ; P. Gutton ; E. Hauville ; Hébrard ; R. Hüe ; A. Huet ; A. Jacquemond ; H. Jaffré ; Jousset ; P. Joye ; C. Labille ; J. Lacampagne ; J.-M. Lagarde ; F. Lalescu ; G. Lallier ; J. Lamotte ; A. Lancel ; A. Larcher ; Laurain ; R. Lavallée ; A. Lecontour ; F. Le Goïc ; F. Le Maigre ; E. Léotard ; A. Le Révérend ; G. Le Sage ; A. Lescure ; P. Le Verrier ; C. Ludovic ; P. Macherey ; E. Malleret ; C. Marie ; P. Marion ; C. Marrot ; B. Mathé ; Mazières ; J. Ménéchal ; F. Monseran ; C. Montaron ; G. Nazare ; P. Noël ; A. Noyelle ; F. Ollivier ; Oriol ; E. Paris ; L. Patin ; Pellerin ; J. Pémartin ; A. Pichon ; J. Pila ; Pinet-Libertie ; H. Pingeot ; J. Pinton ; J. Plantier ; A. Popescu ; Poujol ; A. Prost ; P. Reboul ; B. Ribes ; Rieumajou ; E. Rimour ; M. Royer ; A. Sainte-Laguë ; J. Sallaud ; G. Salles ; A. Sallin ; E. Sautreau ; E. Séclin ; A. Seignobox ; B. Sénac-Lagrange ; A. Smantanescu ; G. Tastet ; M. Teulié ; A. Teixonnière ; F. Thivard ; M. Uzan ; E. Vaicle ; R. Van Cauwenberghe ; H. Varennes ; Venet ; F. Vérot ; A. Vidalenc ; Vien ; J. Vignier ; Vimont.]

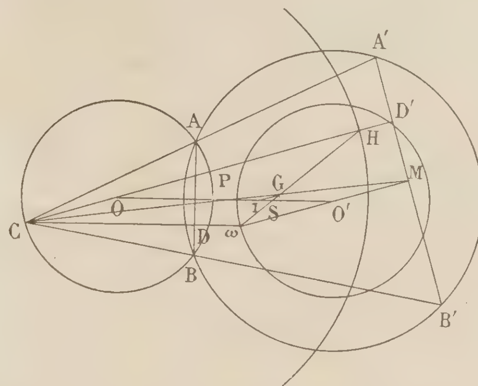
GÉOMÉTRIE

4418. — *On donne deux circonférences sécantes* O *et* O′. *On joint un point variable* C *de* O *aux points d'intersection* A *et* B *des deux circonférences par deux droites qui coupent la circonférence* O′ *en* A′ *et* B′. *Démontrer :*

1° *Que les lieux du centre du cercle circonscrit au triangle* CA′B′, *du point de concours des hauteurs et de celui des médianes de ce même triangle sont trois circonférences ;*

2° *Que ces trois circonférences sont homothétiques par rapport à un même point* S.

1° On sait que le centre du cercle circonscrit à un triangle est situé sur la droite symétrique d'une hauteur par rapport à la bissectrice issue du même sommet. Comme les droites AB, A′B′ sont antiparallèles, il en résulte que les hauteurs CD, CD′ des



triangles CAB, CA′B′ sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle C, commun aux deux triangles. Par suite ces hauteurs contiennent les centres ω et O des cercles circonscrits aux triangles CA′B′, CAB.

D'ailleurs ω se trouve aussi sur la perpendiculaire élevée au milieu M de A′B′, laquelle passe par O. Dès lors le quadrilatère OCωO′ est un parallélogramme, puisque ses côtés opposés sont parallèles deux à deux. Le lieu de ω est donc un cercle égal au cercle O et ayant son centre en O′.

Le point de concours H des hauteurs du triangle AB′C′ est situé comme on sait sur la hauteur CD′ en un point tel que $\overline{CH} = 2\overline{O'M}$. Or l'angle constant ACB a même mesure que la moitié de la différence des arcs A′B′ et AB du cercle O′ ; comme l'arc AB est fixe, il s'ensuit que l'arc A′B′ est constant, ainsi que la corde A′B′ qui le sous-tend.

Donc la distance O′M ne change pas avec la position de A′B′. On en conclut que le lieu de H est un cercle de centre O et de rayon

$$OH = 2O'M - CO.$$

Soit G le point de rencontre des médianes du triangle CA′B′, situé au tiers de la médiane CM, à partir du pied M. Dans le trapèze de seconde espèce COO′M, les côtés non parallèles CM, OO′ se coupent en point fixe P tel que

$$\frac{OP}{PO'} = \frac{OC}{O'M} ;$$

d'ailleurs la parallèle aux bases issue de G rencontre le côté OO′ en un autre point fixe I tel que

$$\frac{OI}{IO'} = \frac{CG}{GM} = 2.$$

D'autre part les triangles semblables PIG, PO′M donnent

$$\frac{GI}{O'M} = \frac{PI}{PO}, \qquad \text{d'où} \qquad GI = O'M \cdot \frac{PI}{PO} = \text{const.}$$

Ce dernier résultat montre que le lieu de G est un cercle de centre I.

En faisant parcourir au point C toute la circonférence O, on voit aisément que les trois points ω, H, G décrivent entièrement les trois circonférences de centres O′, O, I.

2° Les trois rayons O′ω, OH, IG de ces circonférences sont parallèles et ont leurs extrémités ω, H, G en ligne droite (propriété connue). Par suite les trois circonférences sont homothétiques par rapport au point S où la droite ωGH coupe la ligne des centres OIO′.

(L. CURT, école normale de Bourg.)

[Ont résolu la même question : MM. R. Manen, petit séminaire de Massaci ; M. Rebeix, lycée du Puy.]

4519. — *Les côtés d'un triangle sont en progression arithmétique de raison d; R et r sont les rayons des cercles circonscrit et inscrit à ce triangle, a et c le plus petit et le plus grand côté; démontrer les relations*

$$6Rr = ac,$$
$$d = \sqrt{2r(R-2r)}.$$

(L. PATIN.)

1° En égalant deux expressions de la surface d'un triangle quelconque, on a

$$\frac{abc}{4R} = pr.$$

Or $$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{b-d+b+b+d}{2} = \frac{3}{2}b;$$

donc $$\frac{abc}{4R} = \frac{3}{2}br.$$

ou $$ac = 6Rr. \qquad (1)$$

2° Egalons maintenant deux expressions du carré de la surface du triangle ; nous aurons

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = p^2r^2.$$

Or $$p = \frac{3}{2}b, \qquad a = b-d, \qquad c = b+d;$$

donc $$\frac{3}{2}b\left(\frac{b}{2}+d\right)\frac{b}{2}\left(\frac{b}{2}-d\right) = \frac{9b^2r^2}{4},$$

ou $$\frac{b^2}{4} - d^2 = 3r^2,$$

ou $$b^2 - 4d^2 = 12r^2. \qquad (2)$$

D'autre part

$$(b-d)(b+d) = ac,$$

ou, en tenant compte de (1),

$$b^2 - d^2 = 6Rr. \qquad (3)$$

Retranchons (2) de (3) ; il vient

$$3d^2 = 6Rr - 12r^2,$$

ou $$d^2 = \sqrt{2r(R-2r)}.$$

(G. SCHOONHEERE, école professionnelle de Vierzon.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Amblard ; A. Arcizet ; E. Ardin-Delteil ; J.-F. d'Avillez ; Aulagnier ; A. B., à Reims ; L. Barberot ; P. Barbier ; V. Barol ; E. Baudot ; L.-M. Bayor ; R. Bellencourt ; C. Billionnet ; Bily-Méheust ; L.-A. Blanc ; L. Bois ; E. Bonjan ; J. Borgey ; E. Bouby ; E. Boudier ; G. Boulestin ; C. Bourvéau ; F. Brignon ; L. Cartier ; G. Casse ; Cavaillé ; E. Chédaille ; F. Clabault ; Y. Collin ; Croze ; G. Delahaye ; P. Delolme ; R. Depasse ; G. Desplats ; F. Deville ; R. Dickson ; C. Doumerc ; H. Dutordoir ; A. Duval ; E. Foucart ; G. Foucry ; E. Gernez-Pfannatter ; L. Hébrard ; R. Hüe ; J. Jaubert ; H. Janois ; M. Jousset ; J. Lacampagne ; J.-M. Lagarde ; F. Lalescu ; Laurain ; E. Le Maigre ; J. Leveau ; P. Le Verrier ; P. Macherey ; P. Marion ; B. Mathé ; J. Ménéchal ; P. Millevoye ; M. Oger ; F.-Y. Ollivier ; F. Paoli ; R. P. ; J. Pémartin ; Pinet-Libertie ; A. Popescu ; J. Quilichini ; Ribes ; H. Richier ; Rieumajou ; J. Rocher ; J. Sallaud ; A. Ste-Laguë ; G. Tastet ; E. Vaicle ; R. Van Cauwenberghe ; Venet ; F. Vérot ; Vial ; Vien ; J. Vignier]

MÉCANIQUE

4310. — *Dans un plan vertical, on donne une droite fixe* OA *qui fait un angle* α *avec l'horizontale* OX. *L'extrémité* C *d'une barre pesante et homogène* BC, *de longueur a, glisse sans frottement sur la droite* OA, *tandis que l'autre extrémité* B *de cette barre est attachée à un fil* OB *dont la longueur est égale à* BC *et qui est fixé en* O.

On néglige la pesanteur de ce fil.

En désignant par x l'angle que fait le fil OB *avec la droite* OA, *on demande :*

1° *de montrer que la distance du centre de gravité de* BC *à l'horizontale* OX *est égale à*

$$a\sin(\alpha+x) + \frac{a}{2}\sin(\alpha-x);$$

2° *de déterminer par sa tangente l'angle x qui correspond au maximum de cette distance et d'examiner le cas particulier où* $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$;

3° *de trouver la position d'équilibre de la barre* BC.

(*Bacc. lettres-math., Marseille, novembre 1897.*)

1° La barre étant homogène, son centre de gravité est en son milieu G. Menons par B et G les perpendiculaires BB′ et GG′ sur OX, et par B la parallèle BD à OX ; soit D le point de rencontre de cette dernière droite avec GG′. Ce point D se trouve entre G et G′ lorsque l'angle x est plus petit que l'angle α (*fig.* 1) ; il est sur le prolongement de G′G lorsque x est plus grand que α (*fig.* 2).

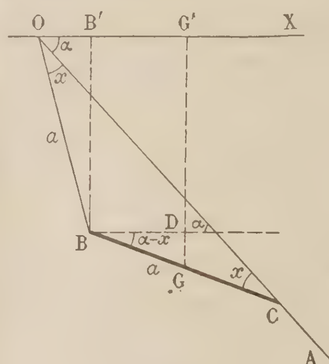


Fig. 1.

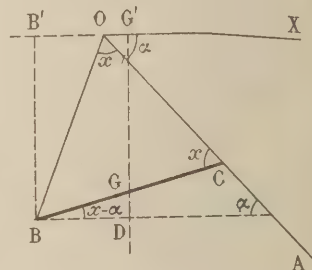


Fig. 2.

Dans le premier cas, la figure donne

$$GG' = GD + DG' = GD + BB',$$

ou $$GG' = \frac{a}{2}\sin(\alpha-x) + a\sin(\alpha+x).$$

Dans le second cas,

$$GG' = DG' - DG = BB' - DG = a\sin(\alpha+x) - \frac{a}{2}\sin(x-\alpha)$$
$$= a\sin(\alpha+x) + \frac{a}{2}\sin(\alpha-x).$$

2° L'expression de GG′ peut s'écrire

$$a(\sin\alpha\cos x + \cos\alpha\sin x) + \frac{a}{2}(\sin\alpha\cos x - \cos\alpha\sin x),$$

ou bien $$\frac{a}{2}(3\sin\alpha\cos x + \sin x\cos\alpha).$$

L'expression entre parenthèses est de la forme $a\sin x + b\cos x$; mettons-y en facteur $\cos\alpha$; la valeur de GG′ devient

$$\frac{a\cos\alpha}{2}(3\operatorname{tg}\alpha\cos x + \sin x),$$

ou bien, en posant

$$3 \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi,$$

$$GG' = \frac{a \cos \alpha}{2 \cos \varphi} \cdot \sin(x + \varphi).$$

Le maximum de cette expression est atteint lorsque

$$\sin(x + \varphi) = 1,$$

$$x + \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} \varphi = \frac{1}{3 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Dans le cas particulier où $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$, on trouve

$$\operatorname{tg} x = 1, \quad x = 45^\circ.$$

3° *Position d'équilibre de la barre* BC.

Première solution. — Le poids P de la barre peut être décomposé en deux forces égales à $\frac{P}{2}$, appliquées respectivement en B et C. La force $\frac{P}{2}$ appliquée en C peut se décomposer en deux forces : l'une,

$$N = \frac{P}{2} \cos \alpha,$$

normale à la droite fixe OA et par conséquent détruite par la résistance de la droite fixe ; l'autre,

Fig. 3.

$$F = \frac{P}{2} \sin \alpha,$$

dirigée suivant CA et qui tend à faire glisser l'extrémité C suivant CA.

La force $\frac{P}{2}$ appliquée en B peut se décomposer en deux autres : l'une dirigée suivant OB, qui sera détruite par la résistance du point fixe O ; l'autre dirigée suivant CB.

Proposons-nous de calculer ces deux forces. Remarquons que la figure 2 ne peut donner une position d'équilibre ; plaçons-nous donc dans le cas de la figure 3, semblable à 1.

Elle donne $\widehat{EBI} = \widehat{HEB} = 90^\circ - (\alpha + x)$,

$$\widehat{BHE} = 2x, \qquad \widehat{HBE} = 90^\circ + \alpha - x.$$

Le triangle HBE donne

$$\frac{BH}{\sin[90^\circ - (\alpha + x)]} = \frac{HE \text{ ou } BI}{\sin[90^\circ + \alpha - x]} = \frac{BE \text{ ou } \frac{P}{2}}{\sin 2x};$$

d'où

$$BI \text{ (tension de BO)} = \frac{P \cos(\alpha - x)}{\sin 2x};$$

$$BH = \frac{P \cos(\alpha + x)}{\sin 2x}.$$

Le point d'application de la force BH peut être transporté au point C, invariablement lié à B ; là, elle peut se décomposer en deux, l'une suivant CO, égale à BH cos x, qui tend à faire glisser la barre suivant CO, l'autre normale à CO, égale à BH sin x, et détruite par la résistance de la droite fixe OA.

Pour que l'équilibre ait lieu, il faut donc que les forces appliquées en C se détruisent, ce qui exige

$$BH \cos x = \frac{P}{2} \sin \alpha,$$

ou

$$\frac{P \cos(\alpha + x) \cos x}{2 \sin 2x} = \frac{P}{2} \sin \alpha,$$

ou

$$\cos(\alpha + x) = 2 \sin x \sin \alpha.$$

Il en résulte immédiatement

$$\cos \alpha \cos x = 3 \sin \alpha \sin x,$$

d'où

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{3} \operatorname{cotg} \alpha.$$

L'équilibre a donc lieu lorsque la distance du centre de gravité à l'axe est la plus grande possible.

Deuxième solution. — On peut considérer la barre BC comme entièrement libre à condition d'appliquer en B (*fig.* 4) une force T dirigée vers O, représentant la tension du fil BO, et en C une force N normale à CO, représentant la réaction exercée par la droite fixe OC sur la barre.

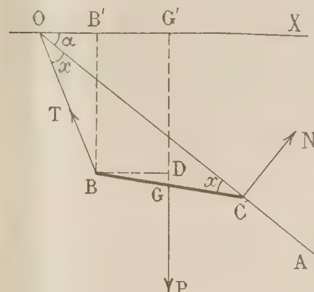


Fig. 4.

Les trois forces P, T, N agissant sur la barre, se trouvent dans le plan vertical AOX. Pour qu'elles se fassent équilibre, il faut et il suffit que la somme des moments de ces trois forces par rapport au point O soit nulle, et qu'il en soit de même des sommes de leurs projections sur l'horizontale OX et sur la droite OA. On aura ainsi les équations :

(Moments par rapport à O) : $P.OG' - N.OC = 0$, (1)

(Projections sur OX) : $N \sin \alpha - T \cos(\alpha + x) = 0$, (2)

(Projections sur OA) : $-T \cos x + P \sin \alpha = 0$. (3)

Mais

$$OG' = OB' + B'G' = OB' + BD = a \cos(\alpha + x) + \frac{a}{2} \cos(\alpha - x);$$

l'équation (1) devient donc

$$Pa\left[\cos(\alpha + x) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - x)\right] - N.2a \cos x = 0. \quad (4)$$

L'équation (2) donne

$$N = \frac{T \cos(\alpha + x)}{\sin \alpha};$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (3),

$$N = \frac{P \cos(\alpha + x)}{\cos x}.$$

L'équation (4) devient alors

$$2 \cos(\alpha + x) = \cos(\alpha - x),$$

d'où

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{3 \operatorname{tg} \alpha}.$$

A l'aide des équations (2) et (3), on calcule aisément N et T.

(Fr. Chuberre, lycée de Rennes.)

Remarque. — Lorsque la barre est en équilibre, les forces de liaison T et N sont déterminées par la connaissance de P. Les trois forces P, N, T devront concourir en un point de la verticale de G ; cette seule condition suffit donc à déterminer la position d'équilibre.

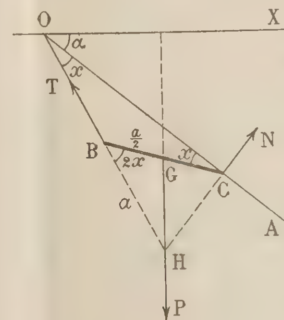


Fig. 5.

Supposons-la réalisée ; la figure 5 montre que le triangle OAH est rectangle et que par suite son angle en H vaut $90^\circ - x$. Pour que l'équilibre ait lieu, il faut et il suffit que la droite HG soit verticale, c'est-à-dire que l'angle GHA soit égal à α, ou que GHO soit égal à $90^\circ - x - \alpha$. D'autre part, puisque $OB = BC = a$, on a aussi $BH = a$; le triangle BGH fournit

alors pour l'angle x l'équation

$$\frac{\frac{a}{2}}{\sin(90^\circ - x - \alpha)} = \frac{a}{\sin[180^\circ - 2x - (90^\circ - x - \alpha)]} = \frac{a}{\sin(90^\circ + x - \alpha)}$$

ou bien $\quad 2\cos(x + \alpha) = \cos(\alpha - x).$

[Ont résolu cette question : MM. E. Baidot, à Rambouillet; Bourquin, collège de Pontarlier; Deschamps, collège de Cusset; G. Digne, à Avignon; Feintuch; R. Holmgren, lycée de Bourges; H. Jouanneau; F. Morel, collège de Cusset; Raynaud, à Rabastens; Robin, lycée de Rennes; E. Sinturel, collège de Cusset; Villemagne, pensionnat de Valbenoîte, à St-Étienne.]

Dans plusieurs solutions les auteurs ont commis la faute grave de considérer le point O comme le point de suspension de la barre BC; cette hypothèse n'est pas permise, puisque O n'est pas invariablement lié à la barre.

PHYSIQUE

4523. — *Dans* 2^{mc} *d'eau à* 20°, *on condense de la vapeur d'eau à* 100° *et à la pression* 76^{cm}, *la température s'élève à* 80° ; *quel est le nombre de litres de vapeur d'eau qu'on a condensés?*

On prendra 537 *pour la chaleur de vaporisation de l'eau à* 100° *et* $\frac{5}{8}$ *pour la densité de la vapeur d'eau.*

(*Bacc. lettres-math., Lille, juillet 1898.*)

Exprimons d'abord que la chaleur gagnée par les 2000^{kg} d'eau, en passant de 20° à 80°, est égale à la chaleur cédée par les x^{kg} de vapeur en se condensant sans abaissement de température, puis en passant de 100° à 80° :

$$2000(80 - 20) = 537x + x(100 - 80).$$

On en tire

$$x = \frac{120\,000}{557} = 215^{kg},43\,985.$$

On sait que la masse M d'un volume V de vapeur dont la densité est d, la force élastique f et la température t, est donnée par la formule

$$M = V \times 1{,}293 \times d \times \frac{f}{76} \times \frac{1}{1 + \alpha t}.$$

On a donc, en exprimant M en grammes pour obtenir V en litres,

$$215\,439{,}85 = V \times 1{,}293 \times \frac{5}{8} \times \frac{76}{76} \times \frac{1}{1 + \frac{100}{273}},$$

d'où $$V = \frac{215\,439{,}85 \times 8 \times 273}{1{,}293 \times 5 \times 273} = 364\,245.$$

Tel est le nombre de litres de vapeur d'eau qu'on a condensés.

(H. GALLAY, à Lyon.)

[Ont résolu la même question : Mlle R. Campana; MM. Ardin-Delteil; F. Bernard; E. Bonjan; M. Boucly; C. Bourvéau; P. Brignon; A. Chapron; R. Depasse; G. Desplats; C. Doumerc; G. Edely; E. Foucart; P. Girard; G. Gordien; E. Hauville; R. Henry; R. Hüe; A. Larcher; A. Lecontour; A. Lescure; E. Le Maigre; G. Montaron; M. Nahon; J. Plantier; Poujol; Raynaud; G. Rimour; Texonnière; Venet; A. Vidalenc; Vimont.]

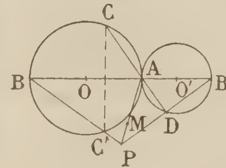
QUESTIONS PROPOSÉES

4534. — Vérifier l'inégalité

$$2a^4 + 1 \geqslant 2a^3 + a^2.$$

(A. SALLIN, école normale de Caen.)

4535. — On donne deux circonférences O et O', tangentes en un point A. Soit BOO'B' la ligne des centres. On mène par A une droite quelconque qui rencontre le cercle O en C, et le cercle O' en D. On prend le symétrique de C par rapport à la ligne des centres, soit C'. On joint B et C', B' et D; ces droites se rencontrent en un point P. On joint A et P.



1° Lieu de M, point sur la droite AP, tel que $AM \times AP = m^2$.

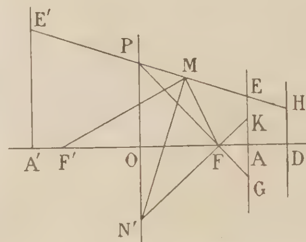
2° Construire un triangle ayant un sommet en B', et dont les deux autres sommets soient situés respectivement sur le lieu de P et le lieu de M. Ce triangle doit être semblable à un triangle donné.

(P. LE VERRIER, lycée Janson de Sailly.)

4536. — Par le foyer d'une parabole ou d'une ellipse mener une sécante de longueur donnée. — Discussion.

(Luiz HÉMOIS.)

4537. — En un point M d'une ellipse on trace la tangente, qui rencontre en P le petit axe, en E la tangente à l'extrémité A du grand axe et en H la directrice relative au foyer F ; puis on mène la droite PF, qui rencontre en G la tangente AE.
1° Démontrer que PE = PF et que PG = PH. 2° N' étant le point d'intersection de la normale en M avec le petit axe et K le point d'intersection de N'F avec AE, démontrer que N'K = N'M.



(P. MASCARET, à Digne.)

4538. — Etablir géométriquement les identités

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a,$$
$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a.$$

(G. DELAHAYE, à Roye.)

4539. — Sachant que dans un triangle $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{5}{6}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{20}{37}$, trouver $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ et prouver que $a + c = 2b$.

4540. — Dans un ballon de 10^{lit} de capacité on mélange 5^{lit} d'air dont l'état hygrométrique est 1/4 et 5^{lit} d'acide carbonique dont l'état hygrométrique est 1/3. On demande l'état hygrométrique du mélange. La température est 10° et la tension maximum correspondante de la vapeur d'eau est $9^{mm},16$.

(*Bacc. lettres-math., Caen, juillet 1898.*)

4541. — Les deux pôles d'une pile de 4 éléments Daniel sont réunis par un fil de cuivre de 2^{mmq} de section. Quelle doit être la longueur du fil pour que le courant ait une intensité de 5 ampères? Que devient cette intensité si les éléments sont réunis en surface ?

On donne :
La force électromotrice d'un élément Daniel . . . . . $1^{volt},07$
Sa résistance . . . . $0^{ohm},1$
Le coefficient de résistance du fil, c'est-à-dire la résistance d'un fil de 1^m de long et de 1^{mmq} de section . . . . $0^{ohm},018$

(*Bacc. lettres-sciences, Rennes, juillet 1898.*)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

23e Année. — No 12. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 15 Mars 1899.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction ...... 17, rue des Écoles, à Paris.

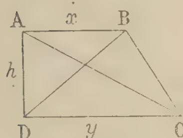
Abonnements.... Librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles, PARIS

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (1898)

4377. — *Déterminer les deux bases d'un trapèze rectangle connaissant sa hauteur h, sa surface $\frac{1}{2}hm$ et le produit k^2 de ses deux diagonales. — Discuter.*

Solution algébrique. — En appelant x, y les bases du trapèze, on a le système d'équations permettant de calculer ces inconnues :



$$\left.\begin{aligned} x + y &= m, \\ \sqrt{(x^2+h^2)(y^2+h^2)} &= k^2 ; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

d'où le système équivalent :

$$\left.\begin{aligned} x + y &= m, \\ x^2y^2 + h^2(x^2+y^2) + h^4 - k^4 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Si l'on pose $xy = \mathrm{P}$, il vient

$$x + y = m, \qquad (3)$$

$$\mathrm{P}^2 - 2h^2\mathrm{P} + h^4 + m^2h^2 - k^4 = 0. \qquad (4)$$

Alors x et y seront racines de l'équation

$$\mathrm{X}^2 - m\mathrm{X} + \mathrm{P} = 0. \qquad (5)$$

Les équations (3), (4), (5) résolvent complètement le problème.

Discussion. — Pour qu'un système de valeurs de x et y convienne, il faut qu'il soit d'abord réel et qu'en outre la valeur correspondante de P soit positive. Ces conditions sont suffisantes.

Les racines de (5) sont réelles si l'on a

$$m^2 - 4\mathrm{P} \geqslant 0,$$

ou

$$\mathrm{P} \leqslant \frac{m^2}{4}.$$

Suivons maintenant la méthode de M. Girod, qui, dans le cas actuel, donne rapidement les résultats :

1° Pour qu'il y ait une seule solution, il faut et il suffit qu'une racine P de l'équation (4) vérifie les conditions

$$0 < \mathrm{P} < \frac{m^2}{4}.$$

Pour qu'il y ait deux solutions, il faut et il suffit que les deux racines de l'équation (4) vérifient ces mêmes conditions.

Posons

$$f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}^2 - 2h^2\mathrm{P} + h^4 + m^2h^2 - k^4 = 0. \qquad (4)$$

Il y aura une solution si

$$f(0).f\left(\frac{m^2}{4}\right) < 0,$$

ou

$$(h^4 + m^2h^2 - k^4)(m^4 + 8h^2m^2 + 16h^4 - 16k^4) < 0,$$

c'est-à-dire

$$(h^4 + m^2h^2 - k^4)(m^2 + 4h^2 + 4k^2)(m^2 + 4h^2 - 4k^2) < 0,$$

ou enfin

$$(h\sqrt{m^2+h^2} - k^2)\left(\frac{m^2}{4} + h^2 - k^2\right) < 0,$$

ce qui veut dire que k^2 doit être compris entre les nombres

$$h\sqrt{m^2+h^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{m^2}{4} + h^2.$$

On peut préciser et classer ces deux nombres en calculant la différence de leurs carrés ; on arrive ainsi aux conclusions :

Si $m < 2h\sqrt{2}$, l'existence d'une seule solution exige que l'on ait

$$\frac{m^2}{4} + h^2 < k^2 < h\sqrt{m^2+h^2} ;$$

Si $m > 2h\sqrt{2}$, il faut au contraire que k^2 vérifie les inégalités

$$h\sqrt{m^2+h^2} < k^2 < \frac{m^2}{4} + h^2.$$

2° Le problème admettra deux solutions si les racines de l'équation $f(\mathrm{P}) = 0$ sont d'abord réelles et si de plus on a

$$f(0) > 0, \qquad f\left(\frac{m^2}{4}\right) > 0, \qquad h^2 < \frac{m^2}{4}.$$

Il est facile de s'assurer que ces conditions suffisantes sont nécessaires.

La condition de réalité des racines de l'équation (4) donne

$$k^2 \geqslant mh ;$$

puis $f(0) > 0$ et $f\left(\frac{m^2}{4}\right) > 0$ se traduisent, toutes réductions faites, par les inégalités respectives

$$k^2 < h\sqrt{m^2+h^2}, \qquad k^2 < \frac{m^2}{4} + h^2 ;$$

en d'autres termes, on voit que k^2 doit être compris entre mh et le plus petit des deux nombres $h\sqrt{m^2+h^2}$, $\frac{m^2}{4} + h^2$; de plus, il faut que $h^2 < \frac{m^2}{4}$ ou $m > 2h$.

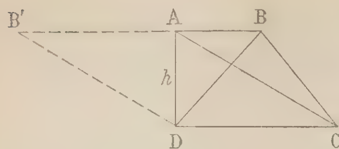
En résumé : *le problème admet une solution et une seule si* k^2 *est compris entre les deux nombres* $h\sqrt{m^2+h^2}$ et $\frac{m^2}{4} + h^2$;

Il admet deux solutions si k^2 *est compris entre* mh *et le plus petit des deux nombres* $h\sqrt{m^2+h^2}$, $\frac{m^2}{4} + h^2$ *et si de plus* $m > 2h$.

On s'assure facilement que mh est toujours plus petit que les deux nombres $h\sqrt{m^2+h^2}$ et $\frac{m^2}{4} + h^2$.

Dans tous les autres cas le problème n'admet pas de solution.

Solution géométrique. — Menons par le point D la parallèle DB′ à la diagonale AC ; dans le triangle BDB′ on connait

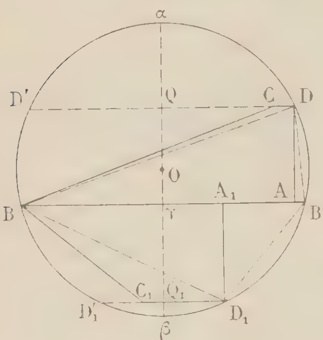


$$BB' = m, \quad AD = h,$$

$$BD \times B'D = k^2.$$

Il suffit alors de construire ce triangle. La quantité k^2 peut se remplacer par le rayon du cercle circonscrit, puisque $2R = \frac{k^2}{h}$; d'où la construction suivante :

On trace un cercle de rayon R dans lequel on prend une corde $BB' = m$; en γ, milieu de BB′, on élève la perpendiculaire γO sur BB′, sur laquelle on prend de part et d'autre du point γ deux longueurs γQ, γQ_1 telles que $\gamma Q = \gamma Q_1 = h$. On mène les parallèles DD′ et $D_1D'_1$ à BB′ et on a ainsi deux triangles BDB′, BD_1B' distincts qui donnent naissance à deux trapèzes différents ; pour construire l'un d'eux, on projette D en A sur BB′ et on prend $DC = AB'$ (DC est de sens contraire à AB′) ; en tirant BC, on a le trapèze ABCD, en projetant D_1 en A_1 sur BB′, puis prenant $D_1C_1 = A_1B'$ (D_1C_1 encore de sens contraire à A_1B') et joignant B et C_1, on a le second trapèze $A_1BC_1D_1$. Les points D′ et D'_1 ne fournissent pas de solutions nouvelles.

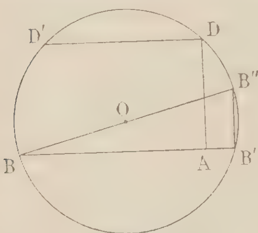


Discussion. — Cherchons d'abord à quelles conditions il n'y a qu'une solution ; étudions la solution ABCD et voyons dans quels cas elle existe seule. D'abord il faut que l'on ait

$$\overline{\gamma\beta} < h < \overline{\gamma\alpha} ;$$

alors la droite DD′ coupera la circonférence et $D_1D'_1$ ne la coupera pas (bien entendu nous supposons que $\overline{BB'} \leqslant 2R$, c'est-à-dire $m \leqslant \frac{k^2}{h}$ ou $k^2 \geqslant mh$).

Il faut encore que la projection A du point D sur BB′ tombe entre les points B et B′ ; élevons alors B′B″ perpendiculaire sur BB′.



Ce que nous venons de dire s'exprime par la condition

$$h > B'B''.$$

En résumé, la solution ABCD existera seule si on a $k^2 \geqslant mh$, avec

$$\overline{\gamma\beta} < h < \overline{\gamma\alpha}, \qquad (6)$$

$$h > B'B''. \qquad (7)$$

Les inégalités (6) donnent

$$R - \overline{O\gamma} < h < R + \overline{O\gamma},$$

ou

$$R - \sqrt{R^2 - \frac{m^2}{4}} < h < R + \sqrt{R^2 - \frac{m^2}{4}},$$

ou encore

$$\left(h - R + \sqrt{R^2 - \frac{m^2}{4}}\right)\left(h - R - \sqrt{R^2 - \frac{m^2}{4}}\right) < 0,$$

$$(h - R)^2 - R^2 + \frac{m^2}{4} < 0,$$

c'est-à-dire

$$h^2 - k^2 + \frac{m^2}{4} < 0$$

et enfin

$$k^2 > \frac{m^2}{4} + h^2. \qquad (8)$$

L'inégalité (7) donne

$$h > \sqrt{4R^2 - m^2},$$

ou

$$h^2 > \frac{k^4}{h^2} - m^2,$$

ou

$$k^2 < h\sqrt{h^2 + m^2}. \qquad (9)$$

Les inégalités (9) et (8) ne sont compatibles que si $m < 2h\sqrt{2}$; donc la solution ABCD sera unique si l'on a

$$m < 2h\sqrt{2},$$

$$\frac{m^2}{4} + h^2 < k^2 < h\sqrt{h^2 + m^2}. \qquad (k^2 \geqslant mh \text{ est alors vérifiée.})$$

Voyons maintenant à quelles conditions la solution $A_1BC_1D_1$ existera seule.

Il faut d'abord (en supposant toujours $k^2 \geqslant mh$) que $h < \overline{\gamma\beta}$ et que de plus la solution ABCD disparaisse ; ce qui n'a lieu dans les circonstances actuelles que si $h < \overline{B'B''}$.

$$h < \overline{\gamma\beta} \quad \text{donne} \quad h < R - \sqrt{R^2 - \frac{m^2}{4}},$$

ou

$$R - h > \sqrt{R^2 - \frac{m^2}{4}}. \qquad (10)$$

L'inégalité (10) exige que $R > h$, ou $k^2 > 2h^2$; sous cette condition on déduit

$$(R - h)^2 > R^2 - \frac{m^2}{4},$$

ou

$$k^2 < \frac{m^2}{4} + h^2. \qquad (11)$$

De la condition $h < \overline{B'B''}$ on déduit

$$k^2 > h\sqrt{h^2 + m^2}, \qquad (12)$$

et on voit que (12) entraîne la condition $k^2 > 2h^2$, car (11) et (12), pour être compatibles, exigent que l'on ait $m > 2h\sqrt{2}$, et alors on conclut bien que l'inégalité $k^2 > 2h^2$ rentre dans $k^2 > h\sqrt{h^2 + m^2}$.

En résumé, la solution $A_1BC_1D_1$ est unique si l'on a

$$m > 2h\sqrt{2}, \qquad h\sqrt{h^2 + m^2} < k^2 < \frac{m^2}{4} + h^2$$

($k^2 \geqslant mh$ est encore vérifiée).

Ce sont les conditions trouvées antérieurement ; mais la géométrie a l'avantage de nous montrer la distinction des deux solutions qui existent dans chacun des cas.

Dans quels cas y a-t-il maintenant deux solutions ?

D'après ce qui précède, les conditions sont

$$h < \overline{\gamma\beta}, \qquad h > \overline{B'B''}$$

(toujours on suppose que $k^2 \geqslant mh$).

Prenons $h < \overline{\gamma\beta}$; on en déduit

$$R - h > \sqrt{R^2 - \frac{m^2}{4}}, \qquad (10)$$

ce qui exige encore $k^2 > 2h^2$, comme plus haut ; sous cette restriction on conclut de (10)

$$k^2 < \frac{m^2}{4} + h^2 ; \qquad (11)$$

enfin de $h > \overline{B'B''}$ on tire encore

$$k^2 < h\sqrt{h^2 + m^2} ; \qquad (13)$$

donc k^2 doit surpasser le plus grand des nombres mh, $2h^2$ et rester inférieur au plus petit des deux nombres $\frac{m^2}{4} + h^2$, $h\sqrt{h^2 + m^2}$.

Supposons d'abord $\frac{m^2}{4} + h^2 < h\sqrt{h^2 + m^2}$, ce qui exige que

$m < 2h\sqrt{2}$. Nous devons avoir $2h^2 < \frac{m^2}{4} + h^2$, ou $m > 2h$; alors on conclut $mh > 2h^2$ et les deux solutions existeront dans ce cas sous les conditions suivantes :

$$2h < m < 2h\sqrt{2},$$

$$mh < k^2 < \frac{m^2}{4} + h^2.$$

Enfin soit $\frac{m^2}{4} + h^2 > h\sqrt{h^2+m^2}$; il est facile de voir qu'il n'y a compatibilité entre les inégalités que sous les conditions

$$m > 2h\sqrt{2},$$

$$mh < k^2 < h\sqrt{h^2+m^2}.$$

On peut donc dire en définitive qu'il y a deux solutions lorsque k^2 est compris entre mh et le plus petit des deux nombres $\frac{m^2}{4} + h^2$, $h\sqrt{h^2+m^2}$, et si de plus $m > 2h$, résultats déjà obtenus algébriquement.

Reste à étudier les cas limites : reportons-nous pour cela à la solution algébrique :

1° $k^2 = mh$; les valeurs de P sont égales entre elles et à h^2. Il n'y a plus qu'un seul système de valeurs pour x et y, donné par l'équation

$$X^2 - mX + h^2 = 0,$$

et qui n'existe que si $m \geqslant 2h$; géométriquement, on voit que $2R = m$, et les deux trapèzes ABCD, $A_1BC_1D_1$ sont égaux; si $m = 2h$ ou $R = h$, on voit que le trapèze ABCD devient un rectangle.

2° $k^2 = \frac{m^2}{4} + h^2$; on a alors

$$f\left(\frac{m^2}{4}\right) = 0$$

et les deux racines en P sont

$$\frac{m^2}{4} \quad \text{et} \quad 2h^2 - \frac{m^2}{4}.$$

Les équations donnant x et y sont

$$X^2 - mX + \frac{m^2}{4} = 0,$$

$$X^2 - mX + 2h^2 - \frac{m^2}{4} = 0.$$

La première donne $\left(X - \frac{m}{2}\right)^2 = 0$, ce qu'on savait déjà, puisque $P \leqslant \frac{m^2}{4}$ était la condition de réalité des racines de l'équation $X^2 - mX + P = 0$. L'un des trapèzes est encore un rectangle et il existe toujours; le second n'existe que si l'on a

$$2h < m < 2h\sqrt{2}.$$

Pour $m = 2h$ ce trapèze devient aussi un rectangle égal au premier, et si $m = 2h\sqrt{2}$, ce trapèze se réduit à un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont m et h.

3° $k^2 = h\sqrt{m^2+h^2}$; dans ce cas $f(0) = 0$, et les deux racines en P sont 0 et $2h^2$. L'un des trapèzes devient un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont encore m et h, et l'autre est un vrai trapèze qui n'existe que si

$$m \geqslant 2h\sqrt{2};$$

ce second trapèze devient aussi un triangle rectangle égal au premier si $m = 2h\sqrt{2}$.

Tous ces résultats auraient pu se conclure comme cas particuliers des conditions trouvées à propos de la recherche de l'existence des deux solutions, recherche qui a été faite d'une façon détaillée par la géométrie.

(PAGÈS, professeur au lycée de Rennes).

[Ont résolu la même question : MM. A. Bouzy; Burgat; H. Fajon; E. Gernez; Jarrige; E. Léotard; M. Oger.]

4378. — *On donne deux droites de l'espace, AX et BY, orthogonales entre elles et ayant AB pour perpendiculaire commune. On prend sur AX une longueur variable AM et sur BY une longueur BN égale à AM.*

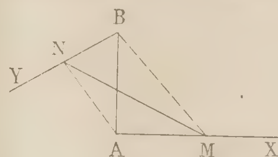
1° Démontrer que la sphère qui a MN pour diamètre passe par les points A et B.

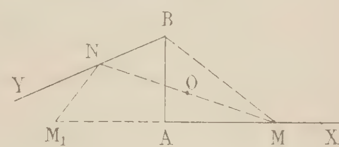
2° Trouver le lieu du centre de cette sphère.

3° Démontrer que le plan tangent en A à cette sphère passe toujours par une certaine droite fixe.

4° Démontrer que la droite MN reste parallèle à un certain plan fixe.

1° Le plan BAX est perpendiculaire sur BY; donc les droites BM et BY sont perpendiculaires; de même AN et AX sont perpendiculaires, et la première partie est démontrée.





Le même fait aurait lieu si les longueurs AM et BN étaient prises dans n'importe quel sens sur les droites AX et BY qui les portent. Le problème posé est alors double en quelque sorte. Ainsi encore la sphère de diamètre M_1N passe en A et B.

2° Le centre O de la sphère MN est dans le plan P perpendiculaire à AB en son milieu. Dans le plan P et par le milieu I de AB menons IX', IY_1 parallèles respectivement à AX et BY et soient IZ, IZ' les bissectrices des angles que forment IX', IY_1. Remarquons que si nous projetons les points M et N sur le plan P, ces projections se font en M' et N' sur IX', IY_1 et telles que

$$MM' = AI = IB = NN'.$$

Comme MM' et NN' sont aussi parallèles, la figure MM'NN' est un parallélogramme et les diagonales MN, M'N' se coupent en leur milieu; d'ailleurs comme $IN' = BN = AM = IM'$, le triangle M'IN' est rectangle et isocèle (rectangle puisque IX' et IY_1 sont rectangulaires) et le milieu de M'N' est sur la bissectrice IZ de l'angle $X'IY_1$. Le centre O de la sphère MN décrit donc la droite IZ. Si on prenait la sphère de diamètre M_1N, son centre décrirait la droite IZ'. Ces droites tout entières répondent à la question.

3° Le plan tangent en A à la sphère MN est perpendiculaire sur AO; or le rayon AO reste dans le plan fixe (BA, IZ), donc le plan tangent en A pivote autour de la perpendiculaire en ce point au plan (BA, IZ); or IZ' est perpendiculaire à IZ et AB est perpendiculaire au plan (BA, IZ); donc la droite fixe dont il est parlé dans l'énoncé est la parallèle menée par A à IZ'. Même résultat au point B. Pour la sphère M_1N, les droites correspondantes seraient parallèles à IZ.

4° Remarquons que M'N' est perpendiculaire sur IZ (le triangle M'IN' est rectangle et isocèle); d'autre part NN' et MM' sont perpendiculaires au plan P, par suite orthogonales à IZ; donc le plan du parallélogramme MM'NN' est perpendiculaire à cette droite IZ, et MN est aussi perpendiculaire sur IZ; il suit de là que MN reste parallèle au plan fixe (AB, IZ'), puisque ce plan est perpendiculaire sur IZ. Pour la sphère M_1N, la droite M_1N serait parallèle au plan (AB, IZ).

Remarque. — La première partie est indépendante de l'hypothèse $AM = BN$; la seconde n'exige pas que les droites AX, BY soient orthogonales; de même la troisième et la quatrième.

PAGÈS, professeur au lycée de Rennes.

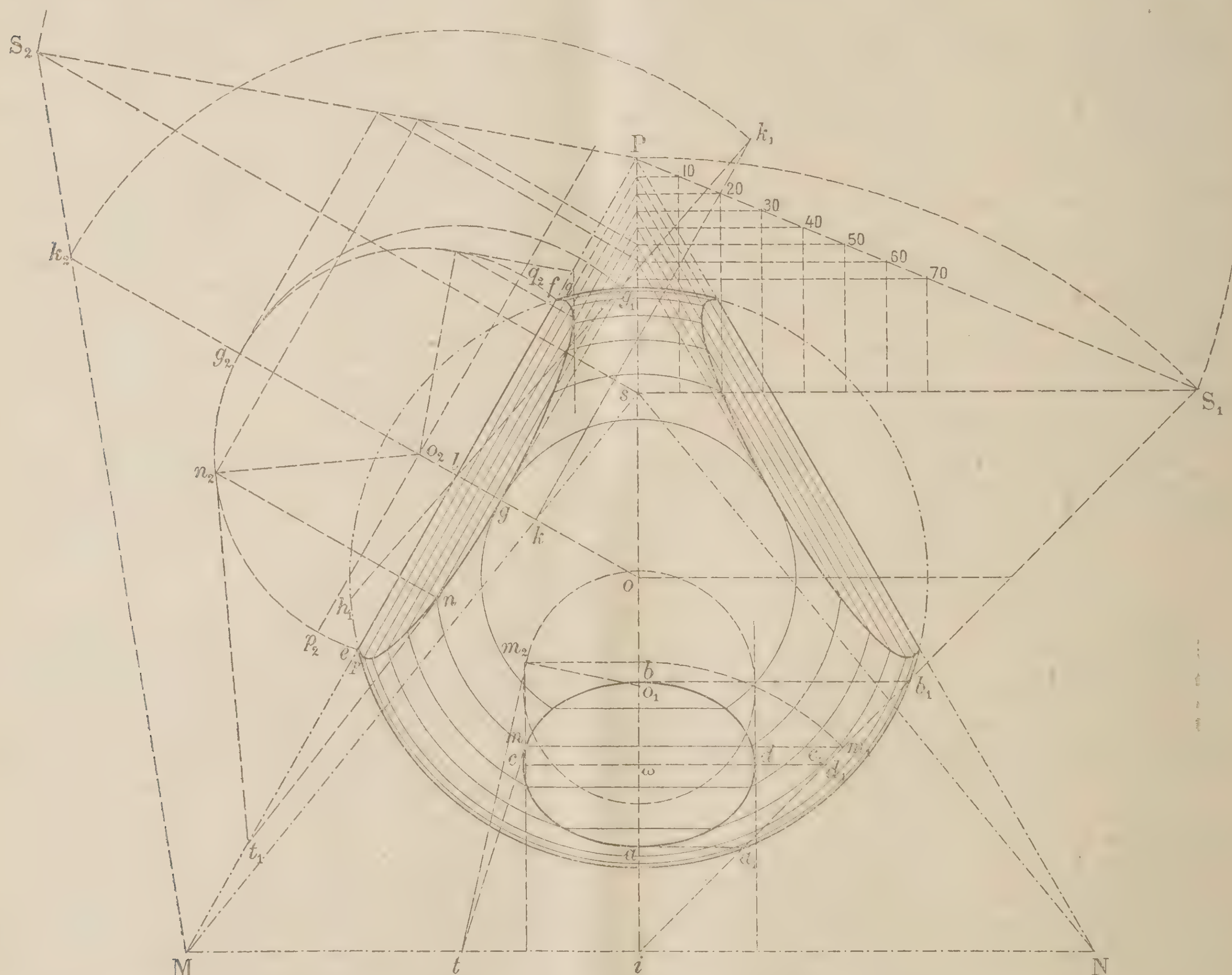
[Ont résolu la même question : MM. Fajon (dont nous publierons la solution dans le prochain numéro); L.-A. Blanc ; Jarrige ; L. Monnier].

4379. — *Données.* — 1° *Un tétraèdre* SMNP *dont les faces* MNP *et* SMN *sont des triangles équilatéraux ; la première est dans le plan horizontal.* MN *égal à* 220mm *est parallèle au bord inférieur de la feuille et à une distance de ce bord égale à* 50mm. *La pente de la face* SMN *est* $\frac{1}{1}$. *Le tétraèdre est au-dessus du plan horizontal et se projette au-dessus de* MN.

2° *Un hémisphère de rayon égal à* 70mm, *reposant par sa base sur le plan horizontal et au-dessus de ce plan. Le centre de cet hémisphère est situé sur la perpendiculaire élevée au milieu de* MN, *au-dessus et à* 90mm *de* MN.

Représenter la projection horizontale de la portion supposée opaque de l'hémisphère intérieure au tétraèdre. — Ecrire à l'encre rouge les cotes exprimées en millimètres des sommets utiles des courbes d'intersection. — Représenter en traits noirs et fins les lignes de niveau de ce solide déterminées par des plans équidistants de 10mm, *à partir du plan horizontal. — Construire les tangentes aux intersections des deux solides aux points qui ont pour cote* 50mm, *puis celles qui se projettent perpendiculairement à* MN.

Au moyen des données, on peut d'abord construire la base MNP du tétraèdre et le grand cercle o, contour apparent de l'hémis-



phère. Pour obtenir ensuite le sommet S, on remarque que le triangle SiP se rabat horizontalement autour de sa trace horizontale Pi suivant le triangle isocèle PiS₁ dont l'angle au sommet i est de 45° ; en relevant S₁, on a en s la projection horizontale de S.

Intersection de la face SMN *avec l'hémisphère.* — Cette intersection est un petit cercle ayant pour diamètre la portion de Si comprise dans l'hémisphère, portion rabattue en a_1b_1 sur S_1i. En rabattant la face SMN sur le plan horizontal, ce petit cercle vient se confondre avec le cercle o_1, dont il suffit de relever les divers points pour obtenir la projection horizontale de l'intersection. Ainsi si l'on relève le point m_2 et la tangente m_2t en ce point, on obtient le point m et la tangente mt à la projection de l'intersection. Cette projection est d'ailleurs une ellipse dont on détermine aisément les sommets a, b, c, d.

Intersection de l'une des faces SMP *et* SNP *avec l'hémisphère.* — Le plan SPi partageant l'hémisphère et le tétraèdre en deux parties symétriques, il suffit de déterminer l'intersection par la face SMP par exemple, l'autre intersection ayant sa projection symétrique par rapport à Pi.

Cette intersection est un segment de cercle limité aux points de rencontre c, f du cercle o avec l'arête MP. Pour déterminer un troisième point de ce segment, on coupe l'hémisphère et le tétraèdre par un plan perpendiculaire à l'arête MP et passant par o; ce plan coupe la face SMP suivant le segment de droite kl, qui se rabat en k_2l autour de MP et en k_1l autour de ol; l'intersection de k_1l avec le cercle o fournit le rabattement g_1 du point cherché autour de ol; on en déduit ensuite g_2, ce qui permet de tracer le segment de cercle eg_2f, dont il ne reste plus qu'à relever les divers points comme on l'a fait pour le point n_2 par exemple. La projection ainsi obtenue est un arc d'ellipse admettant pq pour grand axe.

Au lieu d'effectuer les rabattements des faces sur le plan horizontal, on pourrait déterminer l'intersection des deux solides en les coupant par un plan horizontal rencontrant l'hémisphère; les points de l'intersection sont alors les points communs à un cercle et à un triangle projetés horizontalement en vraie grandeur. Cette construction a servi en particulier à obtenir directement les lignes de niveau du solide commun déterminées par des plans équidistants de 10^{mm}.

Cotes des sommets utiles des courbes d'intersection. — Les sommets a et b ont respectivement pour cotes $aa_1 = 25^{mm}$ et $bb_1 = 65^{mm}$; les sommets c et d ont pour cote commune $o_1c_1 = 45^{mm}$.

Le sommet g est situé sur la ligne de niveau de cote 60^{mm}, et les sommets p, q se trouvent sur la ligne de niveau de cote 10^{mm}. Les cotes de ces lignes de niveau se trouvent en traçant les horizontales de la face SMP passant en g, p, q et en cotant les points où ces horizontales rencontrent SP.

Tangentes aux points de cotes 50^{mm} *et tangentes perpendiculaires à* MN. — Les six tangentes de cotes 50^{mm} sont représentées par les droites mt et nt_1 et leurs symétriques (non figurées) par rapport à oi et ol.

Les tangentes perpendiculaires à MN sont parallèles au plan SPi et par suite leur rabattement est parallèle à Pi pour la face SMN et à S_2P pour la face SMP; sur l'épure on n'a figuré que deux de ces tangentes, les deux autres étant symétriques des premières par rapport à Pi.

(L. GOURDET, à Vallières-les-Grandes.)

ARITHMÉTIQUE

4509. — *Soit* N *un nombre entier; on effectue sur lui l'opération de la racine carrée. Soient* a *la racine carrée à une unité près par défaut et* r *le reste de l'opération.*

On divise N *par* a *et l'on appelle* r' *le reste de cette division. Dans quel cas* r' *sera-t-il égal à* r; *et, s'il n'est pas égal à* r, *à quoi* r' *est-il égal?*

(*Bacc. lettres-math., Paris, juillet 1898.*)

Première solution. — D'après l'énoncé, on écrit

$$N = a^2 + r. \qquad (1)$$

D'autre part, a étant la racine carrée de N à une unité près, ce nombre vérifie les inégalités

$$a^2 \leqslant N < (a+1)^2,$$

ou bien

$$a^2 \leqslant N \leqslant a^2 + 2a,$$

ou

$$a^2 \leqslant N \leqslant a(a+2).$$

Ecartons les cas $a^2 = N$, $a(a+1) = N$, $a(a+2) = N$ pour lesquels le reste r' est évidemment nul; il reste à considérer deux cas.

I. $$a^2 < N < a(a+1).$$

Le quotient de la division de N par a est visiblement a; il vient alors

$$N = a^2 + r', \qquad (2)$$

et par suite, en comparant (1) et (2),

$$r' = r.$$

II. $$a(a+1) < N < a(a+2).$$

Le quotient de la division de N par a est visiblement $a+1$; et par suite

$$N = a(a+1) + r'. \qquad (3)$$

Comparant (1) et (3), on trouve

$$r + a = r', \qquad r' = r - a,$$

valeur acceptable, car on vérifie aisément que dans ce cas on a toujours $r > a$.

(L. ÉCOFFARD, école primaire supérieure de Dôle.)

Deuxième solution. — Soit a la racine carrée de N à une unité près par défaut; tous les nombres dont la racine carrée à une unité près par défaut est égale à a sont

$$a^2, \quad a^2+1, \quad \ldots, \quad a^2+a, \quad a^2+a-1, \quad \ldots, \quad a^2+2a.$$

Partageons-les en trois groupes:

$$a^2, \quad a^2+1, \quad \ldots, \quad a^2+a-1,$$
$$a^2+a, \quad a^2+a+1, \quad \ldots, \quad a^2+2a-1,$$
$$a^2+2a.$$

Si N est un nombre du premier groupe, r est un des nombres $0, 1, \ldots, a-1$. Le quotient de la division de N par a est égal à a, et le reste r' de cette division est également l'un des nombres $0, 1, \ldots, a-1$. Donc $r' = r$.

Si N est un nombre du second groupe, r est un des nombres $a, a+1, \ldots, 2a-1$. Le quotient de la division de N par a est égal à $a+1$; par suite r' prend les valeurs $0, 1, \ldots, a-1$; donc

$$r = r' + a, \qquad r' = r - a.$$

Enfin si $N = a^2 + 2a = a(a+2)$, r' est évidemment nul.

Remarque. — Il est aisé de voir que si l'on convient d'extraire la racine carrée à une unité près par excès ou par défaut, en adoptant pour chaque nombre celui des deux procédés qui donne le reste le plus petit, et si l'on opère de même pour la division, les restes des deux opérations sont toujours égaux sauf pour $N = a^2 + a$ et $N = a^2 + 2a$.

(CHOLLET, à Largeasse.)

[Ont résolu la même question: MM. A. Arcizet; L. Barberot; V. Barol; E. Baudot; E. Baudouin; F. Beynas; C. Billionnet; Bily-Méheust; L. Bois; J. Bordas; J. Bouvier; E. Bouby; Cavaillé; G. Charpentier; Chosson; J. Coupat; P. Delolme; Donnadieu; L. Hébrard; R. Henry; L. Hubert; R. Hüe; H. Janois; E. Le Maigre; Le Révérend; A. Lescure; C. Marie, Bel-Air, Nantes; G. Nuzeret; M. Oger; F. Ollivier; R. P.; Pémartin; A. Prost; B. Ribes; J. Sallaud; A. Sallin; G. Schoonheere; A. Texonnière; Venet; Vial; J. Fiton.]

4525. — *Démontrer que si* m, n, $\dfrac{mn}{m+n}$ *sont des nombres entiers,* D *le plus grand commun diviseur de* m *et* n, m' *et* n' *les quotients de* m *et* n *par* D, D *est divisible par la somme* $m'+n'$.

Remplaçons dans l'expression $\dfrac{mn}{m+n}$, m par Dm' et n par Dn'; on obtient, après suppression du facteur commun D,

$$\frac{Dm'n'}{m'+n'}.$$

Ce nombre est entier par hypothèse; donc $m'+n'$ divise le

produit $Dm'n'$. Mais $m'+n'$ est premier avec $m'n'$, car tout diviseur de $m'n'$ divise un seul des facteurs m' et n', premiers entre eux par hypothèse : il ne peut par suite diviser la somme $m'+n'$. Dès lors $m'+n'$ divisant $Dm'n'$ et étant premier avec $m'n'$ divise nécessairement D.

C. q. f. d.

(PIERRE MILLEVOYE, lycée de Lyon.)

[Ont résolu la même question : MM. N. G. Alesandrescu ; A. Amblard ; A. Arcizet ; L. Barberot ; M. L. Bayor ; F. Bellec ; R. Bellencourt ; Bily-Méheust ; L. Bois ; E. Bouby ; A. Brière ; P. Brignon ; G. Canel ; C. Carbou ; Catin ; Cavaillé ; Chosson ; F. Clabault ; J. Collin ; J. Corday ; Cougnoux ; R. Coural ; L. Curt ; P. Delolme ; Donnadieu ; C. Doumerc ; Famechon ; E. Foucart ; G. Foucry ; H. Gallay ; P. Gilibert ; G. Girot ; L. Hébrard ; R. Henry ; R. Hüe ; H. Janois ; M. Jousset ; Le Révérend ; J. Leveau ; J. Ménéchal ; G. Nazare ; M. Oger ; R. P. ; A. Pichon ; J. Plantier ; P. Plisson ; A. Prost ; F. Raffin ; Reymond ; Ribes ; J. Rigal ; R. Rive ; C. Rochard ; A. Ste-Laguë ; J. Sallaud ; G. Schoonheere ; G. Tastet ; L. Tholomier ; L. Troin ; E. Vaicle ; Venet ; F. Vérot ; Vial ; M. Vimont ; Vincent ; V. Bonzom ; C. Bourvéau ; E. Gernez-Pfanmatter ; P. Le Verrier ; M. Petit ; L. Pont.]

GÉOMÉTRIE

4518. — *Construire un triangle rectangle d'hypoténuse donnée a, tel que la somme d'un des côtés de l'angle droit et de la hauteur soit égale à l'autre côté.*

Par hypothèse la hauteur abaissée sur l'hypoténuse doit être égale à la valeur absolue de la différence des deux autres côtés. En désignant cette hauteur par x, on peut donc écrire

$$x^2 = (AB - AC)^2,$$

ou $x^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AB.AC.$

Or la figure donne

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = a^2$$

et $AB.AC = ax.$

L'équation du problème est donc

$$x^2 - 2ax - a^2 = 0,$$

d'où l'on tire, en écartant la racine négative,

$$x = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2} - 1).$$

Cette valeur se construit facilement en élevant sur BC la perpendiculaire $CD = a$, puis en rabattant la longueur BD sur BC en BE : on a alors $BD = a\sqrt{2}$ et par suite

$$x = BD - a = BE - a = CE.$$

Connaissant l'hypoténuse et la hauteur correspondante du triangle rectangle, on est ramené à une construction connue, indiquée sur la figure.

Pour que les points A et A′ existent, il faut et il suffit que la hauteur x ne surpasse pas le rayon $\frac{a}{2}$ du cercle de diamètre BC, condition toujours remplie, puisque

$$\sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}, \qquad \text{ou} \qquad 2 < \frac{9}{4}.$$

(R. DICKSON, à Angoulême.)

Solution trigonométrique. — Le triangle rectangle sera complètement déterminé si, outre l'hypoténuse a, on connaît un des angles aigus.

Cherchons par exemple l'angle C. Les deux côtés de l'angle droit sont représentés par

$$c = a \sin C, \qquad b = a \cos C ;$$

et la hauteur issue de A, par

$$h = b \sin C = a \cos C \sin C$$

La condition $h = |\,c - b\,|$ revient donc à

$$\sin C \cos C = |\sin C - \cos C|.$$

En élevant chaque membre au carré, elle devient

$$(\sin C \cos C)^2 = \sin^2 C + \cos^2 C - 2 \sin C \cos C,$$

ou, en observant que

$$\sin^2 C + \cos^2 C = 1 \qquad \text{et} \qquad 2 \sin C \cos C = \sin 2C,$$

$$\sin^2 2C + 4 \sin 2C - 4 = 0.$$

L'angle C étant aigu, $\sin 2C$ est toujours positif; la racine positive de l'équation précédente convient donc seule si toutefois elle est inférieure à 1. Or cette racine a pour valeur

$$\sin 2C = 2(-1 + \sqrt{2}) = 0{,}82842.$$

Comme à un sinus donné correspondent deux arcs supplémentaires, il en résulte pour C deux angles complémentaires, et par suite deux triangles symétriques par rapport à la perpendiculaire élevée au milieu de BC.

En se servant des tables à 5 décimales, on trouve pour valeur du plus petit angle C

$$2C = 55°56'13'' \qquad \text{et} \qquad C = 27°58'6''.$$

(C. MARIE, Bel-Air, Nantes.)

[Ont résolu la même question : Mlle Turpain ; MM. A. Amblard ; A. Arcizet ; E. Ardin-Delteil ; Aulagnier ; A.-B., à Reims ; P. Barbier ; E. Baudot ; Bayor ; G. Bieber ; C. Billionnet ; L. Bois ; E. Bonjan ; E. Bouby ; E. Boudier ; G. Boulestin ; F. Breynaert ; F. Chabault ; J. Collin ; R. Coural ; Croze ; S. Damien ; G. Delahaye ; R. Depasse ; F. Deville ; H Dutordoir ; Duval ; G. Foucry ; M. Gondran ; H. Janois ; J. Jaubert ; Jousset ; C. Labille ; A. Lardon ; R. Lavallée ; A. Lescure ; J. Leveau ; C. Ludovic ; F. Monseran ; F. Ollivier ; E. Paris ; R. P. ; J. Pémartin ; Poujol ; L. Révérend ; A. Sainte-Laguë ; G. Schoonheere ; G. Tastet ; L. Toubal ; R. Van Cauwenberghe ; F. Vérot ; Vial ; A. Vidalenc.]

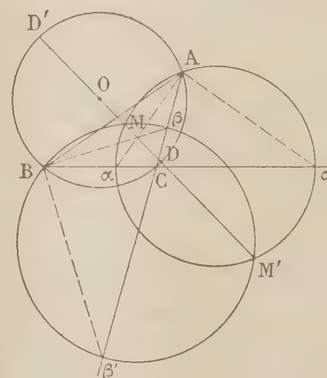
4520. — *Dans un triangle* ABC *on mène les bissectrices intérieures et extérieures* $A\alpha$, $A\alpha'$; $B\beta$, $B\beta'$; $C\gamma$, $C\gamma'$, *et on décrit les cercles de diamètres* $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, *qu'on appelle les cercles d'Apollonius du triangle* ABC ; *démontrer :*

1° *que ces trois cercles se coupent en deux points* M *et* M′ ;

2° *que la droite* MM′ *passe par le centre du cercle circonscrit au triangle* ABC ;

3° *que la polaire de chacun des points* M *et* M′ *par rapport au cercle circonscrit au triangle* ABC *passe par l'autre point.*

1° Soient M et M′ les deux points communs aux cercles de diamètres $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$.



Le cercle de diamètre $\alpha\alpha'$ représente comme on sait le lieu des points du plan tels que le rapport de leurs distances aux points B et C est constant; on peut donc écrire

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{M'B}{M'C}. \qquad (1)$$

Le cercle de diamètre $\beta\beta'$ donne de même

$$\frac{MC}{MA} = \frac{BC}{BA} = \frac{M'C}{M'A}. \qquad (2)$$

Multiplions membre à membre les égalités (1) et (2); il vient

$$\frac{MB}{MA} = \frac{BC}{AC} = \frac{M'B}{M'A},$$

ce qui montre que les points M et M′ appartiennent également au cercle de diamètre $\gamma\gamma'$ passant par le sommet C.

2° La division $B\alpha C\alpha'$ étant harmonique, tout cercle passant par B et C, c'est-à-dire en particulier le cercle circonscrit O, est orthogonal au cercle de diamètre $\alpha\alpha'$. Par suite le cercle O est orthogonal à la fois aux trois cercles analogues $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$; son centre est donc d'égale puissance par rapport à ces cercles et se trouve ainsi sur leur axe radical commun MM'.

3° Soient D et D' les points de rencontre de la droite MM' avec la circonférence O. Le rayon OA étant tangent au cercle $\alpha\alpha'$, on en conclut

$$\overline{OA}^2 = OM.OM',$$

relation exprimant que les points M et M' sont conjugués harmoniques par rapport au cercle O, d'où il résulte que chacun de ces points appartient à la polaire de l'autre point par rapport au cercle O.

(P. BARROUÉ, lycée de Brest.)

[Ont résolu la même question : MM. F. d'Avillez ; A.-B., à Reims ; Bayor Bily-Méheust ; C. Broutin ; J. Chapron ; Croze ; Debrun ; G. Delahaye ; P. Delolme ; R. Dickson ; E. Foucart ; G. Foucry ; R. Hüe ; P. Le Verrier ; M. Oger ; G. Schoonheere ; A. Thorin.]

TRIGONOMÉTRIE

4522. — *Lorsque* $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$, *on a*

$$\frac{(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)(1+\operatorname{tg}\gamma)}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}=2.$$

De l'hypothèse faite, on déduit

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1.$$

Développons successivement le premier membre au moyen de la formule

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}.$$

Il vient

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(\beta+\gamma)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(\beta+\gamma)}=1,$$

ou
$$\operatorname{tg}\alpha+\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}=1-\operatorname{tg}\alpha\,.\,\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma},$$

ou
$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma$$
$$=1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma,$$

ce qui peut s'écrire

$$1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma$$
$$+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma.$$

En ajoutant $1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$ aux deux membres de cette dernière égalité, on obtient finalement

$$2(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma)=1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$$
$$+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)(1+\operatorname{tg}\gamma).$$

(P. LE VERRIER, lycée Janson-de-Sailly.)

GÉNÉRALISATION. — Dans le cas plus général où $\alpha+\beta+\gamma=s$, on vérifierait d'une manière analogue que l'on a

$$\frac{(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}s)(1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}s)(1+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}s)}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}s}=1+\operatorname{tg}^2 s.$$

(J. SALLAUD, pensionnat N.-D. de Toutes-Aides, à Doulon, près Nantes.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Amblard ; E. Ardin-Delteil ; Aulagnier ; d'Avillez ; A.-B., à Reims ; L. Barberot ; P. Barbier ; L.-M. Bayor ; F. Beynas ; C. Billionnet ; L.-A. Blanc ; L. Bloch ; L. Bois ; E. Bonjan ; E. Bouby ; F. Breynaert ; C. Broutin ; G. Canel ; L. Cartier ; Colomer ; J. Corday ; J. Danchaud ; G. Delahaye ; P. Delolme ; G. Desplats ; R. Dickson ; A. Doué ; C. Doumerc ; H. Dutordoir ; E. Foucart ; H. Gallay ; E. Gernez-Pfanmatter ; M. Gondran ; H. Janois ; R. Hüe ; J. Jaubert ; Jousset ; J. Lacampagne ; F. Ladevèze ; F. Lalescu ; Laurain ; A. Lescure ; C. Ludovic ; P. Marion ; J. Mouchet ; P. Ollivier ; L. Patin ; J. Plantier ; A. Popescu ; Rieumajou ; J. Rocher ; G. Schoonheere ; A. Smantanescu ; G. Tastet ; R. Van Cauwenberghe ; Venet ; Vien ; J. Vignier.]

4531. — *Démontrer que*

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{A}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{A}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A.$$

Première solution. — Le premier membre de la relation étant une différence de carrés peut s'écrire

$$\left[\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{A}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{A}{2}\right)\right]\left[\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{A}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{A}{2}\right)\right],$$

ou, en développant chaque sinus et réduisant,

$$2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{A}{2}\times 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{\pi}{8},$$

ou, en appliquant la formule $2\sin a\cos a=\sin 2a$,

$$\sin\frac{\pi}{4}\sin A=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A.$$

C. q. f. d.

On peut obtenir le même résultat en appliquant au premier membre la formule $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$, lequel devient ainsi successivement

$$\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}+A\right)-\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{4}-A\right)\right]}{2}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-A\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+A\right)}{2}=\sin\frac{\pi}{4}\sin A=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A.$$

Remarque. — Plus généralement, on a de même

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{A}{2p}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{A}{2p}\right)=\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{A}{p}.$$

(H. PITRAT, collège Sainte-Marie, Saint-Chamond.)

Seconde solution. — En appliquant la formule

$$\sin^2 a-\sin^2 b=\sin(a+b)\sin(a-b),$$

on obtient

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{A}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\sin A=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A.$$

(P. LE VERRIER, lycée Janson de Sailly.)

[Ont résolu la même question : MM. N. G. Alesandrescu ; A. Amblard ; A. Arcizet ; E. Ardin-Delteil ; J.-F. d'Avillez ; L. Barberot ; P. Barbier ; E. Baudot ; F. Bellec ; R. Bellencourt ; F. Beynas ; Bily-Méheust ; L. Bois ; J. Borgey ; E. Bouby ; F. Breynaert ; A. Brisbare ; G. Canel ; C. Carbou ; Catin ; Cavaillé ; A. Chautemps ; E. Chedeville ; G. Chollet ; Y. Collin ; J. Corday ; R. Coural ; C. Dalbéran ; J. Danchaud ; G. Delahaye ; P. Delolme ; F. Deville ; R. Dickson ; N. Falaugesco ; Famechon ; L. Ferron ; E. Foucart ; G. Foucry ; S. Galland ; H. Gallay ; E. Girardeau ; A. Girondé ; M. Gondreau ; A. Grolleau ; P. Gutton ; R. Henry ; R. Hüe ; A. Jacquemond ; Jacquet ; H. Janois ; M. Jousset ; A. L. ; J. Lamotte ; J. Laperrière ; G. Laurain ; E. Le Maigre ; J. Leveau ; F. Limouzi ; P. Lorrain ; C. Ludovic ; C. Marie ; J. Marrot ; Mazières ; G. Nazare ; M. Oger ; R. P. ; J. Pila ; J. Plantier ; P. Plisson ; J. Quilichini ; J. Reynaud ; Ribes ; R. Rives ; E. Roncaglia ; J. Sallaud ; G. Schoonheere ; N. Sichitiu ; P. Sickler ; G. Tastet ; M. Teulié ; E. Vaicle ; Venet ; J. Vignier ; Vial ; Vien ; Vimont ; Vincent ; V. Bonzom ; E. Gernez-Pfanmatter ; G. Lallier ; R. Lavallée ; P. Millevoye ; G. Salles ; L. Bloch ; P. Bisch ; H. Bonafé ; Colomer.]

PHYSIQUE

4524. — *Le poids d'un échantillon de quartz aurifère est* 100gr; *sa densité est* 8. *On demande quel est le poids d'or qu'il renferme.*

La densité de l'or est 19,36, *celle du quartz est* 2,65.

(*Bacc. lettres-sciences, Grenoble, juillet 1898.*)

Soit x le poids de l'or ; le poids du quartz est $100 - x$. Ecrivons que le volume du quartz aurifère est égal au volume de l'or augmenté de celui du quartz :

$$\frac{100}{8} = \frac{x}{19,36} + \frac{100 - x}{2,65},$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{15\,488 - 100 \times 19,36 \times 2,65}{133,68} = 77^{gr},48.$$

(VIMONT, à Reims.)

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil ; Arcizet ; O. Bailly ; L. Barberot ; E. Baudot ; L. Bayor ; R. Bellencourt ; F. Bernard ; C. Billionnet ; V. Blaser ; Bois ; E. Bonjan ; M. Boucly ; C. Bourveau ; E. Bouby ; F. Breynaert ; P. Brignon ; G. Canel ; G. Casse ; G. Charpentier ; Chiché ; Colomer ; J. Danchaud ; R. Depasse ; F. Deville ; Donnadieu ; C. Doumerc ; G. Dubois ; C. Dujardin ; G. Dumas ; H. Dutordoir ; A. Duval ; G. Edely ; E. Foucart ; G. Foucry ; H. Gallay ; Galibert ; E. Gernez ; M. Gondran ; G. Gordien ; J. Grey ; P. Gutton ; Hébrard ; R. Henry ; A. Huet ; R. Hüe ; Jacquemard ; H. Janois ; M. Jousset ; P. Joye ; C. Labille ; G. Lallier ; J. Lamotte ; R. Lavallée ; A. Larcher ; Laurain ; A. Lardon ; A. Lecontour ; A. Lescure ; C. Ludoire ; J. Maranne ; Malleret ; E. Le Maigre ; P. Marion ; Mazières ; M. Mathieu ; J. Melin ; P. Millevoye ; F. Monseran ; C. Montaron ; J. Mouchet ; M. Nahon ; A. Noyelle ; F. Ollivier ; Le Page ; R. P. ; J. Pémartin ; A. Pichon ; H. Pingeot ; Pinel-Libertie ; J. Plantier ; A. Prost ; Raynaud ; Le Révérend ; J. Reynaud ; Ribes ; Rieumajou ; H. Richier ; E. Rimour ; E. Roncaglia ; J. Sallaud ; A. Sallin ; Schoonheere ; G. Tastet ; Texonnière ; J. Thivard ; Tourbez ; E. Vaicle ; H. Varennes ; Venet ; F. Vérot ; Vial ; J. Vignier ; A. Vidalenc ; R. Vollaire ; A. Seignobosc].

4532. — *Une balance porte à une extrémité du fléau un ballon de verre fermé dont le volume extérieur est* 1500cc, *équilibré à l'autre extrémité par une masse en laiton qui, dans le vide, pèse* 122gr. *Calculer la force qui fera pencher la balance lorsqu'on porte le tout dans une atmosphère composée à volumes égaux d'air et de gaz d'éclairage.*

Densité du laiton 8,5,
Densité du gaz d'éclairage par rapport à l'air . . . 0,6,
Poids d'un centimètre cube d'air. . . . . $1^{mmgr},3$.
On admettra que l'air et le mélange gazeux sont à 0° *et* 760mm.

(*Bacc. lettres-math., Montpellier, juillet 1898.*)

Soit x le poids du ballon en grammes dans le vide ; puisqu'il y a équilibre dans l'air, on peut écrire

$$x - 1,5 \times 1,3 = 122 - \frac{0,122}{8,5} \times 1,3,$$

d'où $x = 123^{gr},931.$

La densité du mélange d'air et de gaz d'éclairage est

$$\frac{1 + 0,6}{2} = 0,8.$$

Dans ce mélange, le ballon subit une poussée égale à

$$1,5 \times 1,3 \times 0,8 = 1^{gr},56.$$

Le ballon agit donc sur le fléau de la balance avec une force de

$$123,931 - 1,56 = 122^{gr},371.$$

De même, le laiton subit une poussée égale à

$$\frac{0,122}{8,5} \times 1,3 \times 0,8 = 0^{gr},01493$$

et agit sur le fléau de la balance avec une force de

$$122 - 0,01493 = 121^{gr},98507.$$

La force qui fera pencher la balance est donc de

$$122,371 - 121,98507 = 0^{gr},38593 = 385^{mmgr},93.$$

Cette force, évaluée en dynes, aurait pour valeur à Paris

$$0,38593 \times 980,96 = 378^{dynes},59.$$

(L. Barberot, au Valdoie.)

[Ont résolu la même question : Mlle Turpain ; MM. Ardin-Delteil ; E. Baudot ; F. Bellec ; F. Bernard ; R. Blanc ; L. Bois ; Bonzom ; E. Bouby ; F. Breynaert ; G. Canel ; Cavaillé ; C. Croze ; L. Curt ; C. Doumerc ; E. Foucart ; H. Gallay ; E. Gernez ; M. Girard ; M. Gondran ; Le Hébrard ; A. Larcher ; R. Lavallée ; Lecontour ; J. Leveau ; M. Mathieu ; Millevoye ; M. Oger ; H. Pingeot ; Ribes ; J. Rigal ; G. Salles ; J. Schuller ; M. Teulié ; Vial.]

QUESTIONS PROPOSÉES

4542. — Démontrer que si l'on convertit en décimales les fractions irréductibles $\frac{A}{7}$ et $\frac{A}{13}$ et que l'on désigne par P et P' les deux périodes, on a

$$\frac{P'}{P} = \frac{7}{13}.$$

(C. Billionnet.)

4543. — Résoudre l'équation

$$x^8 + px^7 + p(q+1)x^6 + p(p-q+pq)x^5 + q(p^2-q)x^4 + p^2q(p-q-1)x^3 - pq^2(1+q)x^2 - p^3q^2x - p^2q^3 = 0.$$

Quels doivent être les signes de p et de q, pour que les huit racines soient réelles ?

Application : $p = -4$, $q = 49$.

(P. Le Verrier, lycée Janson-de-Sailly.)

4544. — On considère un point M mobile sur le diamètre AB d'un cercle et l'on trace d'un même côté de AB les demi-cercles de diamètres MA et MB, ayant leurs centres en O et O', puis le cercle tangent à la fois aux trois demi-cercles AB, AM, MB. Prouver que si l'on joint le point M au centre O'' de ce dernier cercle, ainsi qu'à ses points de contact avec les trois premiers, chacune de ces droites de jonction passe par un point fixe.

(J. Chapron, commis des Postes, à Lyon.)

4545. — Étant donnés un plan P et deux points A, B, on trace la droite AB qui coupe le plan au point C et par ce point on mène, dans le plan, une droite quelconque CD sur laquelle on détermine le point M tel que la somme MA + MB soit minimum. Lieu du point M.

(G. Bieber, collège Chaptal.)

4546. — Démontrer que si les angles d'un triangle sont en progression arithmétique, ainsi que coséc 2A, coséc 2B, coséc 2C, le cosinus de la différence commune des angles est égal à $\sqrt{\frac{3}{8}}$.

(C. Ludovic, école professionnelle Dombre-Marbec, à Aix.)

4547. — Résoudre le système

$$\text{tg}\, x\, \text{tg}\,(y+z) = a,$$
$$\text{tg}\, y\, \text{tg}\,(z+x) = b,$$
$$\text{tg}\, z\, \text{tg}\,(x+y) = c.$$

4548. — On veut éclairer une maison avec 100 lampes à incandescence, absorbant chacune 0,3 d'ampère, placées en dérivation aux bornes d'une dynamo à 110 volts. Cette dynamo est mise en mouvement au moyen d'un moteur hydraulique dont le rendement mécanique est de 75 %. La puissance disponible aux bornes de la dynamo est 90 % de la puissance du moteur hydraulique.

On demande quel doit être le débit du cours d'eau qui fait fonctionner le moteur hydraulique, sachant que la hauteur de chute est de 10m.

Un cheval-vapeur équivaut à 736 watts.

(*Bacc. lettres-sciences, Nancy, juillet 1898.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

23e Année. — N° 13. JOURNAL Paris, le 1er Avril 1899.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.

Abonnements.. Librairie **Nony** et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES (1898)

Section des Sciences mathématiques.

4459. — *Étant donnée la fraction* $\frac{m}{n}$:

1° *Trouver des nombres entiers a, b, c, ... tels que l'on ait*

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{15} + \frac{b}{15^2} + \frac{c}{15^3} + \ldots;$$

2° *Chercher la condition nécessaire et suffisante pour que le second membre de cette égalité se compose d'un nombre limité de fractions ;*

3° *Cette condition étant remplie, quel sera le nombre des fractions à calculer ?*

1. Divisons $15m$ par n, soient a le quotient et r_1 le reste ; nous avons l'égalité

$$\frac{15m}{n} = a + \frac{r_1}{n},$$

ou

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{15} + \frac{1}{15}\cdot\frac{r_1}{n}. \qquad (1)$$

Divisons maintenant $15r_1$ par n, soient b le quotient, r_2 le reste ; nous avons

$$\frac{15r_1}{n} = b + \frac{r_2}{n},$$

ou

$$\frac{r_1}{n} = \frac{b}{15} + \frac{1}{15}\cdot\frac{r_2}{n}$$

et en remplaçant $\frac{r_1}{n}$ par cette valeur dans l'égalité (1),

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{15} + \frac{b}{15^2} + \frac{1}{15^2}\cdot\frac{r_2}{n}.$$

Divisons de même $15r_2$ par n, soient c le quotient, r_3 le reste ; divisons $15r_3$ par n, soient d le quotient, r_4 le reste, et ainsi de suite ; nous aurons successivement

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{15} + \frac{b}{15^2} + \frac{c}{15^3} + \frac{1}{15^3}\cdot\frac{r_3}{n},$$

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{15} + \frac{b}{15^2} + \frac{c}{15^3} + \frac{d}{15^4} + \frac{1}{15^4}\cdot\frac{r_4}{n}, \ldots$$

et d'une manière générale, en désignant par p un nombre entier arbitraire,

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{15} + \frac{b}{15^2} + \frac{c}{15^3} + \ldots + \frac{l}{15^p} + \frac{1}{15^p}\cdot\frac{r_p}{n}. \qquad (2)$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

1° Ou bien il existe un entier p tel que r_p soit nul ; dans ce cas, la fraction $\frac{m}{n}$ est égale à la somme d'un nombre limité de fractions ayant pour dénominateurs des puissances de 15.

2° Ou bien aucun des restes $r_1, r_2, \ldots$ n'est nul ; dans ce cas, on peut prolonger le développement aussi loin qu'on veut, et écrire l'égalité (2) pour toute valeur de p.

Quand p augmente indéfiniment, $\frac{1}{15^p}\,\frac{r_p}{n}$ a pour limite 0, puisque $\frac{r_p}{n} < 1$. Il en résulte que la fraction $\frac{m}{n}$ est égale à la limite de la somme $\frac{a}{15} + \frac{b}{15^2} + \ldots + \frac{l}{15^p}$ pour p infini.

2. Supposons que la fraction $\frac{m}{n}$ soit égale à la somme d'un nombre limité de fractions ; en réduisant ces fractions au même dénominateur, nous aurons une égalité de la forme

$$\frac{m}{n} = \frac{A}{15^p},$$

où A et p sont des nombres entiers.

La fraction $\frac{m}{n}$ étant supposée irréductible, cette égalité montre que n est diviseur de 15^p, c'est-à-dire que n ne contient pas d'autres facteurs premiers que 3 et 5.

Réciproquement, supposons que n ne contienne pas d'autres facteurs premiers que 3 et 5. En multipliant les deux termes de la fraction $\frac{m}{n}$ par une puissance convenable de 3 ou de 5, on pourra faire en sorte que le dénominateur soit une puissance de 15 et on aura une égalité de la forme

$$\frac{m}{n} = \frac{A}{15^p}. \qquad (3)$$

Cela posé, divisons A par 15, soient q_1 le quotient, R_1 le reste ; divisons q_1 par 15, soient q_2 le quotient, R_2 le reste, et ainsi de suite. Les quotients $q_1, q_2, \ldots$ vont en diminuant, il arrivera donc un moment où l'un d'eux sera plus petit que 15 ; soit q_i ce quotient. Nous avons alors la suite d'égalités

$$A = 15q_1 + R_1,$$
$$q_1 = 15q_2 + R_2,$$
$$\ldots\ldots$$
$$q_{i-1} = 15q_i + R_i.$$

Multiplions ces égalités respectivement par 1, 15, 15^2, ..., 15^{i-1} ; nous obtenons

$$A = R_1 + 15R_2 + 15^2R_3 + \ldots + 15^{i-1}R_i + 15^iq_i,$$

et par suite

$$\frac{m}{n} = \frac{R_1 + 15R_2 + 15^2R_3 + \ldots + 15^iq_i}{15^p}.$$

Si $i < p$, cette égalité peut s'écrire

$$\frac{m}{n} = \frac{R_1}{15^p} + \frac{R_2}{15^{p-1}} + \ldots + \frac{q_i}{15^{p-i}}.$$

Si $i > p$, on aura

$$\frac{m}{n} = \frac{R_1}{15^p} + \frac{R_2}{15^{p-1}} + \ldots + \frac{R_{p-1}}{15} + N,$$

N désignant un nombre entier.

Il résulte de là que la condition nécessaire et suffisante pour que la fraction $\frac{m}{n}$ soit égale à une somme limitée de fractions est que le dénominateur n ne renferme pas d'autres facteurs premiers que 3 et 5.

3. Supposons cette condition remplie et soit $n = 3^p.5^q$ $(p \geqslant q)$. Nous devons multiplier les deux termes de la fraction $\frac{m}{n}$ par 5^{p-q}, et nous avons

$$\frac{m}{n} = \frac{A}{15^p},$$

et d'après ce qui précède, $\frac{m}{n}$ sera la somme d'un nombre de fractions inférieur ou égal à p.

Donc, le nombre de fractions dont la somme est égale à $\frac{m}{n}$ est inférieur ou égal au plus grand exposant des facteurs 3 et 5 qu figurent dans la décomposition de n en facteurs premiers.

(Albert Prost, instituteur à St-Hippolyte-sur-le-Doubs.)

Ont résolu la même question : MM. G. Foucry ; J. Moisson ; Nuzeret, à Argenteuil ; M. Oger, école normale de Poitiers ; Rivière, collège d'Issoire ; G. Schoonheere ; R. Thomas, à Donzillac ; P. Tribier, à Guéret.]

4460. — *On substitue les racines a et b de l'équation du second degré*

$$x^2 + px + q = 0$$

dans le trinome $u = mx^2 + nx + h$,

et on propose de calculer n et h en fonction de p, q et m, de manière que l'on ait $u = b$ *pour* $x = a$, *et* $u = a$ *pour* $x = b$.

Soient n' et h' les valeurs trouvées pour n et h.

1° *Démontrer que les racines de l'équation*

$$mx^2 + n'x + h' = 0$$

satisfont à une relation indépendante de m ;

2° *Chercher pour quelles valeurs de m l'équation*

$$mx^2 + n'x + h' = 0$$

a ses racines réelles ;

3° *En supposant que l'on a* $p = -\frac{3}{2}$ *et* $q = -1$, *étudier les variations de la fraction*

$$y = \frac{mx^2 + n'x + h'}{x^2 + px + q}.$$

Les valeurs cherchées de n et de h sont racines des équations

$$\left.\begin{aligned} ma^2 + na + h &= b, \\ mb^2 + nb + h &= a. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

En les retranchant membre à membre, nous avons

$$m(a^2 - b^2) + n(a - b) = b - a,$$

ou, en divisant par $a - b$ et en remplaçant $a + b$ par $-p$,

$$-mp + n = -1,$$

d'où nous tirons $n = mp - 1$.

Revenons aux équations (1); multiplions la première par b, la seconde par $-a$ et ajoutons-les membre à membre; nous obtenons $mab(a - b) + h(b - a) = b^2 - a^2$,

ou, après avoir divisé par $a - b$,

$$mab - h = -(a + b).$$

Remplaçons $a + b$ par $-p$, ab par q ; nous avons

$$mq - h = p, \qquad \text{d'où} \qquad h = mq - p.$$

On a donc $n' = mp - 1$, $h' = mq - p$.

1. Soient x' et x'' les racines de l'équation

$$mx^2 + (mp - 1)x + mq - p = 0. \qquad (2)$$

On a les relations

$$x' + x'' = -p + \frac{1}{m}, \qquad x'x'' = q - \frac{p}{m};$$

on en déduit $p(x' + x'') + x'x'' = -p^2 + q$,

ce qui démontre la proposition.

2. Pour que l'équation (2) ait ses racines réelles, il faut qu'on ait

$$(mp - 1)^2 - 4m(mq - p) \geqslant 0,$$

ou

$$m^2(p^2 - 4q) + 2mp + 1 \geqslant 0.$$

Le premier membre de cette inégalité est un trinome du deuxième degré dont les racines sont réelles si q est positif. Nous sommes donc conduit à faire les hypothèses suivantes :

1° $q < 0$. Le trinome a, quel que soit m, le signe de son premier terme. Or $p^2 - 4q$ étant positif, le trinome est toujours positif, et par suite l'équation (2) a ses racines réelles et distinctes pour toutes les valeurs de m.

2° $q = 0$. L'inégalité s'écrit $(mp + 1)^2 > 0$; si m est différent de $-\frac{1}{p}$ l'équation (2) a ses racines réelles et distinctes. Si m est égal à $-\frac{1}{p}$, cette équation a ses racines égales.

3° $q > 0$. Le trinome $m^2(p^2 - 4q) + 2mp + 1$ a deux racines réelles et distinctes, qu'il est aisé de calculer et que nous appellerons m' et m''.

Si $p^2 - 4q > 0$, il faut, pour que l'équation (2) ait ses racines réelles et distinctes, que m soit extérieur à l'intervalle (m', m'').

Si $p^2 - 4q < 0$, il faut au contraire que m soit compris entre m' et m''.

Enfin si m est égal à l'un des nombres m' ou m'', l'équation (2) a ses racines égales.

3. En remplaçant p par $-\frac{3}{2}$ et q par -1, on obtient $n' = -\frac{3m + 2}{2}$, $h' = -\frac{2m - 3}{2}$; par conséquent la fraction y devient successivement

$$\frac{mx^2 - \frac{3m + 2}{2}x - \frac{2m - 3}{2}}{x^2 - \frac{3}{2}x - 1},$$

ou

$$\frac{2mx^2 - (3m + 2)x - (2m - 3)}{2x^2 - 3x - 2},$$

et

$$\frac{m(2x^2 - 3x - 2) - 2x + 3}{2x^2 - 3x - 2}, \qquad m + \frac{-2x + 3}{2x^2 - 3x - 2}.$$

Il suffira donc d'étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{-2x + 3}{2x^2 - 3x - 2},$$

et d'augmenter toutes les valeurs de cette fonction de la quantité constante m.

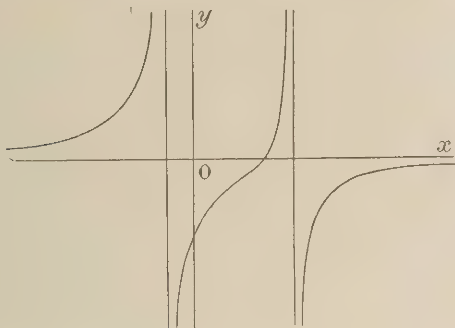
Cette fonction est discontinue pour les valeurs de x qui annulent le dénominateur, c'est-à-dire pour les racines de l'équation $2x^2 - 3x - 2 = 0$, qui sont 2 et $-\frac{1}{2}$.

La dérivée de y est $y' = \frac{4x^2 - 12x + 13}{(2x^2 - 3x - 2)}$;

Cette dérivée est positive quel que soit x ; par conséquent la

fonction y est toujours croissante. Les variations sont représentées dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$			2			$+\infty$
y	0	croit	$+\infty$ | $-\infty$	croit		$+\infty$ | $-\infty$	croit		0



On en déduit facilement la forme de la courbe correspondante.

(P. RIVIÈRE, élève au collège d'Issoire.)

[Ont résolu cette question : MM. Ed. Ardin-Delteil, à Montpellier ; L.-A. Blanc, institution Massillon, à Clermont-Ferrand ; C. Bourveau, maître-adjoint, à Quimperlé ; L. Ecoffard, école primaire supérieure de Dôle ; J. Fiton ; instituteur à Agen ; G. Foucry, école normale de Châlons-sur-Marne ; R. Henry, instituteur à Ste-Savine ; H. Janois, instituteur à Nogent-le-Bonnard ; C. Jullian ; J. Lalescu, lycée de Jassy ; G. Lesage, lycée de Laval ; J. Moisson ; M. Oger, école normale de Poitiers ; R. Thomas, à Donzillac ; P. Tribier, à Guéret ; X., à Saint-Cloud.]

4461. — *On donne deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *et une circonférence de centre* C, *tangente en* O *à* Oy, *et de rayon* a.

Soient deux points P *et* P′ *pris sur* Oy, *par lesquels on mène les tangentes* PA, P′A′ *à la circonférence* C. *Ces deux points se déplacent sur* Oy *de manière que leurs ordonnées* b *et* b' *vérifient la relation*

$$ubb' + v(b + b') + w = 0,$$

u, v, w *étant des constantes données :*

1° *Trouver le lieu géométrique du point de rencontre* M *des tangentes* PA, P′A′;

2° *Démontrer que la droite* AA′ *qui joint les points de contact des tangentes* PA, P′A′ *passe par un point fixe;*

3° *Démontrer que les trois droites* OM, PA′, P′A *se coupent en un même point, et chercher le lieu géométrique de ce point.*

Construire ce lieu lorsqu'on suppose $v = 0$.

1. L'équation du cercle est

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$

Cherchons d'abord l'équation de la tangente PA; une droite quelconque passant par le point P a une équation de la forme $y - b = mx$. Ecrivons que cette droite est tangente au cercle, et pour cela que sa distance au centre est égale au rayon; nous avons

$$\frac{ma + b}{\sqrt{1 + m^2}} = a^2, \qquad \text{ou} \qquad (ma + b)^2 - a^2(1 + m^2) = 0.$$

Nous en tirons $\qquad m = \dfrac{a^2 - b^2}{2ab},$

de sorte que l'équation de la tangente PA est

$$y - b = \frac{a^2 - b^2}{2ab}x.$$

De même l'équation de la tangente P′A′ est

$$y - b' = \frac{a^2 - b'^2}{2ab'}x.$$

Nous aurons le lieu du point M en éliminant b et b' entre ces deux équations et la suivante :

$$ubb' + v(b + b') + w = 0. \qquad (1)$$

Or les équations des deux tangentes peuvent s'écrire

$$b^2(x - 2a) + 2aby - a^2x = 0,$$
$$b'^2(x - 2a) + 2ab'y - a^2x = 0;$$

on en conclut que b et b' sont les racines de l'équation du second degré

$$t^2(x - 2a) + 2aty - a^2x = 0,$$

et par conséquent on a

$$b + b' = -\frac{2ay}{x - 2a}, \qquad bb' = -\frac{a^2x}{x - 2a}.$$

Portons ces valeurs dans la relation (1); nous obtenons

$$-\frac{ua^2x}{x - 2a} - v \cdot \frac{2ay}{x - 2a} + w = 0,$$

ou $\qquad x(ua^2 - w) + 2avy + 2aw = 0.$

C'est l'équation du lieu; elle représente une droite.

2. La droite PC ayant pour coefficient angulaire $-\dfrac{b}{a}$, la droite OA qui lui est perpendiculaire a pour équation $y = \dfrac{a}{b}x$. En résolvant par rapport à x et à y les équations de OA et de la tangente PA, nous aurons les coordonnées du point A. Ce calcul très facile nous donne

$$x = \frac{2ab^2}{a^2 + b^2}, \qquad y = \frac{2a^2b}{a^2 + b^2}.$$

Les coordonnées du point A′ sont alors

$$x = \frac{2ab'^2}{a^2 + b'^2}, \qquad y = \frac{2a^2b'}{a^2 + b'^2},$$

et l'équation de la droite AA′ est

$$\frac{y - \dfrac{2a^2b}{a^2 + b^2}}{x - \dfrac{2ab^2}{a^2 + b^2}} = \frac{\dfrac{2a^2b'}{a^2 + b'^2} - \dfrac{2a^2b}{a^2 + b^2}}{\dfrac{2ab'^2}{a^2 + b'^2} - \dfrac{2ab^2}{a^2 + b^2}},$$

ou

$$\frac{(a^2 + b^2)y - 2a^2b}{(a^2 + b^2)x - 2ab^2} = \frac{2a^4(b' - b) + 2a^2bb'(b' - b)}{2a^3(b'^2 - b^2)},$$

ou encore, en divisant par $2a^2(b' - b)$ les deux termes de la fraction du second membre,

$$\frac{(a^2 + b^2)y - 2a^2b}{(a^2 + b^2)x - 2ab^2} = \frac{a^2 - bb'}{a(b + b')}.$$

Chassons les dénominateurs et ordonnons par rapport à x et y, nous avons

$$(a^2 + b^2)(a^2 - bb')x - (a^2 + b^2)a(b + b')y + 2abb'(a^2 + b^2) = 0,$$

ou $\qquad (a^2 - bb')x - a(b + b')y + 2abb' = 0.$

Telle est l'équation simplifiée de la droite AA′.

De la relation (1) on tire

$$b + b' = -\frac{ubb' + w}{v};$$

remplaçons $b + b'$ par cette valeur dans l'équation de AA′; nous avons

$$v(a^2 - bb')x + (ubb' + w)y + 2avbb' = 0,$$

ou $\qquad bb'(-vx + auy + 2av) + a^2vx + awy = 0.$

Il en résulte que la droite AA′ passe, quels que soient b et b', par le point d'intersection des deux droites

$$-vx + auy + 2av = 0, \qquad avx + wy = 0.$$

Ce point a pour coordonnées $x = \frac{2aw}{ua^2 + w}$, $y = \frac{-2a^2v}{ua^2 + w}$.

3 Connaissant les coordonnées du point P $(x = 0, \quad y = b)$ et du point A' $\left(x = \frac{2ab'^2}{a^2 + b'^2}, \quad y = \frac{2a^2b'}{a^2 + b'^2}\right)$, nous pouvons écrire l'équation de la droite PA' :

$$\frac{y - b}{x} = \frac{\frac{2a^2b'}{a^2 + b'^2} - b}{\frac{2ab'^2}{a^2 + b'^2}},$$

ou $$x(2a^2b' - ba^2 - bb'^2) - 2ab'^2y + 2abb'^2 = 0. \qquad (2)$$

L'équation de P'A s'en déduit en permutant b et b' :

$$x(2a^2b - b'a^2 - b'b^2) - 2ab^2y + 2ab'b^2 = 0. \qquad (3)$$

Soit N le point de rencontre de ces deux droites. Multiplions ces équations respectivement par b et $-b'$, puis ajoutons ; nous obtenons

$$-a^2x(b^2 - b'^2) - 2abb'(b' - b) = 0,$$

ou, en divisant par $a(b' - b)$,

$$ax(b + b') - 2bb'y = 0.$$

Cette équation représente une droite passant par le point de rencontre de PA' et P'A, et par l'origine ; c'est donc la droite ON.

Tout revient à démontrer que cette droite passe par le point M, c'est-à-dire par le point d'intersection de PA et de P'A'. Les équations de ces droites sont, comme nous l'avons trouvé plus haut,

$$b^2(x - 2a) + 2aby - a^2x = 0,$$
$$b'^2(x - 2a) + 2ab'y - a^2x = 0 ;$$

multiplions ces équations respectivement par b'^2 et $-b^2$, puis ajoutons ; nous avons

$$2abb'(b' - b) - a^2x(b'^2 - b^2) = 0,$$

ou $$a(b + b')x - 2bb'y = 0 ; \qquad (4)$$

c'est l'équation de la droite OM. On voit immédiatement qu'elle coïncide avec ON. Donc les droites PA', P'A et OM passent par un même point N.

Cherchons le lieu de ce point. Les coordonnées sont définies par deux des équations (2), (3) et (4).

Retranchons les équations (2) et (3), nous avons

$$x[2a^2(b' - b) - a^2(b - b') - bb'(b' - b)] - 2ay(b'^2 - b^2) + 2abb'(b' - b) = 0,$$

ou, en divisant par $b' - b$,

$$x(3a^2 - bb') - 2ay(b + b') + 2abb' = 0. \qquad (5)$$

Nous pourrons définir les coordonnées du point N par les équations (4) et (5) ; et pour avoir le lieu de ce point nous éliminerons bb' et $b + b'$ entre les équations (4), (5) et (1).

Des équations (1) et (4) on déduit

$$\frac{bb'}{ax} = \frac{b + b'}{2y} = \frac{-w}{uax + 2vy},$$

d'où $$bb' = -\frac{wax}{uax + 2vy}, \qquad b + b' = -\frac{2wy}{uax + 2vy} ;$$

portons ces valeurs dans l'équation (5) ; nous aurons l'équation du lieu.

Nous trouvons ainsi

$$x\left(3a^2 + \frac{wax}{uax + 2vy}\right) + \frac{4awy^2}{uax + 2vy} - \frac{2a^2wx}{uax + 2vy} = 0,$$

ou, en chassant le dénominateur et en divisant par a,

$$x^2(3a^2u + w) + 6avxy + 4wy^2 - 2awx = 0.$$

Cette équation représente une conique tangente à l'origine à l'axe Oy.

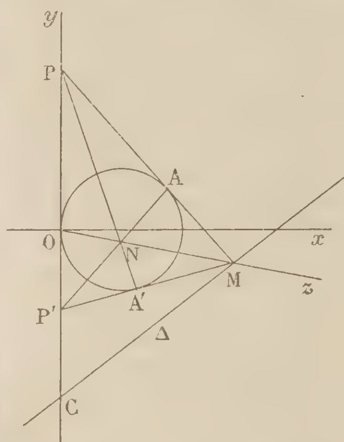
Le genre de cette conique dépend du signe de la quantité $4w(3a^2u + w) - 9a^2v^2$; suivant que cette quantité est positive, négative ou nulle, la conique est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

Si l'on suppose $v = 0$, l'équation ne renferme plus de terme en xy ; la droite Ox est axe de la conique, le point O est sommet. La construction ne présente alors aucune difficulté.

Solution géométrique. — **1** et **2**. Les points P et P' décrivent sur la droite Oy des divisions en involution ; par suite les droites OA, OA' forment des faisceaux en involution. On en conclut, d'après le théorème de Frégier, que la droite AA' passe par un point fixe B (*).

Le point M, pôle de AA' par rapport au cercle, est situé sur la polaire Δ du point B.

3. Les droites PA', P'A et OM sont concourantes d'après un cas particulier du théorème de Brianchon appliqué au triangle PP'M circonscrit au cercle donné.



Pour trouver maintenant le degré du lieu décrit par le point N, cherchons combien il existe de points du lieu sur une droite quelconque Oz passant par le point O. Cette droite rencontre la droite Δ (lieu du point M) en un seul point M, auquel il ne correspond qu'un seul point N situé sur Oz. Donc il existe un seul point du lieu sur Oz en dehors du point O. Si l'on fait tourner la droite Oz autour du point O, de manière à l'appliquer sur Oy, le point M vient au point C, et le point N coïncide avec le point O. Il en résulte que le point O est un point simple du lieu et que la tangente en ce point est la droite Oy.

Donc sur toute droite Oz passant par le point O, il y a deux points du lieu, le point O et un autre point N ; par conséquent, le lieu est une conique tangente à Oy au point O.

ALGÈBRE

4492. — *Quel est mon âge ? — A cette question je répondrai en donnant, outre l'âge demandé, le rang du mois et le quantième du mois dans lequel je suis né. La somme des cubes de ces trois nombres, retranchée du cube de leur somme, vaut* 110 544.

Le quantième du mois surpasse son rang.

(E. B.)

Soient x l'âge, y le rang, z le quantième du mois. Il est bien clair que ces nombres vérifient les inégalités

$$x < 100, \qquad y \leqslant 12, \qquad z \leqslant 31 ;$$

de plus, par hypothèse, $y < z$. Il en résulte

$$x + y < 112, \qquad x + z < 131, \qquad y + z < 44.$$

La condition imposée par l'énoncé revient à

$$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 110\,544.$$

(*) Ce théorème est démontré dans un excellent article de M. Griess (*Journal de Mathématiques élémentaires*, 22e année, p. 135).

Mais

$$(x+y+z)^3 = x^3 + 3(x+y+z)(y+z)x + (y+z)^3$$
$$= x^3 + 3(x+y+z)(y+z) + y^3 + z^3 + 3yz(y+z).$$

Donc

$$(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(y+z)[x(x+y+z) + yz)$$
$$= 3(x+y)(y+z)(z+x).$$

Par suite, en divisant 110 544 par 3, il vient

$$(x+y)(y+z)(z+x) = 36848.$$

Supposons qu'on ait décomposé le second membre en un produit de trois facteurs a, b, c, tels que

$$y+z=a,$$
$$z+x=b,$$
$$x+y=c.$$

On en conclut aisément

$$x = \frac{b+c-a}{2}, \qquad y = \frac{c+a-b}{2}, \qquad z = \frac{a+b-c}{2}.$$

Pour que ces valeurs soient entières, il faut que les trois facteurs a, b, c soient tous trois pairs ou qu'un seul le soit. Pour qu'elles soient positives, il faut que chacun d'eux soit plus petit que la somme des deux autres. Enfin, pour que y soit inférieur à z, il faut

$$c+a-b < a+b-c,$$

ou

$$c < b.$$

Cherchons maintenant les décompositions possibles. Le nombre 36 848, décomposé en facteurs premiers, s'écrit

$$36848 = 2^4 \times 7^2 \times 47.$$

Le facteur a ne peut renfermer 47, puisque, devant représenter $y+z$, il est inférieur à 44. Ce facteur 47 ne peut donc entrer que dans $x+y$ ou $x+z$. Ces deux facteurs doivent tous les deux être inférieurs à 131 ; si donc l'un d'eux renferme 47, ce dernier facteur ne peut pas s'y trouver associé avec un facteur 7; tout au plus peut-il l'être avec un seul facteur 2. Il y a donc quatre hypothèses à examiner.

1° $x+y=47$, 2° $x+y=2\times 47$, 3° $x+z=47$, 4° $x+z=2\times 47$.

1re *hypothèse* : $x+y=47=c$. Il reste alors

$$(y+z)(z+x) = 2^4 \times 7^2.$$

Le facteur 47 étant impair, un seul des deux autres facteurs peut être pair ; par conséquent celui des facteurs qui est divisible par 2 le sera aussi par 2^4. Si l'on suppose que c'est $y+z$, ce facteur ne pourra être divisible par 7, sans quoi sa valeur serait plus grande que 44 ; cette hypothèse exige donc

$$x+z=49, \qquad y+z=16.$$

Si l'on suppose que c'est $x+z$, ce facteur devra renfermer un au moins des facteurs 7, car $y+z$ ne peut être divisible par 7^2. Il correspond à cette hypothèse les deux combinaisons

$$x+z = 2^4\times 7, \qquad y+z=7,$$
$$x+z = 2^4\times 7^2, \qquad y+z=1.$$

La dernière est évidemment à rejeter ; la première l'est parce que

$$2^4\times 7 > 49+7.$$

Donc la seule combinaison possible est

$$x+y=47, \qquad x+z=49, \qquad y+z=16,$$

qui satisfait aux conditions imposées ; elle donne

$$x=40, \qquad y=7, \qquad z=9.$$

2e *hypothèse* : $x+y=2\times 47=c$. Il reste alors

$$(y+z)(z+x) = 2^3\times 7^2 = ab.$$

Le facteur c étant pair, et l'un des facteurs a ou b étant nécessairement divisible par 2 dans l'hypothèse précédente, les trois facteurs devront être pairs ; donc chacun d'eux ne peut être divisible que par 2^2 au plus. Le facteur $x+z=b$ devant être plus grand que c, les seules hypothèses permises sont

$$x+z = 2\times 7^2, \quad \text{d'où} \quad y+z = 2^2 = 4,$$
$$x+z = 2^2\times 7^2, \quad \text{d'où} \quad y+z = 2.$$

La première combinaison

$$a = 2\times 47, \qquad b = 2\times 49, \qquad c=4$$

est à rejeter, parce que $a+c=b$; la seconde combinaison

$$a = 2\times 47, \qquad b = 4\times 49, \qquad c=2$$

l'est parce que $b > a+c$.

La seconde hypothèse ne donne donc pas de combinaison acceptable.

3e *hypothèse* : $x+z=47=b$.

Il reste alors $(y+z)(x+y) = 2^4\times 7^2 = ac$.

b étant impair, un seul des facteurs a ou c peut être pair; celui qui est divisible par 2 doit donc l'être par 2^4.

Si c'est $y+z$, ce facteur ne peut renfermer 7 ; on aurait donc

$$a = 2^4, \qquad c = 7^2 ;$$

à rejeter puisqu'il faut $c<b$. Si c'est $x+y$, le facteur $y+z$ ne peut renfermer qu'un seul facteur 7 ; on aurait

$$a=7, \qquad c = 2^4\times 7,$$

à rejeter pour la même raison.

La 3e hypothèse ne donne pas non plus de combinaison acceptable.

4e *hypothèse* : $x+y = 2\times 47 = b$.

Il reste $$(y+z)(z+x) = 2^3\times 7^2 = ac,$$

et les trois facteurs a, b, c devront être pairs. Le facteur c devant être plus petit que b, on ne peut faire aucune des suppositions

$$x+z = 2\times 7^2, \quad \text{ou} \quad x+y = 2^2\times 7^2 ;$$

$x+z$ ne peut être divisible que par un seul facteur 7. D'ailleurs $y+z$ ne pouvant être divisible par 7^2, il en résulte que chacun des facteurs renferme un facteur 7 combiné soit avec un, soit avec deux facteurs 2 Les combinaisons correspondantes sont

$$a = 2\times 7, \qquad b = 2\times 47, \qquad c = 2^2\times 7,$$

à rejeter parce que $b > a+c$; en second lieu

$$a = 2^2\times 7, \qquad b = 2\times 47, \qquad c = 2\times 7,$$

à rejeter pour la même raison.

Donc le problème proposé admet la seule solution

$$x=40, \qquad y=7, \qquad z=9.$$

Donc M. B. a 40 ans ; il est né le 9 juillet.

4534. — *Vérifier l'inégalité*

$$2a^4+1 \geqslant 2a^3+a^2.$$

Première solution. — Pour établir l'inégalité, il suffit de montrer que la différence entre le premier et le second membre n'est jamais négative. Or cette différence s'écrit successivement

$$2a^4+1-2a^3-a^2$$
$$= 2a^3(a-1) - (a^2-1)$$
$$= (a-1)(2a^3-a-1)$$
$$= (a-1)(a^3-a+a^3-1)$$
$$= (a-1)^2[a(a+1)+a^2+a+1]$$
$$= (a-1)^2(2a^2+2a+1).$$

Le trinome $2a^2+2a+1$, égalé à zéro, ayant ses racines

imaginaires est toujours positif, et la différence considérée prend ainsi le signe du carré $(a-1)^2$, c'est-à-dire qu'elle est positive ou nulle en même temps que ce carré.

(Paul Bisch, lycée de Nancy.)

Seconde solution. — On parvient plus rapidement à la même conclusion en mettant la différence des deux membres de l'inégalité sous la forme d'une somme de carrés.

Il vient ainsi

$$\begin{aligned} & 2a^4 + 1 - 2a^3 - a^2 \\ = {} & a^4 - 2a^3 + a^2 + a^4 - 2a^2 + 1 \\ = {} & (a^2 - a)^2 + (a^2 - 1)^2. \end{aligned}$$

(VIMONT, lycée de Reims.)

[Ont résolu la même question : Mlles L. Tholomier ; M. Turpain ; MM. G. Amouroux ; L. Barberot ; J. Borgey ; G. Burdinat ; G. Canel ; P. Catin ; P. Cazeaux ; R. Coural ; F. Clabault ; L. Curt ; G. Delahaye ; Foucart ; G. Foucry ; H. Gallay ; P. Gutton ; R. Henry ; H. Janois ; F. Ladevèze ; J.-M. Lagarde ; J. Lehmann ; P. Le Verrier ; C. Marie ; R. P. ; A. Pichon ; S. Pochon ; M. Royer ; A. de Trécesson ; E. Vagneux ; F. Vérot ; Vial ; L. Vincent ; G. Nazare.]

GÉOMÉTRIE

4378. — 2e *solution*. (Voir l'énoncé et la 1re solution p. 91 du dernier numéro.)

1° BN perpendiculaire aux deux droites AB, AX est perpendiculaire au plan BAX et par suite à la droite BM. Le point O étant milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle MBN, on a OB = OM. De même AX perpendiculaire au plan ABY est perpendiculaire à la droite AN ; le triangle MAN rectangle en A donne OA = OM. Donc OA = OB = OM = ON, et le point O est centre d'une sphère passant par les quatre points A, B, M, N dont les deux premiers sont fixes.

2° OC est perpendiculaire à AB en son milieu C. De plus, si D est le milieu de BM, OD parallèle à BN est perpendiculaire au plan BAX et égale à $\frac{BN}{2}$. De même, si E est le milieu de AN, OE parallèle à AM est perpendiculaire au plan ABY et égale à $\frac{AM}{2}$. Donc OD = OE et le plan OAB est bissecteur du dièdre XABY. Donc tout point O du lieu cherché est sur la droite fixe CL située dans ce plan et perpendiculaire à la droite AB en son milieu C.

Réciproquement, tout point O de la droite CL est un point du lieu, car si l'on mène OD perpendiculaire au plan ABX et que l'on trace ensuite les droites BDM, MON, la droite CD perpendiculaire à AB est parallèle à AM ; donc C étant le milieu de AB, D est aussi le milieu de BM, et l'on a AM = 2CD, BN = 2OD. Mais le triangle rectangle OCD est isocèle, puisque l'angle OCD = 45°. Donc OD = CD et AM = BN. Donc le milieu de MN est sur CL, c'est-à-dire au point O, qui est, par conséquent, un point du lieu.

Donc le lieu cherché est la droite CL perpendiculaire au milieu de AB dans le plan bissecteur du dièdre YBAX.

3° La droite GF perpendiculaire au plan OAB au point A est une droite fixe. Or, le plan tangent à la sphère O, au point A, étant perpendiculaire au rayon OA, passe toujours par la droite GF perpendiculaire à OA.

4° Le plan GAB perpendiculaire au plan OAB est bissecteur du dièdre X'ABY ; c'est donc un plan fixe. La droite CL perpendiculaire aux deux droites AB, GF est perpendiculaire à ce plan. D'un autre côté, les deux triangles rectangles MAC, NBC étant égaux, CM est égal à CN, et CO est perpendiculaire à MN. Donc MN est parallèle au plan fixe GAB.

(L. FAJON, professeur honoraire.)

Ont résolu la même question (noms oubliés dans la dernière liste) : MM. Audibert ; G. Bernard ; Burgat ; L. Curt ; C. Deshons ; E. Gernez ; L. Gourdet ; L. Jardin ; E. Léotard ; E. Madet ; L. Magne ; E. Ménissier ; M. Oger ; L. Patin ; M. Rebeix ; E. Sinturel.]

4501. — *Deux cercles* O *et* O′ *se coupent en* A *et* B. *Par* A *on mène les sécantes* ACD *et* AEF, *qui rencontrent respectivement le cercle* O *en* C, E *et le cercle* O′ *en* D, F.

1° *Démontrer que*

$$\frac{BE}{EC} = \frac{BF}{FD}$$

et déduire de là le théorème de Ménélaüs.

2° *Lieu du point* M *de* EF *tel que* $\frac{ME}{MF} = m$.

1° Menons les droites BC, BA, BD.

Les triangles BEC, BFD ont les angles en B égaux, comme respectivement égaux aux angles égaux EAC et FAD (même mesure) ; d'ailleurs les angles en E et F sont aussi égaux, car

$$\widehat{BEC} = \widehat{BAD} = \widehat{BFD}.$$

Donc les triangles considérés sont semblables et donnent

$$\frac{BE}{EC} = \frac{BF}{FD}.$$

C. q. f. d.

Pour déduire de cette relation le théorème de Ménélaüs, transformons la figure par la méthode des rayons vecteurs réciproques, le point A étant le pôle et $\overline{AB}^2$ la puissance d'inversion. Les deux cercles O, O′ ont alors pour inverses deux droites passant par B ; les deux sécantes ACD, EAF

passant par l'origine A sont leurs propres inverses, et coupent les deux droites précédentes aux points c, d, e, f, inverses des points C, D, E, F de la figure primitive.

On sait que dans l'inversion le rapport de la distance de deux points à la distance des deux points inverses est égal à la puissance d'inversion divisée par le produit des distances des deux points inverses à l'origine.

On peut donc écrire

$$BE = Be \cdot \frac{\overline{AB}^2}{AB.Ae}, \qquad BF = Bf.\frac{\overline{AB}^2}{AB.Af},$$

$$EC = ec \cdot \frac{\overline{AB}^2}{Ae.Ac}, \qquad FD = fd.\frac{\overline{AB}^2}{Af.Ad}.$$

La relation établie plus haut devient alors, après suppression des facteurs communs,

$$\frac{Be}{ec} \cdot \frac{Ac}{AB} = \frac{Bf}{fd} \cdot \frac{Ad}{AB},$$

ou

$$\frac{eB}{ec} \cdot \frac{Ac}{Ad} \cdot \frac{fd}{fB} = 1,$$

relation qui est précisément celle que fournit le théorème de Ménélaüs appliqué au triangle Bcd coupé par la transversale eAf.

2° Le triangle BEF ayant les angles en E et F constants demeure semblable à lui-même dans ses diverses positions.

Par suite, le rapport $\frac{EB}{EF}$ est invariable, ainsi que le rapport $\frac{EB}{EM}$, puisque de l'hypothèse $\frac{EM}{MF} = m$ on déduit $\frac{EM}{EF} = \frac{m}{m+1}$. Il en résulte que le triangle BEM a un angle constant compris entre deux côtés qui sont dans un rapport constant; il reste donc semblable à lui-même dans ses diverses positions, de sorte que l'angle AMB a une valeur invariable. Le lieu du point M est donc un segment de cercle de base AB.

Réciproquement, tout point M de la circonférence comprenant ce segment appartient au lieu. En effet, les triangles EMB et EFB ayant chacun deux angles constants restent semblables à eux-mêmes; les deux rapports $\frac{EM}{EB}$ et $\frac{EF}{EB}$ sont donc invariables et par suite il en est de même du rapport $\frac{EM}{EF}$; donc M divise EF dans un rapport constant.

(St. FEINTUCH, collège Chaptal.)

[Ont résolu la question complètement : MM. L. Bois ; P. Le Verrier ; H. L. ; — partiellement : MM. Cholet ; M. Jousset ; Vial.]

PHYSIQUE

4533. — *Dans un baromètre à cuvette de rayon indéfini on introduit un centigramme de gaz carbonique ; on demande de combien baissera le mercure dans le tube, sachant que la pression est normale et que la longueur du tube au-dessus du mercure est* 1^m.

Section du tube . . . . 1^{cq}.
Densité de CO^2. . . . . . . 1,524.

(*Bacc. lettres-math., Besançon, juillet 1898.*)

Le volume du gaz carbonique introduit est

$$\frac{10^{mmg}}{1,293 \times 1,524} = 5^{cc},075.$$

La chambre barométrique a une capacité de $100 - 76 = 24^{cc}$. Soit x la longueur dont baisse le mercure après l'introduction du gaz carbonique.

Le volume du gaz est $(24+x)^{cc}$; sa pression équivaut à la pression exercée par une colonne de mercure de x^{cm}. On a donc, en appliquant la loi de Mariotte,

$$5,075 \times 76 = x(24+x),$$

d'où

$$x^2 + 24x - 385,7 = 0$$

et

$$x = -12 \pm \sqrt{144 + 385,7} = -12 \pm 23.$$

La valeur positive seule est acceptable :

$$x = 11^{cm}.$$

(E. BAUDOT, à Bohain.)

[Ont résolu la même question : Mlle Turpain ; MM. L. Barberot ; F. Bellec ; C. Billionnet ; V. Bonzom ; J. Danchaud ; R. Depasse ; E. Foucart ; G. Foucry ; E. Gernez ; M. Gondran ; R. Hüe ; A. Larcher ; J. Leveau ; F. Montaland ; R. Mothes ; M. Nahon ; R. P. ; J. Sallaud ; Venet ; Vimont ; R. Vollaire.]

4540. — *Dans un ballon de* 10^{lit} *de capacité on mélange* 5^{lit} *d'air dont l'état hygrométrique est* 1/4 *et* 5^{lit} *d'acide carbonique dont l'état hygrométrique est* 1/3. *On demande l'état hygrométrique du mélange. La température est* 10° *et la tension maximum correspondante de la vapeur d'eau est* $9^{mm},16$.

(*Bacc. lettres-math., Caen, juillet 1898.*)

La force élastique de la vapeur contenue dans les 5 litres d'air est donnée par la relation $e = \frac{f}{F}$,

d'où

$$f = \frac{9,16}{4}.$$

Pour les 5 litres de gaz carbonique, on a

$$f' = \frac{9,16}{3}.$$

La vapeur n'étant pas saturante, on peut appliquer la loi du mélange des gaz, ce qui donne

$$\frac{5 \times 9,16}{4} + \frac{5 \times 9,16}{3} = 10 \times x,$$

d'où

$$x = \frac{9,16 \times 35}{120}.$$

Par suite, l'état hygrométrique du mélange est

$$\frac{\frac{9,16 \times 35}{120}}{9,16} = \frac{7}{24}.$$

(E. GERNEZ, à Roubaix.)

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil ; L. Barberot ; R. Bellencourt ; J. Bourrières ; E. Bouby ; P. Catin ; R. Coural ; L. Curt ; J. Danchaud ; F. Deville ; E. Foucart ; G. Foucry ; H. Gallay ; P. Girard ; J. Grey ; P. Gutton ; R. Henry ; R. Hüe ; H. Janois ; F. Ladevèze ; L. Lassence ; E. Le Maigre ; B. Mathé ; J. Massip ; P. Millevoye ; F. Montaland ; M. Naon ; C. Ouvrard ; R. P. ; A. Pichon ; J. Pinton ; H. Pingeot ; J. Plantier ; F. Raffin ; B. Ribes ; E. Rimour ; G. Sallet ; J. Schüller ; A. Texonniere ; J. Thivard ; X., à Felletin ; Venet ; Vial ; J. Vignier ; R. Vollaire.]

4541. — *Les deux pôles d'une pile de 4 éléments Daniel sont réunis par un fil de cuivre de* 2^{mmq} *de section. Quelle doit être la longueur du fil pour que le courant ait une intensité de 5 ampères? Que devient cette intensité si les éléments sont réunis en surface ?*

On donne :

La force électromotrice d'un élément Daniel . . . $1^{volt},07$
Sa résistance . . . . $0^{ohm},1$

Le coefficient de résistance du fil, c'est-à-dire la résistance d'un fil de 1^{m} *de long et de* 1^{mmq} *de section* . . . . . $0^{ohm},018$

(*Bacc. lettres-sciences, Rennes, juillet 1898.*)

1° Les éléments étant accouplés en série, l'intensité du courant est donnée par la formule

$$I = \frac{nE}{nR + r},$$

E désignant la force électromotrice d'un élément, R sa résistance, r la résistance extérieure.

On en tire

$$r = \frac{nE - nRI}{I} = \frac{4 \times 1,07 - 4 \times 0,1 \times 5}{5} = 0,456.$$

La résistance du fil ayant 2^{mmq} de section sera par mètre

$$\frac{0,018}{2} = 0^{ohm},009.$$

La longueur demandée sera donc

$$\frac{0,456}{0,009} = 50^{m},666.$$

2° Si les éléments, dans ces conditions, sont réunis en surface, on a

$$I = \frac{E}{\frac{R}{n} \times r} = \frac{nE}{R + nr},$$

d'où $$I = \frac{1,07 \times 4}{0,1 + 50,666 \times 0,009 \times 4} = 2^{amp},22.$$

(J. GUITON.)

[Ont résolu la même question : Mlles Roudier ; Turpain ; MM. Ardin-Delteil ; L. Barberot ; C. Billionnet ; E. Bouby ; M. Boucly ; F. Broc ; Cavaillé ; L. Curt ; J. Danchaud ; F. Deville ; H. Doumerc ; E. Foucart ; H. Gallay ; E. Gernez ; P. Girard ; P. Gutton ; R. Henry ; R. Hüe ; G. Lallier ; J. Lamotte ; E. Le Maigre ; B. Mathé ; M. Oriol ; R. P. ; A. Pichon ; H. Pingeot ; M. Popescu ; E. Rimour ; G. Salles ; J. Sallaud ; J. Schuller ; A. Seignobosc ; A. Texonnière ; J. Thivard ; Vollaire ; Allemand-Martin ; Vial ; Mlle L. Tholomier.]

BACCALAURÉATS

SESSION DE MARS-AVRIL 1899

PARIS

Lettres-Mathématiques.

Mathématiques.

I. — **4549.** On donne dans un triangle l'angle qui a pour sommet A, la hauteur h relative à ce sommet et le rayon R du cercle circonscrit. Calculer sin B, sin C, ainsi que les côtés a, b et c. Construire géométriquement les solutions.

II. — *1er sujet.* — Théorie de la racine carrée d'un nombre entier à une unité près par défaut.

II. — *2e sujet.* — Lois de Képler ; gravitation universelle.

II. — *3e sujet.* — Propriété de la tangente à la parabole.

Physique.

I. — **4550.** Une lunette astronomique, formée de deux lentilles seulement, que l'on supposera très minces, est adaptée pour la vision à l'infini.

Dans cette condition elle grossit 20 fois, et la distance de ses deux verres est de 63^{cm}. Cela posé, on vise avec cet instrument un astre dont le diamètre apparent est de 30 minutes ; puis on augmente le tirage de 5^{mm}.

On demande quelle sera la nature, la position et la grandeur de l'image formée par l'oculaire.

II. — *1er sujet.* — Potentiel et capacité électriques.

II. — *2e sujet.* — Condensateurs électriques. Montrer de quoi dépend la charge que possède un condensateur.

II. — *3e sujet.* — Intensité des courants. Montrer comment elle dépend de l'appareil producteur et du circuit. Unité pratique d'intensité.

Lettres-Sciences.

Mathématiques.

I. — **4551.** On donne un cône circulaire droit dont l'axe fait un angle de 30° avec la génératrice. On propose de couper ce cône par un plan de façon que la section soit une ellipse dont la surface mesure $84^{cq} + \frac{6}{7}$ et dont le rapport du petit axe au grand axe soit $\frac{1}{3}$. On exprimera en fonction des données l'angle du plan sécant avec l'axe du cône, au moyen de l'une de ses lignes trigonométriques et on construira cet angle graphiquement. On prendra $\pi = \frac{22}{7}$.

II. — *1er sujet.* — Conditions d'équilibre d'un corps solide libre sollicité par un nombre quelconque de forces constantes.

II. — *2e sujet.* — Transmission du mouvement par bielle et manivelle. Construire la loi graphique du mouvement de la tige guidée dans le cas où la manivelle tourne d'un mouvement uniforme.

II. — *3e sujet.* — Notions sur les résistances passives. — Frottement, ses lois.

Physique.

I. — **4552.** Le tube bien calibré d'un manomètre à air comprimé est divisé en 110 parties d'égale capacité. Quand la pression extérieure est de 76^{cm}, le mercure dans l'intérieur du tube et dans la cuvette se tient au zéro de l'échelle. On porte le manomètre sous le récipient d'une machine de compression et l'on voit le mercure s'élever jusqu'à la 80e division. On mesure alors la hauteur du mercure dans le tube et on la trouve égale à 45^{cm}. On demande la pression dans la machine.

II. — *1er sujet.* — Harmoniques. — Timbre des sons.

II. — *2e sujet.* — Machine d'Atwood.

II. — *3e sujet.* — Machine à vapeur ; machine à gaz.

QUESTIONS PROPOSÉES

4553. — On range par ordre de grandeur croissante toutes les fractions irréductibles moindres que 1 dont le dénominateur est inférieur à un nombre donné ; démontrer que les fractions à égale distance des extrêmes ont le même dénominateur et que leur somme est 1.

(CAVAILLÉ, à Agen.)

4554. — Quelle est la vraie valeur de l'expression

$$\frac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{2(x+1)}}{2x^2 + 2 - \sqrt[3]{63x+1}}$$

quand on y fait $x = 1$?

(G. FOUCAY, école normale de Châlons-sur-Marne.)

4555. — Dans un cercle de rayon R on inscrit un triangle ABC tel que AB et AC soient respectivement égaux aux côtés du triangle équilatéral et du carré inscrits dans ce cercle. On mène la hauteur AH relative au côté BC. Démontrer que

1° $HC = \frac{AC}{2}$;

2° Que le triangle AHB est isocèle.

(A. DESPORTES, à Provins.)

4556. — On donne dans un plan deux triangles ABC, A'B'C'. Si le point M est tel que MA, MB, MC coupent respectivement B'C', C'A', A'B' en trois points en ligne droite, inversement MA', MB', MC' couperont respectivement BC, CA, AB en trois points également en ligne droite.

(A. D., à Castres.)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

23e Année. — No 14. JOURNAL Paris, le 15 Avril 1899.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.

Abonnements.. Librairie **Nony** et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DE L'ÉQUILIBRE D'UN CORPS

REPOSANT SUR UN PLAN INCLINÉ POLI

par M. **Th. Caronnet**.

Soit un corps de poids P reposant sur un plan incliné poli et maintenu sur ce plan au moyen d'une force inconnue F appliquée en un point A du solide, donné à l'avance.

Pour que l'équilibre existe, il faut, comme on sait, que les trois conditions suivantes soient remplies :

1° *Les deux forces* P *et* F *doivent admettre une résultante ;*

2° *Cette résultante doit être normale au plan et dirigée vers le plan ;*

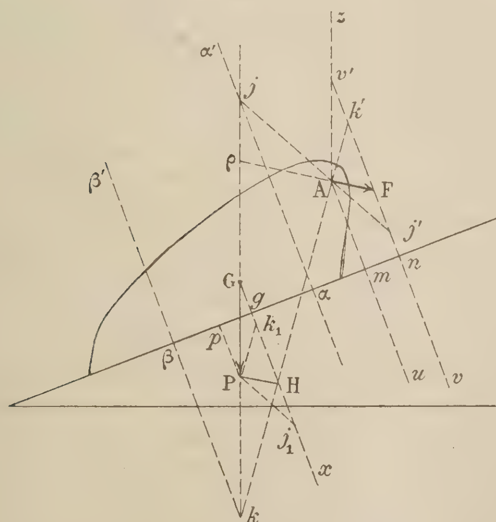
3° *Cette résultante doit percer le plan à l'intérieur du polygone convexe d'appui.*

Il résulte de la condition 1° que F et P sont situées dans un plan vertical coupant le plan incliné suivant une ligne de plus grande pente.

Figurons la section par ce plan.

Si nous construisons le segment PH équipollent à AF, le segment GH sera équipollent à la résultante de P et de F.

Or, d'après la condition 2°, l'extrémité H appartiendra à la demi-normale Gx au plan incliné.



Ceci posé, pg étant la projection de PG sur le plan, si nous portons $mn = pg$ et traçons par n la normale au plan, puis la verticale ascendante Az, l'extrémité F de la résistance inconnue appartiendra à la normale vv', limitée en son intersection v' avec Az.

Ceci impose donc à la force F une direction comprise dans l'angle zAu et définit son intensité pour toute direction donnée à l'avance dans l'angle zAu.

Il nous reste à exprimer la condition 3°.

Soient α, β les intersections du polygone convexe d'appui avec la ligne de pente. Pour que le solide ne bascule pas, il faut que la résultante des deux forces F et P perce la ligne de pente quelque part entre α et β.

Traçons les normales $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ au plan. La résultante passera par la rencontre ρ des droites d'action des forces F et P, et pour que la condition 3° soit remplie, il faut et il suffit que ρ soit situé dans la région du plan comprise entre les parallèles $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$.

Par suite, la direction de F devra être comprise dans l'angle $k'Aj'$.

D'ailleurs, comme cette région est située dans la région zAu, elle convient entièrement.

En résumé, dans le cas de notre figure, le solide sera en équilibre lorsque la résistance F sera telle que son extrémité F appartiendra au segment $k'j'$.

Cette conclusion dépend essentiellement de la figure ; quant aux considérations qui précèdent, elles indiquent visiblement les différents cas qui peuvent se présenter.

Pression sur le plan. — Menons par P des parallèles à kk' et à jj' ; elles coupent Gx en k_1 et j_1. La pression, qui est précisément la résultante de P et de F, est représentée en intensité, comme nous l'avons vu, par le segment GH.

Cette pression variera donc de Gk_1 à Gj_1.

ARITHMÉTIQUE

4542. — *Démontrer que si l'on convertit en décimales les fractions irréductibles* $\frac{A}{7}$ *et* $\frac{A}{13}$ *et que l'on désigne par* P *et* P' *les deux périodes, on a*

$$\frac{P'}{P} = \frac{7}{13}.$$

On sait qu'une fraction irréductible dont le dénominateur est premier avec 10 donne naissance à une fraction décimale périodique simple, le nombre des chiffres de la période étant égal à l'exposant de la plus petite puissance de 10 qui, divisée par le dénominateur, donne 1 pour reste.

En effectuant successivement la division de 10^n par les dénominateurs 7 et 13, on reconnaît facilement que

$$10^6 = m.7 + 1, \qquad \text{ou} \qquad m.13 + 1.$$

Les deux fractions $\frac{A}{7}$ et $\frac{A}{13}$ ont donc leurs périodes P et P′ composées de 6 chiffres, et l'on peut écrire

$$\frac{A}{7} = \frac{P}{999\,999}, \qquad \frac{A}{13} = \frac{P'}{999\,999},$$

d'où l'on déduit, en divisant membre à membre,

$$\frac{7}{13} = \frac{P'}{P}.$$

(H. DAMOISEAU, école primaire supérieure de Bar-sur-Seine.)

[Ont résolu la même question : Mlle R. Campana ; MM. N.-G. Alesandrescu ; Ed. Ardin-Delteil ; L. Barberot ; R. Bellencourt ; C. Billionnet ; J. Borgey ; Cavaillé ; L. Curt ; R. Dickson ; H. Dodier ; Donnadieu ; J. Fiton ; E. Gernez-Pfanmatter ; R. Henry ; R. Hüe ; F. Lalescu ; E. Le Maigre ; B. Mathé ; P. Millevoye ; St-N. Mirea ; M. Oger ; J. Pémartin ; L. Pont ; Rieumajou ; J. Sallaud ; F. Schmitt ; Venet.]

ALGÈBRE

4368. — *Deux droites* Ox, Oy *font entre elles un angle de* 60° ; *on mène une droite* Oz *perpendiculaire au plan* xOy. *Sur* Oz *on prend une longueur donnée* $OC = c$. *On demande de déterminer sur* Ox *et* Oy *deux points* A *et* B *de telle sorte que* AB *ait une longueur donnée* l *et que le triangle* ABC *ait une surface donnée* $\frac{1}{2}h^2$. *Discussion. — Construction géométrique. — Calculer avec les données le volume du tétraèdre* OABC.

(*Bacc. lettres-math., Clermont, avril 1898.*)

Dans le plan xOy, menons du point O la perpendiculaire OD à AB, et traçons CD. D'après le théorème des trois perpendiculaires, CD est perpendiculaire sur AD.

Nous avons donc la relation

$$\frac{1}{2}l.\text{CD} = \frac{1}{2}h^2, \quad \text{d'où} \quad \text{CD} = \frac{h^2}{l}.$$

Posons $OA = x$, $OB = y$. En égalant deux expressions de la surface du triangle AOB, nous obtenons

$$\frac{1}{2}xy \sin 60^\circ = \frac{1}{2}l.\text{OD};$$

mais
$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et
$$\text{OD} = \sqrt{\overline{\text{CD}}^2 - \overline{\text{CO}}^2} = \sqrt{\frac{h^4}{l^2} - c^2} = \frac{\sqrt{h^4 - c^2l^2}}{l}.$$

La relation précédente s'écrit alors, en simplifiant,

$$\frac{xy\sqrt{3}}{2} = \sqrt{h^4 - c^2l^2},$$

ou
$$xy = \frac{2}{3}\sqrt{3(h^4 - c^2l^2)}. \qquad (1)$$

D'ailleurs en considérant dans le triangle AOB, le côté AB, opposé à un angle de 60°, nous pouvons écrire

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos 60^\circ = l^2,$$

ou
$$x^2 + y^2 - xy = l^2. \qquad (2)$$

Ajoutons $3xy$ aux deux membres de (2). Nous avons, en vertu de (1),

$$(x + y)^2 = l^2 + 2\sqrt{3(h^4 - c^2l^2)}. \qquad (3)$$

Si au contraire nous retranchons xy des deux membres, il vient

$$(x - y)^2 = l^2 - \frac{2}{3}\sqrt{3(h^4 - c^2l^2)}. \qquad (4)$$

Les équations (3) et (4) donnent alors visiblement, en supposant $x > y$:

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{l^2 + 2\sqrt{3(h^4 - c^2l^2)}} \pm \sqrt{l^2 - \frac{2}{3}\sqrt{3(h^4 - c^2l^2)}}\right),$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{l^2 + 2\sqrt{3(h^4 - c^2l^2)}} \mp \sqrt{l^2 - \frac{2}{3}\sqrt{3(h^4 - c^2l^2)}}\right).$$

On voit que si les radicaux sont réels, ces deux valeurs sont réelles et positives. Les deux conditions de possibilité sont donc

$$h^4 - c^2l^2 \geqslant 0$$

et
$$l^2 - \frac{2}{3}\sqrt{3(h^4 - c^2l^2)} \geqslant 0.$$

La deuxième s'écrit, en isolant le radical et élevant au carré,

$$l^4 \geqslant \frac{4}{3}(h^4 - c^2l^2),$$

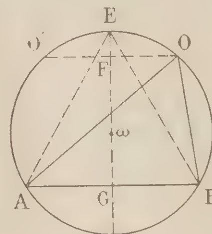
ou
$$h^4 \leqslant c^2l^2 + \frac{3}{4}l^4.$$

Pour que le problème soit possible, on doit donc avoir

$$c^2l^2 \leqslant h^4 \leqslant c^2l^2 + \frac{3}{4}l^4.$$

Il admet alors deux solutions.

Solution géométrique. — Tout revient à déterminer complètement le triangle AOB. Or la hauteur OD de ce triangle est un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'autre côté c est donné et dont l'hypoténuse $\text{CD} = \frac{h^2}{l}$ s'obtient par la construction d'une troisième proportionnelle. OD peut donc se construire aisément. Dès lors, dans le triangle AOB, nous connaissons la base $AB = l$, l'angle AOB de 60° et la hauteur OD. La construction est immédiate. Sur AB nous construisons le segment capable de l'angle de 60° ; sur le diamètre perpendiculaire à AB nous prenons le point F tel que $\text{GF} = \text{OD} = \frac{\sqrt{h^4 - c^2l^2}}{l}$, et par ce point nous menons une parallèle à AB. Son intersection avec le cercle détermine le point O. On voit que le second point d'intersection O′ ne donne pas un triangle distinct.



Pour que le problème soit possible, il faut d'abord qu'on ait pu déterminer $\text{GF} = \text{OD}$, ce qui exige

$$h^4 \geqslant c^2l^2.$$

D'autre part, il faut que

$$\text{GE} \geqslant \text{OD};$$

mais GE est la hauteur d'un triangle équilatéral de base l ; elle est donc égale à $\frac{l\sqrt{3}}{2}$. La seconde condition s'écrit alors

$$\frac{l\sqrt{3}}{2} \geqslant \frac{\sqrt{h^4 - c^2l^2}}{l}.$$

En élevant au carré et réduisant, il vient

$$h^4 \leqslant c^2l^2 + \frac{3}{4}l^4.$$

Donc enfin le problème sera possible et admettra deux solutions si

$$c^2l^2 \leqslant h^4 \leqslant c^2l^2 + \frac{3}{4}l^4.$$

Volume du tétraèdre. — La base est

$$AOB = \frac{1}{2} AB.OD = \frac{1}{2}\sqrt{h^4 - c^2l^2}$$

et la hauteur est c. Le volume est donc égal à

$$\frac{1}{6} c\sqrt{h^4 - c^2l^2}.$$

(J. DELPONT.)

[M. A. Bouzy, école primaire supérieure de Vervins, a résolu la même question.]

4543. — *Résoudre l'équation*

$$x^8 + px^7 + p(q+1)x^6 + p(p-q+pq)x^5 + q(p^2-q)x^4$$
$$+ p^2q(p-q-1)x^3 - pq^2(1+q)x^2 - p^3q^2x - p^2q^3 = 0.$$

Quels doivent être les signes de p et de q, pour que les huit racines soient réelles ?

Application : $p = -4, \quad q = 49.$

L'équation donnée peut s'écrire

$$(x+p)x^7 + p(q+1)(x+p)x^5 - (px+q)qx^4$$
$$+ p^2q(x+p)x^3 - pq(q+1)(px+q)x^2 - p^2q^2(px+q) = 0,$$

ou $\quad x^3(x+p)[x^4 + p(q+1)x^2 + p^2q]$
$$-(px+q)q[x^4 + p(q+1)x^2 + p^2q] = 0,$$

ou, en mettant en évidence le facteur commun,

$$[x^4 + p(q+1)x^2 + p^2q][x^4 + px^3 - pqx - q^2] = 0.$$

Or $\quad x^4 + p(q+1)x^2 + p^2q = x^2(x^2+pq) + p(x^2+pq)$
$$= (x^2+p)(x^2+pq),$$

et $\quad x^4 + px^3 - pqx - q^2 = x^4 - q^2 + px(x^2-q)$
$$= (x^2-p)(x^2+px+q).$$

L'équation proposée prend alors finalement la forme

$$(x^2+pq)(x^2+p)(x^2-q)(x^2+px+q) = 0,$$

sous laquelle elle se décompose en quatre autres équations du second degré, ce qui donne pour x les huit valeurs suivantes :

$$x_1 = \pm\sqrt{-pq}, \qquad x_2 = \pm\sqrt{-p},$$
$$x_3 = \pm\sqrt{q}, \qquad x_4 = \frac{-p \pm \sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

Pour que les valeurs x_2 et x_3 soient réelles, il faut que p soit négatif et q positif ; les valeurs x_1 sont alors toujours réelles, et les valeurs x_4 seulement lorsque $p^2 - 4q > 0$, ou $q < \frac{p^2}{4}$.

En faisant $p = -4$ et $q = 49$ dans les formules précédentes, on obtient

$$x_1 = \pm 14, \qquad x_2 = \pm 2, \qquad x_3 = \pm 7, \qquad x_4 = 2 \pm 3\sqrt{-5}.$$

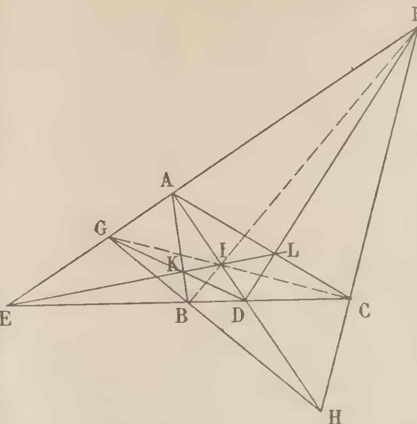
(TRAJAN LALESCU, lycée de Jassy.)

[Ont résolu la même question : MM. P. Le Verrier, lycée Janson ; G. Nazare, A. Popesçu, à Jassy ; E. Foucart, à Issy ; Vial, à Tournus.]

GÉOMÉTRIE

4513. — *Etant donné un triangle* ABC, *on construit le triangle* FGH *formé par les bissectrices extérieures des angles* A, B, C ; *soient* D *et* E *les points où les bissectrices de l'angle* A *rencontrent le côté* BC ; K *le point de rencontre de* DG *et de* AB ; L *le point de rencontre de* DF *et de* AC. *Prouver que les points* E, K, L *sont en ligne droite avec le centre* I *du cercle inscrit au triangle.*

Le point F, centre du cercle exinscrit dans l'angle B, est situé sur la bissectrice intérieure BI ; de même G se trouve sur la bissectrice CI. On peut donc considérer chacun des trois points K, I, L comme l'intersection des diagonales des quadrilatères AGBD, GBCF, ADCF, et, d'après une propriété connue, ces trois points appartiennent à la polaire du point H par rapport à l'angle FEC, autrement dit ces trois points sont sur une même droite passant par E.



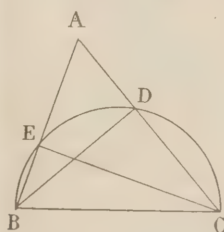
(J. CHAPRON, commis des Postes, à Lyon.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Amblard ; G. Bieber ; C. Billionnet ; Bily-Méheust ; L.-A. Blanc ; L. Bois ; E. Bouby ; G. Canel ; H. Carpentier ; R. Van Cauwenberghe ; G. Chédaille ; Chollet ; P. Delolme ; L. Deschamps ; H. Duffet ; R. Dunesme ; R. Javelot ; V. Jouve ; E. Kornis ; H. L. ; T. Lalescu ; R. Lavallée ; P. Le Verrier ; H. Lévy ; M. Oger ; F. Pirlot ; M. Rebeix ; Reymond ; H. Roure ; C. Schoonheere ; G. Tastet ; L. Torin.]

4527. — *Dans un triangle, au plus grand angle correspond la plus petite hauteur. (Ne pas se servir de l'expression ordinaire de l'aire d'un triangle.)*

Nous distinguerons deux cas suivant que le plus grand angle est aigu ou obtus.

1° Considérons le triangle acutangle ABC dans lequel on suppose $B > C$. Il suffit de faire voir que la hauteur BD est moindre que la hauteur CE, ces deux droites étant deux cordes du demi-cercle de diamètre BC.

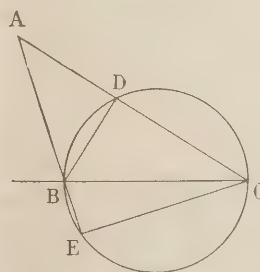


En effet, on sait que dans un même cercle deux arcs inférieurs à une demi-circonférence sont sous-tendus par deux cordes inégales de même sens. Or l'hypothèse $B > C$ revient à

$$\widehat{EDC} > \widehat{BED},$$

ce qui entraîne $\quad EC > BD.$

2° Considérons maintenant le triangle ABC obtusangle en B. L'angle CBE étant extérieur au triangle, on a



$$\widehat{CBE} = A + C > C,$$

ou $\quad \widehat{CE} > \widehat{BD},$

c'est-à-dire $\quad CE > BD.$

(RIBES, à Saint-Estève.)

Autre démonstration. — Nous allons montrer que l'hypothèse $A > B > C$ entraîne

$$h_a < h_b < h_c,$$

h_a, h_b, h_c désignant les hauteurs correspondant aux côtés a, b, c.

En vertu d'un théorème connu, on peut écrire

$$2Rh_a = bc, \qquad 2Rh_b = ca, \qquad 2Rh_c = ab;$$

on est donc ramené à démontrer que

$$bc < ca < ab,$$

ou, en divisant par abc,

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < \frac{1}{c},$$

ou

$$a > b > c.$$

Or cette dernière conséquence résulte immédiatement de l'hypothèse $A > B > C$ et de ce qu'à un plus grand angle est opposé le plus grand côté.

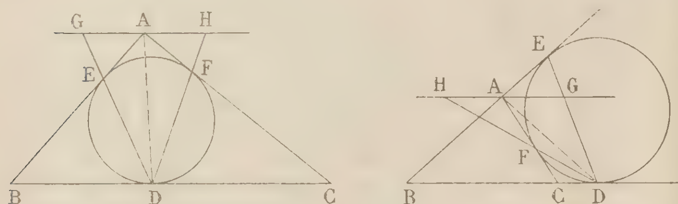
(E. LE MAIGRE, à Pleyben.)

[Ont résolu la même question : MM. N.-G. Alesandrescu ; A. Amblard ; A. Arcizet ; L.-M. Bayor ; R. Bellencourt ; F. Bernard ; F. Beynas ; C. Billionnet ; L. Bois ; J. Borgey ; M. Boucly ; G. Canel ; M. Catin ; Cavaillé ; P. Cazeau ; G. Chollet ; Y. Collin ; P. Delolme ; G. Delahaye ; Duval ; Famechon ; H. Gallay ; R. Hüe ; H. Janois ; J.-M. Lagarde ; G. Laurain ; Le Révérend ; B. Mathé ; M. Oger ; Ph. Plisson ; L. Troin ; E. Vaicle ; Vien.]

4529. — *On considère un triangle* ABC *et le cercle inscrit tangent en* D, E, F *aux côtés* BC, CA, AB. *Démontrer que les trois droites* DA, DE, DF *interceptent des segments égaux sur toute parallèle au côté* BC.

Si l'on remplace le cercle inscrit par l'un des cercles exinscrits, la relation est-elle encore vraie?

Trois droites concourantes interceptant des segments proportionnels sur deux parallèles, il suffit d'établir la propriété pour la parallèle au côté BC passant par A.



Soient GA, AH les segments interceptés sur cette parallèle par les droites DA, DE, DF. Je dis que $GA = AH$.

En effet, dans les deux cas de figure (cercle inscrit et exinscrit), les triangles AEG et AFH sont isocèles comme étant respectivement semblables aux triangles isocèles BDE, CDF, déterminés par deux tangentes à un cercle et la corde des contacts.

Donc $\quad AG = AE, \qquad AH = AF,$

ou, comme $AE = AF$,

$$AG = AH.$$

(L. BOIS, école professionnelle de Vierzon.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Amblard ; V. Barol ; M.-L. Bayor ; H. Bonafé ; E. Bouby ; J. Chapron ; F. Clabault ; P. Clermont ; Y. Collin ; R. Coural ; J. Danchaud ; C. Doumerc ; G. Foucry ; S. Galland ; M. Giraud ; H. Laperrière ; Meheust-Bily ; Vial.]

Autre démonstration. — On sait que trois des rayons d'un faisceau harmonique partagent en deux parties égales toute parallèle au quatrième rayon, et réciproquement.

Dans le cas énoncé, il suffit donc de montrer que le faisceau D(EAFC) est harmonique, ce qui revient à établir que la division E'AFC déterminée par ce faisceau sur le côté AC est harmonique.

Le triangle ABC coupé par la transversale E'ED donne (théorème de Ménélaüs)

$$\frac{\overline{E'A}}{\overline{E'C}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = 1.$$

Or $\quad \dfrac{\overline{EB}}{\overline{DB}} = -1, \qquad \overline{EA} = -\overline{FA}, \qquad \overline{DC} = -\overline{FC};$

donc

$$\frac{\overline{E'A}}{\overline{E'C}} : \left(-\frac{\overline{FC}}{\overline{FA}}\right) = 1,$$

ou

$$\frac{\overline{E'A}}{\overline{E'C}} = -\frac{\overline{FA}}{\overline{FC}},$$

ce qui montre que E' et F divisent harmoniquement AC.

La démonstration précédente subsiste évidemment pour chacun des trois cercles exinscrits au triangle ABC.

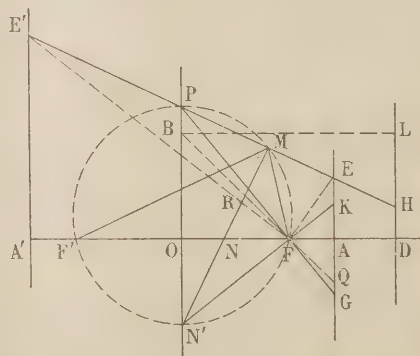
(M. OGER, à Poitiers.)

[Ont résolu la même question : Mlle M. Turpain ; MM. N.-G. Alesandrescu ; V. Barol ; R. Bellencourt ; A. Brisbare ; G. Chollet ; G. Delahaye ; P. Delolme ; R. Dickson ; Famechon ; E. Foucart ; R. Henry ; R. Lavallée ; P. Le Verrier ; M. Petit ; H. Pitrat ; Reymond ; G. Schoonheere ; G. Tastet ; Vien ; A. Wulleman.]

4537. — *En un point* M *d'une ellipse on trace la tangente, qui rencontre en* P *le petit axe, en* E *la tangente à l'extrémité* A *du grand axe et en* H *la directrice relative au foyer* F ; *puis on mène la droite* PF, *qui rencontre en* G *la tangente* AE. 1° *Démontrer que* $PE = PF$ *et que* $PG = PH$. 2° N' *étant le point d'intersection de la normale en* M *avec le petit axe et* K *le point d'intersection de* N'F *avec* AE, *démontrer que* $N'K = N'M$.

1° Joignons E et F, E' et F, E' étant le point d'intersection de la tangente en M avec la tangente en A'. EF est bissectrice de l'angle MFA, E'F est bissectrice de l'angle MFA'.

Par suite, le triangle EFE' est rectangle, et $PF = PE$.



2° On a

$$\frac{PF}{PG} = \frac{OF}{OA},$$

$$\frac{PE}{PH} = \frac{OA}{OD}.$$

Mais

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OF}{OA};$$

donc

$$\frac{PF}{PG} = \frac{PE}{PH},$$

et comme $PF = PE$, il en résulte que

$$PG = PH.$$

En particulier, considérons la tangente en B, extrémité du petit axe, laquelle rencontre la directrice en L, et soit Q l'intersection de BF avec la tangente en A ; on a $BL = BQ$. Cette remarque donne un procédé simple pour construire la directrice.

3° Soit R le point d'intersection de MN' et de FE'. L'angle PFN' est droit, car on sait que le cercle circonscrit au triangle FMF' passe en P et en N'. D'après cela, les deux triangles N'FR, FPE ont leurs côtés perpendiculaires ; ils sont donc semblables et, par suite, N'R = N'F.

D'autre part, les triangles N'MF, F'MN ayant leurs angles égaux respectivement, sont semblables. Donc

$$\frac{N'F}{N'M} \quad \text{ou} \quad \frac{N'R}{N'M} = \frac{F'N}{F'M} = \frac{c}{a}.$$

Mais
$$\frac{N'F}{N'K} = \frac{OF}{OA} = \frac{c}{a};$$

donc
$$\frac{N'R}{N'M} = \frac{N'F}{N'K},$$

et, par suite,
$$N'M = N'K.$$

(P. MASCARET, à Digne.)

[Ont résolu la même question : MM. V. Barol ; L.-A. Blanc ; H. Bonafé ; G. Chollet ; E. Foucart ; G. Lequéré ; R. P. ; G. Schoonheere ; Vial.]

4544. — *On considère un point* M *mobile sur le diamètre* AB *d'un cercle et l'on trace d'un même côté de* AB *les demi-cercles de diamètres* MA *et* MB *ayant leurs centres en* O *et* O', *puis le cercle tangent à la fois aux trois demi-cercles* AB, AM, MB. *Prouver que si l'on joint le point* M *au centre* O'' *de ce dernier cercle, ainsi qu'à ses points de contact avec les trois premiers, chacune de ces droites de jonction passe par un point fixe.*

Transformons la figure par la méthode des rayons vecteurs réciproques, en choisissant M pour pôle et le produit — MA.MB comme puissance d'inversion.

La circonférence AB se tranforme en elle-même ; les demi-cercles AM, MB ont respectivement pour inverses les tangentes BQ', AP' aux extrémités du diamètre AB du cercle C ; le cercle O'' a pour réciproque une circonférence I tangente à la fois en R' au cercle AB et en P', Q' aux droites AP', BQ'. La circonférence I étant indépendante de la position de M est fixe ; donc les droites MP, MQ, MR, qui joignent le pôle M aux points P, Q, R, pivotent autour des points fixes P', Q', R', inverses des points P, Q, R.

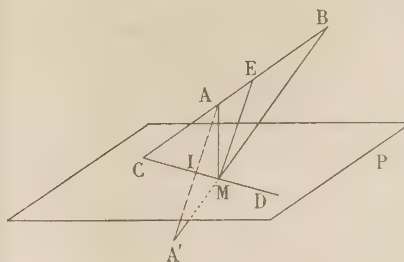
Remarque. — La distance du centre du cercle I à la droite AB est visiblement égale au diamètre du cercle I ; cette propriété s'étend au cercle O'', homothétique du cercle I par rapport à M, puisque les distances de I et O'' à AB sont homologues.

(J. CHAPRON, commis des Postes, à Lyon.)

[Ont résolu la même question : MM. Ch. Doumerc ; E. Foucart.]

4545. — *Etant donnés un plan* P *et deux points* A, B, *on trace la droite* AB *qui coupe le plan au point* C *et par ce point on mène, dans le plan, une droite quelconque* CD *sur laquelle on détermine le point* M *tel que la somme* MA + MB *soit minimum. Lieu du point* M.

Joignons M au symétrique A' de A par rapport à la droite CD.



La somme MA + MB ou son égale MA' + MB est évidemment minimum lorsque le point M est sur la droite A'B ; la droite CD est alors bissectrice extérieure de l'angle AMB, et en menant la bissectrice intérieure ME, on a

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AM}{MB} = \frac{AC}{CB},$$

ce qui montre que le point E est fixe en même temps que les trois points A, B, C. (Ces quatre points forment d'ailleurs une division harmonique).

En observant que l'angle CME est droit, on en conclut que le point M se trouve sur la sphère de diamètre CE ; cette sphère est coupée par le plan P suivant un petit cercle qui représente le lieu de M. La droite CD pouvant occuper toutes les positions possibles autour de C, ce petit cercle répond entièrement au lieu.

(GEORGES BIEBER, collège Chaptal.)

Autre solution. — Le point A', symétrique de A par rapport à la droite CD, appartient à la fois à un plan fixe parallèle au plan P et à la sphère de centre C et de rayon CA ; donc le lieu de A' est le petit cercle de la sphère déterminé par le plan fixe. Dès lors la droite BA' engendre un cône oblique de sommet B et dont la base circulaire est parallèle au plan P. Ce dernier coupe le cône suivant une circonférence homothétique de la base par rapport au point B ; cette circonférence, qui passe par le point C, constitue le lieu de M.

(ERNEST FOUCART, à Issy-les-Moulineaux.)

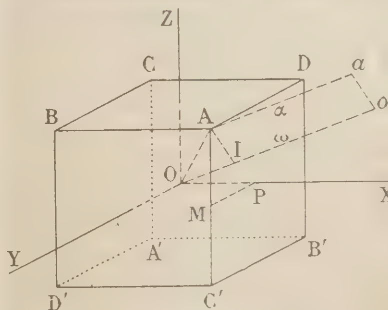
[Ont résolu la même question : Mlle M. Turpain ; MM. N.-G. Alesandrescu ; V. Barol ; R. Bellencourt ; C. Billionnet ; P. Bisch ; L. Curt ; Ch. Doumerc ; R. Dickson ; G. Foucry ; R. Hüe ; M. Oger ; J. Pémartin ; H. Pitrat ; J. Sallaud ; L. Troin ; R. Turgis ; Vial ; P. Coulbois.]

TRIGONOMÉTRIE

4444. — *Soit a l'arête d'un cube* ABCDA'B'C'D'. *En désignant par* α, α', β, β', γ, γ', δ, δ' *les distances des sommets opposés* A *et* A', B *et* B', *etc. à un même plan qui ne coupe pas le cube, on a*

$$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 - 2\gamma\gamma' - 2\delta\delta' = 2a^2.$$

Première solution. — Soient O le centre du cube et ω la longueur de la projetante Oo. Si nous abaissons du point A une perpendiculaire AI sur Oo,



$$OI = \omega - \alpha.$$

Menons par le point O des plans de projection parallèles aux faces du cube, et soient λ, μ, ν les angles que fait Oo avec OX, OY, OZ. Si x, y, z sont les coordonnées du sommet A, il résulte du théorème des

projections que

$$\omega - \alpha = OI = x\cos\lambda + y\cos\mu + \alpha\cos\nu. \qquad (1)$$

Les coordonnées des sommets du cube sont indiquées par le tableau suivant :

	x	y	z
A	$+\frac{a}{2}$	$+\frac{a}{2}$	$+\frac{a}{2}$
A′	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$
B	$-\frac{a}{2}$	$+\frac{a}{2}$	$+\frac{a}{2}$
B′	$+\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$
C	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	$+\frac{a}{2}$
C′	$+\frac{a}{2}$	$+\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$
D	$+\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	$+\frac{a}{2}$
D′	$-\frac{a}{2}$	$+\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$

En appliquant l'équation (1) à chacun des sommets et mettant $\frac{a}{2}$ en facteur commun, nous obtenons les relations

$$\alpha = \omega - \frac{a}{2}(\cos\lambda + \cos\mu + \cos\nu),$$

$$\alpha' = \omega + \frac{a}{2}(\cos\lambda + \cos\mu + \cos\nu),$$

$$\beta = \omega - \frac{a}{2}(\cos\mu + \cos\nu - \cos\lambda),$$

$$\beta' = \omega + \frac{a}{2}(\cos\mu + \cos\nu - \cos\lambda),$$

$$\gamma = \omega + \frac{a}{2}(\cos\lambda + \cos\mu - \cos\nu),$$

$$\gamma' = \omega - \frac{a}{2}(\cos\lambda + \cos\mu - \cos\nu),$$

$$\delta = \omega - \frac{a}{2}(\cos\lambda + \cos\nu - \cos\mu),$$

$$\delta' = \omega + \frac{a}{2}(\cos\lambda + \cos\nu - \cos\mu).$$

Nous en déduisons

$$\alpha^2 + \alpha'^2 = 2\omega^2 + 2\,\frac{a^2}{4}(\cos\lambda + \cos\mu + \cos\nu)^2,$$

$$\beta^2 + \beta'^2 = 2\omega^2 + 2\,\frac{a^2}{4}(\cos\mu + \cos\nu - \cos\lambda)^2,$$

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \beta^2 + \beta'^2 = 4\omega^2 + \frac{a^2}{2}\left[2(\cos\mu + \cos\nu)^2 + 2\cos^2\lambda\right]$$

$$= 4\omega^2 + a^2(\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu + 2\cos\mu\cos\nu),$$

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \beta^2 + \beta'^2 = 4\omega^2 + a^2(1 + 2\cos\mu\cos\nu). \qquad (2)$$

D'autre part,

$$\gamma\gamma' = \omega^2 - \frac{a^2}{4}(\cos\lambda + \cos\mu - \cos\nu)^2,$$

$$\delta\delta' = \omega^2 - \frac{a^2}{4}\left[\cos\lambda - (\cos\mu - \cos\nu)\right]^2.$$

D'où

$$2\gamma\gamma' + 2\delta\delta' = 4\omega^2 - \frac{a^2}{2}\left[2\cos^2\lambda + 2(\cos\mu - \cos\nu)^2\right]$$

$$= 4\omega^2 - a^2(\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu - 2\cos\mu.\cos\nu),$$

$$2\gamma\gamma' + 2\delta\delta' = 4\omega^2 - a^2(1 - 2\cos\mu.\cos\nu). \qquad (3)$$

En retranchant l'une de l'autre les relations (3) et (2),

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \beta^2 + \beta'^2 - 2\gamma\gamma' - 2\delta\delta' = 2a^2.$$

C. q. f. d.

(J. MOISSON.)

Autre solution. — En observant que

$$\alpha^2 + \alpha'^2 = \frac{1}{2}\left[(\alpha + \alpha')^2 + (\alpha - \alpha')^2\right],$$

$$\beta^2 + \beta'^2 = \frac{1}{2}\left[(\beta + \beta')^2 + (\beta - \beta')^2\right],$$

$$2\gamma\gamma' = \frac{1}{2}\left[(\gamma + \gamma')^2 - (\gamma - \gamma')^2\right],$$

$$2\delta\delta' = \frac{1}{2}\left[(\delta + \delta')^2 - (\delta - \delta')^2\right],$$

la relation à démontrer peut s'écrire

$$(\alpha + \alpha')^2 + (\alpha - \alpha')^2 + (\beta + \beta')^2 + (\beta - \beta')^2 - (\gamma + \gamma')^2$$
$$+ (\gamma - \gamma')^2 - (\delta + \delta')^2 + (\delta - \delta')^2 = 4a^2. \qquad (1)$$

Projetons les trois points A, O, A′ en a, o, a' sur le plan considéré ; le point o étant le milieu de a et a', la figure donne

$$Aa + A'a' = \alpha + \alpha' = 2Oo = 2d,$$

en appelant d la distance du centre du cube au plan donné. On trouverait de même

$$\beta + \beta' = \gamma + \gamma' = \delta + \delta' = 2d.$$

Par suite la relation (1) se simplifie, et il reste à faire voir que

$$(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 + (\gamma - \gamma')^2 + (\delta - \delta')^2 = 4a^2. \qquad (2)$$

Projetons maintenant les points A′ et O en H et K sur Aa ; on voit que

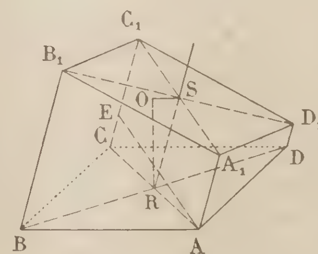
$$|\alpha - \alpha'| = AH = 2AK ;$$

donc

$$(\alpha - \alpha')^2 = 4\overline{AK}^2.$$

Mais AK n'est autre chose que la distance du sommet A à un plan parallèle au plan donné mené par le centre du cube. La relation (2) revient donc à la démonstration de la proposition suivante :

Si par le centre d'un cube on mène un plan quelconque, la somme des carrés des distances à ce plan de quatre sommets A, B, C, D *appartenant à une même face est égale au carré de l'arête* a *du cube.*



Soit ABCD le carré situé dans la face considérée ; menons ses diagonales AC et BD qui se coupent en R. En R élevons au plan du carré une perpendiculaire RO égale à la moitié du côté du carré ; O sera le centre du cube.

Pour définir le plan, menons par le point R une droite RS faisant les angles θ, φ, ψ avec les trois directions RO, RC, RD ; menons par le point O le plan perpendiculaire à cette droite ; le point S où il rencontre la droite sera la projection sur ce plan du centre du carré ABCD ; la projection de ce carré sera un parallélogramme $A_1B_1C_1D_1$ ayant pour centre le point S.

Il s'agit de démontrer que

$$\overline{AA_1}^2 + \overline{BB_1}^2 + \overline{CC_1}^2 + \overline{DD_1}^2 = a^2.$$

Mais

$$\overline{AA}_1^2 + \overline{CC}_1^2 = \frac{1}{2}\,[(AA_1 + CC_1)^2 + (AA_1 - CC_1)^2];$$

le trapèze AA_1C_1C donne

$$AA_1 + CC_1 = 2RS;$$

le triangle SOR est rectangle en S; son angle en R est égal à θ; son côté OR vaut $\frac{a}{2}$; donc

$$AA_1 + CC_1 = 2RS = 2\,\frac{a}{2}\cos\theta = a\cos\theta.$$

Menons par A la parallèle AE à A_1C_1; dans le triangle ACE l'angle en E est droit; l'hypoténuse AC vaut $a\sqrt{2}$; l'angle ECA est égal à ψ, angle de RS et de RC; donc

$$EC = CC_1 - AA_1 = a\sqrt{2}\cos\psi.$$

Par suite,

$$(AA_1 - CC_1)^2 = 2a^2\cos^2\psi,$$

et

$$\overline{AA}_1^2 + \overline{CC}_1^2 = \frac{1}{2}(a^2\cos^2\theta + 2a^2\cos^2\psi).$$

On démontrerait de même que

$$\overline{BB}_1^2 + \overline{DD}_1^2 = \frac{1}{2}(a^2\cos^2\theta + 2a^2\cos^2\varphi).$$

Donc

$$\overline{AA}_1^2 + \overline{BB}_1^2 + \overline{CC}_1^2 + \overline{DD}_1^2 = a^2\cos^2\theta + a^2\cos^2\varphi + a^2\cos^2\psi$$
$$= a^2(\cos^2\theta + \cos^2\varphi + \cos^2\psi).$$

On sait d'ailleurs que la somme des carrés des cosinus des angles qu'une direction RS fait avec trois directions rectangulaires est égale à l'unité. Donc la somme précédente se réduit à a^2, et le théorème est démontré.

4539. — *Sachant que dans un triangle*

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{5}{6}, \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{20}{37},$$

trouver $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ *et prouver que* $a + c = 2b$.

Première solution. — On a

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)} = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}}.$$

En remplaçant $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ et $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ par les valeurs numériques données, il vient

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1 - \frac{5}{6}\cdot\frac{20}{37}}{\frac{5}{6} + \frac{20}{37}} = \frac{122}{305} = \frac{2}{5}.$$

D'après les relations

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

la relation $a + c = 2b$ est équivalente à la relation

$$\sin A + \sin C = 2\sin B. \qquad (1)$$

Tout revient donc à calculer les sinus des angles A, B, C en fonction des tangentes des demi-angles. On obtient ainsi

$$\sin A = \frac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}} = \frac{\frac{10}{6}}{1 + \frac{25}{36}} = \frac{60}{61},$$

$$\sin B = \frac{2\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{B}{2}} = \frac{\frac{40}{37}}{1 + \left(\frac{20}{37}\right)^2} = \frac{1480}{1769},$$

$$\sin C = \frac{2\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{C}{2}} = \frac{\frac{4}{5}}{1 + \frac{4}{25}} = \frac{20}{29}.$$

On reconnait facilement que ces valeurs vérifient la relation (1); en effet

$$\frac{60}{61} + \frac{20}{29} = \frac{20 \times 148}{1769} = 2\cdot\frac{1480}{1769}.$$

(S. POCHON, répétiteur au collège de Wassy.)

Seconde solution. — Lorsque trois angles α, β, γ ont pour somme 90°, on sait que

$$\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 1.$$

Or $$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ;$$

donc $$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = 1.$$

Remplaçant $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ et $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ par les valeurs données, on trouve

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{122}{305} = \frac{2}{5}.$$

On sait d'autre part qu'en désignant par r le rayon du cercle inscrit, on a

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} = \frac{2r}{b+c}.$$

Donc $$b + c = \frac{2r}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}} = \frac{2r}{\frac{5}{6}} = \frac{12r}{5}.$$

De même, $$c + a = \frac{2r}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}} = \frac{37r}{10},$$

$$a + b = \frac{2r}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}} = 5r.$$

De la première et de la troisième égalités on déduit

$$2b + (a + c) = \frac{12r}{5} + 5r = \frac{37r}{5} = 2 \times \frac{37r}{10}.$$

Comparant à la seconde, on en conclut bien

$$a + c = 2b.$$

(CAVAILLÉ, à Agen.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Amblard ; Ed. Ardin-Delteil ; L. Barberot ; H. Bisch ; G. Canel ; B. Carrière ; P. Cazeaux ; R. Dourol ; L. Curt ; J. Danchaud ; G. Delahaye ; P. Gutton ; R. Henry ; H. Janois ; F. Ladevèze ; E. Le Maigre ; P. Le Verrier : H. Loignon ; M. Nahon ; R.-P. ; J. Plantier ; A. Pichon ; Roujol ; Vagneux ; Venet ; Vial ; L. Vincent ; R. Dickson.]

4546. — *Démontrer que si les angles d'un triangle sont en progression arithmétique, ainsi que* coséc 2A, coséc 2B, coséc 2C, *le cosinus de la différence commune des angles est égal à* $\sqrt{\frac{3}{8}}$.

L'angle moyen B équivaut au tiers de la somme des trois angles, c'est-à-dire à $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$. Si donc x est la différence commune des angles, ces angles ont pour valeurs

$$A = 60^\circ - x, \qquad B = 60^\circ, \qquad C = 60^\circ + x.$$

On peut donc écrire

$$\text{coséc}\,2A = \frac{1}{\sin 2A} = \frac{1}{\sin(120^\circ - 2x)} = \frac{2}{\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x},$$

$$\text{cosec } 2B = \frac{1}{\sin 2B} = \frac{1}{\sin 120^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{cosec } 2C = \frac{1}{\sin 2C} = \frac{1}{\sin(120^\circ + 2x)} = \frac{2}{\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x}.$$

En écrivant que ces trois valeurs sont en progression arithmétique, il vient

$$\frac{2}{\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x},$$

ou, en simplifiant et remplaçant $\sin^2 2x$ par $1 - \cos^2 2x$,

$$4\cos^2 2x - 3\cos 2x - 1 = 0.$$

On tire de là

$$\cos 2x = 1 \qquad \text{et} \qquad \cos 2x = -\frac{1}{4}.$$

La première valeur donne $x = 0$; comme les trois angles A, B, C sont alors égaux, cette valeur peut être écartée. En exprimant $\cos 2x$ en fonction de $\cos x$, la seconde valeur s'écrit

$$2\cos^2 x - 1 = -\frac{1}{4},$$

ou

$$2\cos^2 x = \frac{3}{4},$$

d'où l'on déduit, en observant que x est aigu comme inférieur à 60°,

$$\cos x = \sqrt{\frac{3}{8}}.$$

(Victor BAROL, école primaire supérieure de Lorgues.)

[Ont résolu la même question : MM. N.-G. Alesandrescu ; Ed. Ardin-Delteil ; L. Barberot ; C. Billionnet ; L. Curt ; G. Delahaye ; Dickson ; H. Dodier ; Ch. Doumerc ; E. Foucart ; G. Foucry ; E. Gernez-Pfanmatter ; R. Henry ; R. Hüe ; C. Marie, à Bel-Air ; St-N. Mirea ; A. Popescu ; Rieumajou ; J. Sallaud ; Venet ; B. Carriere.]

PHYSIQUE

4548. — *On veut éclairer une maison avec 100 lampes à incandescence, absorbant chacune 0,3 d'ampère, placées en dérivation aux bornes d'une dynamo à 110 volts. Cette dynamo est mise en mouvement au moyen d'un moteur hydraulique dont le rendement mécanique est de 75 °/₀. La puissance disponible aux bornes de la dynamo est 90 °/₀ de la puissance du moteur hydraulique.*

On demande quel doit être le débit du cours d'eau qui fait fonctionner le moteur hydraulique, sachant que la hauteur de chute est 10^m.

Un cheval-vapeur équivaut à 736 watts.

(*Bacc. lettres-sciences, Nancy, juillet 1898.*)

Les 100 lampes exigeant $0{,}3 \times 100 = 30$ ampères, la puissance de la dynamo doit être de 30×110 watts, ou de $\dfrac{30 \times 110}{736}$ chevaux-vapeur.

Appelons x le nombre de litres d'eau que devra débiter en une seconde le cours d'eau; le travail correspondant sera de $x \times 10$ kilogrammètres, ou de $\dfrac{x \times 10}{75}$ chevaux-vapeur. On doit donc avoir, en tenant compte du rendement mécanique du moteur et de la puissance disponible aux bornes de la dynamo,

$$\frac{30 \times 110}{736} = \frac{x \times 10 \times 75 \times 90}{75 \times 100 \times 100},$$

d'où

$$x = 49^{\text{lit}},81.$$

(E. FOUCART, à Issy.)

[Ont résolu la même question : MM. Bameulle ; J. Borgey ; H. Damoiseau ; J. Fiton ; E. Gernez ; R. Henry ; R. Hüe ; E. Krau ; E. Le Maigre ; M. Oger ; J. Sallaud ; A. Seignobosc ; Venet.]

QUESTIONS PROPOSÉES

4557. — Quel que soit n, les deux expressions

$$2^{12n+9} - 5^{4n+1} \qquad \text{et} \qquad 2^{12n+2} + 3^{3n+2}$$

sont toujours divisibles par 13.

(J. Sallaud, pensionnat N.-D. de Toutes-Aides, à Doulon.)

4558. — Eliminer p, q, r, s entre les 5 équations suivantes :

$$p + q + r + s = -a,$$
$$pq + pr + ps + qr + qs + rs = b,$$
$$pqr + pqs + prs + qrs = -c,$$
$$pqrs = d, \qquad pq = -1.$$

(G. Delahaye, à Roye.)

4559. — Construire un triangle connaissant la bissectrice de l'angle A, la différence $B - C$ des deux autres angles et le rapport $\dfrac{b+c}{a}$ de la somme des côtés comprenant l'angle A au côté opposé a.

(A. Sallin, école normale de Caen.)

4560. — Sur une sécante mobile OAB passant par le centre d'un cercle O on prend un point B tel que

$$\overline{AB} = k.\overline{OA},$$

k étant un nombre quelconque ; on projette les points A et B sur un diamètre fixe en A′ et B′. On demande :

1° De trouver le lieu géométrique du point M où se coupent les droites AB′ et A′B ;

2° De montrer que, lorsque le lieu de M est une ellipse, le grand axe est toujours double du petit axe, quel que soit k.

(Luiz Hémois.)

4561. — Etant donnés une circonférence, deux rayons fixes et une direction donnée, mener parallèlement à la direction donnée une sécante telle que la partie de cette sécante interceptée par la circonférence soit égale au segment intercepté par les deux rayons fixes.

(St. Feintuch.)

4562. — On considère deux angles droits XOY, X′O′Y′, et la parabole P tangente aux quatre côtés de ces angles. Soit Q l'intersection des droites OX et O′X′. Laissant fixes les points O et O′, on fait décrire à Q un cercle fixe passant par O et O′.

1° Trouver les lieux géométriques du foyer et du sommet de la parabole P.

2° Par tout point M du plan passent deux paraboles P réelles ou imaginaires. Déterminer la portion du plan dans laquelle doit se trouver le point M pour que les deux paraboles qui y passent soient réelles.

3° Trouver le lieu du point M pour que l'une des deux paraboles correspondantes ait un paramètre donné.

4° Trouver le lieu du point M pour que les deux paraboles qui y passent s'y coupent orthogonalement.

(L. Ollié, à Auch.)

4563. — Si, dans un triangle, les cotangentes des angles $\dfrac{A}{2}, \dfrac{B}{2}, \dfrac{C}{2}$ forment une progression arithmétique, on a

$$\text{cotg}\frac{A}{2}\,\text{cotg}\frac{C}{2} = 3.$$

(C. Ludovic, école professionnelle Dombre-Marbec, à Aix.)

4564. — Un élément de pile a pour résistance 1,5 ohm et pour force électromotrice 1,1 volt. On réunit les deux pôles de cet élément par un fil de cuivre de 100^m de longueur et de 3^{mmq} de section. Calculer l'intensité du courant qui parcourt le fil et la différence de potentiel entre les pôles de l'élément fermé, sachant que la résistance d'un fil de cuivre de 1^m de longueur et de 1^{mmq} de section est 0,018 ohm.

(*Bacc. lettres-sciences, Montpellier, juillet 1898.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

23e Année. — N° 15. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 1er Mai 1899.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.

Abonnements.. Librairie Nony et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

NOTE SUR LES DIRECTRICES DE MONGE DES CYLINDRES DE RÉVOLUTION

DÉTERMINATION DES AXES DES SECTIONS PLANES ELLIPTIQUES

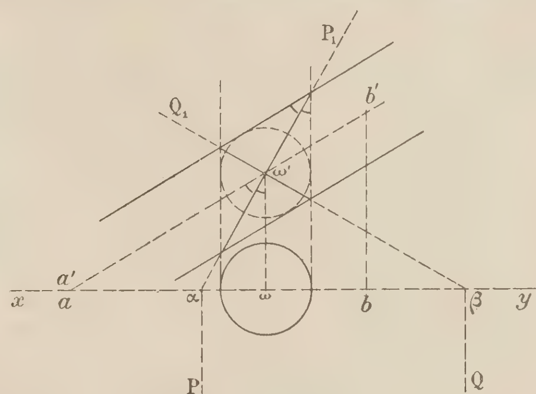
par M. **Arnould**, professeur au lycée d'Orléans.

Etant donné un cylindre de révolution à axe quelconque, l'emploi d'un parallèle comme directrice nécessite des rabattements et il est plus commode de déterminer une section elliptique projetée suivant un cercle. Nous montrons comment on peut obtenir une telle courbe, qu'on nomme *directrice de Monge*; et elle nous permet de construire les axes d'une section plane quelconque du cylindre. La construction ne suppose même pas le cylindre de révolution, mais exige seulement la connaissance d'une section elliptique projetée suivant un cercle. Enfin la méthode indiquée donne les axes d'une ellipse déterminée par deux diamètres conjugués (*).

Théorème. — *Deux cylindres circonscrits à la même sphère ont deux ellipses communes, dont les plans passent par l'intersection des plans des courbes de contact.*

Prenons comme plan horizontal le plan des axes des deux cylindres. La sphère est figurée par la circonférence de centre O et les cylindres par leurs contours apparents, qui forment un parallélogramme circonscrit : par suite, un losange concentrique au contour apparent de la sphère. Les plans verticaux AC et BD et les plans des courbes de contact MP, NQ passent donc par une même droite, la verticale O, qui coupe les trois surfaces aux mêmes points. Il suffit de montrer que chacun des plans verticaux AC, BD coupe les deux cylindres suivant la même ellipse. Or, le plan vertical AC, par exemple, coupe les deux cylindres suivant des ellipses qui ont en commun les sommets A, C du grand axe, et les sommets du petit axe qui sont les points de la sphère projetés en O ; les deux ellipses coïncident. Il en est de même du plan vertical BD, et le théorème est établi.

Détermination des directrices de Monge. — Soit un cylindre de révolution d'axe ab et de rayon R. Prenons comme plan vertical auxiliaire le plan projetant de ab ; soit $a'b'$ la projection verticale de l'axe. Le contour apparent vertical du cylindre se compose des parallèles à $a'b'$ à la distance R. Inscrivons dans ce contour



apparent une circonférence de centre arbitraire ω' ; c'est le contour apparent vertical d'une sphère (ω), (ω') inscrite dans le cylindre donné. D'après le théorème qui précède, le cylindre qui projette horizontalement la sphère, coupe le cylindre donné suivant deux ellipses situées dans les plans de bout $P\alpha P_1$, $Q\beta Q_1$ et projetées sur la circonférence (ω). Les deux plans $P\alpha P_1$, $Q\beta Q_1$ donnent les directrices cherchées ; il en est de même des plans qui leur sont parallèles.

Remarque I. — Les diagonales d'un losange étant les bissectrices des angles formés par les côtés, les droites αP_1, βQ_1 sont les bissectrices de l'angle formé par la direction $a'b'$ de l'axe et la verticale $\omega\omega'$.

Remarque II. — On peut montrer que dans tout quadrilatère circonscrit, convexe ou non, les diagonales et les droites qui joignent les points de contact des côtés opposés sont concourantes. On en conclut, comme précédemment, que deux cônes circonscrits à une même sphère, ou un cône et un cylindre, ont deux courbes planes communes. Le cas d'un cône et d'un cylindre donne les directrices de Monge du cône de révolution.

Section plane d'un cylindre dont la directrice est une ellipse projetée suivant un cercle. — Détermination des axes. — Soit le cylindre défini par la projection de l'ellipse directrice, la circonférence (Γ), et par la direction Oo des génératrices. Nous déterminons le point d'intersection o de l'axe du cylindre et du plan sécant, et sa trace XY sur le plan de la directrice. On peut obtenir un point quelconque de la section, en faisant passer par Oo un plan arbitraire ; soit $O\mu$ sa trace sur le plan de la directrice. Il coupe le plan sécant suivant μo et le cylindre suivant les génératrices (M), (M′) qui rencontrent μo aux deux points m, m' de la section plane. On a la tangente en m, intersection du plan tangent au cylindre le long de la génératrice (M)

(*) Tout ce qui suit est bien connu ; mais la plupart des ouvrages élémentaires l'omettent. Nous pensons donc que cette note sera de quelque utilité aux candidats aux Ecoles du Gouvernement.

et du plan sécant, en joignant m au point t, intersection des traces de ces deux plans sur le plan de la directrice. La tangente en m' est parallèle à mt, car o est le centre de la section plane.

Le plan auxiliaire $O\pi$, qui passe par les génératrices de contour apparent du cylindre, donne les points de la section plane situés sur les contours apparents : p et p'.

Axes. — La construction des *axes* ou *diamètres conjugués rectangulaires* de l'ellipse section repose sur les remarques suivantes :

La projection orthogonale ou oblique du milieu d'une droite est au milieu de la projection de la droite. Il en résulte que, si on fait *correspondre* les points de deux sections planes du cylindre situés sur une même génératrice, à deux diamètres conjugués d'une section correspondent deux diamètres conjugués dans l'autre. Peu importe d'ailleurs qu'on considère les sections planes de l'espace ou leurs projections sur un même plan de comparaison ; la correspondance subsiste.

Remarquons encore que dans un cercle deux diamètres rectangulaires quelconques sont conjugués.

Si donc l'une des sections considérées (Γ) est un cercle, on aura les axes de la seconde en cherchant deux diamètres rectangulaires de cette section qui correspondent à deux diamètres rectangulaires de (Γ).

En observant que deux diamètres correspondants se coupent sur l'intersection XY des plans des deux sections, on a la construction suivante :

Décrivons la circonférence qui passe par O, o et a son centre sur XY. Elle a pour diamètre $\alpha\beta$; et $o\alpha$, $o\beta$ rectangulaires correspondent aux deux diamètres rectangulaires $O\alpha$, $O\beta$ du cercle; ce sont les axes de l'ellipse section. On a de suite les extrémités a, a' ; b, b' des axes au moyen des plans auxiliaires $O\alpha$, $O\beta$.

Le problème suivant donne une application intéressante de la construction qui précède.

Problème. — *Recherche des axes d'une ellipse déterminée par deux diamètres conjugués.*

Soient op, oq les diamètres conjugués donnés de l'ellipse de centre o. Construisons sur pq le triangle rectangle isocèle pOq ($ph = hq = hO$) et traçons la circonférence (Γ) de centre O et de rayon Oq.

Le cylindre de base (Γ) et d'axe (Oo) (o a une cote arbitraire), est coupé par le plan (XY), o suivant l'ellipse donnée : aux diamètres rectangulaires du cercle Op, Oq correspondent en effet deux diamètres conjugués de la section plane : op, oq, qui sont précisément ceux qui déterminent l'ellipse donnée. Cette ellipse est alors tracée sur un cylindre à base circulaire connue ; on en construit les axes comme il a été dit plus haut.

Remarque. — On pourra ainsi obtenir les axes de la projection d'une section elliptique quelconque de cône ou de cylindre, en déterminant au préalable deux diamètres conjugués. — Cette détermination se fait en menant à la section plane des tangentes parallèles à une direction arbitraire, et des tangentes parallèles à la corde des contacts des précédentes. — Nous ne voyons guère de procédés plus directs pour la recherche des axes des sections elliptiques du cône et serions bien reconnaissants à ceux qui voudraient nous en indiquer.

ÉCOLE NAVALE (CONCOURS DE 1898)

4373. — *On donne une circonférence* O, *de rayon* $OF = R$, *et deux points* A *et* B *situés sur un même diamètre.*

$$OA = a, \quad OB = b.$$

On demande de déterminer le rayon $OE = x$ *d'une circonférence, concentrique et intérieure à la précédente, telle que si l'on mène du point* A *une tangente à cette circonférence, la surface du triangle ayant pour sommet le point* B *et pour base la corde* CD *interceptée par la circonférence extérieure, augmentée du carré circonscrit à la circonférence intérieure, soit égale à un carré donné* k^2. — *Discussion.* — *Vérifier la valeur trouvée pour le maximum de* k^2 *en déterminant ce maximum par la dérivée.*

La figure ayant été jointe à l'énoncé, nous nous en tiendrons aux conditions qu'elle suppose sur les données, savoir :

$$b > a > R.$$

La surface du triangle BCD a pour expression

$$\frac{1}{2} CD \times BH,$$

BH étant la perpendiculaire abaissée de B sur CD. On a de suite

$$\frac{1}{2} CD = CE = \sqrt{R^2 - x^2};$$

les triangles semblables OEA, AHB donnent

$$\frac{BH}{OE} = \frac{AB}{OA}, \quad \text{ou} \quad \frac{BH}{x} = \frac{b-a}{a} = \alpha, \quad \text{ou} \quad BH = \alpha x.$$

Le côté du carré circonscrit au cercle intérieur étant égal à $2x$, l'équation du problème est donc

$$\alpha x\sqrt{R^2 - x^2} + 4x^2 = k^2,$$

ou
$$\alpha x\sqrt{R^2 - x^2} = k^2 - 4x^2. \qquad (1)$$

En posant $x^2 = u$, cette inconnue u est racine de l'équation rationnelle

$$\alpha^2 u(R^2 - u) - (k^2 - 4u)^2 = 0, \qquad (2)$$

qui s'écrit, en ordonnant par rapport à u,

$$(16 + \alpha^2)u^2 - (8k^2 + \alpha^2 R^2)u + k^4 = 0. \qquad (3)$$

Toute racine de (3) est positive et inférieure à R^2. En effet, λ étant une racine de cette équation, elle vérifie (2) et donne par suite l'identité

$$\alpha^2\lambda(R^2 - \lambda) \equiv (k^2 - 4\lambda)^2,$$

d'où
$$\lambda(R^2 - \lambda) > 0,$$

c'est-à-dire
$$0 < \lambda < R^2.$$

A toute racine réelle de (3) correspond donc une valeur de x positive et inférieure à R. Mais cette valeur n'est solution du problème que si elle vérifie l'équation irrationnelle (1). Le premier membre de cette équation étant positif, il faut qu'il en soit de même du second, ce qui donne la condition

$$x^2 < \frac{k^2}{4}, \qquad u < \frac{k^2}{4}.$$

Donc *le problème admet autant de solutions que l'équation en u admet de racines réelles, inférieures à* $\frac{k^2}{4}$.

Discussion. — Soit $f(u) = 0$ l'équation (3) ; remplaçons u par $\frac{k^2}{4}$ ou plutôt faisons cette substitution dans la même équation écrite sous la forme

$$f(u) = (k^2 - 4u)^2 - \alpha^2 u(R^2 - u) = 0.$$

Il vient immédiatement

$$f\left(\frac{k^2}{4}\right) = -\alpha^2\frac{k^2}{4}\left(R^2 - \frac{k^2}{4}\right) = \alpha^2\frac{k^2}{16}(k^2 - 4R^2).$$

Pour que le problème admette *une seule solution*, il faut et il suffit que $\frac{k^2}{4}$ soit compris entre les racines de (3), ce qui donne

$$f\left(\frac{k^2}{4}\right) < 0, \qquad k^2 < 4R^2.$$

Pour que le problème admette *deux solutions*, il faut :

1° que $f\left(\frac{k^2}{4}\right) > 0$, ou $k^2 > 4R^2$;

2° que la demi-somme des racines soit inférieure à $\frac{k^2}{4}$; cette condition s'écrit

$$\frac{8k^2 + \alpha^2R^2}{2(16 + \alpha^2)} < \frac{k^2}{4}$$

et se réduit à
$$k^2 > 2R^2,$$

condition remplie puisqu'on suppose déjà $k^2 > 4R^2$;

3° que le discriminant de l'équation (3) soit positif. Cette condition donne

$$(8k^2 + \alpha^2R^2)^2 - 4k^4(16 + \alpha^2) \geqslant 0,$$

ou, en supprimant le facteur positif $8k^2 + \alpha^2R^2 + 2k^2\sqrt{16+\alpha^2}$,

$$8k^2 + \alpha^2R^2 - 2k^2\sqrt{16+\alpha^2} \geqslant 0 ;$$

d'où
$$\alpha^2R^2 \geqslant k^2[2\sqrt{16+\alpha^2} - 8],$$

ou
$$k^2 \leqslant \frac{\alpha^2R^2}{2\sqrt{16+\alpha^2} - 8},$$

ou encore, en multipliant haut et bas par $2\sqrt{16+\alpha^2} + 8$,

$$k^2 \leqslant \frac{R^2}{2}(\sqrt{16+\alpha^2} + 4),$$

condition évidemment compatible avec $k^2 > 4R^2$.

Donc pour que le problème admette *deux solutions*, il faut et il suffit que

$$4R^2 < k^2 < \frac{R^2}{2}(\sqrt{16+\alpha^2} + 4).$$

Cette dernière valeur est donc le *maximum* de k^2.

Vérification de ce maximum à l'aide de la dérivée.

L'expression de k^2 est

$$\varphi(x) = \alpha x\sqrt{R^2 - x^2} + 4x^2.$$

On en déduit

$$\varphi'(x) = \alpha\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{\alpha x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} + 8x.$$

Pour que cette dérivée change de signe, il faut que x soit racine de l'équation

$$\varphi'(x) = \sqrt{R^2 - x^2}\left[\alpha - \alpha\frac{x^2}{R^2 - x^2} + 8\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right] = 0.$$

Excluons la solution $x = R$; prenons pour inconnue auxiliaire

$$\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} = v ;$$

v sera racine de

$$\alpha v^2 - 8v - \alpha = 0.$$

v est positif; donc la seule racine acceptable est

$$v = \frac{4 + \sqrt{16+\alpha^2}}{\alpha}.$$

v atteignant et dépassant cette valeur, le polynome en v

$$\alpha - \alpha v^2 + 8\alpha$$

change de signe en passant du positif au négatif; il en est de même de $\varphi'(x)$; donc $\varphi(x)$ passe par un maximum.

Pour calculer ce maximum, remarquons que $\varphi(x)$ peut s'écrire

$$\varphi(x) = \alpha x \cdot \frac{x}{v} + 4x^2 = \frac{\alpha + 4v}{v}x^2.$$

D'autre part
$$\frac{x^2}{R^2 - x^2} = v^2; \qquad \text{d'où} \qquad x^2 = \frac{R^2v^2}{1 + v^2};$$

donc
$$\varphi(x) = R^2\frac{v(\alpha + 4v)}{1 + v^2}.$$

Mais, d'après l'équation en v,

$$\alpha(1 + v^2) = 8v + 2\alpha = 2(\alpha + 4v);$$

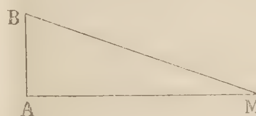
donc finalement

$$\varphi(x) = \frac{R^2\alpha v}{2} = \frac{R^2}{2}(4 + \sqrt{16+\alpha^2}).$$

C'est bien le maximum trouvé précédemment.

(L. REBOUL.)

4374. — *Pour obtenir les distances horizontales des points tels que M à un point A, un observateur mesure les angles AMB sous lesquels est aperçue une règle verticale AB de 4m,50. L'instrument de mesure donne les angles à une minute près; on demande jusqu'à quelle distance on pourra compter sur une approximation de 1 mètre.*



Désignons par l la longueur donnée AB, par α l'angle AMB, par x la longueur mesurée AM; la figure donne

$$x = \frac{l}{\operatorname{tg}\alpha} = f(\alpha). \qquad (1)$$

Soit $\delta\alpha$ l'erreur commise dans la mesure de l'angle α. Une limite supérieure de l'erreur commise sur x s'obtient en prenant la limite supérieure de l'expression

$$f'(\alpha)\delta\alpha = -\frac{l}{\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}\,\delta\alpha = -\frac{l\delta\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

D'ailleurs, de l'équation (1) on déduit

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{l}{x}, \qquad \sin^2\alpha = \frac{l^2}{l^2+x^2};$$

donc

$$f'(\alpha)\delta\alpha = -\frac{l\delta\alpha}{\dfrac{l^2}{l^2+x^2}} = -\frac{(l^2+x^2)\delta\alpha}{l}.$$

Cette formule suppose α et $\delta\alpha$ exprimés en parties du rayon; par hypothèse l'erreur d'angle n'atteint pas une minute; donc une limite supérieure de $\delta\alpha$ est égale à

$$\frac{\pi}{180\times 60};$$

par suite une limite supérieure de la valeur absolue de $f'(\alpha)\delta\alpha$ est

$$\frac{(l^2+x^2)\pi}{180\times 60\times l}.$$

On veut que cette erreur soit inférieure à 1^{m}; il faut donc que x vérifie l'inégalité

$$\frac{(l^2+x^2)\pi}{180\times 60\times l} < 1,$$

ou

$$x^2 < \frac{180\times 60\times 4{,}5}{\pi} - (4{,}5)^2.$$

Diminuons la valeur du second membre en remplaçant π par sa valeur par excès 4, et 4,5 dans le second terme par 5; l'inégalité devient

$$x^2 < \frac{180\times 60\times 4{,}5}{4}$$
$$-25 = 18\times 15\times 45 - 25,$$

ou $x^2 < 12\,125$,

inégalité satisfaite *a fortiori* si on prend

$$x^2 < 12\,100,$$

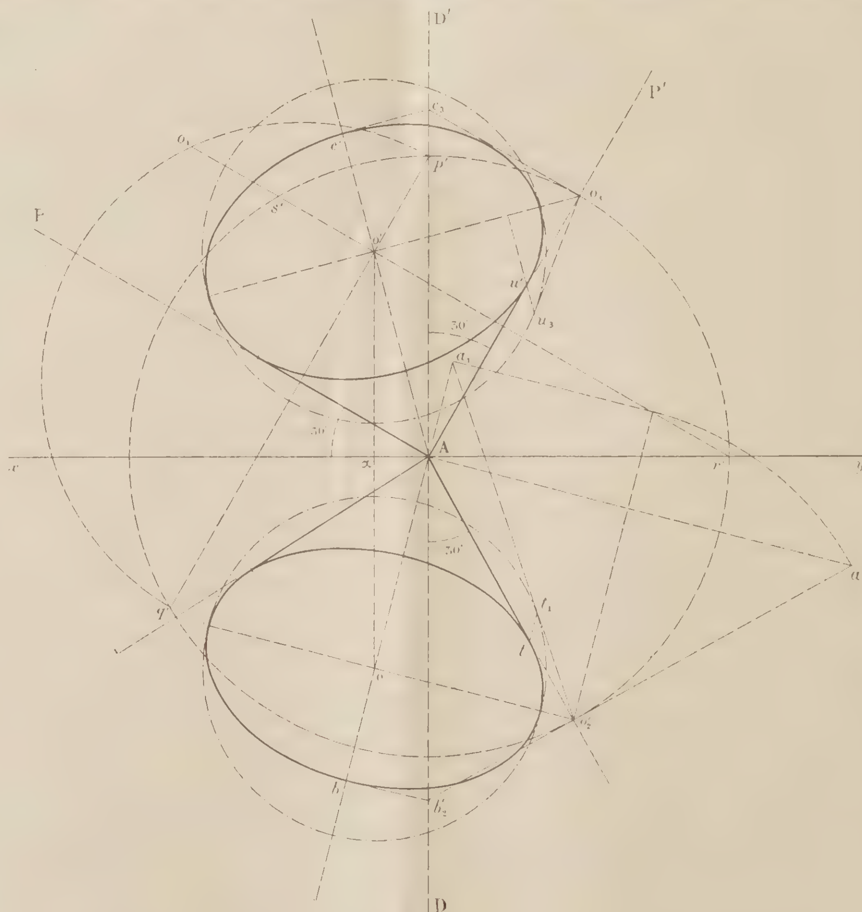
d'où $x < 110^{\text{m}}$.

4375. — *Dans le plan horizontal de cote zéro on donne une droite* D *et un point* A *sur cette droite.*

Mener par la droite D *deux demi-plans rectangulaires* P *et* P′, *au-dessus du plan horizontal, dont l'un fasse avec ce plan un angle de* 30°.

Tracer, sur le plan horizontal et sur le plan vertical perpendiculaire à D, *le contour apparent d'un cône solide droit à base circulaire donné ayant son sommet en* A *et tangent aux deux demi-plans* P *et* P′.

Le cône droit a une hauteur égale à 80^{mm} *et un demi-angle au sommet de* 30°.



On commencera, pour résoudre la question, par mener par A *une droite faisant avec chacun des deux demi-plans un angle de* 30°.

Sur le plan vertical perpendiculaire en A à la droite D et dont la trace est xy, les demi-plans P et P′ ont pour traces les droites rectangulaires AP et AP′ dont l'une fait un angle de 30° avec xy.

Toute droite faisant un angle de 30° avec le plan P fait un angle de 60° avec la perpendiculaire AP′ à ce plan; par suite, elle appartient à un cône d'axe AP′ dont l'une des génératrices coïncide axec Ay, puisque $\widehat{P'Ay} = 90° - 30° = 60°$. On verrait de même qu'une droite qui fait un angle de 30° avec le plan P′ appartient à un cône d'axe AP et dont l'une des génératrices se confond avec AD′. L'une des génératrices communes à ces deux cônes fournit l'axe du cône tangent aux plans P et P′. Pour la déterminer, coupons les deux cônes par une sphère quelconque de centre A, ou mieux par la sphère tangente à la base du cône cherché et qui a pour rayon 80^{mm}; les sections déterminées dans les deux cônes sont deux cercles, situés dans des plans de bout, projetés verticalement suivant les cordes $p'q'$ et $r's'$, dont l'intersection o' est la projection verticale du centre de base du cône à représenter; en rabattant sur le plan vertical le cercle de diamètre $p'q'$, on obtient en $o'o_1$ l'éloignement du point O, que l'on reporte ensuite en αo sur la ligne de rappel de o'.

L'axe (Ao, Ao') du cône étant connu, il reste à déterminer les projections du cercle de base. Pour cela, projetons le cône sur le plan vertical de trace Ao; l'axe se projette alors suivant Ao'_2 et en menant la droite Ab'_2 qui fait avec Ao'_2 un angle de 30° (droite confondue ici avec AD), on a en $o'_2b'_2$ le rayon du cercle de base. En rabattant ce cercle sur le plan horizontal passant par o', puis en relevant ensuite ses divers points, on obtient l'ellipse projection horizontale du cercle de base. Les tangentes à cette ellipse issues de A représentent le contour apparent horizontal du cône; sur l'épure, on les a déduites des tangentes au cercle o issues du rabattement a_1 du point a'_1, où la verticale de A perce la base du cône.

La projection verticale du cercle de base du cône se déduit de même du rabattement o' de ce cercle sur un plan de front passant par o. L'ellipse obtenue est inscrite dans l'angle PAP′, contour apparent vertical du cône; le point de contact u' de AP′ avec l'ellipse a été déduit du point de contact u_3 de la tangente au cercle o' issue de o_3, point de rencontre du grand axe avec AP′ (propriété des

tangentes à l'ellipse et au cercle principal). Le cercle de base étant entièrement vu aussi bien en projection horizontale qu'en projection verticale, est figuré en trait plein, de même que les génératrices de contour apparent sur les deux plans de projection.

[M. L. Gourdet a envoyé une épure exacte.]

4376. — *Calculer l'arc* x *donné par la formule*

$$x = (58'\ 12'',3)[\sin a \cos b - \cos a \sin b \cos C].$$

$$a = -39^\circ 27' 5'',2, \qquad b = +23^\circ 18' 54'',6, \qquad C = +314^\circ 57' 48''.$$

Pour obtenir le logarithme du facteur entre crochets, on calculera les valeurs numériques de ses deux termes, d'où l'on déduira celle du facteur lui-même.

Pour ramener les angles a et C au premier quadrant, remplaçons a par $-a$ et C par $360^\circ - C$; la formule s'écrit alors

$$x = -(58'\ 12'',3)[\sin(-a)\cos b + \cos(-a)\sin b\cos(360^\circ - C)].$$

Calcul du terme $y = \sin(-a)\cos b$.

$$\log\sin(-a) = \log\sin 39^\circ 27' 5'',2 = \bar{1},8030637$$
$$\log\cos b = \log\cos 23^\circ 18' 54'',6 = \bar{1},9630043$$
$$\log y = \bar{1},7660680$$
$$y = 0,5835365$$

Calcul du terme $z = \cos(-a)\sin b\cos(360^\circ - C)$.

$$\log\cos(-a) = \log\cos 39^\circ 27' 5'',2 = \bar{1},8877092$$
$$\log\sin b = \log\sin 23^\circ 18' 54'',6 = \bar{1},5974633$$
$$\log\cos(360^\circ - C) = \log\cos 45^\circ 2' 12'' = \bar{1},8492069$$
$$\log z = \bar{1},3343794$$
$$z = 0,2159630$$

Par suite

$$x = -(58'12'',3)(y+z) = -(58'12'',3)(0,7994995).$$

Pour calculer la valeur absolue du second membre, réduisons l'arc en secondes et posons

$$u = 3492'',3 \times 0,7995044.$$

En prenant les logarithmes, il vient

$$\log 3492,3 = 3,5431115$$
$$\log 0,7994995 = \bar{1},9028182$$
$$\log u = 3,4459297$$
$$u = 2792'',09 = 46'32'',09.$$

La valeur de l'arc x est donc de $-46'32'',09$.

CERTIFICAT D'APTITUDE A L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES (1898)

4429. — *Soit un parallélogramme* ABCD, *dans lequel la diagonale* BD *est perpendiculaire sur les côtés parallèles* AD, BC. *On donne la longueur* l *de la diagonale* AC *et la distance* d *des côtés parallèles* AB, CD :

1° *Calculer les longueurs des côtés* AB, BC *et de la diagonale* BD ;

2° *Construire géométriquement le parallélogramme.*

1° Posons AB $= x$, BC $= y$, BD $= z$.

Le triangle ABD, de côtés x, y, z, étant rectangle en D, on peut écrire

$$x^2 = y^2 + z^2 ; \qquad (1)$$

le triangle rectangle AOD, de côtés $\frac{l}{2}$, y, $\frac{z}{2}$, donne de même

$$\frac{l^2}{4} = y^2 + \frac{z^2}{4}. \qquad (2)$$

D'autre part, en égalant deux expressions du double de la surface du triangle ABD, on a

$$xd = yz. \qquad (3)$$

Retranchons (2) de (1) ; il vient

$$x^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3}{4}z^2,$$

d'où

$$z^2 = \frac{4x^2 - l^2}{3},$$

et, en portant cette valeur dans (1) ou (2),

$$y^2 = \frac{l^2 - x^2}{3}.$$

Si l'on remplace alors dans l'équation (3), dont on élève au préalable les deux membres au carré, y^2 et z^2 par les valeurs précédentes, on obtient

$$x^2 d^2 = \frac{(l^2 - x^2)(4x^2 - l^2)}{9},$$

ou

$$f(x^2) = 4x^4 - (5l^2 - 9d^2)x^2 + l^4 = 0.$$

Discussion. — Pour qu'une valeur de x^2 convienne, il faut qu'elle soit réelle et comprise entre $\frac{l^2}{4}$ et l^2, afin que les valeurs correspondantes de z^2 et y^2 soient positives.

Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes, puisque les valeurs positives de z^2 et y^2 fournissent deux valeurs réelles et positives de z et y, qui permettent de déterminer le triangle rectangle ABD, et par suite le parallélogramme.

Formons le discriminant δ et les deux résultats $f\left(\frac{l^2}{4}\right)$ et $f(l^2)$. On obtient

$$\delta = (5l^2 - 9d^2)^2 - 16l^4$$
$$= (5l^2 - 9d^2 - 4l^2)(5l^2 - 9d^2 + 4l^2)$$
$$= 9(l^2 - 9d^2)(l^2 - d^2).$$
$$f\left(\frac{l^2}{4}\right) = \frac{9}{4}l^2d^2,$$
$$f(l^2) = 9l^2d^2.$$

Ces deux derniers résultats étant positifs ou du signe du terme en x^4, le problème admet généralement deux solutions pourvu que les conditions

$$\delta > 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{l^2}{4} < \frac{5l^2 - 9d^2}{8} < l^2$$

soient remplies.

La condition $\delta > 0$ revient à prendre

$$l < d \qquad \text{ou} \qquad l > 3d ;$$

les deux autres inégalités sont satisfaites lorsque

$$l^2 > 3d^2, \qquad \text{ou} \qquad l > d\sqrt{3}.$$

En comparant cette dernière limite aux deux précédentes, on voit que la seule condition de possibilité du problème est

$$l > 3d ;$$

il existe alors deux systèmes de valeurs acceptables pour x, y, z fournissant deux parallélogrammes distincts. Ces valeurs ont pour expressions

$$x = \sqrt{\frac{5l^2 - 9d^2 \pm \sqrt{(5l^2 - 9d^2)^2 - 16l^4}}{8}} = \frac{3\sqrt{l^2 - d^2} \pm \sqrt{l^2 - 9d^2}}{4},$$

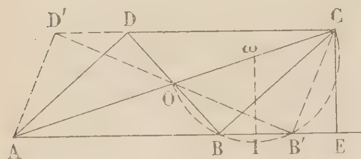
$$y = \sqrt{\frac{3(l^2 + 3d^2) \mp \sqrt{(5l^2 - 9d^2)^2 - 16l^4}}{24}} = \frac{\sqrt{l^2 + 3d^2 + 4ld} \mp \sqrt{l^2 + 3d^2 - 4ld}}{4},$$

$$z = \sqrt{\frac{3(l^2 - 3d^2) \pm \sqrt{(5l^2 - 9d^2)^2 - 16l^4}}{6}} = \frac{\sqrt{l^2 - 3d^2 + 2ld} \pm \sqrt{l^2 - 3d^2 - 2ld}}{2}.$$

(Dans ces formules, les signes supérieurs ou inférieurs se correspondent.)

2° *Construction géométrique du parallélogramme.*

Si l'on mène la hauteur CE, le triangle rectangle ACE est déterminé par son hypoténuse $AC = l$ et un côté de l'angle droit $CE = d$.



D'ailleurs, comme l'angle OBC est droit par hypothèse, le sommet B est à l'intersection du côté AE avec la circonférence de diamètre OC, O étant le milieu de AC.

Connaissant le triangle ABC, il ne reste plus qu'à prolonger BO d'une longueur $OD = OB$ pour obtenir le quatrième sommet du parallélogramme. On obtient ainsi deux solutions ABCD et AB'CD'.

Pour que la construction soit possible, il faut d'abord que le triangle ACE existe, ce qui suppose $l > d$. Il faut de plus que le cercle ω, de diamètre OC, coupe le côté AE, ce qui s'exprime par

$$\omega O \geqslant \omega I,$$

ωI étant la distance du centre ω à la droite AE. Or on a visiblement

$$\omega O = \frac{l}{4} \quad \text{et} \quad \frac{\omega I}{CE} = \frac{3}{4};$$

la condition précédente devient donc

$$l \geqslant 3d,$$

et entraine avec elle la condition $l > d$, résultat d'accord avec celui qu'a fourni la discussion algébrique.

(J. POIRIER.)

Remarque. — En posant $x^2 = u$, on pourrait remarquer que toute racine positive de l'équation

$$9ud^2 = (l^2 - u)(4u - l^2)$$

est comprise entre l^2 et $\frac{l^2}{4}$. En effet, soit α une telle racine; si dans l'équation précédente on remplace u par α, elle devient une identité. Or, α étant positif, le premier membre et par suite le second sont positifs; donc α satisfait à la condition

$$(l^2 - \alpha)(4\alpha - l^2) > 0,$$

ce qui donne, d'après les propriétés du trinome du second degré,

$$\frac{l^2}{4} < \alpha < l^2.$$

On pourrait donc dire que le problème a autant de solutions que l'équation en u a de racines positives, remarque qui permet de simplifier la discussion.

[Ont résolu la même question : MM. G. Bidaux ; C. Bourvéau ; Bouzy ; C. Dupuis ; J. Fiton ; G. Foucry ; E. Gernez-Pfanmatter ; R. Henry ; L. Hubert ; F. Ladevèze ; E. Le Maigre ; M. Oger ; L. Ollié ; F. Pégorier ; M. Rebeix ; J. Rigal ; A. Salvetat.]

4430. — *Quelle vitesse initiale x faudrait-il imprimer à une masse m pour que la destruction complète de la force vive qu'elle posséderait après une durée t de chute verticale, à Paris, dans le vide, produise la même quantité de chaleur qu'un courant électrique d'intensité I, passant pendant un temps T dans un fil métallique de résistance constante R ?*

Calculer x à l'aide des valeurs numériques suivantes :

$m = 100^{g}$, $t = 5^{s}$, $I = 6^{amp}$, $T = 20^{s}$.

Résistivité du métal (1^{cm} *de fil de* 1^{cq} *de section*) $r = \frac{81}{10^7}$ *ohms.*

Longueur du fil $l = 49^{cm}$; *section du fil* $s = 0^{cq},001$.

1 *joule* $= 10^7$ *ergs.*

Définir ensuite les unités employées dans ce calcul.

Le travail que peut effectuer la masse m par la destruction de la force vive qu'elle a acquise dans sa chute a pour expression

$$W = \frac{1}{2} m(x + gt)^2 \text{ ergs.}$$

De même l'énergie calorifique créée par un courant électrique d'intensité I, passant pendant un temps T dans un fil de résistance R, est égale à

$$Q \times J = I^2 \times R \times T \text{ joules.}$$

Comme ces deux sources d'énergie doivent être équivalentes, on a l'égalité

$$\frac{\frac{1}{2} m(x + gt)^2}{10^7} = I^2 \times R \times T,$$

en remarquant que le joule vaut 10^7 ergs.

En développant, on obtient l'équation qui donnera x :

$$x^2 + 2gtx - \frac{2 \times 10^7 \times I^2 \times R \times T - mg^2t^2}{m} = 0.$$

Les racines de cette équation sont de signes contraires; la racine négative sera à rejeter.

Application. — $R = r\frac{l}{s} = \frac{49 \times 81}{10^7 \times 0{,}001} = \frac{49 \times 81}{10^4}.$

D'après les valeurs numériques données, l'équation devient

$$x^2 + 9810x - 33\,094\,575 = 0,$$

d'où $x = -4905 + \sqrt{\overline{4905}^2 + 33\,094\,575} = -4905 + 7560,$

$x = 2\,655^{cm}.$

Définition des unités employées. — Les unités employées dans ce problème sont l'erg, le joule, l'ampère et l'ohm ; elles font partie du système des unités fondamentales C.G.S. (centimètre, gramme-masse, seconde).

L'*erg* est le nom de l'unité de travail : c'est le travail effectué par une dyne, ou l'unité de force, déplaçant son point d'application de 1^{cm} suivant sa propre direction. Cette unité étant trop petite pour les usages courants, on emploie de préférence le *joule*, qui vaut 10^7 ergs.

L'*ampère* est l'unité pratique d'intensité de courant ; c'est l'intensité du courant constant qui, traversant un voltamètre à azotate d'argent dans des conditions déterminées, dépose l'argent à raison de $1^{mmg},118$ par seconde.

L'*ohm* est la résistance opposée à un courant électrique constant par une colonne de mercure de $14^{gr},4521$, d'une section

transversale constante, et d'une longueur de $106^{cm},3$ à 0°.

(M. OGER, à Poitiers.)

[Ont résolu la même question ; MM. V. Bonzom ; L. Hubert ; M. Rebeix.]

ALGÈBRE

4526. — *Résoudre le système*

$$3^{1-x-y} = 4^{-y},$$
$$2^{2x-y} = 3^{3y-x}.$$

En prenant les logarithmes des deux membres, la première équation devient

$$(1 - x - y) \log 3 = - y \log 4,$$

ou
$$\frac{x+y-1}{y} = \frac{\log 4}{\log 3}; \qquad (1)$$

la seconde équation s'écrit de même

$$(2x - y) \log 2 = (3y - x) \log 3,$$

ou
$$(2 \log 2 + \log 3)x = (\log 2 + 3 \log 3)y,$$

ou
$$\frac{x}{y} = \frac{\log 54}{\log 12}. \qquad (2)$$

Si l'on retranche membre à membre les équations (1) et (2), x disparaît, et il reste

$$\frac{1-y}{y} = \frac{\log 54}{\log 12} - \frac{\log 4}{\log 3},$$

ou
$$\frac{1}{y} = 1 + \frac{\log 54}{\log 12} - \frac{\log 4}{\log 3},$$

d'où
$$y = \frac{\log 3 \log 12}{\log 3 \log 54 - \log 12 \log \frac{4}{3}} = 0,744\ldots$$

Cette valeur de y portée dans l'équation (2), donne

$$x = \frac{\log 3 \log 54}{\log 3 \log 54 - \log 12 \log \frac{4}{3}} = 1,194\ldots$$

(J. SALLAUD, pensionnat N.-D. de Toutes-Aides, à Doulon.)

[Ont résolu la même question : MM. Y. Collin ; P. Fouché ; M. Jousset ; G. Lallier ; J. Lamotte ; F. Monseran ; F. Montaland.]

GÉOMÉTRIE

4556. — *On donne dans un plan deux triangles* ABC, A'B'C'. *Si le point* M *est tel que* MA, MB, MC *coupent respectivement* B'C', C'A', A'B' *en trois points en ligne droite, inversement* MA', MB', MC' *couperont respectivement* BC, CA, AB *en trois points également en ligne droite.*

Première solution. — Soient D', E', F' les points de rencontre des droites MB, MC, MA avec les côtés C'A', A'B', B'C' du triangle A'B'C' ; il s'agit de montrer que lorsque les points D', E', F' sont en ligne droite, il en est de même des points analogues D, E, F du triangle ABC.

Le faisceau des quatre rayons C'A', C'M, C'E', C'F' détermine sur les droites A'B' et D'F' les deux divisions A'P'E'B' et D'G'E'F' ayant même rapport anharmonique :

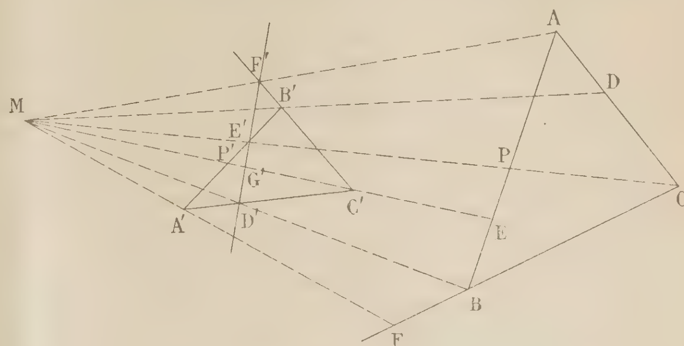
$$(A'P'E'B') = (D'G'E'F').$$

En considérant un faisceau de centre M, on a de même

$$(D'G'E'F') = (BEPA).$$

Par suite $\qquad (A'P'E'B') = (BEPA).$

Il résulte de là que les deux faisceaux M(A'P'E'B') et C(BEPA)



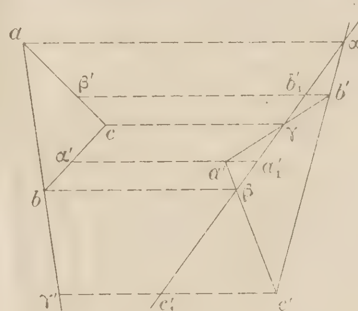
ont même rapport anharmonique et un rayon homologue commun (ME' et PC sont confondus) ; donc les autres rayons homologues

MA' et CB, MP' et CE, MB' et CA,

se coupent en trois points F, E, D, qui sont en ligne droite.

(Y. COLLIN, conducteur des Ponts et Chaussées, à Laval.)

Seconde solution. — On peut toujours, par une projection conique sur un certain plan, transformer la figure en une autre dans laquelle le point M passe à l'infini : il suffit pour cela de prendre le plan parallèle à la projetante du point M. Comme la propriété énoncée n'est pas altérée par cette projection, tout revient à la vérifier dans le cas de la nouvelle figure.



Dans cette dernière figure, toutes les droites passant par M sont parallèles, et la propriété s'énonce ainsi : si des parallèles issues des sommets a, b, c d'un triangle coupent les côtés $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ d'un second triangle en trois points α, β, γ en ligne droite, de même les parallèles issues de a', b', c' rencontrent les côtés bc, ca, ab en trois points α', β', γ' également en ligne droite.

En effet, dans le triangle $a'b'c'$, la transversale $\alpha\beta\gamma$ donne

$$\frac{\alpha b'}{\alpha c'} \cdot \frac{\beta c'}{\beta a'} \cdot \frac{\gamma a'}{\gamma b'} = 1.$$

Or, en appelant a'_1, b'_1, c'_1 les points de rencontre de $\alpha\beta\gamma$ avec les droites $a\alpha'$, $b\beta'$, $c\gamma'$, on a

$$\frac{\alpha b'}{\alpha c'} = \frac{\alpha b'_1}{\alpha c'_1}, \quad \ldots.$$

Donc
$$\frac{\alpha b'_1}{\alpha c'_1} \cdot \frac{\beta c'_1}{\beta a'_1} \cdot \frac{\gamma a'_1}{\gamma b'_1} = 1,$$

ou, en observant que $\dfrac{\alpha b'_1}{\gamma b'_1} = \dfrac{\beta' a}{\beta' c}, \quad \ldots,$

$$\frac{\beta' a}{\beta' c} \cdot \frac{\gamma' b}{\gamma' a} \cdot \frac{\alpha' a}{\alpha' b} = 1,$$

relation qui exprime que les points α', β', γ' sont en ligne droite (réciproque du théorème de Ménélaüs).

Remarque. — On aurait obtenu une démonstration un peu plus

simple, mais moins symétrique, en faisant la projection de manière que le point M et le point A par exemple passent tous deux à l'infini.

(Ernest Foucart.)

[Ont résolu la même question : MM. Duffet, à Lyon ; R. Dunesme, lycée Saint-Louis ; M. Rebeix, à Clermont.]

PHYSIQUE

4552. — *Le tube bien calibré d'un manomètre à air comprimé est divisé en 110 parties d'égale capacité. Quand la pression extérieure est de 76*^{cm}, *le mercure dans l'intérieur du tube et dans la cuvette se tient au zéro de l'échelle. On porte le manomètre sous le récipient d'une machine de compression et l'on voit le mercure s'élever jusqu'à la 80e division. On mesure alors la hauteur du mercure dans le tube et on la trouve égale à 45*^{cm}. *On demande la pression dans la machine.*

(*Bacc. lettres-sciences, Paris, avril 1899.*)

Désignons par s la section du tube manométrique, par x la pression dans la machine.

Au début de l'expérience, l'air occupe un volume égal à $110 \times s$ sous la pression de 76^{cm}. Après l'introduction du tube sous le récipient de la machine de compression, la même masse d'air n'occupe plus qu'un volume de $(110 - 80)s$ sous la pression $(x - 45)^{cm}$. Appliquons la loi de Mariotte, il vient

$$110s \times 76 = (110 - 80)s(x - 45),$$

d'où

$$x = 323^{cm},66.$$

Telle est la pression dans la machine.

(J. Mouchet, au Pallet.)

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil ; L. Barberot ; C. Billionnet ; J. Borgey ; R. Coural ; R. Depasse ; C. Doumerc ; E. Foucart ; G. Foucry ; M. Gondran ; A. Grolleau ; R. Henry ; H. Janois ; Ladevèze ; A. Lecontour ; Le Maigre ; Le Révérend ; Le Sage ; B. Mathé ; M. Mahon ; M. Oger ; J. Pémartin ; A. Pichon ; A. Prost ; L. Tholomier ; J. Touton ; A. Tumerelle ; H. Varennes ; Venet ; Veron ; Vial.]

QUESTIONS PROPOSÉES

4565. — Démontrer que l'expression

$$2^{3n+3} - 7n + 41$$

est divisible par 49.

(Valette, école normale du Puy.)

4566. — Sur deux circonférences sécantes égales, on prend *alternativement* les points A, B, C, D, E, F... tels que la distance entre deux points successifs soit égale au rayon commun des deux circonférences.

Démontrer que :

1° En continuant l'opération au-delà de F, on retombe sur le point A ;

2° Les trois droites AD, BE, CF sont concourantes ;

3° Les points de concours H et H' des hauteurs des triangles ACE et BDF restent fixes lorsque A parcourt la circonférence ;

4° Les points de concours M et M' des médianes de ces triangles jouissent de la même propriété et que

$$HM' = MM' = MH'.$$

(R. Manen, petit séminaire de Massals.)

4567. — Par un point M de la circonférence circonscrite à un triangle équilatéral, on mène des parallèles aux côtés.

1° Ces parallèles rencontrent les côtés en six points qui sont trois à trois sur deux droites.

2° L'angle de ces deux droites est de 60°.

3° La droite MP qui joint M au point de concours P des droites ainsi tracées est perpendiculaire à la droite de Simson relative à M.

4° Si MP rencontre en R la circonférence circonscrite à ABC, on a

$$MR = 3MP.$$

(Ernest Foucart.)

4568. — Étant donné un triangle ABC, on demande de déterminer sur les côtés BC, CA, AB des points A', B', C' tels que le cercle AB'C' ait un rayon donné R et soit coupé respectivement par les cercles BA'C' et CA'B' sous des angles donnés α et β.

(P. Le Verrier, lycée Janson de Sailly.)

4569. — On joint un point quelconque M d'un cercle aux extrémités A et B d'un diamètre fixe. Par le point de rencontre P de MA avec le diamètre perpendiculaire à AB, on mène à AB la parallèle PQ rencontrant MB en Q. Lieu du point Q.

(J. Pastour, à Antibes.)

4570. — Soient l_a, l_b, l_c les bissectrices des angles d'un triangle opposés aux côtés a, b, c. Démontrer que

$$c\left[l_bl_c \cos\frac{A}{2} + l_cl_a \cos\frac{B}{2} - l_al_b \cos\frac{C}{2}\right]$$
$$= b\left[l_bl_c \cos\frac{A}{2} + l_al_b \cos\frac{C}{2} - l_cl_a \cos\frac{B}{2}\right]$$
$$= a\left[l_cl_a \cos\frac{B}{2} + l_al_b \cos\frac{C}{2} - l_bl_c \cos\frac{A}{2}\right]$$
$$= l_al_bl_c.$$

Si l_{1a}, l_{1b}, l_{1c} sont les bissectrices extérieures des angles d'un triangle, on a

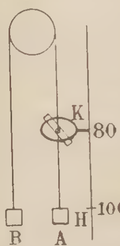
$$l_{1_b}l_{1_c} \sin\frac{A}{2} + l_{1_c}l_{1_a} \sin\frac{B}{2} + l_{1_a}l_{1_b} \sin\frac{C}{2} = 0.$$

(G. Delahaye, à Roye.)

4571. — Un levier rectiligne AB est mobile autour de son milieu O. A l'extrémité A est fixé un poids de 25^{gr}. Une lentille convergente L, de distance focale f, et dont le poids est 100^{gr}, est mobile entre O et B. Le levier étant horizontal pour une certaine position de la lentille sur OB, on ajoute en A un poids de 5^{gr}. Pour rétablir l'horizontalité du levier, on doit déplacer la lentille d'une certaine longueur entre O et B. Quel sera le déplacement de l'image O' de O par rapport à la lentille ? On donne $AO = OB = 10f$.

(*Bacc. lettres-math., Rennes, avril 1897.*)

4572. — Aux deux extrémités du cordon qui s'enroule sur la poulie de la machine d'Atwood sont suspendus deux poids égaux à 50^{gr}. Au début, les deux poids B et A sont au repos. L'un d'eux, A, peut se déplacer le long d'une règle divisée en centimètres ; les divisions commencent à partir du haut. Il est au début en un point H, en face de la division 100. Le curseur évidé est placé en K à la division 80, de telle sorte que si le poids B descend et que A remonte le long de la règle, A traversera le curseur évidé et se surchargera d'un poids additionnel p de 2^{gr}, déposé sur ce curseur. On donne, à la main, une impulsion au poids B, qu'on abandonne aussitôt qu'on l'a lancé, de manière à le faire descendre et à faire monter A. Le mouvement de A est uniforme entre H et K. Que devient-il ensuite ?



1° La vitesse du mouvement uniforme entre H et K étant de 3^{cm} par seconde, on demande jusqu'à quelle division de la règle s'élèvera le poids A une fois surchargé de p. On est en un lieu où l'accélération prise par un corps pesant tombant en chute libre est 981 unités C. G. S.

2° Quelle vitesse faudrait-il imprimer au poids A supposé au repos en H pour qu'il monte à la division 60 ? On suppose $g = 981$ unités C. G. S.

(*Bacc. lettres-math. et lettres-sciences, Dijon, novembre 1897.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry Vuibert.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

23e Année. — N° 16. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES PARIS, le 15 Mai 1899.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.

Abonnements.. Librairie Nony et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

SUR LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE CÉVA

Par M. J. **Girod**, professeur au Lycée de Versailles.

Il s'agit de démontrer que les droites joignant un point quelconque O du plan d'un triangle ABC aux trois sommets déterminent, par leur rencontre en A′, B′, C′ avec les côtés opposés, trois rapports segmentaires qui vérifient la relation

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B} = -1.$$

On établit ordinairement cette égalité en s'appuyant sur le théorème des transversales. Le procédé présente un manque de symétrie qui peut déplaire, si on le rapproche de la démonstration qu'on donne généralement du théorème de Ménélaüs. Pour saisir la différence, il suffit ici de se souvenir que, dans le cas d'une transversale, on calcule séparément chacun des trois rapports segmentaires en fonction des distances des trois sommets A, B, C du triangle à la sécante, estimées parallèlement à une droite quelconque sur laquelle on a fixé un sens positif.

Voici une démonstration du théorème de Céva, qui est indépendante du théorème de Ménélaüs, et qui présente la même symétrie que cette dernière.

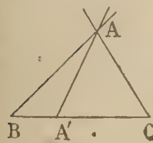
Soient A′, B′, C′ les points de rencontre de OA, OB, OC avec les côtés du triangle. Considérons les trois triangles OAB, OBC, OCA, qui ont pour sommet commun le point O et pour bases les côtés du triangle ABC. Si on convient, comme on fait d'ailleurs dans d'autres théories, de donner le signe + ou le signe — à chacune des aires de ces triangles, suivant que le point O est situé, par rapport à la base du triangle considéré, du même côté que le troisième sommet du triangle ABC ou du côté opposé, on a dans tous les cas

$$\frac{A'B}{A'C} = -\frac{\text{aire OAB}}{\text{aire OAC}}.$$

D'abord, les valeurs absolues de ces deux rapports sont égales. Car les deux triangles OAB et OAC ayant une base commune OA, le rapport des valeurs absolues de leurs aires est égal au rapport des hauteurs opposées à cette base, et le rapport de ces hauteurs, issues de B et C, est lui-même égal à la valeur absolue du rapport $\frac{A'B}{A'C}$.

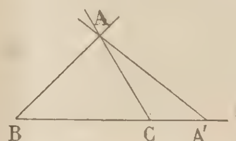
Montrons que les deux rapports considérés sont toujours de signes contraires.

Supposons que le point A′ soit situé entre B et C. Alors le rapport $\frac{A'B}{A'C}$ est négatif. Mais les nombres qui mesurent les aires des triangles OAB et OAC sont positifs si le point O appartient à la portion de la droite indéfinie AA′ comprise à l'intérieur de l'angle A du triangle ABC; ils sont tous deux négatifs si le point O est situé sur la portion comprise dans



l'angle opposé par le sommet à l'angle A du triangle. Donc le rapport $\frac{\text{aire OAB}}{\text{aire OAC}}$ demeure positif.

Supposons que le point A′ tombe sur l'un des prolongements de BC. Alors le rapport $\frac{A'B}{A'C}$ est positif. Mais puisque la droite indéfinie AA′ est située dans les deux angles supplémentaires de l'angle A du triangle ABC, quelle que soit la position du point O sur cette droite les nombres qui mesurent les aires des triangles OAB et OAC sont toujours de signes contraires. Donc le rapport $\frac{\text{aire OAB}}{\text{aire OAC}}$ demeure négatif.



On a donc bien, dans tous les cas, $\frac{A'B}{A'C} = -\frac{\text{aire OAB}}{\text{aire OAC}}$.

La suite de la démonstration est maintenant évidente.

Si l'on considère les trois égalités

$$\frac{A'B}{A'C} = -\frac{\text{aire OAB}}{\text{aire OAC}},\qquad \frac{B'C}{B'A} = -\frac{\text{aire OBC}}{\text{aire OAB}},$$
$$\frac{C'A}{C'B} = -\frac{\text{aire OAC}}{\text{aire OBC}},$$

le produit de leurs seconds membres est manifestement égal à — 1.

Cette démonstration n'est que la traduction géométrique de la démonstration analytique connue, qui est fondée sur l'expression du rapport $\frac{A'B}{A'C}$ en fonction des coordonnées cartésiennes des quatre points A, B, C, O, rapportés à un système d'axes quelconques. La même analogie existe entre les démonstrations géométrique et analytique du théorème de Ménélaüs, si on considère l'équation de la transversale.

On peut penser de la démonstration précédente, qui n'est sans doute pas nouvelle, qu'elle a dû disparaître de l'enseignement, avec beaucoup d'autres du même genre, depuis qu'on a pris l'habitude d'écarter systématiquement toute considération d'aire pour démontrer une relation entre les éléments linéaires d'une figure, exclusion qu'on ne pratique d'ailleurs qu'en géométrie élémentaire plane. Quelles que soient les raisons théoriques pour retrancher au quatrième livre et ajouter au troisième, il est permis de regretter que cette rigueur dans le classement ait sacrifié certaines démonstrations plus intuitives et d'une généralisation plus facile que celles qui ont pris leur place. A ce sujet, M. Bioche a montré récemment, dans le journal l'*Enseignement secondaire*, par des exemples bien choisis, les désavantages pratiques des concessions, faites un peu trop largement peut-être, à des scrupules de classification qui ne subsistent plus, en dehors de la géométrie plane, dès qu'ils font obstacle à la simplicité.

NOTE

SUR LA COMPARAISON GÉOMÉTRIQUE DE LA DIFFÉRENCE ENTRE LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE ET LA MOYENNE GÉOMÉTRIQUE DE DEUX GRANDEURS A LA DIFFÉRENCE ENTRE LA MOYENNE GÉOMÉTRIQUE ET LA MOYENNE HARMONIQUE DE CES GRANDEURS.

Je vais démontrer géométriquement que la première différence est plus grande que la seconde.

Les longueurs $AB = a$ et $AC = b$ représentant les deux grandeurs considérées, on sait que

$$AO = \frac{a+b}{2} = M$$

est la moyenne arithmétique de a et b, O étant le milieu de BC ; que la tangente

$$AT = \sqrt{ab} = \mu$$

à la circonférence O ayant pour rayon OC est la moyenne géométrique des deux grandeurs ; et il est facile de voir que

$AI = m = \frac{2ab}{a+b}$, moyenne harmonique de a et b, I étant le pied de la perpendiculaire TI à AO ; car dans le triangle rectangle OTA, on a

$$AI = \frac{\overline{AT}^2}{AO} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

De A comme centre, avec AT pour rayon, décrivons un arc de cercle qui coupe AO en K et la circonférence en un autre point T′ symétrique de T par rapport à AO.

On a : $\mu - m = AT - AI = AK - AI = KI$;
$M - \mu = AO - AT = AO - AK = KO.$

Il suffit de démontrer que l'on a $KO > KI$.

Or, dans le triangle OTI, KT est bissectrice de l'angle OTI, puisque les angles OTK et KTI ont pour mesures les moitiés des arcs égaux TK et KT′.

La relation connue $\frac{OK}{KI} = \frac{OT}{TI}$ permet de conclure que l'on a $OK > KI$, puisque l'oblique OT est plus grande que la perpendiculaire TI.

(A. MOREAUX, professeur au lycée de Nancy.)

ARITHMÉTIQUE

4553. — *On range par ordre de grandeur croissante toutes les fractions irréductibles moindres que 1 dont le dénominateur est inférieur à un nombre donné ; démontrer que les fractions à égale distance des extrêmes ont le même dénominateur et que leur somme est 1.*

Considérons la suite croissante

$$\frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{a_2}{b_2}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{a_n}{b_n}, \qquad (1)$$

formée par toutes les fractions irréductibles moindres que 1 dont les dénominateurs sont inférieurs au nombre donné.

Si l'on retranche chacune de ces fractions de l'unité, on forme la nouvelle suite décroissante

$$\frac{b_1 - a_1}{b_1}, \quad \frac{b_2 - a_2}{b_2}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{b_n - a_n}{b_n}. \qquad (2)$$

Je dis que ces deux suites sont identiques. En effet, la suite (2) se compose de fractions moindres que 1 et ayant les mêmes dénominateurs que dans la suite (1) ; de plus, ces diverses fractions sont irréductibles, puisque les nombres a_1 et b_1, a_2 et b_2, ... sont premiers entre eux par hypothèse. Les fractions (2) reproduisent donc les fractions (1) dans un ordre inverse. On peut alors écrire

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{b_n - a_n}{b_n},$$

ou, puisque les deux fractions sont irréductibles,

$$b_1 = b_n, \qquad a_1 = b_n - a_n.$$

Ainsi les deux fractions extrêmes de la suite (1) ont les mêmes dénominateurs et leur somme est

$$\frac{a_1 + a_n}{b_n} = \frac{b_n}{b_n} = 1.$$

Il est facile de voir que ce que nous venons de dire relativement aux deux termes extrêmes de la suite (1) s'applique aussi bien à deux termes quelconques équidistants des deux premiers.

(Tr. LALESCU, lycée de Jassy.)

[Ont résolu la même question : Mlle Turpain ; MM. N. G. Alesandrescu ; A. Amblard ; C. Billionnet ; Cavaillé ; G. Chollet ; F. Clabault ; Ch. Doumerc ; J. Fiton ; E. Foucart ; Loignon ; G. Nazare ; M. Oger ; E. Rousselot ; G. Tastet ; R. Van Cauwenberghe.]

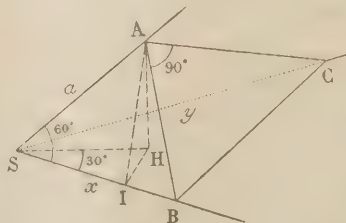
ALGÈBRE

4167. — *Dans un trièdre* S, *tous les angles plans sont égaux à* 60° ; *sur l'une des arêtes, on prend une longueur* $SA = a$. *On demande de mener par le point* A *un plan coupant le trièdre suivant un triangle* ABC *rectangle en* A, *et tel que le tétraèdre* SABC *ait un volume donné,* b^3. — *Discussion.*

(*Bacc. lettres-math., Clermont, mars 1897.*)

Posons $SB = x$ et $SC = y$.

Pour que le triangle ABC soit rectangle en A, il faut et il suffit que



$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2. \quad (1)$$

Mais, dans le triangle SBC, on a

$$\overline{BC}^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60°,$$

ou, comme $\cos 60° = \frac{1}{2}$,

$$\overline{BC}^2 = x^2 + y^2 - xy ;$$

de même

$$\overline{AB}^2 = a^2 + x^2 - ax,$$
$$\overline{AC}^2 = a^2 + y^2 - ay.$$

En remplaçant dans (1), on obtient comme première équation entre x et y,

$$a(x+y) - xy = 2a^2. \qquad (1')$$

Pour obtenir la seconde, calculons d'abord le volume b^3 du tétraèdre en fonction de a, x et y. En menant la hauteur AH relative à la face SBC, ce volume a pour expression

$$b^3 = \frac{1}{3}\ \text{surf. SBC} \times \text{AH}.$$

Or $\quad$ surf. SBC $= \frac{1}{2} xy \sin 60^\circ = \frac{xy\sqrt{3}}{4}$;

d'ailleurs $\quad AH = \sqrt{a^2 - \overline{SH}^2}$,

ou, en observant que SH est par symétrie bissectrice de l'angle BSC et que sa projection sur SB est égale à $SI = a \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$,

$$AH = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2\cos 30^\circ}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

La seconde équation du problème est dès lors

$$\frac{axy\sqrt{2}}{12} = b^3.$$

On en déduit $\quad xy = \frac{6b^3\sqrt{2}}{a}$,

et, en portant cette valeur dans (1′),

$$x + y = \frac{2(a^3 + 3b^3\sqrt{2})}{a^2}.$$

Par suite, x et y sont racines de l'équation

$$X^2 - \frac{2(a^3 + 3b^3\sqrt{2})}{a^2} X + \frac{6b^3\sqrt{2}}{a} = 0.$$

Le discriminant de cette équation est

$$\frac{(a^3 + 3b^3\sqrt{2})^2}{a^4} - \frac{6b^3\sqrt{2}}{a} = \frac{a^6 + 18b^6}{a^4},$$

quantité essentiellement positive; donc les racines sont réelles, et comme elles sont positives en même temps que leur somme et leur produit, ces racines fournissent pour x et y deux valeurs toujours acceptables.

(R. CAYROL, à Condé-sur-l'Escaut.)

4554. — *Quelle est la vraie valeur de l'expression*

$$\frac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{2(x+1)}}{2x^2 + 2 - \sqrt[3]{63x+1}}$$

quand on y fait $x = 1$?

Première solution. — Pour $x = 1$, l'expression prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On sait que dans ce cas cette fraction a la même limite que le quotient des dérivées de ses deux termes.

En calculant ce quotient, on trouve

$$\frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+6)^2}} - \frac{1}{\sqrt{2(x+1)}}}{4x - \frac{63}{3\sqrt[3]{(63x+1)^2}}}.$$

Faisons alors $x = 1$; nous aurons pour la vraie valeur cherchée,

$$\frac{\frac{2}{3\times 4} - \frac{1}{2}}{4 - \frac{63}{3\times 16}} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{129}{48}} = -\frac{48}{3\times 129} = -\frac{16}{129}.$$

Seconde solution. — Le numérateur et le dénominateur de l'expression s'annulant pour $x = 1$, on peut sans altérer ces deux termes, retrancher de leur valeur la valeur particulière qu'ils prennent pour $x = 1$. L'expression devient alors

$$\frac{\sqrt[3]{2x+6} - 2 - (\sqrt{2(x+1)} - 2)}{2x^2 + 2 - 4 - (\sqrt[3]{63x+1} - 4)},$$

ou, en divisant haut et bas par $x - 1$,

$$\frac{\frac{\sqrt[3]{2x+6} - 2}{x-1} - \frac{\sqrt{2(x+1)} - 2}{x-1}}{2(x+1) - \frac{\sqrt[3]{63x+1} - 4}{x-1}}.$$

En posant

$$\sqrt[3]{2x+6} = y, \qquad \sqrt{2(x+1)} = z, \qquad \sqrt[3]{63x+1} = u,$$

on en déduit respectivement

$$x = \frac{y^3 - 6}{2}, \qquad x = \frac{z^2 - 2}{2}, \qquad x = \frac{u^3 - 1}{63},$$

et l'expression précédente s'écrit

$$\frac{2\cdot\frac{y-2}{y^3 - 2^3} - 2\cdot\frac{z-2}{z^2 - 2^2}}{2(x+1) - \frac{63(u-4)}{u^3 - 4^3}} = \frac{\frac{2}{y^2 + 2y + 4} - \frac{2}{z+2}}{2(x+1) - \frac{63}{u^2 + 4u + 4^2}}.$$

Si l'on passe maintenant à la limite, on obtient

$$x = 1, \qquad y = 2, \qquad z = 2, \qquad u = 4,$$

et, pour valeur de l'expression,

$$\frac{\frac{2}{3\times 4} - \frac{2}{4}}{4 - \frac{63}{3\times 16}} = -\frac{16}{129}.$$

(ZOÉ M. GHEORGHIU, étudiante à Bucarest.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Amblard ; R. Van Cauwenberghe ; Y. Collin ; E. Foucart ; G. Foucry ; Tr. Lalescu ; F. Ladevèze ; R. Martin ; M. Popescu-Lupsà.]

GÉOMÉTRIE

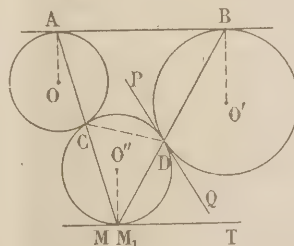
4514. — *Etant données deux circonférences* O *et* O′ *tangentes en* A *et* B *à une de leurs tangentes communes, on trace une troisième circonférence* O″ *tangente aux deux premières respectivement en* C *et* D. *Démontrer que :*

1° *les droites* AC *et* BD *se coupent en un point* M *de la circonférence* O″ ;

2° *les quatre points* A, B, C, D *sont sur une même circonférence ;*

3° *la tangente en* M *à la circonférence* O″ *est parallèle à la droite* AB.

Première solution. — 1° Supposons que les contacts du cercle O″ avec les cercles O et O′ soient de même nature, et que la tangente commune AB aux cercles O et O′ soit extérieure. Soit M le point où AC rencontre la circonférence O″. Le point C étant le centre de similitude interne des cercles O et O″, les rayons OA et O″M sont parallèles et de sens contraires. Pour la même raison, si M_1 est le point de rencontre de BD avec O″, les rayons O′B et O″M_1 sont parallèles et de sens contraires. Mais OA et O′B sont parallèles et de même sens. Donc O″M et O″M_1 se confondent.



2° Soit PQ la tangente commune en D aux cercles O′ et O″. On a

$$\widehat{ABD} = \widehat{PDB} = \widehat{QDM} = \widehat{DCM} = 180° - \widehat{ACD}.$$

Le quadrilatère ABDC est donc inscriptible.

3° Les droites AB et MT, perpendiculaires à deux parallèles OA et O″M, sont parallèles.

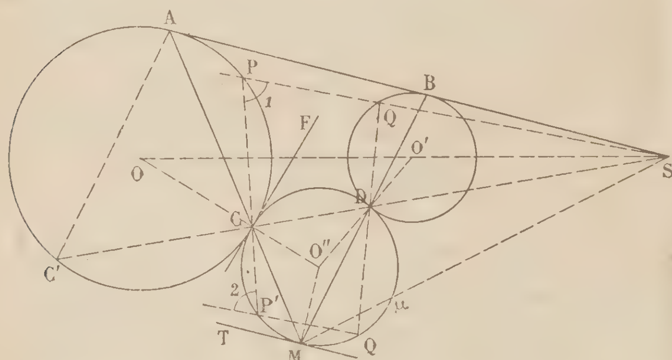
Remarque. — Dans le cas où les contacts sont de même nature entre les cercles O″ et O et O′, la proposition n'est vraie que si la tangente commune AB est extérieure.

Dans le cas où le cercle O″ est tangent intérieurement à l'un des cercles O et O′ et extérieurement à l'autre, le théorème s'applique encore si la tangente commune aux cercles O et O′ est intérieure.

(G. CHÉDAILLE, lycée de Laon.)

Deuxième solution. — Faisons remarquer d'abord que les points C et D sont anti-homologues dans le couple des circonférences O, O′; par suite la droite CD passe par l'un des centres d'homothétie des deux cercles O et O′. Soit S ce centre; l'une des tangentes communes passe par S; soit AB cette tangente commune.

1° Les droites AC et BD ne sont pas homologues dans l'homothétie, donc elles se rencontrent en un certain point M. Soit C′ le deuxième point d'intersection de CD avec la circonférence O. Les cordes AC′ et BD étant homologues sont parallèles. Menons la tangente EF au point C de la circonférence O″; les angles DCF et CMD sont respectivement égaux à l'angle C′AC. Donc



EF est tangente à la circonférence passant par les trois points C, D, M; cette circonférence est donc bien la circonférence O″.

2° Les angles BDS et CAB étant respectivement égaux à l'angle AC′C, le quadrilatère ABDC est inscriptible.

Autrement. — Les deux circonférences O et O′ sont inverses par rapport au point S, et les points C et D sont deux points correspondants dans l'inversion. Donc

$$SC \times SD = SA \times SB.$$

(On voit aussi que le point M est sur l'axe radical des cercles O et O′).

3° Considérons deux points anti-homologues P et Q; les cordes PC et QD coupent la circonférence O″ en P′ et Q′. La corde P′Q′ est parallèle à PQ; en effet, les quadrilatères inscriptibles PQDC et CDQ′P′ nous montrent immédiatement que les angles alternes-internes marqués 1 et 2 sont égaux.

Lorsque PQ tournant autour de S, le point P se rapproche de A, le point Q se rapproche aussi de B; ces deux points tendent respectivement à se confondre avec les points A et B. A la limite, lorsque P se confond avec A, le point Q se confond avec B. Sur la circonférence O″, les deux points P′ et Q′ sont alors confondus en M et la corde P′Q′ est devenue à la limite la tangente en M. On aurait pu démontrer directement cette proposition en faisant remarquer que les angles CAB et CMT sont respectivement égaux aux angles AC′C et CDM. Ces derniers sont égaux puisque AC′ et BD sont parallèles. Donc les deux angles alternes-internes CAB et CMT sont égaux.

Remarque. — Nous avons respecté l'ordre dans lequel avaient été posées les différentes questions.

On aurait pu abréger la solution en démontrant d'abord la deuxième partie comme nous l'avons fait.

Puis la première partie de la manière suivante: Transformons la figure par inversion en prenant pour pôle le point M, et pour puissance d'inversion, la puissance de M par rapport au cercle O ou au cercle O′.

Les cercles O et O′ se transforment en eux-mêmes et le cercle O″ en un cercle tangent en A et B aux cercles O et O′, donc ce cercle O″ se transforme dans la droite AB. Ce qui prouve que M est sur le cercle O″.

Enfin, MO″ est perpendiculaire sur AB. Donc la tangente en M est parallèle à AB.

En remarquant que les deux circonférences O et O′ sont inverses par rapport à S, il est facile de voir que les cercles circonscrits aux triangles ACS, BDS se coupent en un deuxième point μ situé sur la circonférence O″. Le lieu de ce point μ lorsque CD tourne autour de S est un cercle ayant pour diamètre SS′, S′ étant le deuxième centre d'homothétie.

(C. H., à Nîmes.)

[Ont résolu complètement la même question : MM. J. Bordas ; H. Carpentier ; H. Chareire ; Ch. Doumerc ; L. Hubert ; B. Mathé.]

[Ont incomplètement résolu la même question : Mlle M. Pont ; MM. A. Amblard ; V. Barol ; C. Billionnet ; Bily-Méheust ; L. Bois ; J. Borgey ; E. Bouby ; C. Bourvéau ; F. Broc ; A. Brodbeck ; G. Canel ; B. Carrière ; Catinat ; Cavaillé ; R. Van Cauwenberghe ; J. Chapron ; J. Claudius ; R. Coural ; J. Danchaud ; G. Delahaye ; P. Delolme ; R. Dickson ; A. Doué ; A.-C. Duval ; L. Ferron ; G. Foucry ; E. Framboise ; L. Frasserand ; E. Girardeau ; M. Giraud ; M. Gondran ; L. Hébrard ; R. Henry ; H. Janois ; R. Javelot ; M. Jousset ; V. Jouve ; E. Kornis ; H. L. ; F. Ladevèze ; J.-M. Lagarde ; R. Lavallée ; E. Le Maigre ; Le Révérend ; A. Lescure ; P. Le Verrier ; G. Nazare ; G. Nuzeret ; M. Oger ; F. Ollivier ; R. P. ; A. Prost ; Rambaud ; Raynaud ; B. Ribes ; E. Rieux ; Rieumajou ; H. Roure ; G. Schoonheere ; G. Tastet ; R. Vollaire ; F. Vérot ; Vial ; Vien.]

4515. — *Dans un triangle rectangle* ABC, *on dirige à volonté les droites qui portent les côtés* BC, CA, AB *du triangle, et l'on désigne par* α, β, γ *ces droites dirigées : on pose*

$$a = \overline{BC}, \qquad b = \overline{CA}, \qquad c = \overline{AB}, \qquad a + b + c = 2p.$$

1° *On a*

$$4p^2 = 2(a+b)(a+c), \qquad 4p(p-a) = 2bc.$$

2° *Si l'on appelle pseudo-bissectrice de l'angle* (x, y) *de deux droites dirigées la bissectrice de l'angle adjacent supplémentaire, et si l'on considère les pseudo-bissectrices* BE *et* CF *des angles* (α, γ) *et* (α, β), *lesquelles se coupent au centre* I *du cycle inscrit au triangle* (¹), *on a*

$$\overline{BE}^2 = \frac{2ac^2}{a+c}, \qquad \overline{CF}^2 = \frac{2ab^2}{a+b};$$

et l'on peut écrire

$$\overline{BE} \times \overline{CF} = 2a\sqrt{2}\,(p-a),$$

ce produit étant positif lorsque le cycle inscrit est le cercle inscrit.

3° *On a*

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{BE}} \times \frac{\overline{CI}}{\overline{CF}} = \frac{1}{2}.$$

1° Les trois nombres algébriques a, b, c sont liés par les seules relations

$$2p = a + b + c, \qquad a^2 = b^2 + c^2;$$

(¹) Cf. Fontené, *Géométrie dirigée*.

on en conclut

$$4p^2 = (a+b+c)^2 = a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 = a^2 + 2a(b+c) + a^2 + 2bc$$
$$= 2[a^2 + a(b+c) + bc] = 2(a+b)(a+c).$$

De la relation $2p = a + b + c,$
on conclut $2(p-a) = b + c - a,$
donc $4p(p-a) = (b+c)^2 - a^2 = b^2 + c^2 + 2bc - a^2 = 2bc.$

2° Raisonnons dans l'hypothèse $a > 0$, c'est-à-dire α dirigé suivant BC. Il peut alors se présenter 4 cas :

$$b > 0,\quad b > 0,\quad b < 0,\quad b < 0,$$
$$c > 0,\quad c < 0,\quad c > 0,\quad c < 0,$$

correspondant aux quatre figures ci-dessous.

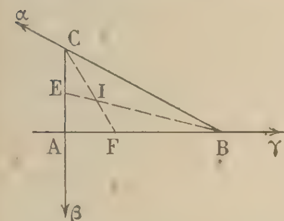


Fig. 1

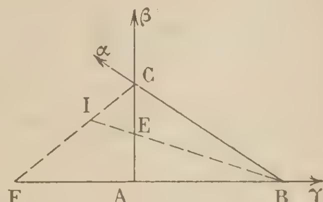


Fig. 3

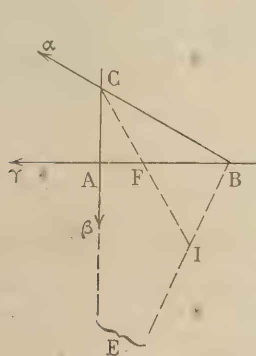


Fig. 2

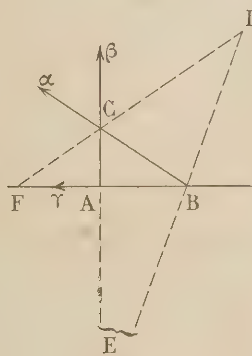


Fig. 4

En construisant dans chaque cas les pseudo-bissectrices des angles (α, β) et (α, γ), on voit que dans la figure (1) le cycle inscrit est le cercle inscrit, dans les figures (2) et (3) ce sont les cercles exinscrits dans les angles C et B ; dans la figure (4), c'est le cercle exinscrit dans l'angle droit.

Chacune des figures donne

$$\overline{BE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{EA}^2 = c^2 + \overline{EA}^2.$$

On a toujours en grandeur et en signe

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}.$$

D'abord cette relation est toujours exacte en valeurs absolue. Dans les figures (1) et (3) le premier rapport est positif et il en est de même du dernier ; dans les figures (2) et (4) les deux rapports sont négatifs ; la relation est donc vraie en grandeur et en signe. On en conclut

$$\frac{\overline{CE}}{a} = \frac{\overline{EA}}{c} = \frac{\overline{CE} + \overline{EA}}{a+c} = \frac{\overline{CA}}{a+c} = \frac{b}{a+c};$$

donc $\overline{EA} = \dfrac{bc}{a+c}$, $\quad \overline{CE} = \dfrac{ab}{a+c}.$

Par suite

$$\overline{BE}^2 = c^2 + \frac{b^2c^2}{(a+c)^2} = \frac{c^2[b^2 + (a+c)^2]}{(a+c)^2} = \frac{c^2[(a^2 - c^2) + (a+c)^2]}{(a+c)^2},$$

d'où

$$\overline{BE}^2 = \frac{2ac^2}{a+c}.$$

On montrerait de même que

$$\overline{CF}^2 = \frac{2ab^2}{a+b}.$$

De ces égalités on tire

$$\overline{BE}^2 \times \overline{CF}^2 = \frac{4a^2b^2c^2}{(a+b)(a+c)} = \frac{a^2 \times 16p^2(p-a)^2}{2p^2} = 8a^2(p-a)^2;$$

donc $\overline{BE} \times \overline{CF} = \pm 2a\sqrt{2}(p-a).$

Or dans le cas du cercle inscrit, a et $(p-a)$ sont tous deux positifs ; dans les autres cas, ils sont de signes contraires. Si donc on fait la convention que le produit $\overline{BE} \times \overline{CF}$ est positif dans le premier cas et négatif dans les autres, on devra écrire

$$\overline{BE} \times \overline{CF} = 2a\sqrt{2}(p-a).$$

3° On a toujours

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{IE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}} = \frac{a}{\dfrac{ab}{a+c}} = \frac{a+c}{b};$$

on le vérifierait en raisonnant comme précédemment. Donc

$$\frac{\overline{BI}}{a+c} = \frac{\overline{IE}}{b} = \frac{\overline{BE}}{a+c+b},$$

et

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{BE}} = \frac{a+c}{a+c+b}.$$

On prouverait de même que

$$\frac{\overline{CI}}{\overline{CF}} = \frac{a+b}{a+c+b};$$

d'où

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{BE}} \times \frac{\overline{CI}}{\overline{CF}} = \frac{(a+c)(a+b)}{(a+c+b)^2} = \frac{2p^2}{(2p)^2} = \frac{1}{2}.$$

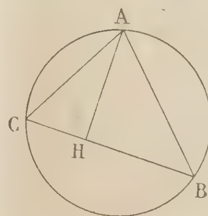
(Ont résolu cette question : Mlle Turpain ; MM. A. Thorin, à Tours ; Lehmann, instituteur, section spéciale.)

4555. — *Dans un cercle de rayon* R, *on inscrit un triangle* ABC *tel que* AB *et* AC *soient respectivement égaux aux côtés du triangle équilatéral et du carré inscrits dans ce cercle. On mène la hauteur* AH *relative au côté* BC. *Démontrer que*

1° $HC = \dfrac{AC}{2}$;

2° *Le triangle* AHB *est isocèle.*

Première solution. — 1° L'angle inscrit ACB interceptant sur le cercle une corde AB égale au côté du triangle équilatéral inscrit, vaut 60° ; par suite, dans le triangle rectangle ACH, le côté CH est opposé à un angle de $90° - 60° = 30°$, et $CH = \dfrac{CA}{2}$, d'après une propriété connue.



2° La corde AC, côté du carré inscrit, sous-tend un angle au centre de 90°, et l'angle inscrit ABC vaut alors $\dfrac{90°}{2} = 45°$; le triangle rectangle AHB est donc bien isocèle.

(Y. COLLIN, à Laval.)

Seconde solution. — Calculons les trois segments AH, HC, HB en fonction de R.

On sait que, dans un triangle, le produit de deux côtés est égal au produit de la hauteur relative au troisième côté par le diamètre du cercle circonscrit. On peut donc écrire

$$AB.AC = AH.2R,$$

d'où, en observant que par hypothèse

$$AB = R\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad AC = R\sqrt{2},$$

$$AH = \frac{R\sqrt{3}.R\sqrt{2}}{2R} = \frac{R\sqrt{6}}{2}.$$

On déduit de là

$$HC = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{2R^2 - \frac{6R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{2}}{2},$$

$$HB = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{3R^2 - \frac{6R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{6}}{2}.$$

A l'inspection de ces valeurs, on vérifie immédiatement l'exactitude des deux propriétés énoncées.

(A. SALLIN, école normale de Caen.)

[Ont résolu la même question: Mlles Z.-M. Ghcorghiu ; M. Turpain ; MM. N.-G. Alesandrescu ; A. Amblard ; A. Arcizet ; E. Ardin-Delteil ; J.-F. d'Avillez ; P. Baldet ; L. Barberot ; V. Barol ; R. Barthelemy ; E. Bernard ; G. Blanc ; P. Blanc ; L. Bloch ; P. Bloch ; C. Billionnet ; J. Borgey ; G. Bouju ; E. Briqueler ; L. Budin ; G. Burdinat ; C. Carbou ; A. Carré ; L. Cartier ; P. Cassan ; Cavaillé ; R. Van Cauwenberghe ; P. Cazeaux ; A. Chautemps ; G. Chollet ; V. Chosson ; F. Clabault ; G. Colombier ; Cougnoux ; P. Coulbois ; R. Coural ; J. Danchaud ; G. Dardalhon ; R. Depasse ; A. Desportes ; A. Despouy ; F. Deville ; R. Dickson ; E. Foucart ; G. Foucry ; M. Gondran ; G. Gordien ; A. Grolleau ; P. Gutton ; R. Henry ; P. Heurtebout ; Jacquet ; H. Janois ; E. Krau ; C. Labille ; F. Ladevèze ; L. Lafontaine ; J.-M. Lagarde ; Tr. Lalescu ; G. Lallier ; A. Lecontour ; E. Le Maigre ; E. Léotard ; G. Le Sage ; P. Le Verrier ; E. Loffter ; A. Marchand ; C. Marie ; C. Marrot ; J. Massip ; B. Mathé ; J. Ménéchal ; P. Millevoye ; F. Monseran ; R. Mothes ; J. Mouchet ; G. Nazare ; M. Oger ; M. Oriol ; J. Pémartin ; H. Pitrat ; M. Popescu-Lupsa ; E. Prévost ; A. Prost ; Quilichini ; F. Rein ; H. Ricard ; Rieux ; H. Richier ; E. Roncaglia ; M. Royer ; E. de Rycker ; G. Salles ; E. Sautreau ; F. Schmitt ; J. Schuller ; N. Sichitiu ; J. Talvard ; G. Tastet ; M. Teulié ; E. Tiquet ; J.-B. Touton ; A. de Trécesson ; R. Turgis ; A. Tumerelle ; C. Utza ; H. Varennes ; Venet ; P. Véron ; F. Vérot ; A. Vidalenc ; Vial ; Vien ; Vimont ; R. Vollaire.]

4559. — *Construire un triangle connaissant la bissectrice de l'angle* A, *la différence* B — C *des deux autres angles et le rapport* $\frac{b+c}{a}$ *de la somme des côtés comprenant l'angle* A *au côté opposé* a.

Première solution. — Supposons le problème résolu : soit ABC un triangle tel que $AD = l$,

$$B - C = \delta \quad \text{et} \quad \frac{b+c}{a} = k.$$

La droite AD étant bissectrice de l'angle A, on peut écrire

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} = \frac{AB + AC}{BD + CD} \quad \text{ou} \quad \frac{b+c}{a}.$$

Par suite les points B et C sont situés sur la circonférence lieu géométrique des points dont le rapport des distances aux points A et D est égal à k.

D'autre part, on a

$$\widehat{B} = \widehat{ADC} - \frac{A}{2}, \qquad \widehat{C} = \widehat{ADB} - \frac{A}{2},$$

ou, en retranchant,

$$\widehat{B} - \widehat{C} = \widehat{ADC} - \widehat{ADB},$$

et, en observant que $\widehat{ADB} = 180^\circ - \widehat{ADC}$,

$$\widehat{ADC} = 90^\circ - \frac{\delta}{2}.$$

Le côté BC fait ainsi un angle connu avec AD. De là la construction suivante :

Sur une droite quelconque, on prend $AD = l$, puis on détermine les deux points I, I′ tels que

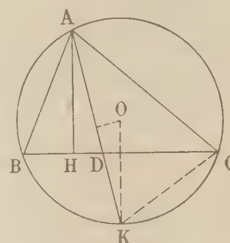
$$\frac{IA}{ID} = \frac{I'A}{I'D} = k\,;$$

on trace le cercle de diamètre II′, qui coupe en B et C la droite issue de D, faisant avec AD un angle égal au complément de l'angle $\frac{\delta}{2}$.

Comme dans tout triangle $b + c > a$, le rapport k doit toujours être supérieur à 1, et par suite le point I′ plus près de D que de A, de sorte que la construction précédente est toujours possible et ne fournit qu'une solution.

(JACQUET, lycée de Mâcon.)

Deuxième solution. — On sait que dans tout triangle ABC l'angle formé par la hauteur AH avec la bissectrice intérieure de l'angle A est égal à $\frac{B - C}{2}$; il est donc connu par hypothèse. Comme d'autre part on donne aussi $AD = l$, le triangle rectangle AHD peut être construit.



Supposons tracé le cercle circonscrit au triangle inconnu ABC ; la bissectrice AD passe par le milieu K de l'arc BC, et on sait que

$$KD \times KA = \overline{KC}^2,$$

d'où

$$\frac{KD}{KA} = \left(\frac{KC}{KA}\right)^2.$$

Les triangles semblables AKC, ABD donnent ensuite

$$\frac{KC}{KA} = \frac{BD}{BA} = \frac{DC}{AC} = \frac{BD + DC}{BA + AC} = \frac{a}{b + c}.$$

Donc

$$\frac{KD}{KA} = \left(\frac{a}{b + c}\right)^2 = \frac{1}{k^2}.$$

Comme d'ailleurs K est toujours sur le prolongement de AD au-delà de D, ce point est bien déterminé. Cela fait on aura le centre O du cercle circonscrit au triangle inconnu en prenant l'intersection de la perpendiculaire abaissée de K sur la droite connue HD avec la perpendiculaire élevée au milieu de AK. Connaissant O, il suffit de décrire le cercle de centre O et de rayon OA ; il coupe HD aux points cherchés B et C.

La construction est toujours possible. En effet A et K sont de part et d'autre de HD ; donc la distance de O à HD est toujours inférieure à OA.

Solution trigonométrique. — Dans la relation

$$\frac{b + c}{a} = k,$$

on peut remplacer a, b, c par les quantités proportionnelles sin A, sin B, sin C. Il vient ainsi

$$\frac{\sin B + \sin C}{\sin A} = k,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{2 \sin \frac{B + C}{2} \cos \frac{B - C}{2}}{2 \sin \frac{B + C}{2} \cos \frac{B + C}{2}} = k,$$

d'où l'on déduit

$$\cos \frac{B + C}{2} = \frac{1}{k} \cos \frac{\delta}{2}.$$

Comme $k > 1$, cette valeur du cosinus est inférieure à 1 et correspond au cosinus d'un certain angle aigu α supérieur à l'angle $\frac{\delta}{2}$. On a alors

$$\frac{B+C}{2} = \alpha, \qquad \frac{B-C}{2} = \frac{\delta}{2},$$

d'où, par addition et soustraction,

$$B = \alpha + \frac{\delta}{2}, \qquad C = \alpha - \frac{\delta}{2};$$

puis $\qquad A = 180° - B - C = 180° - 2\alpha.$

En considérant le triangle ABD, on a

$$\frac{c}{\sin D} = \frac{d}{\sin B}, \qquad \text{d'où} \qquad c = \frac{d \cos \frac{\delta}{2}}{\sin\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right)},$$

et de même,

$$a = \frac{2d \cos \alpha}{\sin\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right)}, \qquad b = \frac{d \cos \frac{\delta}{2}}{\sin\left(\alpha - \frac{\delta}{2}\right)}.$$

(JACQUET.)

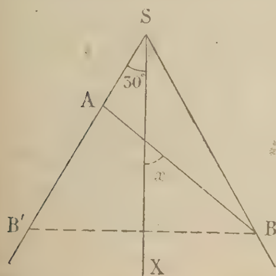
[Ont résolu la même question : MM. V. Barol ; R. Bazin ; P. Blanc ; L. Bois ; A. Bouchet ; C. Bourvéau ; E. Briqueler ; Cavaillé ; P. Delolme ; G. Desplats ; R. Dickson ; E. Foucart ; Framboise ; E. Girardeau ; R. Henry ; L. Lafontaine ; Méheust-Bily ; G. Nazare ; M. Oger ; H. Pitrat ; Prévost ; E. Rousselot ; J. Sallaud ; A. Sallin ; G. Tastet ; Tumerelle ; R. Bellencourt ; C. Billionnet ; E. Bonnet ; J. Borgey ; H. Carpentier ; R. Coural ; J. Danchaud ; G. Foucry ; S. Galland ; H. Janois ; F. Ladevèze ; B. Mathé ; E. Vagneux ; E. Vaunac ; Vial ; A. Vidalenc.]

TRIGONOMÉTRIE

4551. — *On donne un cône circulaire droit dont l'axe fait un angle de 30° avec la génératrice. On propose de couper ce cône par un plan de façon que la section soit une ellipse dont la surface mesure $84^{cq} + \frac{6}{7}$ et dont le rapport du petit axe au grand axe soit $\frac{1}{3}$. On exprimera en fonction des données l'angle du plan sécant avec l'axe du cône, au moyen de l'une de ses lignes trigonométriques et on construira cet angle graphiquement. On prendra $\pi = \frac{22}{7}$.*

(Bacc. lettres-sciences, Paris, mars-avril 1899.)

Prenons pour plan de figure un plan passant par l'axe SX du cône et perpendiculaire au plan sécant ; soient SA, SB les deux génératrices situées dans ce plan et AB la trace du plan sécant. On sait que l'ellipse déterminée par le plan sécant a pour grand axe AB et pour distance focale $SB - SA = AB'$.



Or le grand axe $2a$ et le petit axe $2b$ de l'ellipse vérifient par hypothèse les égalités

$$\pi ab = 84 + \frac{6}{7} \qquad \text{et} \qquad \frac{b}{a} = \frac{1}{3},$$

d'où l'on déduit facilement, en remplaçant π par $\frac{22}{7}$,

$$a = 9, \qquad b = 3.$$

Dans le triangle ABB', on connait alors les deux côtés,

$$AB = 2a = 18, \qquad AB' = 2c = 2\sqrt{a^2 - b^2} = 12\sqrt{2},$$

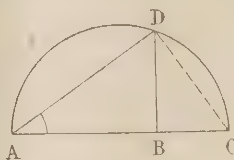
et l'angle $AB'B = 90° - 30° = 60°$. On peut donc calculer l'angle B, complément de l'angle cherché x, au moyen de la relation

$$\frac{AB}{\sin B'} = \frac{AB'}{\sin B},$$

qui donne

$$\cos x = \frac{AB'}{AB} \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Cette valeur du cosinus, inférieure à 1, fournit deux angles x égaux et de signes contraires correspondant à deux plans sécants symétriques par rapport à SX.



Construction de l'angle x. — Sur une droite quelconque, on prend $AB = 2$ et $AC = 3$; on trace le cercle de diamètre AC qui coupe en D la perpendiculaire élevée en B à AC ; l'angle DAC est égal à x. En effet, le triangle DAC étant rectangle en D,

$$\cos DAC = \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{AB.AC}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

(MAXIME GONDRAN, lycée de Caen.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Ardin-Delteil ; J. Collin ; Ch. Doumerc ; E. Foucart ; A. Tumerelle.]

CHIMIE

4470. — *Une pièce de 1 franc est traitée par de l'acide azotique chaud et en excès jusqu'à dissolution complète. A la liqueur refroidie on ajoute une solution de potasse jusqu'à ce qu'elle prenne une réaction alcaline. On demande :*

1° Quelle est la nature du précipité formé ;

2° Quel sera le poids de ce précipité quand on l'aura lavé, séché et maintenu quelque temps au rouge sombre ;

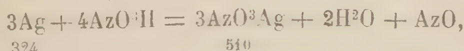
3° Si l'on continue à chauffer le résidu, mais dans un courant d'hydrogène, ce qu'il deviendra définitivement.

$$Ag = 108, \qquad Cu = 63.$$

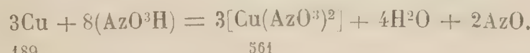
(Concours général de Seconde moderne, Paris, 1898.)

1° La pièce de 1 franc, étant au titre de $\frac{835}{1000}$, contient $\frac{835 \times 5}{1000} = 4^{gr},175$ d'argent pur et $\frac{165 \times 5}{1000} = 0^{gr},825$ de cuivre.

La dissolution complète de la pièce dans l'acide azotique chaud donne de l'azotate d'argent et de l'azotate de cuivre suivant les équations :



$$\underset{324}{3Ag} + 4AzO^3H = \underset{510}{3AzO^3Ag} + 2H^2O + AzO,$$



$$\underset{189}{3Cu} + 8(AzO^3H) = \underset{561}{3[Cu(AzO^3)^2]} + 4H^2O + 2AzO.$$

Les quantités de ces deux sels correspondant aux quantités d'argent et de cuivre contenues dans la pièce de 1 franc sont

$$\frac{510 \times 4{,}175}{324} = 6^{gr},5717$$

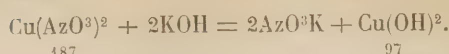
et

$$\frac{561 \times 0{,}825}{189} = 2^{gr},4488.$$

Le traitement de la dissolution refroidie par une solution de potasse en excès donne un précipité d'oxyde d'argent et un précipité d'hydrate cuivrique suivant les équations :



$$\underset{340}{2AzO^3Ag} + 2KOH = 2AzO^3K + \underset{232}{Ag^2O} + H^2O,$$



$$\underset{187}{Cu(AzO^3)^2} + 2KOH = 2AzO^3K + \underset{97}{Cu(OH)^2}.$$

L'application des relations précédentes aux quantités de sels obtenues donne

$$\frac{232 \times 6,5717}{340} = 4^{gr},4842 \text{ d'oxyde d'argent}$$

et $$\frac{97 \times 2,4488}{187} = 1^{gr},2702 \text{ d'hydrate cuivrique.}$$

2° Quand ce précipité aura été lavé, séché et maintenu quelque temps au rouge sombre, son poids sera représenté par celui de l'argent contenu dans les $4^{gr},4842$ (puisque l'oxyde d'argent est décomposable par la chaleur) et celui de l'oxyde de cuivre contenu dans $1^{gr},2702$ d'hydrate.

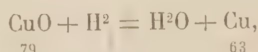
On aura donc

$$\frac{216 \times 4,4842}{232} = 4^{gr},1749 \text{ d'argent}$$

et $$\frac{79 \times 1,2702}{97} = 1^{gr},0345 \text{ d'oxyde de cuivre.}$$

3° En continuant à chauffer le résidu dans un courant d'hydrogène, l'oxyde de cuivre sera réduit et l'on devra retrouver le cuivre qui entrait dans la composition de la pièce de 1 franc.

On a en effet



$$\underset{79}{CuO} + H^2 = H^2O + \underset{63}{Cu},$$

d'où le poids de cuivre est égal à

$$\frac{63 \times 1,0345}{79} = 0^{gr},825.$$

En additionnant les poids trouvés d'argent et de cuivre, on obtient 5^{gr}. Les différentes opérations n'ont donc détruit que la forme de la pièce sans l'altérer au point de vue chimique.

(E. ARDIN-DELTEIL.)

[Ont résolu la même question : Mlles M. Pont ; L. Ségala ; MM. E. Baudot ; J. Breynaert ; H. Casse ; Cavaillé ; J. Chalvin ; R. Coural ; P. Delolme ; C. Dujardin ; L. Ecoffard ; L. Famechon ; J. Filon ; E. Gernez ; G. Girot ; R. Henry ; L. Hubert ; J. Jantet ; J. Méněchal ; M. Oger ; A. Prost ; E. Rousset ; R. Thomas ; Venet.]

QUESTIONS PROPOSÉES

4573. — On considère une progression arithmétique indéfinie ayant 1 pour premier terme et 3 pour raison, et avec les termes de cette suite on forme des groupes dont le premier contient le premier terme 1, le second les deux termes suivants, 4 et 7, le troisième les trois termes à la suite, etc... On demande d'évaluer le premier terme du n^e groupe, le n^e terme du n^e groupe et la somme des n termes du n^e groupe.

(*Bacc. lettres-math., Caen, mars 1899.*)

4574. — Etant donné un demi-cercle de diamètre $AA' = 2R$, déterminer sur ce demi-cercle deux points B et C satisfaisant aux conditions suivantes :

1° $$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = l^2 ;$$

2° La distance de A à la corde BC doit être égale à une longueur donnée h.

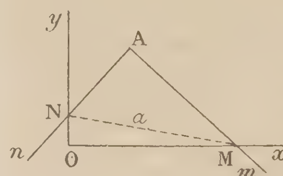
Discuter.

(*Bacc. lettres-math., Lyon, mars 1899.*)

4575. — Etant donnés une circonférence de rayon R, de centre O, et un point A situé dans le plan du cercle à une distance 2R du centre, on mène par le point A une sécante qui coupe la circonférence en B et C et dont la distance au point O est x.

Exprimer, en fonction de x, le volume y engendré par le triangle OBC quand il tourne autour de OA. Trouver le maximum de y. Construire la courbe qui représente la loi de la variation de y en fonction de x.

(*Bacc. lettres-sciences, Caen, mars 1899.*)



4576. — En un point A donné du plan d'un angle droit xOy, on demande de former un angle droit mAn tel que la droite MN joignant les points M, N où ses côtés coupent ceux du premier, ait une longueur donnée a.

(*Bacc. lettres-math., Rennes, mars 1899.*)

4577. — Les symétriques d'une droite quelconque Δ du plan d'un triangle ABC par rapport aux côtés de ce triangle forment un triangle A'B'C'.

1° AA', BB' et CC' concourent en un point M. Lieu du point M.

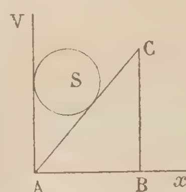
2° Le point M est le centre d'un cercle tangent aux côtés du triangle A'B'C' : le rayon de ce cercle a pour valeur la distance de l'orthocentre du triangle ABC à la droite Δ.

(A. D., à Castres.)

4578. — Enoncer le principe du travail virtuel dans le cas des systèmes à liaisons complètes.

Application à la question suivante :

Un prisme dont la section droite est un triangle rectangle ABC peut glisser sans frottement sur un plan horizontal qu'il touche par sa face AB.



Entre un mur vertical AV et la face hypoténuse AC, on place une sphère S du poids de 6 kilogrammes qui tendra à faire glisser le prisme dans le sens Ax.

Quelle force antagoniste x faudra-t-il appliquer normalement à la face BC pour empêcher le glissement, sachant que l'angle A est de 60°.

On négligera tous les frottements.

(*Bacc. lettres-sciences, Alger, avril 1899.*)

4579. — Dans un vase entièrement rempli d'eau et taré, on introduit un corps solide insoluble : l'augmentation de poids est de $20^{gr},75$. Si le vase avait été rempli d'huile, de densité 0,9, l'augmentation de poids aurait été de $21^{gr},58$.

Dire : 1° quel est le poids du corps ; 2° quelle est sa densité ; 3° quel est son volume.

(*Bacc. lettres-sciences, Caen, mars 1899.*)

4580. — Deux miroirs concaves M et M', dont les axes coïncident, sont disposés en regard l'un de l'autre à 3^m de distance. Un objet lumineux AB, de $0^m,20$ de longueur, étant placé dans l'intervalle CC' des deux centres, normalement à l'axe commun et à une distance de $1^m,80$ du miroir M, donne deux images égales.

On demande : 1° la longueur de ces images et leurs caractères ; 2° le rayon du miroir M'.

$OO' = 3^m$, $OP = 1^m,80$, $AB = 0^m,20$, $OC = 1^m$.

(*Bacc. class., lettres-math., Montpellier, mars 1899.*)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

23e Année. — N° 17. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 1er Juin 1899.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.

Abonnements.. Librairie Nony et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

RÉCIPROQUES DES THÉORÈMES DE DANDELIN

par M. **Vogt**, professeur à l'Université de Nancy.

1. On démontre dans les cours et traités de géométrie les théorèmes suivants :

I. *La section d'un cône ou d'un cylindre de révolution par un plan non parallèle à un plan tangent jouit de la propriété que la somme ou la différence des distances de chacun de ses points à deux points fixes est constante.*

Plus généralement, *la section d'un cône ou d'un cylindre de révolution par un plan quelconque jouit de la propriété que la somme ou la différence des tangentes menées de chacun de ses points à deux cercles fixes est constante.*

II. *La section d'un cône ou d'un cylindre de révolution par un plan quelconque jouit de la propriété que le rapport des distances de chacun de ses points à un point fixe et à une droite fixe est constant, ou plus généralement que le rapport entre la tangente menée de chacun de ses points à un cercle fixe et la distance du même point à une droite fixe est constant.*

On ne démontre pas les réciproques de ces deux théorèmes ; on se contente de montrer que l'on peut placer sur un cône ou un cylindre de révolution, ou même sur une infinité de telles surfaces une ellipse, une hyperbole ou une parabole de grandeur donnée, mais ces remarques ne sont pas des réciproques ; dans le cas d'une section elliptique par exemple, on voit bien que tout point de la section d'un cône de révolution est tel que la somme de ses distances aux deux foyers est constante, mais il n'est pas certain que tout point satisfaisant à cette condition se trouve sur le cône de révolution.

L'objet de cette note est précisément de combler cette lacune. Les démonstrations des théorèmes directs I et II, qui sont totalement différents l'un de l'autre, reposent en dernière analyse sur deux remarques simples de géométrie plane, dont les réciproques nous seront utiles, et que nous allons développer.

2. Lemme I. — *Si l'on considère deux circonférences non intérieures l'une à l'autre, et leurs tangentes communes extérieures, tout point de l'une de ces tangentes est tel que la somme ou la différence des longueurs des tangentes menées de ce point aux deux circonférences est égale au segment de la tangente commune considérée compris entre les points de contact, et réciproquement.*

La proposition directe est immédiate, et nous ne nous attacherons qu'à la réciproque.

Soient (*fig.* 1) deux circonférences O et O', C, C' les points de contact de l'une de leurs tangentes communes extérieures, C_1, C'_1 ceux de l'autre et M un point quelconque dont les tangentes aux deux circonférences sont MT et MT'; je suppose d'abord que l'on ait

$$MT + MT' = CC'$$

et je trace les circonférences de centres O et O' et passant par M ; elles coupent l'une des tangentes, par exemple CC', en quatre points deux à deux équidistants de C et de C' ; j'appelle M_1 le point de rencontre de la tangente et de la circonférence de centre O situé par rapport à C du même côté que C', et M_2 l'autre point de rencontre ; de même M'_1 sera sur la deuxième circonférence du même côté que C par rapport à C', et M'_2 de l'autre côté. On a toujours en valeur absolue

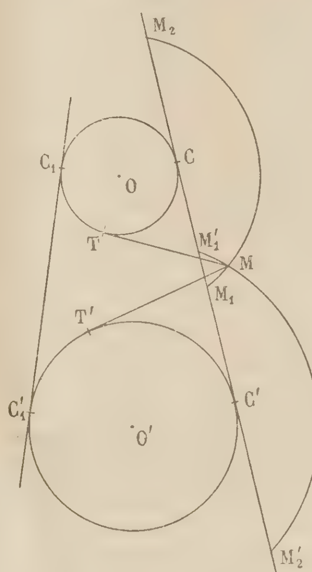


Fig. 1

$$M_1C = M_2C = MT,$$
$$M'_1C' = M'_2C' = MT' ;$$

dans le cas actuel, nous prendrons M_1 et M'_1 ; en écrivant que l'on doit avoir

$$M_1C + M'_1C' = CC',$$

on conclut que $M_1M'_1 = 0$, de sorte que M sera sur la tangente commune CC' entre C et C', ou bien sur l'autre tangente commune, entre C_1 et C'_1.

On verrait de même que si $MT - MT' = CC'$, on doit avoir $M'_2M_1 = 0$, et M doit se trouver sur le prolongement de CC' au delà de C' ; enfin si $MT' - MT = CC'$, on aura $M_2M'_1 = 0$, et M doit se trouver sur le prolongement de CC', au delà de C, ou sur la portion analogue de l'autre tangente commune extérieure.

On démontrerait de la même manière un lemme analogue au précédent, relativement à deux circonférences extérieures et à leurs tangentes communes intérieures.

Lemme II. — *Les tangentes menées à une même circonférence de deux points également éloignés du centre sont égales, et réciproquement.*

La démonstration est immédiate.

3. Cela posé, je vais démontrer la réciproque du premier théorème. Je considère d'abord (*fig.* 2) une ellipse définie par ses foyers F, F' et son grand axe AA' et telle que l'on ait pour chacun de ses points M

$$MF + MF' = AA'.$$

Dans un plan mené par AA' perpendiculairement au plan de la courbe, je trace une circonférence quelconque O tangente en F à AA', et je mène par A et A' des tangentes à cette circonférence ; elles se coupent en un point S ou sont parallèles. Dans

tous les cas, il existe une circonférence O′ tangente en F′ à AA′ et tangente à SA et à SA′, comme on peut le voir en appliquant les propriétés des segments déterminés sur les côtés par les cercles inscrit et exinscrits dans un triangle ; de plus SA et SA′ sont les tangentes communes extérieures à ces circonférences, et les segments CC′, $C_1C'_1$ compris entre les points de contact sont égaux à AA′.

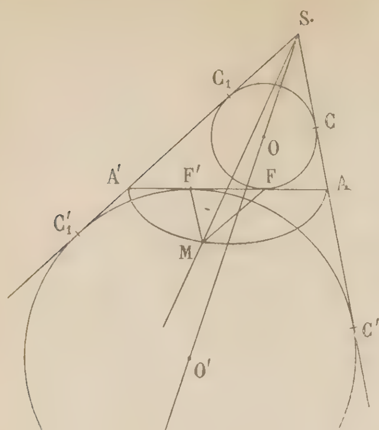


Fig. 2

Je considère les sphères dont les circonférences précédentes sont des grands cercles, et je coupe la figure par un plan passant par SOO′ et par un point M de la courbe ; les tangentes issues de ce point aux deux grands cercles situés dans ce plan sont égales respectivement à MF et MF′ et ont une somme égale à CC′, ou à la longueur de la tangente commune extérieure aux deux grands cercles du plan MOO′; par conséquent, d'après le lemme I, M est situé sur une des tangentes communes extérieures à ces deux cercles, c'est-à-dire sur une génératrice du cône de révolution de sommet S circonscrit à la fois aux deux sphères O et O′, ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons que l'on peut choisir l'angle AOA′ ou le centre de la circonférence O de telle façon que le cône de révolution précédent ait un demi-angle au sommet donné quelconque, ou devienne un cylindre dont le rayon est égal toutefois au demi-petit axe de l'ellipse ; nous arrivons donc à cette conclusion que l'on peut placer une ellipse donnée sur un cône de révolution quelconque ou sur un cylindre dont le rayon est égal au demi-petit axe de la courbe. On voit aussi immédiatement que SA′ — SA = FF′, de sorte que le lieu des sommets des cônes de révolution passant par une ellipse donnée est une hyperbole située dans un plan mené par AA′ perpendiculairement au plan de cette ellipse et ayant pour sommets et pour foyers respectivement les foyers et les sommets de cette dernière courbe.

Si l'on se donne une hyperbole définie par ses foyers et son axe focal, on peut faire un raisonnement analogue au précédent ; on est amené à tracer deux circonférences dont les tangentes communes intérieures ont une longueur égale à celle de l'axe focal. Je laisse au lecteur le soin de faire la figure, et de montrer qu'il existe une infinité de cônes de révolution répondant à la question ; on peut choisir arbitrairement le demi-angle au sommet du cône, pourvu que ce demi-angle soit supérieur au demi-angle des asymptotes de l'hyperbole, enfin le lieu des sommets des cônes de révolution passant par une hyperbole donnée est une ellipse ayant pour sommets et pour foyers les foyers et les sommets de l'hyperbole.

4. Je passe maintenant au cas général où l'on considère deux sphères quelconques inscrites dans un cône, et coupant le plan d'une section plane de cette surface suivant deux circonférences focales ; on sait que la somme ou bien la différence des tangentes menées d'un point de la courbe de section à ces deux circonférences est constante ; je me propose de démontrer la réciproque.

Soient deux circonférences quelconques de centres O et O′, et de rayons r et r' (*fig.* 3) ; M un point dont les tangentes satisfont à l'une des conditions

$$|\,MT \pm MT'\,| = k, \qquad (1)$$

où k est une longueur donnée ; je vais d'abord montrer qu'il existe deux positions A et A′ du point M sur la ligne des centres OO′.

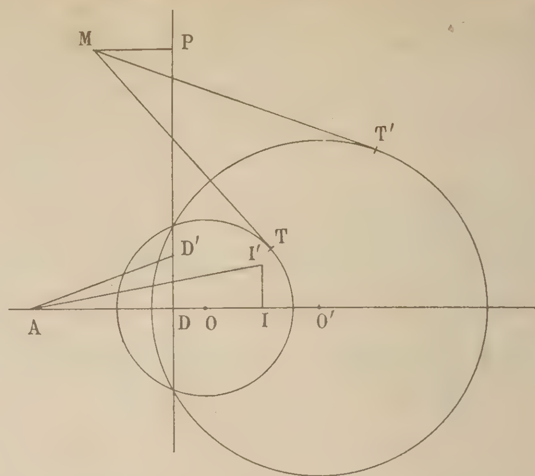


Fig. 3

L'une quelconque des relations (1) entraîne en effet par élévation au carré la condition unique

$$(\overline{MT}^2 - \overline{MT'}^2)^2 = k^2(2\overline{MT}^2 + 2\overline{MT'}^2 - k^2); \qquad (2)$$

si I est le milieu de OO′, MP la perpendiculaire abaissée de M sur l'axe radical des deux circonférences, on a

$$|\,\overline{MT}^2 - \overline{MT'}^2\,| = 2OO'.MP,$$

$$2\overline{MT}^2 + 2\overline{MT'}^2 = 4\overline{MI}^2 + \overline{OO'}^2 - 2r^2 - 2r'^2,$$

de sorte que la relation (2) donne

$$4\overline{OO'}^2.\overline{MP}^2 = 4k^2\left[\overline{MI}^2 - \frac{2r^2 + 2r'^2 + k^2 - \overline{OO'}^2}{4}\right]. \qquad (3)$$

Sous cette forme on voit que la distance du point M à l'axe radical est dans un rapport constant égal à $\frac{k}{OO'}$ avec la longueur de la tangente menée du même point à un cercle de centre I et de rayon $\frac{1}{2}\sqrt{2r^2 + 2r'^2 + k^2 - \overline{OO'}^2}$, en admettant toutefois que la quantité sous le radical ne soit pas négative ; mais cette remarque n'est pas indispensable.

Supposons que le point M occupe une position A sur la ligne des centres, P se trouve alors au point de rencontre D de cette droite avec l'axe radical ; si la quantité $2r^2 + 2r'^2 + k^2 - \overline{OO'}^2$ est positive ou nulle, on portera sur l'axe radical une longueur DD′ telle que l'on ait

$$4\overline{OO'}^2.\overline{DD'}^2 = k^2(2r^2 + 2r'^2 + k^2 - \overline{OO'}^2)$$

et l'on aura

$$\frac{AD'}{AI} = \frac{k}{OO'};$$

si au contraire $2r^2 + 2r'^2 + k^2 - \overline{OO'}^2$ est négatif, c'est sur la perpendiculaire en I à OO′ que l'on portera une longueur II′ telle que l'on ait

$$4\overline{II'}^2 = \overline{OO'}^2 - k^2 - 2r^2 - 2r'^2,$$

et l'on aura cette fois

$$\frac{AD}{AI'} = \frac{k}{OO'}.$$

Dans l'un et l'autre cas, le point A est tel que le rapport de ses distances à deux points fixes est donné; il est alors à l'intersection de OO′ et d'une circonférence que l'on sait construire ; il existe par suite en général deux points A et A′ de OO′ répondant à la question ; l'un d'eux peut même être rejeté à l'infini, ce qui arrivera si $k = OO'$. Nous supposons dans ce qui suit qu'ils sont réels et extérieurs aux deux circonférences.

5. Je suppose alors (*fig.* 4) que l'on donne dans un plan deux circonférences dont les diamètres situés sur la ligne des centres soient respectivement FF_1 et $F'F'_1$, et que l'on considère les points M de ce plan dont la somme ou la différence des tangentes à ces deux circonférences ait une valeur absolue égale à une longueur donnée k.

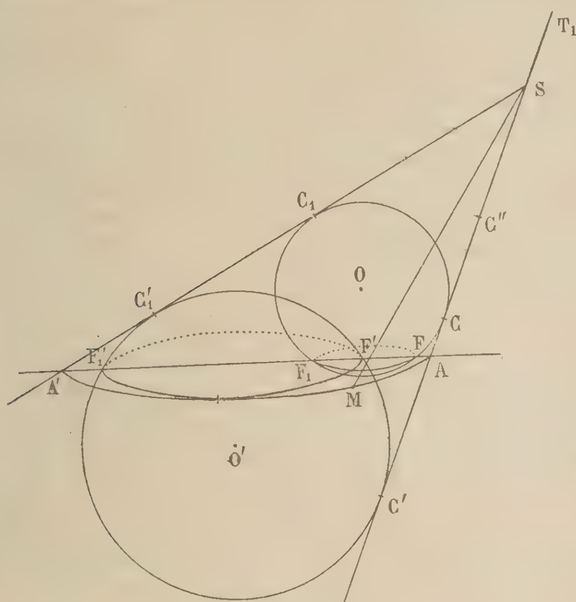


Fig. 4

Je détermine, comme je viens de l'indiquer, les points A et A' de la ligne des centres répondant à la question. Dans un plan passant par AA' et perpendiculaire au plan donné, je construis une circonférence quelconque O passant par F et F_1, et je trace du point A une quelconque des deux tangentes que l'on peut mener de ce point à cette circonférence; soient AT_1 cette tangente et C son point de contact.

Par F' et F'_1 passent deux circonférences tangentes à AT_1; soient C' et C'' leurs points de contact; les tangentes AC et AC' ou AC'' étant égales aux tangentes issues de A aux circonférences données de diamètres FF_1 et $F'F'_1$, on a l'une des relations

$$AC + AC' = AC + AC'' = k,$$
$$|AC - AC'| = |AC - AC''| = k;$$

il y a donc parmi les deux points C' et C'' un et un seul pour lequel la distance des points de contact CC' ou CC'' ait la longueur k; je choisis ce point, soit par exemple C', et je trace la circonférence O' passant par les points F', F'_1 et C'.

Comme la somme ou la différence des tangentes issues de A' aux circonférences O et O' est égale à k, c'est-à-dire à CC', on peut affirmer, d'après le lemme I, que A' est sur la deuxième tangente commune aux deux circonférences de même nature que CC'; je trace alors cette tangente, qui coupe AT_1 en un point S ou est parallèle à AT_1. On voit ainsi que sur chacune des tangentes issues de A à la circonférence O existe un point S et un seul déterminé comme on vient de le dire.

Je considère alors les sphères dont les circonférences O et O' sont des grands cercles, et un point M du plan donné dont la somme ou la différence des tangentes aux circonférences FF_1 et $F'F'_1$ soit égale à k; le plan MOO'S coupe les sphères suivant deux grands cercles et les tangentes issues de M à ces cercles ont leur somme ou leur différence égale à k. D'après le lemme I, M appartient à une tangente commune aux deux cercles de même nature que CC', autrement dit le point M appartient au cône de révolution de sommet S circonscrit à la fois aux deux sphères O et O', ce que nous voulions établir.

On peut remarquer, comme conséquence de ce qui précède, que le lieu des points M sera une ellipse si A et A' sont de part et d'autre de F et F_1, une hyperbole s'ils sont du même côté et une parabole si l'un des points A ou A' est rejeté à l'infini, ce qui arrivera, d'après les considérations développées précédemment, si la longueur k est égale à la distance des centres des circonférences données dans le plan de la courbe.

6. J'arrive maintenant au second théorème, que je suppose connu, et dont je vais démontrer la réciproque en me plaçant immédiatement dans le cas général, le cas d'une conique de foyer et de directrice donnés n'étant qu'un cas particulier que l'on traite par les mêmes considérations.

Nous considérons une circonférence de centre O_1 et de rayon r, une droite D_1D_2 située dans son plan, et les points M tels que la tangente MT à la circonférence et la distance MP à la droite soient entre eux dans un rapport donné e. Je vais d'abord démontrer, comme au § 4, qu'il existe en général deux positions A et A' de M sur la perpendiculaire O_1D menée du centre sur la droite ; on a en effet pour ces positions

$$\overline{AO_1}^2 - r^2 = e^2.\overline{AD}^2.$$

Il suffit de porter sur la droite D_1D_2 une longueur DD' égale à $\frac{r}{e}$ pour que la relation précédente entraîne la condition

$$\overline{AO_1}^2 = e^2.\,\overline{AD'}^2;$$

le point A est tel que le rapport de ses distances à deux points fixes est donné ; il se trouve alors à l'intersection de O_1D et d'une circonférence que l'on sait construire ; il existe donc deux positions de M sur O_1D ; l'une d'elles sera même rejetée à l'infini si $e = 1$. Nous supposerons dans ce qui suit que les deux points A et A' sont réels et extérieurs à la circonférence. On peut ajouter que A et A' sont du même côté ou de part et d'autre de O_1 suivant que e est > 1 ou < 1.

Cela posé, soient F et F_1 les extrémités du diamètre du cercle donné situé sur O_1D ; dans un plan mené par O_1D perpendiculairement au plan de la droite et du cercle je trace une circonférence quelconque O passant par F et F_1 (*fig.* 5) et je mène de A une des deux tangentes que l'on peut tracer de ce point à cette circonférence. Soient AT_1 cette tangente et C son point de contact; je trace DC qui coupe de nouveau la circonférence en C_1 et je mène la tangente au point C_1 ; elle est parallèle à la première ou la coupe en un point S, et coupe O_1D en un point A'' que je vais démontrer être confondu avec A'.

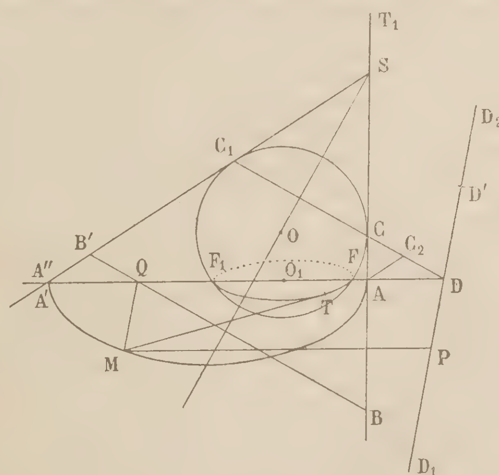


Fig. 5

Si l'on trace en effet AC_2 parallèle à SC_1, le triangle CAC_2 est isocèle comme étant semblable à CSC_1 et l'on a $AC_2 = AC$; les triangles semblables DAC_2 et $DA''C_1$ donnent ensuite

$$\frac{A''C_1}{A''D} = \frac{AC_2}{AD},$$

et comme ce dernier rapport est égal à $\frac{AC}{AD}$, c'est-à-dire au rapport donné e, A'' est confondu avec l'un des points A ou A' que nous avons déterminés sur O_1D ; comme il ne peut être confondu avec A puisque C et C_1 sont distincts, il est identique au point A'. L'application du théorème des transversales pourrait remplacer le raisonnement précédent.

Je trace la sphère dont la circonférence O est un grand cercle ; soit alors M un point du plan donné tel que le rapport entre la tangente MT à la circonférence donnée et la distance MP à la droite D_1D_2 soit égal à e ; par ce point je trace un plan perpendiculaire à SO, et je désigne par Q, B et B' les points où il coupe O_1D, SA et SA'. Les triangles semblables ABQ, ACD donnent

$$\frac{BC}{QD} = \frac{AC}{AD} = e,$$

et comme $QD = MP$, on en conclut que $MT = BC = B'C_1$.

Traçons alors le plan passant par M et SO, et coupant la sphère suivant un grand cercle; la longueur de la tangente issue du point M est égale à MT, c'est-à-dire à BC et à $B'C_1$; on en conclut, d'après le deuxième lemme, que les points M, B et B' sont équidistants du point O, ou bien que M est sur la circonférence de diamètre BB' ; il se trouve donc sur le cône de révolution de sommet S circonscrit à la sphère O, ce que nous voulions démontrer.

La construction des points A et A', et celle du triangle SAA' montrent que le lieu de M est une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que e est inférieur, supérieur ou égal à l'unité.

7. Remarque. — Nous avons démontré par ce qui précède l'identité des trois définitions suivantes d'une conique : C'est 1° la section plane d'un cône de révolution ; 2° l'ensemble des points dont la somme ou la différence des distances à deux points fixes, ou plus généralement des tangentes à deux circonférences fixes est constante ; 3° l'ensemble des points dont le rapport des distances à un point fixe et à une droite fixe, ou plus généralement le rapport des tangentes à un cercle fixe et des distances à une droite fixe est constant. Il résulte aussi de ce que nous avons vu au § 4, que, en général, la deuxième définition peut se ramener directement à la troisième, car la relation (1) entraîne la relation (3) qui n'est que la traduction de la troisième définition ; cette remarque n'est cependant pas suffisamment générale, car la circonférence qui intervient à ce propos n'existe pas toujours. La deuxième et la troisième définition sont cependant équivalentes dans tous les cas, puisqu'elles sont équivalentes à la première.

ALGÈBRE

4558. — *Eliminer p, q, r, s entre les cinq équations suivantes :*

$$p+q+r+s=-a.$$
$$pq+pr+ps+qr+qs+rs=b,$$
$$pqr+pqs+prs+qrs=-c,$$
$$pqrs=d, \qquad pq=-1.$$

Les deux dernières équations donnent immédiatement

$$pq=-1, \qquad rs=-d.$$

En tenant compte de ces deux valeurs dans les trois premières équations, il vient

$$p+q+r+s=-a, \tag{1}$$
$$-1+p(r+s)+q(r+s)-d=b, \tag{2}$$
$$r+s+d(p+q)=c. \tag{3}$$

L'équation (2) pouvant s'écrire

$$(p+q)(r+s)=b+d+1, \tag{2'}$$

tout revient à éliminer les deux quantités $p+q$ et $r+s$ entre les trois équations (1), (2') et (3).

Pour cela, résolvons d'abord le système du premier degré en $p+q$ et $r+s$ formé par les équations (1) et (3) ; on obtient

$$p+q=\frac{a+c}{d-1}, \qquad r+s=-\frac{ad+c}{d-1}.$$

Ces valeurs portées dans l'équation (2') conduisent à la relation cherchée :

$$(a+c)(ad+c)+(b+d+1)(d-1)^2=0.$$

(T. Lalescu, à Fàtticeni.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Ardin-Delteil ; L. Barberot ; E. Briqueler ; L. Cartier ; R. Coural ; G. Delahaye ; J. Delpont ; G. Desplats ; R. Dickson ; E. Foucart ; G. Foucry ; S. Galland ; M. Gondran ; R. Henry ; L. Lafontaine ; P. Le Verrier ; Meheust-Bily ; P. Millevoyé ; M. Oger ; A. Pichon ; A. Popescu ; R. P. ; J. Sallaud ; G. Tastet ; A. Tumerelle ; E. Vaunac ; Vial ; A. Vidalenc.]

GÉOMÉTRIE

4508. — *Par un point M d'une ellipse définie par son grand axe 2a et sa distance focale 2c on mène la normale MN jusqu'à la rencontre du grand axe en N, et les rayons vecteurs MF et MF'. On projette la normale MN sur les deux rayons vecteurs en Mn et Mn' :*

1° *Démontrer que ces projections sont égales à* $\frac{a^2-c^2}{a}$;

2° *Exprimer la surface du quadrilatère MnNn' et trouver la position de M pour laquelle ce quadrilatère est maximum ;*

3° *Exprimer la valeur de la tangente de l'angle α des deux rayons vecteurs pour le cas où la surface du quadrilatère vaut la moitié de celle du quadrilatère maximum ;*

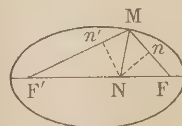
4° *Déterminer graphiquement la position du point M dans ce cas, en supposant $2a = 10$ et $2c = 8$.*

(*Bacc. lettres-sciences, Paris, juillet 1898.*)

1° On a $\qquad Mn = \sqrt{\overline{MN}^2 - \overline{Nn}^2}.$

Or, d'après deux théorèmes sur la bissectrice,

$$\overline{MN}^2 = MF.MF' - NF.NF',$$



$$\frac{NF}{MF} = \frac{NF'}{MF'} = \frac{FF'}{MF+MF'} \quad \text{ou} \quad \frac{c}{a},$$

d'où, en éliminant NF, NF',

$$\overline{MN}^2 = MF.MF'\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right);$$

d'ailleurs, en égalant deux expressions de l'aire MFF', il vient

$$\frac{1}{2}(MF.Nn + MF'.Nn') = \frac{1}{2}Nn(MF+MF')$$
$$= \sqrt{(a+c)(a-c)(a+c-MF)(a+c-MF')},$$

d'où $\qquad Nn = \frac{\sqrt{(a^2-c^2)(MF.MF'-a^2+c^2)}}{a}.$

Par suite

$$Mn = \sqrt{\frac{MF.MF'(a^2-c^2)}{a^2} - \frac{(a^2-c^2)MF.MF'}{a^2} + \frac{(a^2-c^2)^2}{a^2}} = \frac{a^2-c^2}{a}.$$

2° La surface du quadrilatère $MnNn'$ a pour expression

$$S = 2MNn = Mn.Nn = \frac{a^2-c^2}{a^2}\sqrt{(a^2-c^2)(MF.MF'-a^2+c^2)}.$$

Cette surface devient maximum en même temps que le produit variable $MF.MF'$, dont la somme $2a$ des facteurs est constante.

On sait que dans ce cas, ce produit atteint son maximum lorsque

$$MF = MF' = a\,;$$

le point M se confond alors avec l'une des extrémités du petit axe. et $S = \frac{b^3c}{a^2}$.

3° On a

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{Nn}{Mn} = \frac{S}{\overline{Mn}^2}.$$

Or
$$Mn = \frac{a^2-c^2}{a}$$

et, par hypothèse,

$$S = \frac{1}{2}S_m = \frac{(a^2-c^2)c\sqrt{a^2-c^2}}{2a^2}.$$

Donc
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{c}{2\sqrt{a^2-c^2}} = \frac{c}{2b}.$$

4° La détermination géométrique du point M revient à construire le triangle MFF' défini par l'angle $FMF' = \alpha$, le côté opposé $FF' = 2c$ et la somme

$$FM + MF' = 2a$$

des deux autres côtés. En prolongeant le côté $F'M$ d'une longueur $MF_1 = MF$, on ramène la construction à celle du triangle F_1FF' défini par les deux côtés $FF' = 2c$, $F_1F' = 2a$ et l'angle $\widehat{FF_1F'} = \frac{\alpha}{2}$.

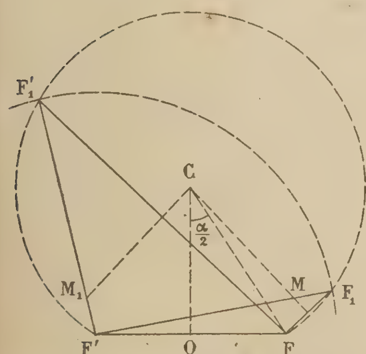
Dans le cas particulier énoncé,

$$2a = 10, \quad 2c = 8, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}\,;$$

on est ainsi conduit à la construction graphique suivante :

Sur la droite $F'F = 8$ comme base, on décrit un segment capable de l'angle $\frac{\alpha}{2}$ (le centre C de ce segment est tel que $OC = 6$, O étant le milieu de $F'F$; en effet,

$$\frac{OF}{OC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\Big)\,;$$



de F' comme centre, avec un rayon égal à 10, on trace une circonférence qui coupe le segment aux points F_1 et F'_1 : les perpendiculaires abaissées du point C sur les droites FF_1, FF'_1 rencontrent respectivement les droites $F'F_1$ et $F'F'_1$ aux points M et M_1 qui répondent à la question. En considérant le segment symétrique du segment C par rapport à $F'F$, on obtiendrait deux autres points M symétriques des premiers par rapport à $F'F$.

Nota. — Pour traiter cette dernière partie, presque tous nos correspondants se sont servis à tort de l'ellipse donnée, au lieu de chercher à obtenir directement, au moyen de la règle et du compas seuls, les points communs à cette ellipse et au cercle.

Autre solution. — 1° Soit α le demi-angle des rayons vecteurs MF et MF'. Le triangle MNn donne $Mn = MN\cos\alpha$. Des théorèmes connus sur la bissectrice donnent

$$\overline{MN}^2 = MF.MF' - NF.NF'\,;$$

$$\frac{NF}{MF} = \frac{NF'}{MF'} = \frac{FF'}{MF+MF'} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{NF.NF'}}{\sqrt{MF.MF'}}\,;$$

donc
$$NF.NF' = \frac{c^2}{a^2}.MF.MF',$$

et
$$\overline{MN}^2 = \left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)MF.MF'.$$

Le triangle MFF' donne d'autre part

$$4c^2 = \overline{MF}^2 + \overline{MF'}^2 - 2MF.MF'\cos 2\alpha$$
$$= (MF+MF')^2 - 2MF.MF'(1+\cos 2\alpha),$$

d'où
$$MF.MF'\cos^2\alpha = a^2 - c^2.$$

Par conséquent

$$\overline{Mn}^2 = \overline{MN}^2\cos^2\alpha = \left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)MF.MF'\cos^2\alpha$$
$$= \left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)(a^2-c^2) = \frac{(a^2-c^2)^2}{a^2}.$$

Donc
$$Mn = \frac{a^2-c^2}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

2° On a

$$\text{surf. } MnNn' = 2 \text{ surf. } MNn = Mn.MN\sin\alpha.$$

D'ailleurs

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1 - \frac{a^2-c^2}{MF.MF'}\,;$$

donc
$$S^2 = \overline{MN}^2\sin^2\alpha.\overline{Mn}^2$$
$$= \left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)MF.MF'\left(1-\frac{a^2-c^2}{MF.MF'}\right).\frac{(a^2-c^2)^2}{a^2}$$
$$= \left(1-\frac{c^2}{a^2}\right).\frac{(a^2-c^2)^2}{a^2}[MF.MF' - (a^2-c^2)].$$

Cette surface est maximum en même temps que le produit $MF.MF'$, dans lequel la somme des facteurs est constante et égale à $2a$; ce maximum est donc atteint quand

$$MF = MF' = a.$$

Il a pour valeur

$$S^2 = \frac{b^2}{a^2}.\frac{b^4}{a^2}c^2 = \frac{b^6c^2}{a^4}, \qquad \text{d'où} \qquad S = \frac{b^3c}{a^2}.$$

Le point M se confond alors avec l'extrémité b du petit axe.

3° Le triangle MNn donne

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Nn}{Mn} = \frac{MN\sin\alpha}{Mn} = \frac{Mn.MN\sin\alpha}{\overline{Mn}^2} = \frac{S}{\overline{Mn}^2}.$$

Par hypothèse la surface du quadrilatère est $\frac{b^3c}{2a^2}$. Donc

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{b^3c}{2a^2}}{\frac{b^4}{a^2}} = \frac{c}{2b}.$$

4° Pour déterminer M, il suffit de connaître MF et MF'. Or $MF + MF' = 2a$; on a montré que

$$MF.MF' = \frac{b^2}{\cos^2\alpha} = b^2(1+\operatorname{tg}^2\alpha).$$

Dans le cas actuel, on a $\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{2b}$; donc

$$MF.MF' = b^2\left(1+\frac{c^2}{4b^2}\right) = b^2 + \frac{c^2}{4}.$$

Donc

$$(\mathrm{MF}-\mathrm{MF}')^2=(\mathrm{MF}+\mathrm{MF}')^2-4\mathrm{MF}.\mathrm{MF}'=4a^2-(4b^2+c^2)=3c^2.$$

$$\text{val. abs. de}\quad (\mathrm{MF}-\mathrm{MF}')=c\sqrt{3}.$$

Des relations $\mathrm{MF}+\mathrm{MF}'=2a=10,$

$$\mathrm{MF}-\mathrm{MF}'=c\sqrt{3}=4\sqrt{3},$$

on conclut aisément MF et MF'.

[Ont résolu la même question : MM. L. Bois ; J. Bordas ; E. Bouby ; C. Bourveau ; Ch. Doumerc ; E. Gernez-Pfannmatter ; L. Giboin ; R. Henry ; R. Hüe ; Jacquet ; M. Joussel ; F. Ladevèze ; G. Nuzeret ; M. Pinçon ; J. Sallaud ; G. Schoonheere ; Vial.]

4560. — *Sur une sécante mobile* OAB *passant par le centre d'un cercle* O *on prend un point* B *tel que*

$$\overline{\mathrm{AB}}=k.\overline{\mathrm{OA}},$$

k étant un nombre quelconque ; on projette les points A *et* B *sur un diamètre fixe en* A' *et* B'. *On demande :*

1° *De trouver le lieu géométrique du point* M *où se coupent les droites* AB' *et* A'B ;

2° *De montrer que, lorsque le lieu de* M *est une ellipse, le grand axe est toujours double du petit axe, quel que soit k.*

Première solution. — 1° Par M menons la droite CC' parallèle à AA'. Le point C est le conjugué harmonique de O par rapport au segment AB (ces deux points divisent en effet AB dans le rapport $\frac{\mathrm{AA}'}{\mathrm{BB}'}$). En vertu d'une relation connue, on peut donc écrire

$$\frac{2}{\mathrm{OC}}=\frac{1}{\mathrm{OA}}+\frac{1}{\mathrm{OB}},$$

d'où, en remplaçant OA par R et OB par R(1 + k).

$$\mathrm{OC}=2\mathrm{R}.\frac{1+k}{2+k}.$$

La longueur OC étant constante, le lieu de C est une circonférence de centre O.

D'autre part, dans le trapèze ABB'A', le point M est le milieu de CC', comme intersection des deux diagonales. Le lieu de M est donc l'ellipse obtenue en réduisant de moitié l'ordonnée CC' du cercle décrit par C.

2° Le demi-petit axe de l'ellipse représente la moitié de l'ordonnée maximum, égale à OC et dont le pied est en O ; comme OC est d'ailleurs égale au demi-grand axe de l'ellipse, la seconde partie est justifiée.

(Ernest Foucart.)

Seconde solution. — Menons la droite OM qui rencontre AA' au point I. Ce point I est le milieu de AA' (d'après une propriété du trapèze), et il décrit par suite une ellipse admettant le cercle O comme cercle principal.

Je dis que le lieu de M est une ellipse concentrique semblable ; pour l'établir, il suffit de montrer que le rapport $\frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{IO}}$ est constant.

Dans le triangle OAI coupé par la transversale A'MB, on a

$$\frac{\overline{\mathrm{A'I}}}{\overline{\mathrm{A'A}}}\cdot\frac{\overline{\mathrm{BA}}}{\overline{\mathrm{BO}}}\cdot\frac{\overline{\mathrm{MO}}}{\overline{\mathrm{MI}}}=1.$$

Or

$$\frac{\overline{\mathrm{A'I}}}{\overline{\mathrm{A'A}}}=\frac{1}{2}$$

et

$$\frac{\overline{\mathrm{BA}}}{\overline{\mathrm{BO}}}=\frac{k}{k+1}.$$

Donc

$$\frac{\overline{\mathrm{MO}}}{\overline{\mathrm{MI}}}=\frac{2(k+1)}{k},$$

ou, en remplaçant chaque dénominateur par la différence entre ce dénominateur et le numérateur correspondant,

$$\frac{\overline{\mathrm{MO}}}{\overline{\mathrm{IO}}}=\frac{2(k+1)}{k+2}.$$

(Paul Bisch, lycée de Nancy.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Amblard ; V. Barol ; L.-A. Blanc ; A. Bouchet ; J. Delpont ; G. Foucry ; P. Herrmann ; Luiz Hémois ; Jacquet ; M. Oger ; J. Sallaud ; G. Tastet.]

4569. — *On joint un point quelconque* M *d'un cercle aux extrémités* A *et* B *d'un diamètre fixe. Par le point de rencontre* P *de* MA *avec le diamètre perpendiculaire à* AB, *on mène à* AB *la parallèle* PQ *rencontrant* MB *en* Q. *Lieu du point* Q.

Soit N la projection du point Q sur AB. Les triangles rectangles BNQ, POA ayant les angles en B et P égaux (côtés perpendiculaires) sont semblables. Donc

$$\frac{\mathrm{QN}}{\mathrm{NB}}=\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OP}},$$

ou, puisque $\mathrm{OP}=\mathrm{QN}$,

$$\overline{\mathrm{QN}}^2=\mathrm{AO.NB}.$$

Cette relation montre que le lieu de Q est une parabole de sommet B et dont le double paramètre est égal à AO. Comme AO = OB, son foyer F se trouve visiblement au quart de OB à partir de B.

La droite BM pouvant prendre toutes les positions possibles dans le plan, toute la courbe appartient au lieu.

(G. Foucry, école normale de Châlons-sur-Marne.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Amblard ; E. Ardin-Delteil ; L. Cartier ; R. Cordier ; J. Delpont ; E. Foucart ; M. Gondran ; Jacquet ; H. Janois ; Le Révérend ; P. Le Verrier ; M. Nahon ; J. Pastour ; Pelvoisin ; J. Sallaud ; G. Salles ; G. Tastet ; P. Tribier ; R. Turgis.]

TRIGONOMÉTRIE

4563. — *Si, dans un triangle, les cotangentes des angles* $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ *forment une progression arithmétique, on a*

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=3.$$

Première solution. — La condition imposée s'écrit

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}-\operatorname{cotg}\frac{B}{2}=\operatorname{cotg}\frac{B}{2}-\operatorname{cotg}\frac{C}{2},$$

ou

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=2\operatorname{cotg}\frac{B}{2}.$$

Comme A, B, C sont les angles d'un triangle, on peut remplacer $\operatorname{cotg} \frac{B}{2}$ par $\operatorname{tg} \frac{A+C}{2}$, puisque les arcs de ces deux lignes sont complémentaires. La relation précédente devient alors

$$\operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{A+C}{2},$$

ou, en développant le second membre et remplaçant les tangentes par leurs valeurs en fonction des cotangentes,

$$\operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = 2 \frac{\dfrac{1}{\operatorname{cotg} \frac{A}{2}} + \dfrac{1}{\operatorname{cotg} \frac{C}{2}}}{1 - \dfrac{1}{\operatorname{cotg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{C}{2}}}.$$

ce qui peut s'écrire

$$\operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = 2 \frac{\operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2}}{\operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2} - 1},$$

ou, en supprimant le facteur commun $\operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2}$, différent de zéro, et simplifiant,

$$\operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = 3.$$

(ABEL PICHON, lycée de Niort.)

Deuxième solution. — On sait que dans tout triangle, les cotangentes des angles $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ sont liées par la relation

$$\operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{cotg} \frac{B}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2}.$$

En tenant compte de l'hypothèse

$$\operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = 2 \operatorname{cotg} \frac{B}{2},$$

cette relation se réduit visiblement à la relation énoncée.

(P. LE VERRIER, lycée Janson de Sailly.)

Troisième solution. — D'après les formules connues,

$$\operatorname{cotg} \frac{A}{2} = \frac{p-a}{r}, \qquad \operatorname{cotg} \frac{B}{2} = \frac{p-b}{r}, \qquad \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = \frac{p-c}{r},$$

ces trois quantités seront en progression arithmétique en même temps que $p-a$, $p-b$, $p-c$ ou que les côtés a, b, c du triangle.

On peut donc appliquer ici la relation

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$$

établie page 71 (nº 4290) ; on en déduit immédiatement la relation énoncée.

(LÉON BARBEROT, au Valdoie.)

[Ont résolu la même question : MM. N. G. Alesandrescu ; A. Amblard ; E. Ardin-Delteil ; V. Barol ; R. Barthélemy ; G. Bieber ; C. Billionnet ; P. Blanc ; L. Bois ; J. Borgey ; A. Bouchet ; E. Briqueler ; L. Cartier ; Cavaillé ; R. Coural ; J. Danchaud ; P. Delolme ; G. Desplats ; R. Dickson ; Dunesme ; L. Ferron ; E. Foucart ; Ch. Gerbe ; M. Gondran ; S. Galland ; R. Henry ; F. Hernalsteens ; P. Herrmann ; H. Janois ; E. Kran ; F. Ladevèze ; L. Lafontaine ; Lalescu ; R. Lamothe ; Le Révérend ; H. Loignon ; C. Marie ; J. Marrot ; P. Millevoye ; S.-N. Mirea ; G. Nazare ; M. Oger ; H. Pilrat ; A. Popescu ; G. Quintard ; Ricumajou ; E. Rousselot ; J. Sallaud ; G. Salles ; G. Tastet ; M. Teulié ; C. Titre ; L. Troin ; J. Trouillé ; A. Tumerelle ; E. Vagneux ; R. Van Cauwenberghe ; H. Varennes ; E. Vaunac ; A. Vidalenc.]

PHYSIQUE

4550. — *Une lunette astronomique, formée de deux lentilles seulement, que l'on supposera très minces, est adaptée pour la vision à l'infini.*

Dans cette condition, elle grossit 20 fois, et la distance de ses deux verres est de 63cm. Cela posé, on vise avec cet instrument un astre dont le diamètre apparent est de 30 minutes ; puis on augmente le tirage de 5mm.

On demande quelle sera la nature, la position et la grandeur de l'image formée par l'oculaire.

(*Bacc. lettres-math., Paris, avril 1899.*)

Lorsque la lunette astronomique est disposée pour la vision à l'infini, le grossissement a pour valeur $\frac{F}{f}$, F et f désignant les distances focales respectives de l'objectif et de l'oculaire. En outre, la distance entre les deux lentilles est alors $F+f$.

D'après l'énoncé, on a

$$\frac{F}{f} = 20 \qquad \text{et} \qquad F+f = 63,$$

d'où

$$f = 3^{cm} \qquad \text{et} \qquad F = 60^{cm}.$$

Si l'on augmente le tirage de $0^{cm},5$, l'image fournie par l'objectif se trouvera placée à une distance de $3^{cm},5$ du centre optique de l'oculaire et donnera une image réelle, agrandie, renversée par rapport à l'image fournie par l'objectif, mais droite par rapport à l'astre.

La relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ permet de trouver la position de cette image. On a

$$p' = \frac{pf}{p-f} = \frac{3,5 \times 3}{3,5-3} = 21^{cm}.$$

L'image sera donc à 21^{cm} en avant de l'oculaire.

Pour avoir sa grandeur, il suffit d'appliquer la relation $\frac{i}{o} = \frac{p'}{p}$. Or o étant la grandeur de l'image fournie par l'objectif, on a

$$o = 2F \operatorname{tg} 15'.$$

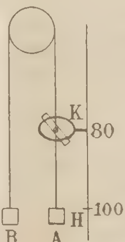
Par suite

$$i = \frac{p'}{p} \times 2F \operatorname{tg} 15' = \frac{21}{3,5} \times 2 \times 60 \times \operatorname{tg} 15' = 3^{cm},14.$$

(E. LE MAIGRE, à Pleyben.)

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil ; J. Borgey ; Cazeaux ; C. Doumerc ; E. Foucart ; P. Gutton ; M. Oger ; J. Touton ; Venet ; Vial.]

4572. — *Aux deux extrémités du cordon qui s'enroule sur la poulie de la machine d'Atwood sont suspendus deux poids égaux à 50gr. Au début, les deux poids B et A sont au repos. L'un deux, A, peut se déplacer le long d'une règle divisée en centimètres ; les divisions commencent à partir du haut. Il est au début en un point H, en face de la division 100. Le curseur évidé est placé en K à la division 80, de telle sorte que si le poids B descend et que A remonte le long de la règle, A traversera le curseur évidé et se surchargera d'un poids additionnel p de 2gr, déposé sur ce curseur. On donne, à la main, une impulsion au poids B, qu'on abandonne aussitôt qu'on l'a lancé, de manière à le faire descendre et à faire monter A. Le mouvement de A est uniforme entre H et K. Que devient-il ensuite ?*



1º La vitesse du mouvement uniforme entre H et K étant de 3cm par seconde, on demande jusqu'à quelle division de la règle s'élèvera le poids A une fois surchargé de p. On est en un lieu où

l'accélération prise par un corps pesant tombant en chute libre est 981 unités C. G. S.

2° *Quelle vitesse faudrait-il imprimer au poids A supposé au repos en H pour qu'il monte à la division 60 ? On suppose $g = 981$ unités C. G. S.*

(*Bacc. lettres-math. et lettres-sciences, Dijon, novembre 1897.*)

Le poids p de la masse additionnelle est une force constante agissant en sens inverse du mouvement ; le mouvement de A devient donc uniformément retardé au-dessus de K.

1° Le poids A montera jusqu'à ce que sa vitesse soit devenue nulle. On a alors

$$v - \gamma t = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad v_0 = \gamma t \qquad (1)$$

et

$$e = v_0 t - \frac{1}{2}\gamma t^2. \qquad (2)$$

L'accélération γ est donnée par la formule ordinaire de la machine d'Atwood :

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{m}{2M + m},$$

d'où

$$\gamma = \frac{2 \times 981}{102} = 19^{cm},23.$$

L'équation (1) s'écrit alors

$$3 = 19,23 \times t,$$

d'où

$$t = \frac{3}{19,23}.$$

Portant cette valeur de t dans l'équation (2), il vient

$$e = \frac{3 \times 3}{19,23} - \frac{19,23 \times 3^2}{2 \times \overline{19,23}^2} = 0^{cm},234.$$

Le poids A parcourra donc au-dessus de la division 80, $\frac{234}{1000}$ de division.

2° La vitesse qu'il faudrait imprimer au poids A pour qu'il monte à la division 60 s'obtient en appliquant les formules

$$e = v_0 t - \frac{1}{2}\gamma t^2,$$

$$v - \gamma t = 0.$$

Eliminant t entre ces deux équations, on a

$$e = \frac{v_0^2}{\gamma} - \frac{\gamma v_0^2}{2\gamma^2},$$

d'où

$$v_0 = \sqrt{2\gamma e} = \sqrt{2 \times 19,23 \times 20} = 27^{cm},7.$$

(R. FAZEMBAT, à Bazas.)

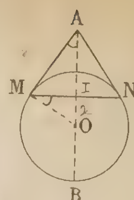
[Ont résolu la même question : MM. L. Barberot ; C. Billionnet ; Briqueler ; E. Chedeville ; H. Debenest ; P. Delolme ; E. Foucart ; S. Galland ; R. Henry ; E. Krau ; J. Lecaplain ; P. Millevoye ; M. Oger ; J. Sallaud ; Venet.]

QUESTIONS PROPOSÉES

4581. — Trois nombres a, b, c sont en progression géométrique ; on connaît leur somme $a + b + c = s$, et l'excès des deux extrêmes sur le moyen, $a + c - b = d$; trouver ces trois nombres.

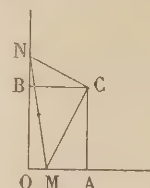
Application : $s = 224$, $d = 96$. 32 : 64 : 128.

(*Bacc. lettres-sciences, Clermont, avril 1898.*)



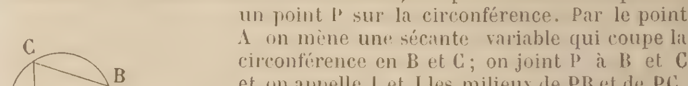
4582. — Etant donnée une sphère O, on propose de la couper par un plan MN de façon que la surface latérale du cône circonscrit à la sphère le long de la section plane, augmentée de m fois la surface de la zone extérieure MBN, soit égale à une surface donnée.

(*Bacc. lettres-math., Toulouse, avril 1899.*)



4583. — On donne un rectangle OACB dont les côtés sont $OA = a$, $OB = b$. On demande de déterminer sur les droites OA et OB des points M et N tels que l'angle MCN soit droit et que le rayon du cercle inscrit dans le triangle OMN ait une longueur donnée R. — Discussion. — Construction géométrique.

(*Bacc. lettres-math., Clermont, novembre 1898.*)



4584. — On donne une circonférence, un point A dans son plan et un point P sur la circonférence. Par le point A on mène une sécante variable qui coupe la circonférence en B et C ; on joint P à B et C et on appelle I et J les milieux de PB et de PC.

1° Démontrer que la droite IJ passe par un point fixe, M.

2° Démontrer que le produit MI × MJ est constant.

3° Trouver le lieu du milieu de IJ.

4° Construire les positions de la sécante ABC pour lesquelles PB = PC.

5° Construire les positions de la sécante ABC pour lesquelles IJ égale une longueur donnée a.

(*Bacc. lettres-math., Grenoble, novembre 1898.*)

4585. — Déterminer les abscisses des points d'intersection de la droite

(D) $$ax + by + c = 0$$

avec la parabole

(P) $$y^2 = 2px.$$

Discuter.

Conclure de la discussion l'équation de la tangente à la parabole (P).

Vérifier que le point d'intersection de deux tangentes rectangulaires quelconques est toujours sur une certaine droite fixe.

(*Bacc. lettres-sciences, Lille, mars 1899.*)

4586. — Déterminer les rayons vecteurs d'un point d'une ellipse par la condition que la résultante des forces représentées par ces rayons vecteurs ait une valeur donnée. Discussion.

(*Bacc. lettres-math., Montpellier, mars 1899.*)

4587. — L'équivalent mécanique de la chaleur est représenté par le nombre 425 lorsqu'on prend pour unités

de temps : la seconde ;
de longueur : le mètre ;
de force : le kilogramme-force ;
de quantité de chaleur : la grande calorie.

Quelle est la valeur numérique de cette constante lorsqu'on prend pour unités

de temps : la seconde ;
de longueur : le centimètre ;
de force : la dyne ;
de quantité de chaleur : la petite calorie ?

(*Bacc. lettres-math., Bordeaux, mars 1899.*)

4588. — Le courant d'une pile, dont la force électromotrice est de 50 volts, traverse une spirale conductrice de résistance inconnue. Quelle doit être la résistance de cette spirale pour que dans une minute le courant y dégage une quantité de chaleur égale à 1500 joules ? Quelle est l'intensité du courant fourni par la pile ?

On donne la résistance intérieure de la pile $\rho = 4$ ohms.

(*Bacc. lettres-sciences, Alger, mars 1899.*)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

23e Année. — N° 18. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 15 Juin 1899.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numeros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.
Abonnements .. Librairie Nony et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

SUR L'EXISTENCE DU TRIANGLE ÉQUILATÉRAL

Par M. **A. Vacquant**, Professeur au lycée de Nancy.

En lisant le *Traité de Géométrie* de M. C. Guichard, j'ai été étonné de voir l'existence du triangle équilatéral démontrée dans le chapitre VI du premier livre tandis que la définition du triangle équilatéral se trouve au commencement du chapitre II. L'auteur, dans sa préface, parle de ce fait. Avec lui, je pense qu'il est plus logique de démontrer plus tôt l'existence du triangle équilatéral. En voici une démonstration que l'on peut placer à la fin du chapitre II.

Je rappellerai d'abord le théorème suivant :

Théorème : Le supplément d'un angle d'un triangle est plus grand que chacun des deux autres angles. — Conséquence : Si un triangle a un angle obtus ou un angle droit, les deux autres angles sont aigus. En effet, si l'angle CAB est obtus ou droit, son supplément CAD est aigu ou droit. Comme les angles B et C sont inférieurs à l'angle CAD, on voit qu'ils sont aigus.

Cela étant, je considère un triangle isocèle ABC de sommet A fixe et dans lequel les côtés égaux AB et AC ont une longueur donnée b. Quand l'angle BAC augmente, le côté BC augmente (théorème connu); si l'angle BAC est obtus, les angles B et C sont aigus et on a $BC > b$. Quand AC vient coïncider avec AB, le point C vient en B et le côté BC est nul; (on peut démontrer que la direction de BC est alors une perpendiculaire en B à BA, mais cela est inutile pour arriver à la conclusion.) Lorsque AC vient sur le prolongement AD de BA, le point C vient en C′ tel que $AC' = b$ et on a $BC' = 2b$.

On voit donc que, dans le triangle isocèle BAC, si l'angle A croît de zéro à deux droits, le côté BC croît de 0 à $2b$; donc il existe une valeur et une seule de l'angle A pour laquelle $BC = b$, c'est-à-dire pour laquelle le triangle ABC devient équilatéral.

ARITHMÉTIQUE

4557. — *Quel que soit n, les deux expressions*
$$2^{12n+9} - 5^{4n+1} \quad \text{et} \quad 2^{12n+2} + 3^{3n+2}$$
sont toujours divisibles par 13.

Première solution. — Cherchons d'abord quelles sont les plus petites puissances de 2, 3 et 5 qui sont de l'une des formes $m.13 \pm 1$. On a

$$2 = m.13 + 2, \qquad 2^4 = m.13 + 16 = m.13 + 3,$$
$$2^2 = m.13 + 4, \qquad 2^5 = m.13 + 6,$$
$$2^3 = m.13 + 8, \qquad 2^6 = m.13 + 12 = m.13 - 1 ;$$

de même

$$3 = m.13 + 3, \qquad 5 = m.13 + 5,$$
$$3^2 = m.13 + 9, \qquad 5^2 = m.13 + 25 = m.13 - 1.$$
$$3^3 = m.13 + 27 = m.13 + 1.$$

Transformons maintenant les expressions données en mettant en évidence les plus hautes puissances de 2^6, 3^3 et 5^2. Il vient

$$2^{12n+9} - 5^{4n+1} = (2^6)^{2n+1}.2^3 - (5^2)^{2n}.5$$
$$= (m.13 - 1)^{2n+1}.8 - (m.13 - 1)^{2n}.5$$
$$= m.13 - 8 - (m.13 + 5) = m.13 - (8 + 5) = m.13.$$
$$2^{12n+2} + 3^{3n+2} = (2^6)^{2n}.2^2 + (3^3)^n.3^2$$
$$= (m.13 - 1)^{2n}.4 + (m.13 + 1)^n.9$$
$$= m.13 + 4 + m.13 + 9 = m.13 + 4 + 9 = m.13.$$

(J. Danchaud, lycée de Guéret.)

Deuxième solution. — On a successivement
$$2^{12n+9} = (2^3)^{4n+3} = (13 - 5)^{4n+3} = m.13 - 5^{4n+3} ;$$
la première expression devient donc
$$2^{12n+9} - 5^{4n+1} = m.13 - 5^{4n+1}(5^2 + 1) = m.13.$$
En remarquant de même que
$$2^{12n+2} = (2^4)^{3n}.2^2 = (13 + 3)^{3n}.2^2 = m.13 + 3^{3n}.2^2,$$
la seconde expression s'écrit
$$2^{12n+2} + 3^{3n+2} = m.13 + 3^{3n}(2^2 + 3^2) = m.13.$$

(L. Barberot, au Valdoie.)

Troisième solution. — Pour $n = 0$, on vérifie directement que les deux expressions sont divisibles par 13 ; pour que cette propriété s'étende à une valeur quelconque de n, il suffit de montrer qu'en changeant n en $n + 1$, chacune des deux expressions augmente d'un multiple de 13.

En effet, on a, pour la première expression,
$$2^{12(n+1)+9} - 5^{4(n+1)+1} - (2^{12n+9} - 5^{4n+1})$$
$$= 2^{12n+9}(2^{12} - 1) - 5^{4n+1}(5^4 - 1) ;$$
or
$$2^{12} - 1 = (2^6 - 1)(2^6 + 1) = (2^6 - 1)5 \times 13 = m.13,$$
$$5^4 - 1 = (5^2 - 1)(5^2 + 1) = (5^2 - 1)2 \times 13 = m.13.$$

On vérifie de même que la seconde expression s'augmente de la quantité
$$2^{12n+2}(2^{12} - 1) + 3^{3n+2}(3^3 - 1) = m.13.$$

(J. Fiton, instituteur à Agen.)

(Ont résolu la même question : MM. N.-G. Alesandrescu ; A. Amblard ;

V. Barol ; R. Bellencourt ; C. Billionnet ; L. Bois ; E. Bonnet ; J. Borgey ; A. Bouchet ; C. Bourveau ; R. Van Cauwenberghe ; R. Coural ; P. Delolme ; G. Desplats ; F. Deville ; E. Foucart ; G. Foucry ; Framboise ; M. Gondran ; R. Henry ; H. Janois ; E. Kran ; T. Lalescu ; C. Lefebvre ; E. Le Maigre ; P. Le Verrier ; H. Loignon ; C. Marie ; B. Mathé ; Mehcust-Bily ; J. Ménechal ; P. Millevoye ; S.-N. Mirea ; G. Nazare ; M. Oger ; J. Pémartin ; H. Pitrat ; A. Popescu ; J. Sallaud ; G. Tastet ; J. Trouille ; R. Turgis ; H. Varennes ; E. Vaunac ; B. Carrière ; Venet.]

4565. — *Démontrer que l'expression*

$$2^{3n+3} - 7n + 41$$

est divisible par 49.

Première démonstration. — En observant que

$$2^3 \text{ ou } 8 = \text{m}.\,49 + 7 + 1, \qquad (1)$$

on en déduit, par l'élévation au carré,

$$8^2 = \text{m}.\,49 + 49 + 2.7 + 1 = \text{m}.\,49 + 2.7 + 1,$$

puis en multipliant ce résultat et les suivants successivement par (1)

$$8^3 = \text{m}.\,49 + (2.7 + 1)(7 + 1) = \text{m}.\,49 + 3.7 + 1,$$
$$8^4 = \text{m}.\,49 + (3.7 + 1)(7 + 1) = \text{m}.\,49 + 4.7 + 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$8^{n+1} = \text{m}.\,49 + (n.7 + 1)(7 + 1) = \text{m}.\,49 + (n + 1)7 + 1.$$

L'expression donnée devient alors

$$\text{m}.\,49 + (n + 1)7 + 1 - 7n + 41 = \text{m}.\,49 + 49 = \text{m}.\,49.$$

Deuxième démonstration. — Comme $41 = 49 - 8$, tout revient à établir la divisibilité par 49 de l'expression

$$2^{3n+3} - 7n - 8.$$

Or cette dernière expression s'écrit successivement

$$8^{n+1} - 1 - (n + 1)7$$
$$= (8 - 1)(8^n + 8^{n-1} + \cdots + 1) - (n + 1)7$$
$$= 7(8^n + 8^{n-1} + \cdots + 8 - n)$$
$$= 7(8^n - 1 + 8^{n-1} - 1 + \cdots + 8 - 1).$$

Toutes les différences de la somme entre parenthèses sont divisibles par $8 - 1$ ou 7; cette somme elle-même est donc multiple de 7, et l'expression précédente représente un multiple de 7×7 ou 49.

Troisième démonstration. — Pour $n = 0$, l'expression énoncée se réduit à 49. Il suffit donc de démontrer qu'en supposant la divisibilité vraie pour une certaine valeur n, elle subsiste encore pour la valeur $n + 1$.

Or pour deux valeurs entières consécutives de n, la différence entre les valeurs correspondantes de l'expression s'exprime par

$$[2^{3(n+1)+3} - 7(n + 1) + 41] - (2^{3n+3} - 7n + 41)$$
$$= 2^{3n+3}(2^3 - 1) - 7 = 7(8^{n+1} - 1).$$

Le binome $8^{n+1} - 1$ étant divisible par $8 - 1$ ou 7, la différence considérée est divisible par 7×7 ou 49, autrement dit l'expression s'augmente d'un multiple de 49 lorsqu'on passe d'une valeur quelconque n à la valeur suivante $n + 1$.

C. q. f. d.

Remarque. — Plus généralement, on établirait de la même façon la divisibilité suivante :

$$(a + 1)^k - ka - 1 = \text{mult. } a^2.$$

(A. POPESCU, lycée de Jassy.)

[Ont résolu la même question : MM. G. Alesandrescu ; A. Amblard ; A. Arcizet ; L. Barberot ; V. Barol ; C. Billionnet ; J. Borgey ; H. de Buchet ; B. Carrière ; R. Cordier ; R. Coural ; H. Damoiseau ; J. Danchaud ; H. Debenest ; P. Delolme ; J. Fiton ; E. Foucart ; G. Foucry ; R. Henry ; H. Janois ; E. Kran ; J.-M. Lagarde ; E. Le Maigre ; P. Le Verrier ; H. Loignon ; L. de Longueville ; C. Marie ; Méliat ; M. Oger ; Pelvoisin ; E. Rousselot ; J. Sallaud ; J. Trouillé ; R. Turgis ; Valette ; Venet ; F. Vérot ; Tr. Lalescu ; Ch. Lefebvre ; G. Nazaré.]

ALGÈBRE

4573. — *On considère une progression arithmétique indéfinie ayant* 1 *pour premier terme et* 3 *pour raison, et avec les termes de cette suite on forme des groupes dont le premier contient le premier terme* 1, *le second les deux termes suivants*, 4 *et* 7, *le troisième les trois termes à la suite, etc... On demande d'évaluer le premier terme du* n^e *groupe, le* n^e *terme du* n^e *groupe et la somme des* n *termes du* n^e *groupe.*

(*Bacc. lettres-math., Caen, mars 1899.*)

Soit $\div 1.4.7 \ldots\ldots 1 + 3(n - 1) \ldots\ldots$ la progression arithmétique indéfinie considérée.

Dans cette suite le premier terme constitue le premier groupe; les deux termes suivants le deuxième groupe; le n^e groupe comprend par suite les n termes qui suivent les termes composant les groupes précédents et dont le nombre est

$$1 + 2 + \ldots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Le n^e groupe commence donc par le terme

$$1 + 3\,\frac{n(n-1)}{2} = \frac{3n^2 - 3n + 2}{2}$$

et se termine par le n^e terme qui suit ce terme, égal à

$$\frac{3n^2 - 3n + 2}{2} + 3(n - 1) = \frac{3n^2 + 3n - 4}{2}.$$

Connaissant les termes extrêmes a et l de la progression arithmétique de n termes formant le n^e groupe, on a pour somme des termes de ce groupe

$$\text{S} = \frac{(a + l)n}{2} = \left(\frac{3n^2 - 3n + 2}{2} + \frac{3n^2 + 3n - 4}{2}\right)\frac{n}{2}$$
$$= \frac{n(3n^2 - 1)}{2}.$$

(VICTOR BAROL, école primaire supérieure de Lorgues.)

[Ont résolu la même question : Mlle M. Pont ; MM. N.-G. Alesandrescu ; E. Ardin-Delteil ; L. Barberot ; R. Barthélemy ; E. Baudouin ; R. Bellencourt ; M. Bertrand ; C. Billionnet ; L. Bois ; E. Briqueler ; R. Van Cauwenberghe ; R. Coural ; H. Damoiseau ; G. Delolme ; G. Desplats ; R. Dickson ; Donnadieu ; Ch. Doumerc ; H. Dodier ; A.-C. Duval ; J. Fiton ; E. Foucart ; G. Foucry ; M. Gondran ; P. Gutton ; R. Henry ; F. Hernalsteens ; H. Janois ; A. Lecoutour ; Ch. Lefebvre ; E. Le Maigre ; R. Lequeux ; A. Le Révérend ; H. Loignon ; G. Marquet ; F. Martin ; B. Mathé ; J. Ménéchal ; P. Millevoye ; M. Nahon ; G. Nazare ; M. Oger ; L. Patin ; J. Pémartin ; A. Pichon ; A. Popescu ; R. P. ; J. Reynaud ; Rieumajou ; E. Rousselot ; M. Royer ; J. Sallaud ; G. Salles ; F. Schmitt ; Texonnière ; E. Tiquet ; Tumerelle ; F. Vérot ; A. Vidalenc ; J. Vignier ; R. Vollaire ; H. Debenest ; V. D. L., à Felletin.]

GÉOMÉTRIE

4325. — *On considère une droite* YY′ *et un point* A *situé en dehors de cette droite. On joint le point* A *à un point quelconque* B *de* YY′, *puis on construit un rectangle* ABMN *dont* AB *soit un côté et dont la diagonale* BN *soit perpendiculaire à* YY′. *On demande de trouver, lorsque le point* B *se déplace sur* YY′ :

1° *Le lieu géométrique du point d'intersection* O *des diagonales;*

2° *Le lieu géométrique du sommet* M *du rectangle opposé au point* A ;

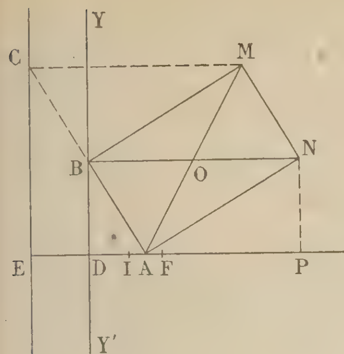
3° *Le lieu géométrique du sommet* N.

(*Bacc. lettres-sciences, Bordeaux, juillet 1897.*)

1° *Lieu du point* O. — Les diagonales du rectangle ABMN étant égales, on a

$$\text{OA} = \text{OB}.$$

Le lieu du point O est donc celui des points équidistants du point A et de la droite YY′, c'est-à-dire une parabole ayant pour foyer A et pour directrice YY′.



2° *Lieu du point* M. — Prolongeons AB d'une longueur égale BC. Le point C décrit une droite homothétique de YY′ par rapport à A; cette droite est parallèle à YY′ et passe par le symétrique E de A par rapport à YY′. Tirons MC. Les triangles MAC, OAB étant semblables et OA étant égal à AB,

$$MC = MA.$$

D'ailleurs, dans le triangle AMC, le côté MC est parallèle à la droite BO qui joint les milieux des deux autres côtés, de sorte que MC est perpendiculaire à YY′ ou CE. Il en résulte que le lieu de M est aussi une parabole de même foyer A et qui admet CE pour directrice.

3° *Lieu du point* N. — Menons NP perpendiculaire à DA. Les triangles rectangles ANP, BAD ayant les angles en A complémentaires sont semblables ; par suite

$$\frac{NP}{PA} = \frac{DA}{DB},$$

ou, comme DB = NP,

$$\overline{NP}^2 = DA.AP.$$

Cette relation montre que le lieu de N est une parabole de sommet A et dont le paramètre est égal à $\frac{DA}{2}$. Le foyer F et le pied I de la directrice de cette parabole s'obtiennent en prenant $AF = AI = \frac{DA}{4}$.

(Claudius JACQUET, lycée de Mâcon.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Ballé ; P. Barroué ; Bayor ; de Bersaucourt ; E. Brière ; G. Charpentier ; F. Chuberre ; M. Cryé ; L. Cussenot ; R. Dautry ; G. Dazier ; L. Dumas ; Feintuch ; L. Florentin ; L. Fournier ; F. Geltzenlichter ; P. Goudry ; L. Gourdet ; G. M. ; G. Hiernaux ; L. Jardin ; Laguarrigue de Survilliers ; E. Layes ; H. Lefèvre ; Legros ; L. Magne ; G. Marquet ; A. Mirc ; A. Nayel ; J. Patou ; Patrinos ; F. Pégorier ; J. Pillard ; M. Rebeix ; Robin ; H. Roure : R. Sabbathier ; E. Sevin ; Sinturel ; J. Sire ; R. Sudre ; Tiret ; Watrin ; L. Wollaire.]

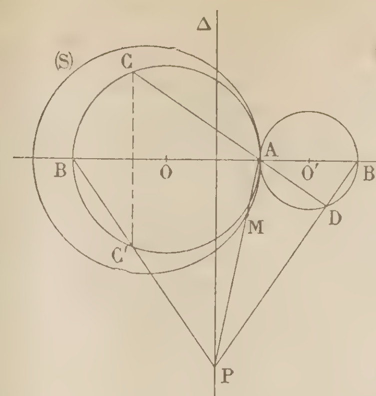
4535. — *On donne deux circonférences* O *et* O′, *tangentes en un point* A. *Soit* BOO′B′ *la ligne des centres. On mène par* A *une droite quelconque qui rencontre le cercle* O *en* C, *et le cercle* O′ *en* D. *On prend le symétrique de* C *par rapport à la ligne des centres, soit* C′. *On joint* B *et* C′, B′ *et* D ; *ces droites se rencontrent en un point* P. *On joint* A *et* P.

1° *Lieu de* M, *point sur la droite* AP, *tel que*

$$AM \times AP = m^2.$$

2° *Construire un triangle ayant un sommet en* B′, *et dont les deux autres sommets soient situés respectivement sur le lieu de* P *et le lieu de* M. *Ce triangle doit être semblable à un triangle donné.*

1° Le triangle PBB′ est isocèle, car l'angle inscrit PBA est égal à l'angle inscrit C′CA, lequel est lui-même égal à l'angle PB′B (côtés perpendiculaires).

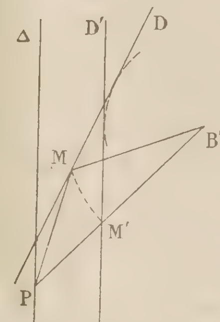


Le point P est ainsi équidistant des deux points fixes B et B′ ; le lieu de P est donc la perpendiculaire Δ élevée au milieu de BB′.

Le point M étant l'inverse du point P par rapport au pôle A et au module m^2 décrit l'inverse de la droite A, c'est-à-dire une circonférence (S), tangente en A aux cercles O et O′.

Lorsque la sécante CAD pivote autour de A, P décrit entièrement la droite Δ et M la circonférence inverse.

2° Pour résoudre la seconde partie, cherchons d'abord le lieu du sommet M d'un triangle toujours semblable à lui-même, dont l'un des deux autres sommets B′ est fixe, le dernier sommet P parcourant la droite Δ.



Rabattons le côté MB′ en M′B′ sur le côté PB′. Le point M′ divisant la droite PB′ dans un rapport connu décrit une droite D′ parallèle à Δ. Par une rotation de l'angle connu MB′M′, l'angle B′M′D′ vient occuper la position B′MD, et le lieu de M est la droite D qui fait avec D′ ou Δ l'angle connu MB′P.

Le problème proposé revient alors à déterminer l'intersection du cercle (S) avec la droite D et comporte, suivant le cas, deux, une ou pas de solution.

On peut, en général, construire sur PB′ douze triangles semblables à un triangle donné, car on peut prendre PB′ pour plus grand, plus petit ou moyen côté. En outre, dans chaque cas on peut placer le triangle à droite ou à gauche de PB′, et cela de deux façons différentes, suivant qu'on place un sommet ou l'autre en P.

Le nombre des solutions diminuerait si le triangle était isocèle ou équilatéral. En tout cas on a au plus 12 triangles ainsi construits et par suite 24 solutions.

(G. CHOLLET, instituteur à Largeasse.)

[Ont résolu cette question : MM. R. Bazin ; R. Bellencourt ; P. Bisch ; E. Bouby ; P. Brignon ; B. Carrière ; C. Doumerc ; E. Foucart ; G. Foucry ; M. Oger ; R. P. ; Ribes ; G. Schoonheere ; R. Thomas ; A. Amblard ; J. Borgey ; P. Cazeaux ; R. Coural ; L. Curt ; R. Dickson ; J. Lehmann ; Venet ; Vial ; Vincent.]

4576 et **4583.** — *En un point* A *donné du plan d'un angle droit* xOy, *on demande de former un angle droit* mAn *tel que la droite* MN *joignant les points* M, N *où ses côtés coupent ceux du premier, ait une longueur donnée* a.

(*Bacc. lettres-math.*, *Rennes, mars 1899.*)

Solution géométrique. — Le quadrilatère ANOM ayant deux angles opposés droits est inscriptible dans un cercle de diamètre $MN = a$. Par suite le centre C de ce cercle s'obtient en

décrivant des points connus O et A comme centres deux circonférences de rayon $\frac{a}{2}$; ces circonférences se coupent en deux points C et C′ auxquels correspondent deux solutions du problème.

On peut encore déterminer le point C comme l'intersection d'un des cercles O ou A avec la perpendiculaire élevée au milieu I de OA. Soient D et E les points où cette perpendiculaire rencontre Ox et Oy.

En supposant la condition de possibilité $OC \geqslant OI$, ou $a \geqslant OA$ remplie, les deux points C existent toujours, mais suivant le cas l'un de ces points peut tomber en dehors du segment DE et l'un des points M ou N vient alors sur l'un des prolongements des côtés de l'angle xOy.

Par suite l'angle droit mAn ne coupe réellement les côtés de l'angle droit xOy que lorsque

$$\frac{a}{2} < OD, \qquad \text{ou} \qquad \frac{a}{2} < OE\,;$$

suivant que ces deux conditions existent simultanément ou isolément, le problème posé comporte deux solutions ou une seule.

(G. MARQUET, instituteur à Toulouse.)

[Ont résolu la question par la géométrie : MM. N.-G. Alesandrescu ; L. Barberot ; V. Barol ; P. Blanc ; L. Bois ; G. Bouju ; A. Carré ; Ceytre ; L. Charles ; V. Chosson ; Cougnoux ; R. Coural ; P. Delolme ; H. Dodier ; L. Fabia ; G. Foucry ; P. Fournel ; M. Gondran ; E. Hélary ; H. Janois ; C. Labille ; T. Lalescu ; A. Lecoutour ; B. Mathé ; L. Maumejean ; P. Millevoye ; F. Monseran ; J. Mouchet ; M. Oger ; A. Popescu ; Remondet ; E. Rousselot ; J. Sallaud ; G. Schoonheere ; A. Texonnière ; F. Vérot.]

Solution algébrique. — Proposons-nous de calculer les longueurs $AM = x$, $AN = y$ en fonction de a et des coordonnées $OA' = b$, $A'A = c$ du point A.

Comme $\widehat{ANM} = \widehat{AOM}$ (même mesure), les triangles rectangles MAN, AA′O sont semblables et donnent

$$\frac{AM}{A'A} = \frac{MN}{AO} = \frac{AN}{OA'},$$

ou

$$\frac{x}{c} = \frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{y}{b}.$$

On tire de là

$$x = \frac{ac}{\sqrt{b^2+c^2}}, \qquad y = \frac{ab}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

En traçant de A comme centre avec x et y pour rayons deux circonférences, elles déterminent respectivement sur Ox et Oy deux points M et deux points N correspondant à deux solutions.

Ces solutions n'existent qu'autant qu'on a

$$x \geqslant c \qquad \text{et} \qquad y \geqslant b,$$

c'est-à-dire

$$a^2 \geqslant b^2 + c^2. \qquad (1)$$

D'ailleurs, MN qui est égal à a, est un diamètre du cercle dont OA, qui est égal à $\sqrt{b^2+c^2}$, est une corde.

Pour que les côtés de l'angle MAN coupent ceux de XOY, et non leurs prolongements, il faut et il suffit que O soit dans l'angle MAN, ou autrement dit que M soit entre O et le point K situé sur la perpendiculaire élevée en A sur OA.

On aura donc une solution correspondant à un point M à gauche de A′, si

$$x < OA = \sqrt{b^2+c^2}, \qquad \text{ou} \qquad ac < b^2 + c^2, \qquad (2)$$

et une autre correspondant à un point situé à droite si

$$x < AK\,; \qquad (3)$$

or

$$\overline{AK}^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{A'K}^2,$$

$$A'K = \frac{\overline{AA'}^2}{OA'} = \frac{c^2}{b}\,;$$

donc

$$\overline{AK}^2 = c^2 + \frac{c^4}{b^2} = \frac{c^2(b^2+c^2)}{b^2},$$

et la condition (3) s'exprime par

$$ab < b^2 + c^2.$$

Les valeurs de a qui transforment en égalités les inégalités de condition sont, si $b > c$, dans l'ordre de grandeur suivant :

$$\sqrt{b^2+c^2} < \frac{b^2+c^2}{b} < \frac{b^2+c^2}{c}\,;$$

si a est compris entre les deux premières, on a deux solutions ; si a est compris entre les deux dernières, on a une solution ; si a n'est dans aucun de ces intervalles, on n'a pas de solution.

(René LAVALLÉE, lycée de Bordeaux.)

[Ont résolu la question par l'algèbre : MM. E. Ardin-Delteil ; R. Bellencourt ; C. Billionnet ; E. Briqueler ; R. Van Cauwenberghe ; Broutin ; Desplats ; F. Deville ; Donnadieu ; Ch. Doumerc ; R. Fazembat ; J. Fiton ; E. Gillaizeau ; E. Girardeau ; Ch. Godard ; P. Gutton ; R. Heury ; G. Jodart ; G. Lallier ; E. Le Maigre ; G. Le Sage ; M. Nahon ; L. Patin ; A. Picard ; Remondet ; R. P. ; G. Salles ; A. Sallin ; F. Schmitt ; J. Talvard ; Tumerelle ; A. Vidalenc ; J. Vignier.]

Solution trigonométrique. — Menons par A les parallèles AA′, AB′ à Oy, Ox, et calculons la valeur commune x des angles égaux MAA′, NAB′.

Le triangle rectangle AMN donne

$$\overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 = a^2.$$

Or

$$\frac{AM}{c} = \frac{AN}{b} = \frac{1}{\cos x},$$

donc

$$c^2 + b^2 = a^2 \cos^2 x,$$

d'où

$$\cos x = \pm\left|\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}\right|.$$

L'angle MAA′ étant toujours aigu, on doit écarter la valeur négative de $\cos x$. Pour que la valeur positive représente un cosinus, il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a} \leqslant 1, \qquad \text{ou} \qquad a^2 \geqslant b^2 + c^2.$$

Il existe alors deux angles x égaux et de signes contraires qui déterminent deux points M ou N symétriques par rapport à A′ ou B′.

Le point M, à droite de A′, donne une solution si

$$x < A'AK,$$

ou

$$\cos x > \cos A'AK,$$

ce qui s'exprime par

$$\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a} > \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}},$$

ou encore

$$ab < b^2 + c^2.$$

Le point M, à gauche de A′, donne une solution si

$$x < OAA',$$

ou

$$\cos x > \cos OAA',$$

ce qui s'exprime par

$$\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a} > \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}},$$

ou encore $ac < b^2 + c^2$,

résultats conformes à ceux déjà obtenus.

(Eugène HELARY, lycée de Saint-Brieuc.)

[Ont résolu la solution par la trigonométrie : Mlle M. Pont ; MM. H. Dodier ; Remondet ; M. Teulié ; Vien.]

TRIGONOMÉTRIE

4504. — *Démontrer que*

$$\sin x > \frac{x}{12}\left(4 - \frac{x^2}{9}\right)\left(3 - \frac{x^2}{9}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9}\right) \qquad si \qquad x < \frac{\pi}{6}.$$

Posons $x = 3y$ et considérons l'identité

$$\sin 3y = \sin y(4\cos^2 y - 1). \qquad (1)$$

On sait que si $y < \frac{\pi}{2}$, on a

$$\sin y > y - \frac{y^3}{4} \qquad \text{et} \qquad \cos y > 1 - \frac{y^2}{2}. \qquad (*)$$

En remplaçant dans l'égalité (1), $\sin y$ et $\cos y$ par des valeurs plus petites, on diminue son second membre ; il vient alors

$$\sin 3y > \left(y - \frac{y^3}{4}\right)\left[4\left(1 - \frac{y^2}{2}\right)^2 - 1\right],$$

ce qui peut s'écrire

$$\sin 3y > \frac{y}{4}(4 - y^2)(2 - y^2 + 1)(2 - y^2 - 1)$$

ou, en changeant y en $\frac{x}{3}$,

$$\sin x > \frac{x}{12}\left(4 - \frac{x^2}{9}\right)\left(3 - \frac{x^2}{9}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9}\right).$$

[M. H. Janois, à Nogent-le-Bernard, a résolu cette question.]

4570. — *Soient l_a, l_b, l_c les bissectrices des angles d'un triangle opposés aux côtés a, b, c. Démontrer que*

$$c\left[l_bl_c \cos\frac{A}{2} + l_cl_a \cos\frac{B}{2} - l_al_b \cos\frac{C}{2}\right]$$

$$= b\left[l_bl_c \cos\frac{A}{2} + l_al_b \cos\frac{C}{2} - l_cl_a \cos\frac{B}{2}\right]$$

$$= a\left[l_cl_a \cos\frac{B}{2} + l_al_b \cos\frac{C}{2} - l_bl_c \cos\frac{A}{2}\right]$$

$$= l_al_bl_c.$$

Si l_{1a}, l_{1b}, l_{1c} sont les bissectrices extérieures des angles d'un triangle, on a

$$l_{1b}l_{1c} \sin\frac{A}{2} + l_{1c}l_{1a} \sin\frac{B}{2} + l_{1a}l_{1b} \sin\frac{C}{2} = 0.$$

En divisant chaque membre par $l_al_bl_c$, les trois premières égalités à démontrer reviennent à

$$c\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{l_a} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{l_b} - \frac{\cos\frac{C}{2}}{l_c}\right) = b\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{l_a} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{l_c} - \frac{\cos\frac{B}{2}}{l_b}\right)$$

$$= a\left(\frac{\cos\frac{B}{2}}{l_b} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{l_c} - \frac{\cos\frac{A}{2}}{l_a}\right) = 1.$$

Or, d'après une formule connue (V. *Relations entre les éléments d'un triangle*, formule 212, p. 22), on a

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{l_a} = \frac{b+c}{2bc}, \qquad \frac{\cos\frac{B}{2}}{l_b} = \frac{c+a}{2ca}, \qquad \frac{\cos\frac{C}{2}}{l_c} = \frac{a+b}{2ab}.$$

On déduit de là

$$c\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{l_a} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{l_b} - \frac{\cos\frac{C}{2}}{l_c}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{b} + \frac{c+a}{a} - \frac{c(a+b)}{ab}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{ab+ac+bc+ab-ca-cb}{ab}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2ab}{ab} = 1.$$

On verrait de même que les deux autres membres des égalités précédentes se réduisent à 1.

La quatrième égalité à établir peut s'écrire

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{l_{1a}} + \frac{\sin\frac{B}{2}}{l_{1b}} + \frac{\sin\frac{C}{2}}{l_{1c}} = 0.$$

Or en vertu d'une formule connue (V. formule 213 des *Relations*), on a

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{l_{1a}} = \frac{b-c}{2bc}, \qquad \frac{\sin\frac{B}{2}}{l_{1b}} = \frac{c-a}{2ca}.$$

$$\frac{\sin\frac{C}{2}}{l_{1c}} = \frac{a-b}{2ab},$$

d'où, en ajoutant membre à membre,

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{l_{1a}} + \frac{\sin\frac{B}{2}}{l_{1b}} + \frac{\sin\frac{C}{2}}{l_{1c}} = \frac{ab-ac+bc-ba+ca-cb}{2abc} = 0.$$

C. q. f. d.

(G. BILLIONNET, Instituteur-adjoint, à Cours.)

[Ont résolu la même question : MM. N.-G. Alesandrescu ; A. Amblard ; R. Van Cauwenberghe ; G. Delahaye ; E. Foucart ; H. Janois ; P. Le Verrier ; M. Nahon ; Pelvoisin ; E. Rousselot ; J. Sallaud ; R. Dickson ; T. Lalescu ; G. Nazare.]

MÉCANIQUE

4578. — *Enoncer le principe du travail virtuel dans le cas des systèmes à liaisons complètes.*

Application à la question suivante :

Un prisme dont la section droite est un triangle rectangle ABC *peut glisser sans frottement sur un plan horizontal qu'il touche par sa face* AB.

Entre un mur vertical AV *et la face hypoténuse* AC, *on place une sphère* S *du poids de 6 kilogrammes qui tendra à faire glisser le prisme dans le sens* Ax.

Quelle force antagoniste x faudra-t-il appliquer normalement à la face BC *pour empêcher le glissement, sachant que l'angle* A *est de* 60°.

On négligera tous les frottements.

(*Bacc. lettres-sciences, Alger, avril 1899.*)

(*) En effet, en se rappelant que $\sin\frac{y}{2} < \frac{y}{2} < \operatorname{tg}\frac{y}{2}$, on a

$$\sin y = 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{y}{2}\left(1 - \sin^2\frac{y}{2}\right) > 2\cdot\frac{y}{2}\left[1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2\right];$$

de même $\qquad \cos y = 1 - 2\sin^2\frac{y}{2} > 1 - 2\left(\frac{y}{2}\right)^2.$

Principe du travail virtuel. — Lorsqu'un système à liaisons composé de solides invariables est en équilibre, la somme algébrique des travaux virtuels des forces extérieures qui le sollicitent est nulle pour tout déplacement infiniment petit compatible avec les liaisons.

Dans le cas énoncé, les forces extérieures appliquées au système sont le poids P de la sphère et la force antagoniste x normale à BC.

Soit A'B'C' la nouvelle position du prisme après un déplacement infiniment petit ; sous l'action de son poids, la sphère S s'abaisse et prend la position S' où elle est tangente en D' à A'C'. D'après le principe rappelé plus haut, on peut écrire

$$\text{trav. P} - \text{trav. } x = 0,$$

ou $$P \times SS' - x \times BB' = 0,$$

d'où

$$x = P \cdot \frac{SS'}{BB'}.$$

Pour calculer le rapport $\frac{SS'}{BB'}$, remarquons qu'en prolongeant C'A' jusqu'à sa rencontre en D_1 avec AV, on a

$$SS' = DD' = AD_1 ;$$

d'ailleurs

$$BB' = AA' ;$$

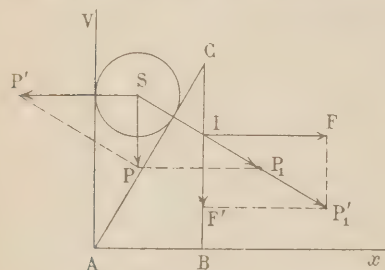
donc

$$\frac{SS'}{BB'} = \frac{AD_1}{AA'} = \text{tg } A' = \text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Par suite

$$x = P\sqrt{3} = 6\sqrt{3} = 10^{kg},392.$$

On peut aussi calculer directement la valeur de x de la manière suivante :



Décomposons le poids P de la sphère S en deux forces P' et P_1 perpendiculaires à AV et AC. La force P', normale au mur AV, est détruite par sa résistance ; la force P_1, qui tend à repousser le prisme, peut, dans l'état d'équilibre, être transportée en IP'_1, I étant situé sur BC ; la force P'_1 se décompose elle-même en deux forces F' et F perpendiculaire et parallèle à Ax. La force F', normale au plan horizontal, est détruite par la résistance du sol ; il reste alors finalement la force F qui, pour l'équilibre, doit être égale et directement opposée à la force cherchée x.

On a alors

$$x = F = P'_1 \cos(P'_1, F) = P_1 \cos VAC,$$

ou, comme $$P_1 = \frac{P}{\cos(P_1, P)} = \frac{P}{\sin VAC},$$

$$x = P \text{ cotg } VAC = P \text{ cotg } 30^\circ = P\sqrt{3}.$$

(J. TALVARD.)

[MM. A. Tumerelle, collège de Compiègne, et G. Dardalhon, à Tébessa, ont résolu la même question.]

PHYSIQUE

4564. — *Un élément de pile a pour résistance* 1,5 *ohm et pour force électromotrice* 1,1 *volt. On réunit les deux pôles de cet élément par un fil de cuivre de* 100^m *de longueur et de* 3^{mmq} *de section. Calculer l'intensité du courant qui parcourt le fil et la différence de potentiel entre les pôles de l'élément fermé, sachant que la résistance d'un fil de cuivre de* 1^m *de longueur et de* 1^{mmq} *de section est* 0,018 *ohm.*

(*Bacc. lettres-sciences, Montpellier, juillet 1898.*)

L'intensité du courant qui parcourt le fil est donnée par la formule d'Ohm

$$I = \frac{E}{R + r},$$

dans laquelle R représente la résistance intérieure de l'élément de pile, r la résistance extérieure.

D'un autre côté, la résistance dans un circuit étant proportionnelle à la longueur et inversement proportionnelle à la section, on a

$$r = \frac{0,018 \times 100}{3} = 0^{ohm},6.$$

Par suite $$I = \frac{1,1}{1,5 + 0,6} = 0^{amp},5238.$$

La différence de potentiel E' entre les pôles de l'élément fermé est égale au produit de l'intensité du courant par la résistance entre les deux pôles ; on a donc

$$E' = Ir = 0,5238 \times 0,6 = 0^{volt},31428.$$

(P. GILIBERT, à Lyon.)

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil ; L. Barberot ; Bameulle ; Billionnet ; Borgey ; A. Bouchet ; C. Bourvéau ; E. Briqueler ; E. Chedeville ; Danchaud ; P. Delolme ; G. Desplats ; Deville ; Framboise ; Galland ; E. Girardeau ; Gondran ; Gutton ; Herrmann ; Jacquet ; Janois ; A. Larue ; E. Le Maigre ; Le Sage ; F. Montaland ; M. Oger ; A. Picard ; Pichon ; J. Plantier ; Quintard ; E. Riau ; Schmitt ; Schuller ; A. Texonnière ; Thivard ; A. Tumerelle ; H. Varennes ; Vaunac ; Venet ; Vidalenc ; Waldspurger ; L. Lévy ; R. P. ; Mothes.]

4571. — *Un levier rectiligne* AB *est mobile autour de son milieu* O. *A l'extrémité* A *est fixé un poids de* 25^{gr}. *Une lentille convergente* L, *de distance focale* f, *et dont le poids est* 100^{gr}, *est mobile entre* O *et* B. *Le levier étant horizontal pour une certaine position de la lentille sur* OB, *on ajoute en* A *un poids de* 5^{gr}. *Pour rétablir l'horizontalité du levier, on doit déplacer la lentille d'une certaine longueur entre* O *et* B. *Quel sera le déplacement de l'image* O' *de* O *par rapport à la lentille ? On donne*

$$AO = OB = 10f.$$

(*Bacc. lettres-math., Rennes, avril 1897.*)

Pour la première position de la lentille sur OB, sa distance p au milieu O du levier est donnée par la relation

$$25 \times 10f = 100 \times p,$$

d'où $$p = \frac{5}{2} f.$$

La distance p' de l'image O' du point O à la lentille L s'obtient en appliquant la formule ordinaire des lentilles :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f},$$

d'où $$p' = \frac{pf}{p - f} = \frac{5f}{3}.$$

Lorsqu'on ajoute en A un poids de 5^{gr}, la nouvelle distance p_1 de la lentille au point O se déduit de l'équation d'équilibre :

$$30 \times 10f = 100 \times p_1,$$

d'où $$p_1 = 3f.$$

On a encore

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_1} = \frac{1}{f}$$

et, par suite, $$p'_1 = \frac{p_1 f}{p_1 - f} = \frac{3f}{2}.$$

Telle est la nouvelle distance de l'image O' à la lentille. Par rapport à la lentille, l'image s'est déplacée de $\frac{5f}{3} - \frac{3f}{2} = \frac{1}{6}f$.

Tandis que la lentille s'est éloignée de $3f - \frac{5f}{2} = \frac{f}{2}$ de sa première position, la nouvelle image O' est à une distance $\frac{3f}{2} + \frac{f}{2} = 2f$ de cette même position. Le déplacement de la nouvelle image par rapport à l'ancienne est donc de

$$2f - \frac{5f}{3} = \frac{f}{3}.$$

(M. GONDRAN, à Caen.)

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil ; Arcizet : L. Barberot ; C. Billionnet ; G. Bouju ; M. Bourrel ; E. Chedeville ; H. Damoiseau ; J. Debenest ; Delolme ; A. Duval ; L. Ferron ; J. Fiton ; E. Foucart ; S. Galland ; F. Giraud ; R. Henry ; Jacquet ; H. Janois ; E. Kran ; J.-M. Lagarde ; J. Lamotte ; G. Lallier ; J. Lecaplain ; E. Le Maigre ; G. Le Sage ; J. Manot ; P. Millevoye ; F. Montaland ; J. Mouchet ; M. Nahon ; M. Ogé ; J. Schuller ; G. Tastet ; A. Texonnière ; R. Turgis ; R. Van Cauwenberghe ; Venet ; A. Vidalenc ; P. Vien ; R. Vollaire ; R. Dickson.]

4579. — *Dans un vase entièrement rempli d'eau et taré, on introduit un corps solide insoluble : l'augmentation de poids est de 20gr,75. Si le vase avait été rempli d'huile, de densité 0,9, l'augmentation de poids aurait été de 21gr,58.*

Dire : 1° quel est le poids du corps ; 2° quelle est sa densité ; 3° quel est son volume.

(*Bacc. lettres-sciences, Caen, mars 1899.*)

Soient P le poids du corps, V son volume, D sa densité.

L'augmentation de poids constatée représentant le poids apparent du corps, on a, quand le corps est plongé dans l'eau,

$$P - V = 20,75 \qquad (1)$$

et quand le corps est plongé dans l'huile

$$P - 0,9V = 21,58. \qquad (2)$$

Retranchant (1) de (2), il vient

$$0,1V = 0,83,$$

d'où

$$V = 8^{cc},3.$$

De l'équation (1) on tire

$$P = 20,75 + 8,3 = 29^{gr},05.$$

Enfin, la relation $P = VD$ donne

$$D = \frac{29,05}{8,3} = 3,5.$$

C'est la densité du diamant.

(P. NOEL.)

[Ont résolu la même question : Mlle M. Pont ; MM. Arcizet ; Ardin-Delteil ; L. Barberot ; V. Barol ; Baudouin ; Bellencourt ; Billionnet ; L. Bois ; P. Blanc ; L. Bloch ; Bourrel ; E. Briqueler ; R. Van Cauwenberghe ; Constances ; J. Cougnoux ; R. Coural ; H. Damoiseau ; Dardalhon ; Debenest ; Delolme ; G. Desplats ; F. Deville ; Donnadieu ; Ch. Doumerc ; A. Duval ; L. Fabia ; R. Fazembat ; E. Foucart ; Foucry ; A. Garnier ; L. Girardeau ; E. Gillaizeau ; C. Godard ; M. Gondran ; P. Gutton ; G. Hamot ; R. Henry ; H. Janois ; G. Jodart ; C. Labille ; J.-M. Lagarde ; J. Lamotte ; A. Larue ; R. Lavallée ; G. Lallier ; R. Lang ; Le Révérend ; L. Leroux ; G. Le Sage ; E. Le Maigre ; Malleret ; Marchal ; G. Marquet ; J. Marrot ; B. Mathé ; J. Ménéchal ; P. Millevoye ; F. Monseran ; J. Mouchet ; M. Oger ; L. Patin ; A. Picard ; Pichon ; J. Plantier ; Remondet ; Reynaud ; E. Rieumajou ; E. Rieux ; J. Sallaud ; G. Salles ; G. Schoonheere ; Schmitt ; J. Schuller ; J. Talvard ; M. Teulié ; Texonnière ; F. Vérot ; A. Vidalenc ; Vien ; J. Vignier ; R. Vollaire ; R. P.]

CONCOURS DE 1899

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

Mathématiques.

I. — **4589**. Dans un triangle BAC, on donne $BC = a$, l'angle A et, entre B et C, un point I ($BI = d$).

1° Le point I étant le point de contact du cercle inscrit au triangle avec le côté BC, calculer le rayon de ce cercle inscrit.

2° Le point I étant le point de contact avec BC d'un cercle exinscrit, calculer de même le rayon de ce cercle exinscrit.

3° Construire géométriquement le triangle dans ces deux cas et montrer que les triangles obtenus sont égaux.

II. — **4590**. On donne dans l'espace un cercle O et deux droites AX et BY rencontrant la circonférence O en deux points A et B diamétralement opposés et dont l'une AX est perpendiculaire au plan du cercle. Par un point quelconque M de la circonférence on mène une droite MZ rencontrant à la fois AX et BY. Démontrer :

1° Que les deux plans MAX, MBY sont rectangulaires ;

2° Que si l'on coupe ces trois droites par un plan quelconque perpendiculaire soit à AX, soit à BY, le triangle qui a pour sommets les trois points de rencontre est rectangle.

(*1er juin, de 7 h. 1/2 à 10 h. 1/2.*)

Calcul logarithmique.

Calculer les angles et la surface d'un triangle connaissant les trois côtés :

$$a = 3256^m, \qquad b = 3402^m, \qquad c = 3301^m.$$

(*1er juin, de 1 h. 1/2 à 2 h. 1/2.*)

Epure.

4591. — Tracer une droite parallèle au bord inférieur de la feuille, à 10cm de ce bord ; sur cette droite marquer un point s, à 2cm du bord de droite, et prendre sA égale à 20cm. Le point s est la projection horizontale d'un point S de cote 20cm, et la droite sA est celle d'une droite SA de l'espace.

On mène par SA les deux plans de pente $\frac{\sqrt{3}}{1}$ et par S le plan perpendiculaire au plan SsA, de pente $\frac{2}{1}$, et coupant sA entre s et A. Ces trois plans et le plan horizontal déterminent un tétraèdre SABC.

Un cône, dont la directrice est une circonférence située dans le plan horizontal, de centre A et d'un diamètre égal à 11cm, a pour sommet un point I, de cote 10cm et se projetant horizontalement en s.

Représenter le corps solide opaque commun à ce cône et au tétraèdre SABC.

Construire les tangentes aux projections horizontales des courbes d'intersection de ces deux solides : 1° aux points de ces intersections situés sur SA ; 2° aux points où ces tangentes aux projections sont perpendiculaires à sA ; 3° aux points où elles sont parallèles à AB et à AC.

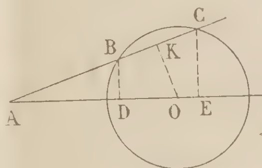
(*2 juin, de 7 h. 1/2 à 10 h. 1/2.*)

ÉCOLE NAVALE

Arithmétique et Algèbre.

I. — Division des polynomes.

II. — **4592**. — On donne une circonférence O et un point A situé à une distance $OA = a$ du centre de cette circonférence. Mener par ce point une sécante ABC, telle que le carré de la corde BC augmenté de la somme des carrés des distances BD et CE de ses extrémités au diamètre OA soit égale à m fois le carré de la distance OK du centre à cette sécante :



$$\overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CE}^2 = m.\overline{OK}^2.$$

On prendra cette dernière distance comme inconnue, $OK = x$. — Discussion.

III. — **4593**. — Les dimensions d'un bassin tronconique, approchées par excès, sont : rayons des bases 6m,3 et 3m,1, hauteur 5m,9. On demande à quelle approximation commune il faudrait mesurer ces dimensions pour que l'on pût en déduire le volume du bassin à un mètre cube près.

(*1er juin, de 7 h. à 10 h. 1/2.*)

Calcul trigonométrique.

4594. — Calculer les valeurs de x comprises entre zéro et 360° satisfaisant à l'équation

$$\sin(\varphi + x) = \text{tg}^2(62^\circ - \varphi),$$

pour les valeurs de φ comprises entre zéro et 90° données par l'équation

$$\sin 2\varphi = \text{tg}^2(228^\circ 12' 21'') \cos^3(315^\circ 46' 51'').$$

(*1er juin, de 2 h. à 3 h.*)

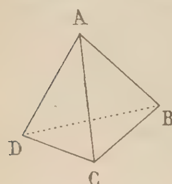
Géométrie cotée.

4595. — Un tétraèdre ABCD a pour base BCD un triangle équilatéral, et la face ABC est un triangle isocèle de sommet A (AB = AC). On donne le côté

$$BC = 95^{mm}$$

du triangle équilatéral BCD et les deux angles

$$ABD = 50^\circ, \qquad ABC = 65^\circ.$$



Construire les projections de ce tétraèdre, dont la base BCD est dans le plan horizontal de cote zéro, sur le plan horizontal et sur un plan vertical perpendiculaire à BC.

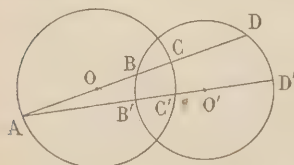
Trouver le centre O de la sphère circonscrite. De ce point comme centre on décrit une sphère S tangente aux faces ABD, ADC : intersection de cette sphère avec la face ABC. Construire la tangente en un point de cette courbe d'intersection. Déterminer les points qui se trouvent en projection horizontale sur le contour apparent de la sphère.

Dans le tracé graphique on supposera que le tétraèdre ABCD et la sphère S sont deux corps opaques se pénétrant mutuellement.

(*2 juin, de 1 h. 1/2 à 5 h.*)

Géométrie et Géométrie analytique.

I. — Lieu du conjugué harmonique d'un point par rapport aux points de rencontre d'une sécante quelconque menée par ce point avec deux droites fixes. — Propositions principales à l'appui.



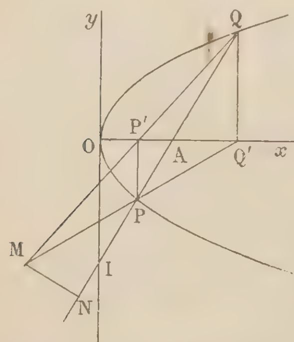
II. — **4596.** — Étant données deux circonférences normales O et O', par un point A de l'une on mène les deux diamètres AO et AO' qui coupent respectivement les deux circonférences en B, C, D et B', C', D'. Démontrer que les droites BB', CC' et DD' se coupent en un même point.— Lieu de ce point quand le point A se déplace sur l'une ou l'autre des circonférences.

III. — **4597.** — Démontrer que, sur la sphère, la condition nécessaire et suffisante pour que deux arcs de petit cercle soient normaux est que le plan de l'un passe par le sommet du cône circonscrit à la sphère le long de l'autre.

En déduire que tous les petits cercles normaux à un petit cercle donné et passant par un point donné passent par un second point fixe.

Mener, par une construction effectuée sur la sphère, un petit cercle normal à un petit cercle donné et passant par deux points donnés.

IV. — Étant donnée une parabole $y^2 - 2px = 0$ rapportée à son axe et à la tangente au sommet, par un point A de l'axe on mène une sécante APQ qui coupe la parabole aux points P et Q, et la tangente au sommet au point I. Soient PP', QQ' les perpendiculaires abaissées des points P et Q sur l'axe.



a) Démontrer les relations segmentaires

$$\frac{\overline{IP}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{IQ}} = -\frac{\overline{P'P}}{\overline{Q'Q}}.$$

b) En déduire géométriquement le lieu du point de rencontre M des deux droites QP' et Q'P, lorsque la sécante APQ tourne autour du point A. — Trouver ce lieu analytiquement.

c) Trouver l'équation de la courbe lieu du point N, pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur la droite APQ, et construire la courbe (*).

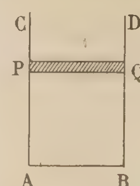
(*3 juin, de 7 h. à 10 h. 1/2.*)

(*) Cette question est traitée dans le n° de juillet de la *Revue de Mathématiques spéciales.*

Physique.

I. — Principe de Pascal en hydrostatique et presse hydraulique.

II. — **4598.** — Dans un cylindre creux de rayon $R = 0^m,11$, fermé hermétiquement à sa partie inférieure AB, peut glisser un piston plein PQ du poids de 8^{kg} qui le ferme hermétiquement à sa partie supérieure.



Ce cylindre ABPQ plongé dans l'air est lui-même rempli d'air sec.

Lorsque la température intérieure est de 0° et la pression extérieure de 1 atmosphère, la distance entre la base AB et la face inférieure du piston PQ, supposé en équilibre sous l'action des pressions intérieure et extérieure, est de 25^{cm}.

Cela posé, si la pression extérieure était de $1 + \frac{1}{100}$ d'atmosphère et si la température intérieure était de 100°, la masse d'air comprise dans le cylindre restant la même, quelle serait la distance de la face inférieure du piston PQ à la base AB dans ces nouvelles conditions ?

Quel poids faudrait-il ajouter au piston pour que cette distance fût la même que dans les conditions primitives, c'est-à-dire égale à 25^{cm} ?

On ne tiendra pas compte de la dilatation du cylindre.

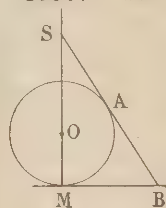
(*3 juin, de 1 h. à 2 h. 1/2.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4599. — Déterminer sur une ellipse de grand axe $2a$ et de distance focale $FF' = 2c$, un point M tel que l'angle MFF' soit double de l'angle MF'F.

(*Bacc. lettres-math., Bordeaux, mars 1899.*)

4600. — Étant donné un cercle O de rayon r, par un point S pris sur le diamètre SOM on mène la droite SA tangente au cercle et on la prolonge jusqu'à sa rencontre, en B, avec la tangente au point M.



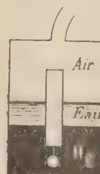
La figure tournant autour de la droite SM, SB engendre la surface latérale d'un cône.

Étudier la variation de cette surface latérale lorsque le point S se déplace sur MO.

On prendra pour inconnue la longueur OS.

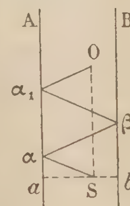
(*Bacc. lettres-sciences, Bordeaux, mars 1899.*)

4601. — On met du mercure dans un vase en fer cylindrique de 10^{cm} de rayon; on verse au-dessus 578^{cc} d'eau et enfin au-dessus se trouve une atmosphère que l'on peut comprimer. On met dans le vase un flotteur formé d'un prisme droit en verre de 20^{cm} de hauteur et de 500^{cc} de volume (densité du verre, 2,5) et d'une boule de platine (densité 20) pesant 3578^{gr}. On demande quelle position d'équilibre prend le flotteur lorsque la température est 4° et la pression de l'air 1 atmosphère (densité du mercure 13,5; poids du litre d'air $1^{gr},29$). On demande l'effet que produirait un changement de pression sur l'état d'équilibre précédent.



(*Bacc. lettres-math., Toulouse, novembre 1898.*)

4602. — On donne deux miroirs plans parallèles A et B, dont la distance $ab = 12^{cm}$. Un point lumineux S est placé sur ab à 8^{cm} du point a. On considère un point O à 20^{cm} au-dessus de S et on demande de trouver les points α, β, α_1 où les miroirs sont rencontrés par un rayon lumineux partant de S et arrivant en O après deux réflexions sur A et une sur B. On définira les trois points α, β, α_1 par leurs distances à ab.



(*Bacc. lettres-math., Rennes, novembre 1898.*)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

23e Année. — No 19. JOURNAL Paris, le 1er Juillet 1899.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.

Abonnements.. Librairie **Nony** et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

ALGÈBRE

NOTE SUR LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION BICARRÉE

Il peut être utile de rappeler : 1° que la condition nécessaire et suffisante pour que les racines de l'équation

$$x^4 + px^2 + q = 0$$

soient exprimables au moyen de radicaux simples, est que q soit carré parfait; 2° que, quand cette condition est réalisée, le procédé le plus simple pour résoudre l'équation consiste à décomposer le premier membre en carrés, en faisant entrer les termes extrêmes x^4 et q dans un même carré.

L'exemple suivant montrera nettement la marche à suivre. Soit à résoudre l'équation

$$x^4 - 14x^2 + 25 = 0.$$

On peut l'écrire

$$(x^2+5)^2 - 24x^2 = 0,$$

ou

$$(x^2 - 2\sqrt{6}\,x + 5)(x^2 + 2\sqrt{6}\,x + 5) = 0.$$

En égalant à 0 le premier trinome, on a l'équation qui donne les racines positives; celles-ci sont

$$x = \sqrt{6} \pm \sqrt{6-5} = \sqrt{6} \pm 1.$$

Ch. BIOCHE.

4295. — *Résoudre l'équation*

$$\frac{(a-x)^4 + (x-b)^4}{(a-x)^2 + (x-b)^2} = \frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}.$$

L'équation peut s'écrire

$$\frac{(x^2-2ax+a^2)^2 + (x^2-2bx+b^2)^2}{(x-a)^2+(x-b)^2} = \frac{a^4+b^4}{a^2+b^2},$$

ou

$$\frac{(x^2-2ax)^2 + 2a^2(x^2-2ax) + a^4 + (x^2-2bx)^2 + 2b^2(x^2-2bx) + b^4}{x^2-2ax+a^2+x^2-2bx+b^2} = \frac{a^4+b^4}{a^2+b^2},$$

ou, en retranchant terme à terme le second membre du premier et simplifiant,

$$\frac{x^4 - 2(a+b)x^3 + 3(a^2+b^2)x^2 - 2(a^3+b^3)x}{x(x-a-b)} = \frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}.$$

Le numérateur du premier membre s'annulant pour $x=0$ et $x=a+b$ est divisible par le dénominateur $x(x-a-b)$; en effectuant la division, ce qui supprime les solutions évidentes $x=0$ et $x=a+b$, il reste l'équation

$$x^2 - (a+b)x + 2(a^2-ab+b^2) = \frac{a^4+b^4}{a^2+b^2},$$

ou

$$x^2 - (a+b)x + \frac{a^4+b^4-2ab(a-b)^2}{a^2+b^2} = 0,$$

dont les deux racines,

$$x = \frac{1}{2}\left[a+b \pm (a-b)\sqrt{\frac{-2(a-b)^2 - a^2 - b^2}{a^2+b^2}}\right],$$

sont imaginaires si $a \neq b$ ou réelles et égales à a si $a=b$.

(L. BOUCHARD, Institution du Sacré-Cœur, Moulins.)

[Ont résolu la même question : MM. C. Couturier; L. Curt; L. Cussenot; Feintuch; Gourdet; L. Hemois; H. Keefer; F. Leulliot; L. Magne; M. Rebeix; E. Sevin.]

4500. — *Résoudre l'équation* $x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0$, *sachant que la somme des coefficients est égale à* (-768) *et que l'on a en outre :*

$$C+3B=0,\quad E=AD,\quad C=AB,\quad B^2-AC=2B-3E-11A.$$

En tenant compte des conditions $E=AD$ et $C=AB$, l'équation proposée devient

$$x^5+Ax^4+Bx^3+ABx^2+Dx+AD=0,$$

ou

$$x^5+Bx^3+Dx+A(x^4+Bx^2+D)=0,$$

ou

$$(x+A)(x^4+Bx^2+D)=0,$$

équation qui se décompose en l'une des deux suivantes :

$$x+A=0,\qquad x^4+Bx^2+D=0;$$

par suite, on pourra toujours résoudre l'équation.

Tout revient alors à calculer les trois coefficients A, B, D au moyen des trois conditions :

$$1+A+B+AB+D+AD=-768, \tag{1}$$

ou

$$(1+A)(1+B+D)=-768,$$

$$AB+3B=0, \tag{2}$$

$$B^2-A^2B=2B-3AD-11A. \tag{3}$$

L'équation (2) entraîne

soit $B=0$, soit $A=-3$.

I. *Cas de* $B=0$. — Les équations (1) et (3) deviennent

$$1+A+D+AD=-768, \tag{1'}$$

$$3AD+11A=0. \tag{3'}$$

L'équation (3′) entraîne

soit $A=0$, soit $D=-\frac{11}{3}$.

1° $A=0$. L'équation (1′) donne alors

$$D=-769.$$

2° $D=-\frac{11}{3}$. De l'équation (1′) on déduit

$$A = \frac{-768}{D+1} - 1 = 287.$$

II. *Cas de* $A = -3$. — Les équations (1) et (3) deviennent

$$1 + B + D = 384, \quad (1'')$$

$$B^2 - 11B - 9D = 33. \quad (2'')$$

Eliminant D entre ces deux équations, il vient

$$B^2 - 2B - 3480 = 0,$$

d'où l'on tire

$$B' = 60, \qquad B'' = -58,$$

puis en portant ces valeurs dans (1''),

$$D' = 323, \qquad D'' = 441.$$

Aux quatre systèmes de valeurs de A, B, D ainsi obtenus correspondent les équations suivantes :

1° $x = 0$, $x^4 - 769 = 0$, d'où $x = \pm\sqrt[4]{769}$;

2° $x + 287 = 0$, $x^4 - \frac{11}{3} = 0$, d'où $x = \pm\sqrt[4]{\frac{11}{3}}$;

3° $x + 3 = 0$, $x^4 + 60x^2 + 323 = 0$;

cette dernière équation n'a pas de racines réelles ;

4° $x + 3 = 0$, $x^4 - 58x^2 + 441 = 0$;

l'équation bicarrée a pour racines ± 3, ± 7.

[Ont résolu cette question : MM. J. Bordas ; C. Bourvéau ; R. Hüe.]

4574. — *Etant donné un demi-cercle de diamètre* $AA' = 2R$, *déterminer sur ce demi-cercle deux points* B *et* C *satisfaisant aux conditions suivantes :*

1° $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = l^2$;

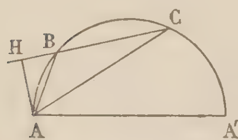
2° *La distance de* A *à la corde* BC *doit être égale à une longueur donnée* h.

Discuter.

(*Bacc. lettres-math., Lyon, mars 1899.*)

Posons $AB = x$ et $AC = y$. On a d'abord

$$x^2 + y^2 = l^2. \quad (1)$$



D'autre part, dans le triangle ABC, le produit des deux côtés AB et AC est, comme on sait, égal au produit de la hauteur $AH = h$ par le diamètre $AA' = 2R$ du cercle circonscrit ; la seconde condition du problème s'exprime donc par

$$xy = 2Rh,$$

ou, en élevant au carré,

$$x^2y^2 = 4R^2h^2. \quad (2)$$

En tenant compte de (1) et (2), on voit que x^2 et y^2 sont racines de l'équation

$$f(X) = X^2 - l^2X + 4R^2h^2 = 0. \quad (3)$$

Discussion. — Les longueurs x et y ne pouvant surpasser 2R, les valeurs de x^2 et y^2 fournies par l'équation précédente doivent être réelles, positives et au plus égales à $4R^2$.

La condition de réalité est

$$l^4 - 16R^2h^2 \geqslant 0,$$

ou

$$l^2 \geqslant 4Rh. \quad (4)$$

Cette condition remplie, l'équation (3) admet deux racines réelles et positives. Pour que ces racines soient inférieures à $4R^2$, il faut et il suffit qu'on ait à la fois

$$f(4R^2) > 0 \qquad \text{et} \qquad 4R^2 > \frac{l^2}{2}.$$

La seconde inégalité n'est compatible avec (4) que si l'on a

$$8R^2 > 4Rh, \qquad \text{ou} \qquad h < 2R,$$

condition d'ailleurs évidente d'après la figure.

L'inégalité $f(4R^2) > 0$ revient à

$$4R^2(4R^2 - l^2 + h^2) > 0$$

et entraîne

$$l^2 < 4R^2 + h^2.$$

Or $4R^2 + h^2 < 8R^2$, puisque $h < 2R$.

Les seules conditions de possibilité du problème sont donc

$$h < 2R, \qquad 4Rh < l^2 < 4R^2 + h^2 ;$$

il n'y a d'ailleurs qu'une solution distincte, fournie par les valeurs

$$x = \sqrt{\frac{l^2 - \sqrt{l^4 - 16R^2h^2}}{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{l^2 + 4Rh} - \sqrt{l^2 - 4Rh}),$$

$$y = \sqrt{\frac{l^2 + \sqrt{l^4 - 16R^2h^2}}{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{l^2 + 4Rh} + \sqrt{l^2 - 4Rh}).$$

On peut aussi obtenir directement la seconde expression de x et y en calculant, par addition et soustraction, $x + y$ et $x - y$, puis x et y. On aurait ainsi tout de suite x et y exprimés au moyen de radicaux simples.

(Ernest Foucart, à Issy.)

[Ont résolu la même question : MM. L. Barberot ; R. Coural ; Ch. Doumerc ; J. Fiton ; M. Marchal ; P. Millevoye ; E. Rousselot ; G. Schoonheere ; Vien ; J. Vignier.]

4581. — *Trois nombres* a, b, c *sont en progression géométrique ; on connaît leur somme* $a + b + c = s$, *et l'excès des deux extrêmes sur le moyen,* $a + c - b = d$; *trouver ces trois nombres.*

Application : $s = 224$, $d = 96$.

(*Bacc. lettres-sciences, Clermont, avril 1898.*)

Première solution. — Des relations données

$$a + b + c = s,$$
$$a + c - b = d,$$

on déduit, par addition et soustraction,

$$a + c = \frac{s + d}{2}, \qquad b = \frac{s - d}{2}.$$

D'ailleurs, les nombres a, b, c étant en progression géométrique, on a

$$ac = b^2 = \left(\frac{s - d}{2}\right)^2.$$

Connaissant $a + c$ et ac, on en conclut que a et c sont racines de l'équation

$$X^2 - \frac{s + d}{2}X + \frac{(s - d)^2}{4} = 0.$$

Pour que ces racines soient réelles, il faut et il suffit qu'on ait

$$\left(\frac{s + d}{2}\right)^2 - (s - d)^2 \geqslant 0,$$

ou, en décomposant en produit la différence de carrés du premier membre,

$$\left(-\frac{s}{2} + \frac{3}{2}d\right)\left(\frac{3}{2}s - \frac{d}{2}\right) \geqslant 0,$$

ou

$$(s - 3d)(3s - d) \leqslant 0,$$

inégalité satisfaite lorsque

$$\frac{d}{3} \leqslant s \leqslant 3d.$$

Lorsque cette double condition est remplie, on a pour a et c deux valeurs exprimées par les formules

$$\left.\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}\right\} = \frac{s + d \pm \sqrt{(3d - s)(3s - d)}}{4}.$$

Application. — Dans l'exemple numérique choisi, on trouve comme résultats :

$$b = 64, \qquad a = \left\{ \begin{array}{l} 32, \\ 128, \end{array} \right. \qquad c = \left\{ \begin{array}{l} 128, \\ 32, \end{array} \right.$$

nombres formant une progression croissante ou décroissante de raison 2.

(CH. OUVRARD, lycée de Clermont-Ferrand.)

Seconde solution. — En désignant par q la raison de la progression, les relations données peuvent s'écrire

$$a(1 + q + q^2) = s, \qquad (1)$$

$$a(1 + q^2 - q) = d. \qquad (2)$$

Divisons ces équations membre à membre ; il vient

$$\frac{1 + q + q^2}{1 + q^2 - q} = \frac{s}{d},$$

ou

$$(s - d)q^2 - (s + d)q + s - d = 0.$$

Connaissant q, l'une des équations (1) ou (2) détermine a ; on a ensuite

$$b = aq, \qquad c = aq^2.$$

La discussion de l'équation (3) conduit à la condition de possibilité trouvée plus haut.

(VICTOR BAROL, école primaire supérieure de Lorgues.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Arcizet ; E. Ardin-Delteil ; P. Barbier ; R. Barthélemy ; A. Bertrand ; Bloch ; L. Bois ; C. Bourvéau ; M. Brebion ; E. Briqueler ; Broutin ; A. Carré ; A. Chapron ; R. Coural ; Croze ; H. Damoiseau ; H. Debenest ; P. Delolme ; R. Depasse ; F. Deville ; Dickson ; Donnadieu ; Fabia ; E Foucart ; G. Foucry ; E. Gillaizeau ; Grolleau ; P. Gutton ; R. Henry ; A. Huet ; H. Janois ; E. Kran ; F. Ladevèze ; Tr. Lalescu ; A. Larue ; E. Le Maigre ; A. Le Révérend ; E. Malleret ; B. Mathé ; J. Ménéchal ; P. Millevoye ; M. Nahon ; P. Noël ; M. Oger ; J. Pémartin ; A. Pichon ; L. Pont ; A. Popescu ; Popescu-Lupsa ; M. Ravinet ; J. Rion ; E. Roncaglia ; A. Sallin ; E. Séclin ; A. Texonnière ; Turgis ; F. Vérot ; A. Vidalenc ; R. Blanc ; D. V. L. ; J. Fiton ; L. Lafontaine ; Lardon ; G. Le Sage ; Loignon ; A. Prost ; J. Sallaud.]

4585. — *Déterminer les abscisses des points d'intersection de la droite*

(D) $\qquad ax + by + c = 0$

avec la parabole

(P) $\qquad y^2 = 2px.$

Discuter.

Conclure de la discussion l'équation de la tangente à la parabole (P).

Vérifier que le point d'intersection de deux tangentes rectangulaires quelconques est toujours sur une certaine droite fixe.

(*Bacc. lettres-sciences, Lille, mars 1899.*)

Si on avait $b = 0$, la première équation déterminerait une valeur de x qui ne pourrait représenter l'abscisse d'un point de la parabole que si cette valeur était positive. Écartons ce cas.

De l'équation de la droite (D) on déduit

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} ;$$

en portant cette valeur dans l'équation de la parabole P, il vient

$$\frac{(ax + c)^2}{b^2} = 2px,$$

ou

$$a^2x^2 - 2(pb^2 - ac)x + c^2 = 0.$$

Cette équation détermine les abscisses des deux points communs à la droite et à la parabole.

Pour que ces points existent, il faut et il suffit que l'équation précédente ait son discriminant positif ou nul, c'est-à-dire que l'on ait

$$(pb^2 - ac)^2 - a^2c^2 \geqslant 0,$$

ou

$$pb^2 - 2ac \geqslant 0.$$

On a alors deux racines positives qui correspondent à des points d'intersection.

Lorsque $pb^2 = 2ac$, les deux points d'intersection sont confondus ; la droite (D) devient alors tangente à la parabole et a pour équation, en remplaçant c par $\frac{pb^2}{2a}$,

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{pb}{2a}.$$

En posant $-\frac{a}{b} = m$, cette équation s'écrit sous la forme

$$y = mx + \frac{p}{2m}, \qquad (1)$$

qui met en évidence le coefficient angulaire m de la tangente.

Le coefficient angulaire d'une tangente perpendiculaire à la précédente étant égal à $-\frac{1}{m}$, cette tangente a pour équation

$$y = -\frac{x}{m} - \frac{pm}{2}. \qquad (2)$$

En éliminant le paramètre variable m entre les équations (1) et (2), on obtiendra l'équation du lieu du point d'intersection des deux tangentes.

Pour effectuer cette élimination, retranchons (2) de (1) ; il vient

$$\left(m + \frac{1}{m}\right)x + \frac{p}{2}\left(\frac{1}{m} + m\right) = 0,$$

ou, en supprimant le facteur commun,

$$x + \frac{p}{2} = 0.$$

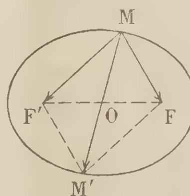
Le point considéré décrit ainsi une parallèle à Oy d'abscisse $-\frac{p}{2}$; cette parallèle représente d'ailleurs la directrice de la parabole (P), ainsi qu'on pouvait le prévoir.

[Ont résolu la même question : MM. E. Foucart ; G. Foucry ; A. Larue ; H. Lefèvre ; Pelvoisin ; Popescu-Lupsa.]

4586. — *Déterminer les rayons vecteurs d'un point d'une ellipse par la condition que la résultante des forces représentées par ces rayons vecteurs ait une valeur donnée. Discussion.*

(*Bacc. lettres-math., Montpellier, mars 1899.*)

La résultante des deux forces représentées par les rayons vecteurs MF et MF′ est représentée en grandeur et en direction par la diagonale MM′ du parallélogramme MFM′F′.



Il s'agit de déterminer les rayons vecteurs $MF = x$ et $MF' = y$ en fonction des paramètres $2a$ et $2c$ de l'ellipse et du diamètre $MM' = l$.

On a d'abord

$$x + y = 2a. \qquad (1)$$

D'ailleurs, dans le parallélogramme MFM′F′, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales ; de là la seconde équation :

$$2x^2 + 2y^2 = 4c^2 + l^2. \qquad (2)$$

Elevons les deux membres de (1) au carré ; il vient, en tenant compte de (2),

$$2c^2 + \frac{l^2}{2} + 2xy = 4a^2,$$

d'où

$$xy = 2a^2 - c^2 - \frac{l^2}{4}.$$

Connaissant $x + y$ et xy, x et y sont racines de l'équation

$$f(X) = X^2 - 2aX + 2a^2 - c^2 - \frac{l^2}{4} = 0.$$

Discussion. — Tout rayon vecteur d'une ellipse étant compris entre $a-c$ et $a+c$, l'équation précédente doit avoir ses deux racines réelles et comprises entre $a-c$ et $a+c$.

Formons le discriminant ρ et les quantités $f(a-c)$ et $f(a+c)$. On obtient

$$\rho = \frac{l^2}{4} - a^2 + c^2,$$

$$f(a-c) = f(a+c) = a^2 - \frac{l^2}{4}.$$

Lorsque ces deux quantités sont positives ou nulles, c'est-à-dire lorsque

$$2\sqrt{a^2-c^2} \leqslant l \leqslant 2a,$$

les deux valeurs de x et y sont réelles et comprises entre $a-c$ et $a+c$, puisque ces limites, extérieures aux deux valeurs précitées, comprennent leur demi-somme, a.

Remarque. — En général, dans les problèmes relatifs à la détermination des rayons vecteurs des points d'une ellipse qui satisfont à une condition donnée, il est commode de prendre pour inconnue la demi-différence de ces rayons. Soit z cette demi-différence ; les rayons vecteurs s'expriment par

$$a - z, \qquad a + z.$$

Ce procédé a l'avantage de donner des équations simples et faciles à discuter ; car il suffit que z soit plus petit que c en valeur absolue pour qu'on ait des solutions, et lorsque la condition donnée s'exprime par une équation symétrique par rapport aux deux rayons vecteurs, l'équation en z ne contient que des puissances paires de z.

Ainsi, dans le problème précédent, l'équation (2) donne

$$2(a-z)^2 + 2(a+z)^2 = 4c^2 + l^2,$$

d'où

$$4z^2 = l^2 + 4c^2 - 4a^2.$$

Discussion. — 1° La condition de réalité est

$$l^2 \geqslant 4(a^2-c^2) = 4b^2,$$

ou

$$l \geqslant 2b.$$

2° La condition géométrique $z^2 \leqslant c^2$ donne $l \leqslant 2a$.

(Ont résolu la même question : MM. L. Bois ; R. Coural ; E. Foucart ; G. Foucry ; A. Grolleau ; E. Le Maigre ; Ch. Ouvrard ; R. Blanc ; Pelvoisin ; J. Sallaud.)

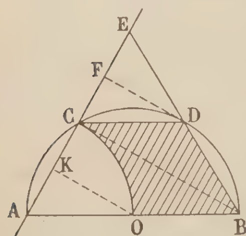
GÉOMÉTRIE

4488. — *On donne une demi-circonférence de centre* O, *de rayon* R, *décrite sur* AB *comme diamètre ; de* A *comme centre, avec* AO *pour rayon, on décrit un arc de cercle qui coupe en* C *la demi-circonférence ; soit* D *le milieu de l'arc* BC; *on mène les cordes* BD, CD.

1° *Trouver les expressions du volume* V *et de la surface* S *du solide engendré par la figure ombrée* OCDBO *en tournant autour de la droite* AC;

2° *Calculer* R *par logarithmes, sachant que* $V = 3^{mc},4567$; *mettre tous les calculs.*

(*Ecole des Beaux-Arts, 1898, section d'architecture.*)



1° La figure ACDB est la moitié de l'hexagone inscrit dans le cercle O, et si l'on prolonge BD jusqu'à sa rencontre en E avec AC, le triangle ABE est un triangle équilatéral de côté 2R dans lequel BC est une hauteur.

Calcul du volume V. — On peut considérer le volume V comme la différence entre le volume engendré par le triangle ABE et les volumes engendrés par le triangle CDE et le secteur AOC :

$$V = \frac{1}{3}\pi\overline{BC}^2.AE - \frac{1}{3}\pi\overline{DF}^2.CE - \frac{2}{3}\pi R^2.CK.$$

Or, $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 3R^2, \qquad AE = 2R,$

$\overline{DF}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{CF}^2 = \frac{3}{4}R^2, \qquad CE = R = 2CK;$

donc

$$V = 2\pi R^3 - \frac{1}{4}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3 = \pi R^3\left(2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{17}{12}\pi R^3.$$

Calcul de la surface S. — On a

$$S = \text{surf. BD} + \text{surf. DC} + \text{surf. arc CO} + \text{surf. OB},$$

ou, comme surf. BD = surf. OB et surf. CD = surf. AO,

$$S = 2\,\text{surf. OB} + \text{surf. AO} + \text{surf. arc CO}$$
$$= 2\,\text{surf. AB} - \text{surf. AO} + \text{surf. arc CO}.$$

Or surf. AB est la surface latérale d'un cône d'apothème 2R et dont le rayon de base est $BC = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = R\sqrt{3}$:

$$\text{surf. AB} = 2\pi R^2\sqrt{3};$$

de même surf. AO est la surface latérale d'un cône d'apothème R et dont le rayon de base est $OK = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$:

$$\text{surf. AO} = \frac{\pi R^2\sqrt{3}}{2};$$

enfin l'arc CO engendre une zone dont la surface est

$$\text{surf. arc CO} = 2\pi R.CK = \pi R^2.$$

L'expression de S devient donc

$$S = 4\pi R^2\sqrt{3} - \frac{\pi R^2\sqrt{3}}{2} + \pi R^2 = \frac{\pi R^2}{2}(7\sqrt{3} + 2).$$

2° On doit avoir

$$\frac{17}{12}\pi R^3 = 3^{mc},4567,$$

d'où

$$R^3 = \frac{12 \times 3,4567}{17\pi}.$$

En prenant les logarithmes de chaque membre, on en déduit

$$3 \log R = \log 12 + \log 3,4567 - \log 17 - \log \pi,$$

$\log 12 = 1,07918 \qquad \log 17 = 1,23045$

$\log 3,4567 = \underline{0,53866} \qquad \log 3,1416 = \underline{0,49715}$

$1,61784 \qquad 1,72760$

$$3 \log R = 1,61784 - 1,72760 = \bar{1},89024$$

$$\log R = \bar{1},96341, \qquad R = 0^m,91921.$$

(J. FITON, instituteur à Agen.)

(Ont résolu la même question : MM. A. Arcizet ; Ed. Ardin-Delteil ; L. Aulagnier ; C. Billionnet ; L. Bois ; J. Coupat ; L. Curt ; E. Gernez-Pfanmatter ; R. Henry ; M. Jousset ; T. Lalescu ; E. Le Maigre ; A. Lescure ; P. Marion ; G. Nazare ; A. Popescu ; J. Sallaud ; G. Schoonheere ; Venet ; Vien ; B. Carrière ; L. Deschamps.)

4521. — *On donne deux cercles* O *et* O′ *tangents extérieurement en* A. *Soit* TT′ *la tangente commune extérieure.*

Un cercle variable O″ *passant par* A *et tangent à* TT′ *coupe les cercles* O *et* O′ *en* M *et* M′.

1° *Lieu du pôle* P *de* MM′ *dans le cercle* O″.

2° *Lieu du point de rencontre de* PA *avec le cercle* O″.

3° *Lieu du point de rencontre de* PA *avec* MM′.

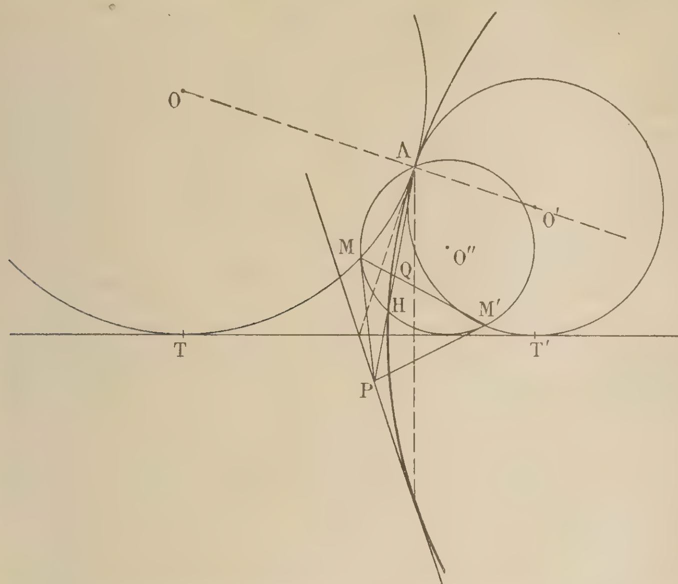
La figure contenant trois cercles qui passent par un point A, transformons-la par inversion en prenant ce point pour pôle. On aura alors :

1° deux droites D, D′ parallèles correspondant aux cercles O, O′;

2° un cercle ω passant par A correspondant à TT′, et tangent à D et D′;

3° une droite mobile correspondant à O″, et tangente à ω.

Les tangentes en M et M′ à O″ ont pour inverses des cercles tangents en m, m' à D″; ces cercles se coupent en A et en un point p, inverse de P. L'axe radical de ces cercles, qui est Ap,



coupe la tangente commune mm' en son milieu K, qui est l'inverse du point de rencontre H de PA avec O″.

Le lieu de K est la droite Δ, menée par ω parallèlement à D et D′. Sa puissance par rapport au cercle inverse de la tangente en M à O″ peut s'exprimer par

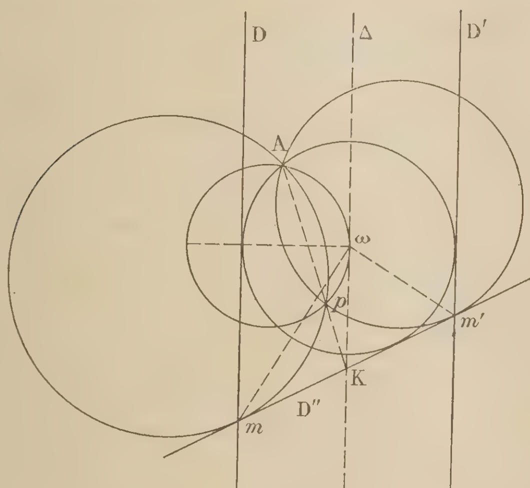
$$KA \times Kp, \qquad \text{ou} \qquad Km^2.$$

Or, l'angle $m\omega m'$ étant droit, $K\omega = Km$; on a donc

$$KA \times Kp = \overline{K\omega}^2,$$

ce qui exprime que p est sur le cercle qui passe par A et touche Δ en ω.

Le lieu de P est la droite inverse de ce cercle; elle passe par



le point symétrique de A par rapport à TT′ (point inverse de ω), et coupe TT′ au même point que la tangente en A à O et O′. C'est donc le symétrique de cette tangente.

Le second lieu demandé est l'inverse de Δ. C'est un cercle tangent en A aux cercles O et O′, et coupant orthogonalement la droite TT′, inverse de ω; autrement dit, c'est le cercle (S) ayant pour centre le point d'intersection de TT′ et OO′.

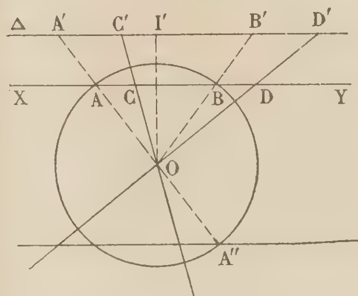
Soit Q le point d'intersection de PA avec MM′; les points P et Q sont conjugués par rapport au segment AH que O″ détermine.

Comme A est fixe, que P décrit une droite, les points H et Q décrivent des lieux qui se déduisent l'un de l'autre par une homologie ayant pour pôle A et pour axe la droite lieu de P (*).

(G. C., à Largeasse.)

4561. — *Étant donnés une circonférence, deux rayons fixes et une direction, mener parallèlement à la direction donnée une sécante telle que la partie de cette sécante interceptée par la circonférence soit égale au segment intercepté par les deux rayons fixes.*

Soit XY une sécante parallèle à la direction Δ et telle que la corde AB interceptée par le cercle O soit égale au segment CD intercepté par les deux rayons fixes.



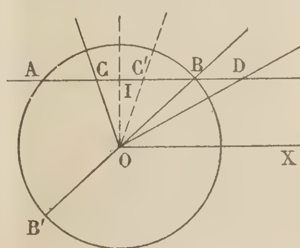
Les angles AOB et COD interceptent sur la droite Δ les segments A′B′, C′D′, homothétiques des segments AB, CD, et par suite égaux entre eux. Tout revient donc à déterminer l'angle AOB de façon qu'il intercepte sur Δ la longueur connue C′D′. Or dans le triangle isocèle OA′B′ la médiane OI′ est en même temps hauteur, c'est-à-dire coïncide avec la perpendiculaire abaissée de O sur la droite Δ. Connaissant le point I′, on prend ensuite sur Δ la longueur $I'A' = \dfrac{C'D'}{2}$ et l'on mène la droite OA′ qui coupe en A ou A″ la circonférence O: les parallèles à Δ menées par les points A et A″ répondent à la question.

La construction est toujours possible tant que le segment C′D′ existe, ce qui suppose l'un des rayons fixes non parallèle à la direction Δ. Dans le cas contraire, le point A′ s'en va à l'infini, et les deux solutions se confondent alors suivant le diamètre AOA″ parallèle à Δ: le problème n'admet plus ainsi de solution proprement dite.

Lorsque les deux rayons fixes sont confondus, les deux solutions se réduisent aux deux tangentes au cercle O parallèles à la direction Δ.

(ST. FEINTUCH.)

Autre solution. — Soit ACBD la sécante parallèle à la direction OX et telle que AB = CD. Prenons le symétrique du rayon fixe OC par rapport à la perpendiculaire OI à OX; soit C′ son point de rencontre avec la sécante. La condition AB = CD entraîne AC = BD; d'ailleurs, par symétrie AC = C′B; donc C′B = BD, ce qui montre que le faisceau O(C′BDX) est harmonique, puisque trois des rayons interceptent des segments égaux sur une parallèle au quatrième rayon OX.



(*) En effet, si on projette la figure de façon que la droite lieu de P soit rejetée à l'infini, on obtient pour les projections de H et Q des points homologues d'une homothétie ayant pour centre la projection de A.

On obtiendra donc le rayon OB en cherchant le rayon conjugué harmonique de OX par rapport aux droites connues OC′ et OD.

(A. BOUCHET, école normale de Poitiers.)

[Ont résolu la même question : MM. N. G. Alesandrescu ; L. Bois ; C. Bourvéau ; P. Delolme ; R. Dickson ; E. Foucart ; M. Oger ; E. Rousselot ; J. Sallaud : G. Tastet ; C. Billionnel ; Chareire ; G. Foucry ; G. Sieber ; L. Troin ; R. Van Cauwenberghe ; E. Vaunac.]

4584. — *On donne une circonférence, un point* A *dans son plan et un point* P *sur la circonférence. Par le point* A *on mène une sécante variable qui coupe la circonférence en* B *et* C *; on joint* P *à* B *et* C *et on appelle* I *et* J *les milieux de* PB *et de* PC.

1° *Démontrer que la droite* IJ *passe par un point fixe,* M.

2° *Démontrer que le produit* $MI \times MJ$ *est constant.*

3° *Trouver le lieu du milieu de* IJ.

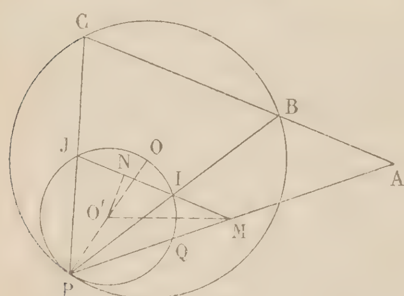
4° *Construire les positions de la sécante* ABC *pour lesquelles* $PB = PC$.

5° *Construire les positions de la sécante* ABC *pour lesquelles* IJ *égale une longueur donnée* a.

(*Bacc. lettres-math., Grenoble, novembre 1898.*)

1° Dans le triangle PBC, la droite IJ, qui joint les milieux de deux côtés, est parallèle au troisième, CB, de sorte qu'elle coupe la droite fixe PA en son milieu M, ce qui établit la première partie.

2° Le lieu des points I et J est homothétique du lieu de B et C, P étant le centre de similitude et le rapport 1/2 ; c'est donc le cercle de diamètre OP. Si Q est le point de rencontre de ce cercle avec la droite fixe PA, on a



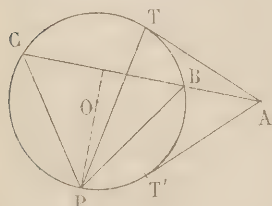
$$MI.MJ = MP.MQ = \text{const.}$$

D'ailleurs, MI, MJ étant les moitiés de AB, AC, le produit $MI \times MJ = \frac{1}{4} AB \times AC.$

3° La corde IJ du cercle O′ passant par le point fixe M, le lieu de son milieu N est comme on sait un cercle de diamètre MO′.

Lorsque le point donné A est extérieur au cercle O (cas de la figure), il en est de même du point M par rapport au cercle O′, et le point N décrit seulement l'arc du cercle de diamètre O′M compris dans le cercle O′.

4° Supposons le problème résolu : soit ABC une sécante telle que $PB = PC$. Les points P et O appartenant au lieu des points équidistants de B et C, la droite PO est perpendiculaire au milieu de BC. La sécante cherchée s'obtient donc en abaissant du point A une perpendiculaire sur la droite PO. Cette perpendiculaire ne coupe réellement le cercle O qu'autant que le point A est compris entre la tangente en P au cercle O et la tangente au point diamétralement opposé à P.



Dans ce qui précède, on suppose implicitement que les points B et C sont distincts. En considérant le cas où ces points sont confondus, on reconnait aisément que les deux tangentes AT et AT′ répondent également à la question.

5° En remarquant que $BC = 2IJ = 2a$, on est conduit à mener par A une sécante ABC telle que la corde BC ait une longueur connue. Or toute corde BC de longueur $2a$ est tangente à un cercle concentrique O qui a pour rayon la perpendiculaire OI abaissée sur la corde quelconque $B'C' = 2a$. L'une ou l'autre des deux tangentes à ce cercle menées par le point A fournit deux solutions du problème. La seule condition de possibilité est que le point A ne tombe pas à l'intérieur du petit cercle O.

Lorsque A est situé sur la circonférence de ce cercle, les deux solutions se confondent en une seule.

(VICTOR BAROL, école primaire supérieure de Lorgues.)

Remarque. — Si on avait donné $\frac{IP}{IB} = \frac{JP}{JC} =$ constante, quelle que soit la valeur de cette constante on aurait trouvé de même :

1° Que IJ passait par un point fixe M ;

2° Que le lieu de I et J était un cercle O′ tangent au cercle donné en P et que le produit $MI \times MJ$ était la puissance de ce point par rapport à ce cercle O′ ;

3° Que le milieu de IJ était sur le cercle de diamètre O′M.

Ordinairement il est bon de donner la solution d'un problème sous une forme telle que cette solution puisse se généraliser facilement.

[Ont résolu la même question : MM. A. Arcizet ; L. Bois ; C. Bourvéau ; M. Brebion ; E. Briqueler ; Broutin ; Croze ; H. Debenest ; P. Delolme ; R. Dickson ; G. Dumas ; E. Foucart ; G. Foucry ; A. Grolleau ; P. Gutton ; F. Ladevèze ; Ch. Lefebvre ; E. Le Maigre ; A. Le Révérend ; P. Letourneur ; B. Mathé ; P. Millevoye ; M. Nahon ; M. Oger ; Ch. Ouvrard ; A. Pichon ; Rouy-Malleret ; E. Séclin ; F. Vérot ; R. Blanc ; H. Dodier ; Pelvoisin ; A. Prost ; J. Sallaud.]

TRIGONOMÉTRIE

4538. — *Établir géométriquement les identités*

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a,$$
$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a.$$

Sur le cercle trigonométrique, prenons les arcs $AM = a$, $AM' = 3a$, et menons les perpendiculaires MP, M′P′ sur OA. D'après les définitions du sinus et cosinus, tout revient à établir les relations

$$\overline{M'P'} = 3\overline{MP} - 4\overline{MP}^3,$$
$$\overline{OP'} = 4\overline{OP}^3 - 3\overline{OP}.$$

Pour donner à la démonstration suivante toute sa généralité, rappelons d'abord que lorsque trois points quelconques A, B, C sont en ligne droite, on a

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \overline{AB} = \overline{CB} - \overline{CA}.$$

Cela posé, en prolongeant le rayon MO jusqu'à sa rencontre en N avec M′P′, on peut écrire

$$\overline{M'P'} = \overline{NP'} - \overline{NM'}.$$

Il reste à évaluer NP′ et NM′ en fonction de MP.

En prenant l'arc AM″ symétrique de l'arc AM, M est le milieu de l'arc M′M″, et le rayon OM est perpendiculaire au

milieu I de la corde M'M''. Les triangles semblables INM', IMM'' donnent alors

$$\overline{NM'} = \overline{M''M} = -2\overline{MP}.$$

La similitude des triangles ONP', OMP permet d'écrire de même

$$\frac{\overline{NP'}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{MN} - \overline{MO}}{\overline{OM}} = 1 + 2\overline{MI};$$

comme les quatre points O, I, P, M'' sont sur un même cercle de diamètre OM'',

$$\overline{MI} \times \overline{MO} = \overline{MP} \times \overline{MM''},$$

ou

$$-\overline{MI} = 2\overline{MP}^2;$$

donc

$$\overline{NP'} = \overline{MP}(1 - 4\overline{MP}^2)$$

et

$$\overline{M'P'} = \overline{MP}(1 - 4\overline{MP}^2) + 2\overline{MP}$$
$$= 3\overline{MP} - 4\overline{MP}^3.$$

La seconde relation découle immédiatement des résultats précédents. On a en effet

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OM}} = 1 + 2\overline{MI} = 1 - 4\overline{MP}^2,$$

d'où

$$\overline{OP'} = \overline{OP}[1 - 4(1 - \overline{OP}^2)] = 4\overline{OP}^3 - 3\overline{OP}.$$

(L. VINCENT, *école primaire supérieure de Nancy*.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Amblard ; E. Ardin-Delteil ; C. Billionnet ; L.-A. Blanc ; J. Borgey ; Catin ; G. Delahaye ; Ch. Doumerc ; G. Foucry ; H. Gallay ; E. Gernez-Pfanmater ; L. Hebrard ; J. Jantet ; Tr. Lalescu ; E. Le Maigre ; H. Loignon ; C. Marie ; R. Martin ; S.-N. Mirea ; G. Nazare ; A. Pichon ; A. Popescu ; Rives ; G. Schoonheere ; L. Troin ; Venet ; Wulleman.]

PHYSIQUE

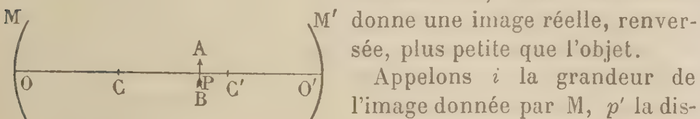
4580. — *Deux miroirs concaves* M *et* M', *dont les axes coïncident, sont disposés en regard l'un de l'autre à* 3^m *de distance. Un objet lumineux* AB, *de* $0^m,20$ *de longueur, étant placé dans l'intervalle* CC' *des deux centres, normalement à l'axe commun et à une distance de* $1^m,80$ *du miroir* M, *donne deux images égales.*

On demande : 1° la longueur de ces images et leurs caractères ; 2° le rayon du miroir M'.

$$OO' = 3^m, \quad OP = 1^m,80, \quad AB = 0^m,20, \quad OC = 1^m.$$

(*Bacc. class., lettres-math., Montpellier, mars 1899.*)

L'objet étant placé au-delà du double de la distance focale des deux miroirs, chacun de ceux-ci donne une image réelle, renversée, plus petite que l'objet.



Appelons i la grandeur de l'image donnée par M, p' la distance de cette image au point O, f la distance focale du miroir M. On a les relations

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \quad \text{et} \quad \frac{i}{o} = \frac{p'}{p},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{i}{o} = \frac{f}{p-f}.$$

Posons $OO' = d$. L'objet est à une distance $d-p$ du miroir M', et l'image i' fournie par ce miroir se déduit des relations suivantes, dans lesquelles p'' représente la distance de i' au point O', f' la distance focale du miroir M' :

$$\frac{1}{d-p} + \frac{1}{p''} = \frac{1}{f'}, \qquad \frac{i}{o} = \frac{p''}{d-p},$$

d'où

$$\frac{i'}{o} = \frac{f'}{d-p-f'}.$$

Comme les images sont égales, on a

$$\frac{f}{p-f} = \frac{f'}{d-p-f'},$$

d'où l'on tire

$$f' = \frac{f(d-p)}{p}.$$

1° La longueur des images s'obtient par la formule

$$i = o\frac{f}{p-f} = 20\frac{50}{180-50} = 7^{cm},69.$$

Nous avons indiqué plus haut les caractères de ces images.

2° Le rayon R' du miroir M' a pour valeur $2f'$, c'est-à-dire $\frac{2f(d-p)}{p}$.

Remplaçant les lettres par leur valeur, il vient

$$R' = \frac{2 \times 50(300-180)}{180} = 66^{cm},66.$$

(ARDIN-DELTEIL.)

[Ont résolu la même question : Mlles M. Pont ; Campana ; MM. Arcizet ; L. Barberot ; Baudouin ; R. Bazin ; Billionnet ; Bloch ; G. Bouju ; Bourrel ; E. Briqueler ; R. Van Cauwenberghe ; Chedeville ; H. Damoiseau ; Debenest ; Desplats ; F. Deville ; Dodier ; Doumerc ; A. Duval ; R. Fazembat ; E. Foucart ; A. Garnier ; E. Gillaizeau ; E. Girardeau ; C. Godard ; M. Gondran ; Gutton ; G. Hamot ; R. Henry ; H. Janois ; J.-M. Lagarde ; G. Lallier ; J. Lamotte ; A. Lecoutour ; E. Le Maigre ; Le Révérend ; Leroux ; G. Le Sage ; Malleret ; Marchal ; Marrot ; Maumejean ; P. Millevoye ; J. Mouchet ; M. Nahon ; R. P. ; A. Picard ; M. Ravinet ; Remondet ; E. Rieumajou ; E. Rieux ; G. Salles ; Schmitt ; Schoonheere ; Schuller ; M. Teulié ; Texonnière ; Tumerelle ; R. Turgis ; A. Vidalenc ; Vien ; J. Vignier ; R. Vollaire ; L. Zlateo.]

4587. — *L'équivalent mécanique de la chaleur est représenté par le nombre* 425 *lorsqu'on prend pour unités*

de temps : la seconde ;
de longueur : le mètre ;
de force : le kilogramme-force ;
de quantité de chaleur : la grande calorie.

Quelle est la valeur numérique de cette constante lorsqu'on prend pour unités

de temps : la seconde ;
de longueur : le centimètre ;
de force : la dyne ;
de quantité de chaleur : la petite calorie ?

(*Bacc. lettres-math., Bordeaux, mars 1899.*)

L'unité de temps ne changeant pas, il n'y a pas lieu de s'en occuper.

Si l'on prenait d'abord pour unité de force la dyne qui est 981 000 fois plus petite que le kilogramme-force, sans changer les autres unités, l'équivalent mécanique de la grande calorie serait 981 000 fois plus grand, c'est-à-dire $425 \times 981\,000$.

Si maintenant on prend pour unité de longueur le centimètre, la même force agissant sur un même corps fera subir au corps un déplacement exprimé par un nombre 100 fois plus grand que lorsqu'on prend le mètre. Enfin le travail correspondant à une petite calorie est 1000 fois plus petit que le travail correspondant à une grande calorie. L'équivalent mécanique de la chaleur, dans le second système d'unités, est donc exprimé par

$$\frac{425 \times 981\,000 \times 100}{1000} = 41\,692\,500.$$

Le premier nombre 425 est l'équivalent mécanique de la grande calorie exprimé en kilogrammètres. La valeur numérique de la nouvelle constante dans le second système d'unités, valeur que

l'on prend égale à 417×10^5, est l'équivalent mécanique de la petite calorie exprimé en ergs.

Ce dernier équivalent est représenté par 4joules,17, puisque le joule vaut 10^7 ergs.

(LE RÉVÉREND, lycée de Coutances.)

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil ; A. Croze ; P. Delolme ; R. Fazembat ; G. Foucry ; A. Garnier ; R. Henry ; V. D. L., à Felletin ; J. Lamotte ; P. Letourneur ; P. Millevoye ; M. Nahon ; M. Oger ; R. P.]

CONCOURS DE 1899

CONCOURS GÉNÉRAUX

Classe de Mathématiques élémentaires.

Mathématiques (Paris et Départements.)

I. — **4603**. Résoudre le système d'équations

$$y + \frac{1}{z} = a, \qquad z + \frac{1}{x} = b, \qquad x + \frac{1}{y} = c,$$

où a, b, c sont des nombres donnés.

Ce système admet deux solutions. Si l'une de ces solutions est formée de nombres rationnels, il en est de même de l'autre : pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que a, b, c soient des nombres rationnels et que l'on ait

$$abc - a - b - c = n + \frac{1}{n},$$

n étant un nombre rationnel.

Que deviennent les valeurs trouvées pour x, y, z quand on y remplace respectivement a, b, c par $\beta + \frac{1}{\gamma}$, $\gamma + \frac{1}{\alpha}$, $\alpha + \frac{1}{\beta}$? Peut-on choisir a, b, c de manière que le système proposé admette deux solutions distinctes formées de nombres entiers ?

II. — **4604**. Étant donné un triangle inscrit dans un cercle, on mène par les sommets A, B, C trois parallèles qui rencontrent respectivement le cercle aux points A',B',C'. On joint un point quelconque P du cercle aux points A', B', C'; les droites PA', PB', PC' rencontrent respectivement les côtés BC, CA, AB aux points α, β, γ ; démontrer que ces points α, β, γ sont en ligne droite.

(*15 juin, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.*)

Classe de Première-Sciences.

Physique et Chimie (Paris et Départements.)

I. — Principe des machines magnéto-électriques et des machines dynamo-électriques. — Décrire une machine magnéto-électrique et en donner la théorie.

II. — Généralités sur les carbures d'hydrogène liquides et solides. — Étude particulière de la benzine et de l'essence de térébenthine.

(*15 juin, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4605. — Pour quelles valeurs de n l'expression

$$2^{3n^2+n+6} - 3^{3n+6}$$

est-elle divisible par 7 ?

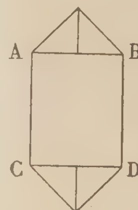
(A. POPESCU, lycée-internat de Jassy.)

4606. — Etant données deux circonférences O et O', dans un même plan, tracer une droite qui les coupe respectivement sous les angles donnés α et α'.

Discuter la solution et calculer les segments interceptés par les deux circonférences sur la droite, en désignant par r et r' les rayons et par d la distance des centres.

On rappelle que l'angle de deux courbes en un point qui leur est commun est celui de leurs tangentes en ce point.

(*Bacc. lettres-math., Rennes, novembre 1898.*)



4607. — On veut construire un aréomètre qui, sous une surface donnée, présente le plus grand volume.

Sa forme est celle d'un cylindre terminé par deux cônes égaux dont les demi-angles au sommet sont de 45°.

On demande les dimensions de l'instrument pour un volume total d'un demi-litre.

(*Bacc. lettres-sciences, Alger, mars 1899.*)

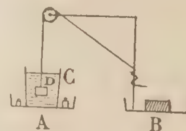
4608. — Etudier les variations de la fonction

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2,$$

quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

N. B. — Cette variation exige l'emploi de la dérivée.

4609. — Sur l'un des plateaux A d'une balance de Roberval, supposée juste, on a mis un vase C contenant de l'eau, et à côté de lui des poids marqués. L'autre plateau B fait équilibre au premier au moyen d'une tare et porte une potence au bout de laquelle est suspendu par un fil fin un corps D de poids P qui plonge dans l'eau du vase C, sans en toucher le fond.



Dénouant le fil qui était attaché à la potence, on laisse le corps reposer sur le fond du vase et on demande :

1° Ce qui arrivera ;

2° Si l'équilibre est rompu, quel poids il faudra mettre ou enlever pour rétablir l'équilibre horizontal du fléau ;

3° Quel est le poids spécifique du corps si P = 24gr,64 et si la somme des poids qu'il faut ajouter au plateau A, pour rétablir l'équilibre, quand on raccourcit le fil auquel le corps est suspendu de manière à le maintenir hors de l'eau, est de 6gr,4.

(*Bacc. lettres-sciences, Caen, novembre 1898.*)

4610. — Un aréomètre destiné aux liquides plus denses que l'eau affleure au point 0 dans de l'eau à la température de 4° centigrades, et au point 15 dans une dissolution saline dont la densité est 1,116. — On le plonge dans du sulfure de carbone que l'on porte successivement aux températures de 0° et de 40° centigrades.

A la température de 0°, l'aréomètre affleure à la division 32,7.

A la température de 40°, l'aréomètre affleure à la division 27,6.

On demande :

1° La densité du sulfure de carbone à la température de 0° ;

2° La densité du sulfure de carbone à la température de 40° ;

3° Le coefficient de dilatation du sulfure de carbone.

(On négligera l'influence de la variation de température sur le volume de l'aréomètre.)

(*Bacc. lettres-math., Montpellier, novembre 1898.*)

La question **4596** sera traitée dans la *Revue de Mathématiques spéciales*. Cette question avait été donnée, par erreur sans doute, comme problème de géométrie élémentaire, au récent concours d'admission à l'école navale.

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

23e Année. — N° 20. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 15 Juillet 1899.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.

Abonnements.. Librairie Nony et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

ALGÈBRE

4536. — *Par le foyer d'une parabole ou d'une ellipse mener une sécante de longueur donnée. — Discussion* (*).

Solution algébrique. — Considérons une conique définie par un foyer F, la directrice correspondante DD′ et l'excentricité e; soit $MN = l$ une corde de cette conique passant par F. On a par définition

$$\frac{MF}{MP} = \frac{NF}{NQ} = e. \qquad (1)$$

D'ailleurs, si l'on mène par F la parallèle IK à DD′, on a, en posant $DF = d$,

$$\frac{MF}{NF} = \frac{MI}{NK} = \frac{MP - d}{d - NQ},$$

ou, en tenant compte de (1),

$$\frac{MF}{NF} = \frac{\frac{MF}{e} - d}{d - \frac{NF}{e}}.$$

On déduit de là

$$2MF.NF = de(MF + NF).$$

Les segments MF et NF sont donc déterminés par les équations

$$MF + NF = l, \qquad MF.NF = \frac{del}{2},$$

et par suite, vérifient l'équation

$$X^2 - lX + \frac{del}{2} = 0. \qquad (2)$$

Cette équation admet deux racines réelles et positives lorsque

$$l^2 - 2del \geqslant 0, \qquad \text{ou} \qquad l \geqslant 2de;$$

dans le cas limite où $l = 2de$, $MF = NF = \frac{l}{2}$, et la corde MN devient perpendiculaire à l'axe focal. Cette corde représente donc le minimum de l.

Ellipse ou hyperbole. — Dans le cas d'une ellipse ou d'une hyperbole dont les demi-axes sont a et b, on sait que $d = \frac{b^2}{c}$ et $e = \frac{c}{a}$; l'équation (2) s'écrit alors

$$X^2 - lX + \frac{lb^2}{2a} \geqslant 0, \qquad l \geqslant \frac{2b^2}{a}.$$

En supposant d'abord $c < a$ (ellipse), les racines de cette équation ne peuvent représenter les rayons vecteurs d'une ellipse qu'autant qu'elles sont comprises toutes deux à la fois entre $a - c$ et $a + c$. De là les conditions

$$f(a-c) = (a-c)^2 - \frac{l(a-c)^2}{2a} > 0,$$

$$f(a+c) = (a+c)^2 - \frac{l(a+c)^2}{2a} > 0,$$

qui sont satisfaites pour $l < 2a$. D'ailleurs la demi-somme $\frac{l}{2}$ est comprise entre $a - c$ et $a + c$, puisqu'elle a pour limites extrêmes a et $\frac{b^2}{a}$ ou $(a-c)\frac{a+c}{a}$.

Supposons maintenant $c > a$ (branche d'hyperbole relative à F). Dans ce cas, les deux racines doivent être au moins égales à $c - a$. De là les deux conditions

$$f(c-a) = (c-a)^2 + \frac{l(c-a)^2}{2a} > 0$$

et

$$c - a < \frac{l}{2}.$$

La première inégalité est évidente; quant à la seconde, elle est toujours vérifiée, puisque le minimum de $\frac{l}{2}$, $\frac{b^2}{a} = (c-a)\frac{c+a}{a}$ est supérieur à $c - a$.

Parabole. — Dans le cas d'une parabole de paramètre p, on sait que $d = p$ et $e = 1$. L'équation (2) devient alors

$$X^2 - lX + \frac{lp}{2} = 0,$$

avec la condition de possibilité

$$l \geqslant 2p.$$

Lorsqu'elle est remplie, on vérifie sans peine que les racines sont supérieures à $\frac{p}{2}$, et par suite acceptables.

(P. TRIBIER.)

Solution trigonométrique. — Prenons pour inconnue l'angle x formé par la corde cherchée $MN = l$ avec l'axe focal.

Dans le triangle MFF′, on a

$$\overline{MF'}^2 = 4c^2 + \overline{MF}^2 + 4c.MF\cos x,$$

d'où, en remplaçant MF′ par $2a - MF$ et en dégageant MF,

$$MF = \frac{a^2 - c^2}{a + c\cos x}.$$

On aurait de même

$$NF = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos x}.$$

L'équation du problème est donc

$$\frac{a^2 - c^2}{a + c\cos x} + \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos x} = l.$$

(*) Le cas de la parabole a été traité géométriquement dans la 1re année, p. 3.

On en tire

$$\cos^2 x = \frac{a(al - 2b^2)}{lc^2}.$$

En exprimant que cette valeur du carré d'un cosinus reste positive et inférieure à 1, on obtient comme valeurs possibles de l,

$$\frac{2b^2}{a} \leqslant l \leqslant 2a.$$

Pour appliquer la formule précédente à une parabole de paramètre p, remarquons que si on désigne par $\frac{p}{2}$ la distance de F au sommet voisin, on a $a - c = \frac{p}{2}$;

donc $b^2 = a^2 - c^2 = \frac{p}{2}(a + c)$; en remplaçant, il vient

$$\cos^2 x = \frac{a[al - p(a+c)]}{lc^2} = \frac{l - p\left(1 + \frac{c}{a}\right)}{l},$$

ou, en faisant tendre $\frac{c}{a}$ vers 1 et simplifiant,

$$\cos^2 x = \frac{l - 2p}{l},$$

valeur comprise entre 0 et 1 lorsque $l \geqslant 2p$.

(F.-J. BOURRIÈRES, école Saint-Joseph, à Sariat.)

(Ont résolu la même question : MM. R. Hüe ; J. Sallaud ; Vial.)

4582. — *Etant donnée une sphère* O, *on propose de la couper par un plan* MN *de façon que la surface latérale du cône circonscrit à la sphère le long de la section plane, augmentée de m fois la surface de la zone extérieure* MBN, *soit égale à une surface donnée.*

(*Bacc. lettres-math.. Toulouse, avril 1899.*)

Prenons pour inconnue la distance du plan MN au centre de la sphère O, et posons

$$\text{OI} = x, \qquad \text{OM} = \text{R}.$$

La condition imposée s'exprime par

$$\pi\text{AM}.\text{MI} + m.2\pi\text{R}.\text{BI} = \pi k^2,$$

πk^2 représentant la surface donnée.

Calculons AM, MI et BI en fonction de R et x. On a d'abord

$$\text{BI} = \text{OB} + \text{OI} = \text{R} + x,$$

$$\text{MI} = \sqrt{\overline{\text{OM}}^2 - \overline{\text{OI}}^2} = \sqrt{\text{R}^2 - x^2};$$

d'ailleurs les triangles semblables AMI, MOI donnent

$$\frac{\text{AM}}{\text{MI}} = \frac{\text{MO}}{\text{OI}}, \qquad \text{d'où} \qquad \text{AM} = \frac{\text{R}}{x}\sqrt{\text{R}^2 - x^2}.$$

L'équation du problème est donc

$$\frac{\text{R}}{x}(\text{R}^2 - x^2) + 2m\text{R}(\text{R} + x) = k^2,$$

ou

$$(2m - 1)\text{R}x^2 - (k^2 - 2m\text{R}^2)x + \text{R}^3 = 0.$$

Discussion. — Pour qu'une valeur de x convienne au problème, il faut et il suffit qu'elle soit réelle, positive et au plus égale à R. La mise en équation suppose en effet x positif, autrement la valeur de AM serait négative ; nous verrons plus loin comment on interprète une valeur négative de x.

Cas d'une solution unique. — Pour qu'il y ait une racine, et une seule, comprise entre 0 et R, il faut et il suffit que

$$f(0).f(\text{R}) < 0.$$

Or $\quad f(0) = \text{R}^3, \qquad f(\text{R}) = \text{R}(4\text{R}^2 m - k^2)$;

la condition cherchée est donc

$$m < \frac{k^2}{4\text{R}^2}.$$

Cas de deux solutions. — Pour qu'il y ait deux solutions, il faut et il suffit : 1° Que les racines soient réelles, c'est-à-dire que

$$(k^2 - 2m\text{R}^2)^2 - 4(2m - 1)\text{R}^4 \geqslant 0 ;$$

si on résout l'inégalité par rapport à m, on voit qu'elle est vérifiée lorsqu'on a l'une des inégalités

$$m < \frac{k^2 + 2\text{R}^2 - 2k\text{R}}{2\text{R}^2}, \qquad (1)$$

$$m > \frac{k^2 + 2\text{R}^2 + 2k\text{R}}{2\text{R}^2} ; \qquad (1')$$

2° Que les racines soient positives ; autrement dit, que leur produit et leur somme soient positifs. Cela donne pour le produit

$$m > \frac{1}{2}, \qquad (2)$$

et, en tenant compte de cette condition, on trouve que la somme est positive si

$$m < \frac{k^2}{2\text{R}^2} ; \qquad (3)$$

3° Que les racines soient inférieures à R, c'est-à-dire que l'on ait, à la fois,

$$(2m - 1)f(\text{R}) > 0, \qquad \text{d'où} \qquad m > \frac{k^2}{4\text{R}^2}, \qquad (4)$$

et

$$x' + x'' < 2\text{R}, \qquad \text{d'où} \qquad m > \frac{k^2 + 2\text{R}^2}{6\text{R}^2}. \qquad (5)$$

Reste à comparer les limites trouvées.

On voit que l'inégalité (3) est contradictoire avec (1'), et que si $k < \text{R}$ les inégalités (2) et (3) seraient contradictoires. Les inégalités (2) et (3) étant toutes deux nécessaires, on devra supposer $k > \text{R}$; mais alors l'inégalité (1) pouvant s'écrire

$$m < \frac{k^2 - 2(k - \text{R})\text{R}}{2\text{R}^2},$$

on voit qu'elle entraîne l'inégalité (3). On n'a donc qu'une limite supérieure pour m, donnée par (1).

Voyons si les limites inférieures sont bien compatibles avec celles-ci ; on a

$$\frac{k^2 - 2k\text{R} + 2\text{R}^2}{2\text{R}^2} - \frac{1}{2} = \frac{(k - \text{R})^2}{2\text{R}^2},$$

$$\frac{k^2 - 2k\text{R} + 2\text{R}^2}{2\text{R}^2} - \frac{k^2}{4\text{R}^2} = \frac{(k - 2\text{R})^2}{4\text{R}^2},$$

$$\frac{k^2 - 2k\text{R} + 2\text{R}^2}{2\text{R}^2} - \frac{k^2 + 2\text{R}^2}{6\text{R}^2} = \frac{2(k - \text{R})(k - 2\text{R})}{6\text{R}^2}.$$

Donc il faut que $k > 2\text{R}$ pour que les inégalités de sens contraires soient compatibles. Mais alors

$$\frac{k^2}{4\text{R}^2} - \frac{1}{2} = \frac{k^2 - 2\text{R}^2}{4\text{R}^2} > 0,$$

$$\frac{k^2}{4\text{R}^2} - \frac{k^2 + 2\text{R}^2}{6\text{R}^2} = \frac{k^2 - 4\text{R}^2}{12\text{R}^2} > 0;$$

donc $\frac{k^2}{4\text{R}^2}$ est la plus élevée des limites inférieures.

Il résulte de là que l'on aura deux solutions si l'on a, à la fois,

$$k > 2\text{R},$$

$$\frac{k^2}{4\text{R}^2} < m < \frac{k^2 - 2k\text{R} + 2\text{R}^2}{2\text{R}^2} = \frac{k^2 + (k - 2\text{R})^2}{4\text{R}^2}.$$

Interprétation des valeurs négatives de x. — Pour une valeur négative de x supérieure à $-\text{R}$, les valeurs de BI et MI sont réelles et positives, tandis que la valeur de AM devient réelle et négative ; cette valeur correspond donc à la relation

$$\pi(-\text{AM}).\text{MI} + m.2\pi\text{R}.\text{BI} = \pi k^2,$$

ou $$-\pi AM.MI + m.2\pi R.BI = \pi k^2.$$

Le plan MN déterminé par une valeur négative de x est donc ici tel que m fois la zone *intérieure* MBN diminuée de la surface latérale du cône AMN égale la surface donnée πk^2.

[M. L. Bloch, élève de Mathématiques élémentaires à Bar-le-Duc, a résolu la même question. Toutes les autres solutions reçues ne donnent que des discussions incomplètes.]

4600. — *Étant donné un cercle* O *de rayon* r, *par un point* S *pris sur le diamètre* SOM *on mène la droite* SA *tangente au cercle et on la prolonge jusqu'à sa rencontre, en* B, *avec la tangente au point* M.

La figure tournant autour de la droite SM, SB *engendre la surface latérale d'un cône.*

Etudier la variation de cette surface latérale lorsque le point S *se déplace sur* MO.

On prendra pour inconnue la longueur OS.

(*Bacc. lettres-sciences, Bordeaux, mars 1899.*)

Expression de la surface. — On a
$$S = \pi MB.SB.$$

Evaluons MB et SB en fonction de r et de $OS = x$. Les triangles semblables SOA, SBM donnent
$$\frac{SO}{SB} = \frac{OA}{BM} = \frac{SA}{SM},$$
ou
$$\frac{x}{SB} = \frac{r}{BM} = \frac{\sqrt{x^2 - r^2}}{x + r},$$
d'où
$$SB = \frac{x(x+r)}{\sqrt{x^2 - r^2}}, \qquad BM = \frac{r(x+r)}{\sqrt{x^2 - r^2}}.$$
Donc
$$S = \pi\frac{rx(x+r)^2}{x^2 - r^2} = \pi\frac{rx(x+r)}{x - r}.$$

Cette formule subsiste lorsque S est pris sur le second prolongement de OM pourvu que x et S soient pris négativement, le segment OS et la surface SMB ayant changé de sens.

L'étude de la variation de S se ramène à celle de la fonction
$$y = \frac{x(x+r)}{x - r},$$
à laquelle on peut appliquer l'une des trois méthodes suivantes :

1° *Méthode indirecte.* — A une valeur donnée de y correspondent généralement deux valeurs de x fournies par l'équation
$$x^2 - (y - r)x + ry = 0.$$

La condition de réalité de ces valeurs est
$$(y - r)^2 - 4ry \geqslant 0,$$
ou
$$y^2 - 6ry + r^2 \geqslant 0,$$
inégalité satisfaite en prenant
$$\text{soit } y \leqslant r(3 - 2\sqrt{2}), \qquad \text{soit } y \geqslant r(3 + 2\sqrt{2}).$$

Pour $y = r(3 - 2\sqrt{2})$, y passe par un minimum auquel correspond pour x la valeur unique
$$x = \frac{y - r}{2} = r(1 - \sqrt{2});$$
de même, pour $y = r(3 + 2\sqrt{2})$, y passe par un minimum correspondant à $r(1 + \sqrt{2})$.

x ne pouvant prendre aucune valeur entre $-r$ et $+r$, le maximum de y est à écarter.

Par suite, x variant de $-\infty$ à $-r$, y ou S croît de $-\infty$ à 0 ; x variant de $+r$ à $+\infty$, S décroît de $+\infty$ jusqu'à son minimum et croît ensuite en repassant par les mêmes valeurs. On peut alors tracer la courbe figurative ci-contre des variations de y, la partie en pointillé représentant la variation de y entre $-r$ et $+r$; cette courbe est une hyperbole.

2° *Emploi des dérivées.* — La fonction
$$y = \frac{x^2 + rx}{x - r}$$
a pour dérivée
$$y' = \frac{(x^2 + rx)'(x - r) - (x^2 + rx)(x - r)'}{(x - r)^2}$$
$$= \frac{(2x + r)(x - r) - (x^2 + rx)}{(x - r)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 2rx - r^2}{(x - r)^2}.$$

En se rappelant qu'une fonction est croissante ou décroissante suivant que sa dérivée est positive ou négative, on en conclut que y décroît lorsque
$$x^2 - 2rx - r^2 < 0,$$
ou
$$r(1 - \sqrt{2}) < x < r(1 + \sqrt{2}).$$

Pour toute valeur de x en dehors de l'intervalle précédent, y croît ; d'après cela, il est aisé de suivre la variation de y, en négligeant les valeurs de x comprises entre $-r$ et $+r$.

3° *Emploi de la méthode de Fermat.* — Cette méthode ne diffère pas au fond de la précédente, puisqu'elle revient à chercher dans quel cas la fonction y prend deux valeurs égales pour deux valeurs x et x_0 de la variable infiniment voisines. Or, l'équation
$$\frac{x^2 + rx}{x - r} = \frac{x_0^2 + rx_0}{x_0 - r}$$
revient à
$$\frac{(x - x_0)[xx_0 - r(x + x_0) - r^2]}{(x - r)(x_0 - r)} = 0,$$
et en dehors du cas évident $x = x_0$, se trouve satisfaite pour
$$xx_0 - r(x + x_0) - r^2 = 0,$$
ou, lorsqu'on fait tendre x vers x_0,
$$x_0^2 - 2rx_0 - r^2 = 0,$$
d'où
$$x_0 = r(1 \pm \sqrt{2}).$$

(L. Bois, école professionnelle de Vierzon.)

[Ont résolu la même question : MM. Arcizet ; E. Ardin-Delteil ; V. Barol ; A. Chapron ; P. Delolme ; Donnadieu ; A. Doué ; A. Drocourt ; E. Foncart ; G. Foucry ; M. Gondran ; F. Ladevèze ; A. Larue ; B. Mathé ; P. Millevoye ; M. Oger ; Rieumajou ; J. Sallaud ; R. Turgis ; A. Vidalenc ; Vien ; R. Vollaire ; Janois ; Letourneur.]

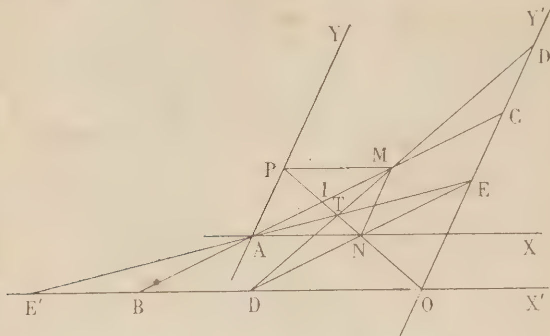
GÉOMÉTRIE

4307. — *Par un point* O *du plan d'un angle* XAY, *on mène une sécante* ONP. *Lieu du quatrième sommet* M *du parallélogramme* ANMP.

Démontrer que les tangentes en M *et* A *au lieu trouvé se coupent sur la sécante* ONP.

Nous allons montrer que le lieu de M est une hyperbole passant par A et admettant pour asymptotes les parallèles OX′, OY′ à AX, AY.

Soient, en effet, B, C, I les points de rencontre de la droite



AM avec les droites OX′, OY′ et la sécante ONP. Des triangles semblables permettent d'écrire

$$\frac{IA}{AB} = \frac{IN}{NO} = \frac{IM}{MC}.$$

Or $IA = IM$;

donc $AB = MC$.

D'après une propriété bien connue de l'hyperbole, on conclut de cette égalité que le point M appartient à l'hyperbole définie par le point A et les asymptotes OX′, OY′.

Par N menons à BC une parallèle qui coupe en D et E les côtés de l'angle X′OY′. Les droites MD et AE sont les tangentes en M et A à l'hyperbole, puisque si l'on prolonge par exemple DM jusqu'à sa rencontre en D′ avec OY′, on a

$$\frac{DM}{MD'} = \frac{DN}{NE} = 1,$$

ou $DM = MD'$.

Les deux tangentes MD, AE, étant les diagonales du trapèze AMED se coupent nécessairement sur la sécante ONP, qui joint les milieux I et N des deux bases (propriété connue).

(F. BOULAD).

Remarque. — D'après ce qu'on vient de voir, on peut obtenir très simplement un point quelconque et la tangente en ce point d'une hyperbole dont on donne un point et les asymptotes.

Autre Remarque. — La théorie des faisceaux homographiques donne la solution sans constructions ou calculs.

Les droites PM, PN appartiennent à des faisceaux ayant pour pivots les points à l'infini sur AX et sur AY. Or ces droites se correspondent homographiquement. Donc le lieu est une conique ayant ses points à l'infini sur AX et sur AY.

Les tangentes en ces points sont les rayons qui dans chaque faisceau correspondent à la droite des pivots considérée comme appartenant à l'autre faisceau. Or pour que PM devienne la droite de l'infini, il faut que ON prenne la position OY′. Donc les asymptotes sont OY′ et OX′.

La droite ONP passant par le centre de l'hyperbole et par le milieu I de AM, est le diamètre conjugué à cette corde, donc elle contient le pôle T de AM.

(M. Rebeix, lycée du Puy, a résolu la même question.)

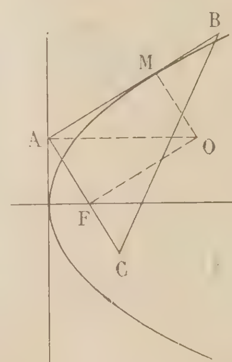
4326. — *Un triangle* ABC, *rectangle en* A, *se meut dans un plan, de manière que le côté* AB *reste tangent à une parabole donnée et que le côté* AC *passe toujours par le foyer de cette courbe.*

Déterminer, pour une position quelconque du triangle, son centre instantané de rotation O.

Dire quel est le lieu décrit par le point A, *quand le triangle se déplace et en conclure que* AO *est parallèle à l'axe de la parabole. Enfin déterminer le lieu décrit par le point* O *sur le plan fixe.*

(*Bacc. lettres-sciences, Caen, juillet 1897.*)

Observons d'abord que lorsqu'une droite enveloppe une courbe, son centre instantané de rotation est sur la normale au point de contact.



En effet, pour deux positions de la droite voisines l'une de l'autre, le centre de rotation est sur la perpendiculaire élevée au milieu de la corde de contact MM′, et lorsque cette corde tend vers la tangente en M, la perpendiculaire vient se confondre avec la normale en M.

Cela posé, le triangle ABC ayant le côté AB tangent à la parabole et le côté AC passant par le foyer F, c'est-à-dire tangent à un cercle de rayon nul, le centre instantané de rotation O de ce triangle est déterminé par l'intersection de la normale en M à la parabole avec la perpendiculaire en F à AC.

D'ailleurs, le point A étant la projection du foyer F sur une tangente, décrit comme on sait la tangente au sommet de la parabole. Par suite, la droite AO, qui joint le point A au centre instantané de rotation O, est normale à cette tangente, c'est-à-dire parallèle à l'axe de la parabole.

Comme on l'a déjà établi récemment (V. 3e partie du n° 4325, p. 138), le lieu de O est une parabole de sommet F et dont le paramètre est le quart de celui de la parabole donnée.

(Fr. CHUBERRE, lycée de Rennes.)

Remarque. — L'hypoténuse du triangle ABC ne joue aucun rôle dans la question; on aurait donc dû ne parler dans l'énoncé que de l'angle droit BAC et non d'un triangle rectangle.

[Ont résolu la même question : MM. P. Barroué ; Bayor ; L. Fournier ; Laguarigue de Survilliers ; E. Laudat ; H. Lefèvre ; A. Legros ; C. Marie ; Robin ; P. Vincent.]

4475. — *Dans un quadrilatère inscrit* ABCD *les cercles des neuf points relatifs aux quatre triangles* ABC, BCD, CDA, DAB *concourent en un même point.*

Dans un pentagone inscrit ABCDE *les cercles des neuf points relatifs aux cinq triangles* ABC, BCD, CDE, DEA, EAB *se coupent deux à deux en cinq points qui sont sur un même cercle.*

I. Soit le quadrilatère ABCD inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R. Déterminons les points de concours des hauteurs des quatre triangles ABC, BCD, CDA, DAB. Ces quatre points, H_1, H_2, H_3, H_4, sont les sommets d'un quadrilatère égal au premier. En effet, la figure AH_1H_2D, par exemple, est un parallélogramme, parce que les côtés opposés AH_1, DH_2 sont tous deux perpendiculaires à BC et égaux au double de la distance

O à BC (propriété connue); donc $H_1H_2 = AD$, et de même $H_2H_3 = AB$, etc. Le centre du cercle des neuf points de chacun des triangles ABC, BCD, CDA, DAB est au milieu de la droite qui joint le centre du cercle circonscrit O au point de concours des hauteurs. Ces centres sont en O_1, O_2, O_3, O_4 et le quadri-

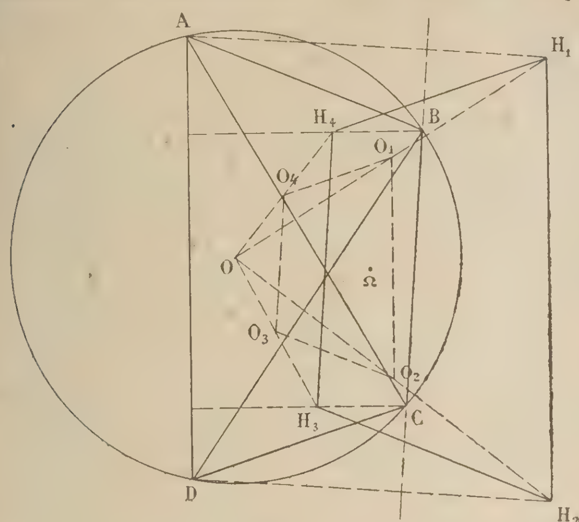


Fig. 1

latère $O_1O_2O_3O_4$ est homothétique de $H_1H_2H_3H_4$ par rapport au centre O du cercle circonscrit à ABCD. Le quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$ est donc inscriptible. Le rayon du cercle circonscrit à ce quadrilatère est égal à 1/2R, le rapport de similitude avec $H_1H_2H_3H_4$ étant 1/2.

On sait d'ailleurs que le rayon du cercle des neuf points est égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit. Donc si des centres O_1, O_2, O_3, O_4 on trace les cercles des neuf points relatifs aux quatre triangles ABC, BCD, CDA, DAB, ces quatre cercles passeront au centre du cercle circonscrit à $O_1O_2O_3O_4$. Ils se couperont donc au même point Ω.

II. Dans la figure 1, les droites AD et H_1H_2 sont égales et pa-

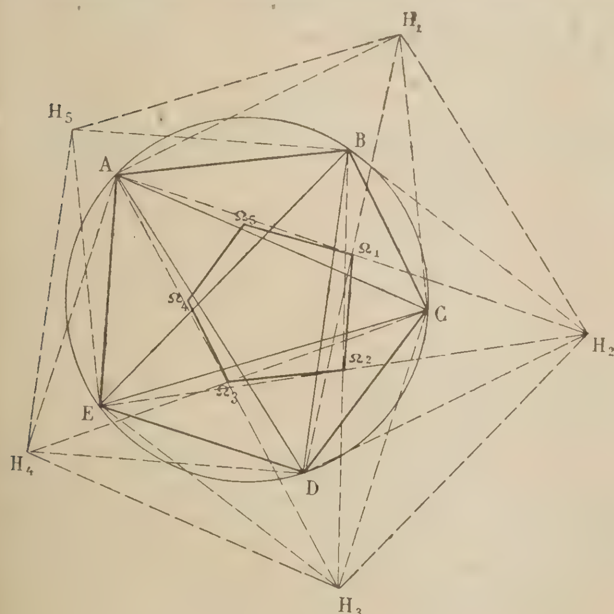


Fig. 2

rallèles; les diagonales du parallélogramme AH_1H_2D déterminent le point Ω de concours des cercles des neuf points des triangles considérés. En appliquant ces remarques à la figure 2, nous voyons successivement que ABCD est un quadrilatère inscrit; H_1H_2 est parallèle à AD; le point de concours des cercles des neuf points des triangles ABC, BCD est en Ω_1 au milieu de H_1D et de H_2A. De même le point de concours des cercles des neuf points des triangles BCD et CDE est en Ω_2 au milieu de H_2E et H_3B, etc.

En considérant le triangle AH_2E, nous voyons que $\Omega_1\Omega_2$ joint les milieux des deux côtés H_2A et H_2E; donc $\Omega_1\Omega_2$ est parallèle à AE et égal à sa moitié. De même $\Omega_2\Omega_3$ est parallèle à AB et égal à sa moitié, etc. Donc le pentagone $\Omega_1\Omega_2\Omega_3\Omega_4\Omega_5$ a ses côtés parallèles à ceux de ABCDE et égaux à la moitié des côtés correspondants. Il est donc semblable à ABCDE et, partant, inscriptible dans un cercle de rayon 1/2R. C. q. f. d.

(R. MANEN, petit séminaire de Massals).

[Ont résolu la même question : MM. H. Carpentier ; B. Carrière ; L. Ecoffard ; G. H. D. O. ; R. Lavallée ; M. Oger ; G. Shoonheere.]

TRIGONOMÉTRIE

4547. — *Résoudre le système*

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg}(y+z) = a,$$
$$\operatorname{tg} y \operatorname{tg}(z+x) = b,$$
$$\operatorname{tg} z \operatorname{tg}(x+y) = c.$$

Les équations proposées prennent, après développement, la forme

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} z + a \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = a,$$
$$\operatorname{tg} y \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} x + b \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x = b,$$
$$\operatorname{tg} z \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} z \operatorname{tg} y + c \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = c.$$

Posons

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = u,$$
$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} z = v,$$
$$\operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = s;$$

on en déduit facilement

$$\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{\frac{uv}{s}}, \qquad (\alpha)$$

$$\operatorname{tg} y = \pm\sqrt{\frac{us}{v}}, \qquad (\beta)$$

$$\operatorname{tg} z = \pm\sqrt{\frac{vs}{u}}. \qquad (\gamma)$$

Le signe de l'une des tangentes étant fixe, les autres signes sont fixes, puisque si on a $\operatorname{tg} x$, par exemple, $\operatorname{tg} y$ et $\operatorname{tg} z$ sont données par des équations du premier degré.

Il suffit donc de déterminer les valeurs des inconnues auxiliaires u, v, s; nous avons, pour cela, les trois équations

$$u + v + as = a,$$
$$s + u + bv = b,$$
$$v + s + cu = c.$$

En remplaçant s par sa valeur tirée de la première, dans les deux autres équations, on obtient les deux équations

$$(ab-1)v + (a-1)u = a(b-1),$$
$$(ac-1)u + (a-1)v = a(c-1).$$

La valeur de v tirée de la première équation et portée dans la seconde conduit à la valeur de u, savoir

$$u = a \cdot \frac{(ab-1)(c-1) - (a-1)(b-1)}{(ac-1)(ab-1) - (a-1)^2}; \qquad (1)$$

on a ensuite

$$v = a \cdot \frac{(ac-1)(b-1) - (a-1)(c-1)}{(ac-1)(ab-1) - (a-1)^2}, \qquad (2)$$

$$s = a \cdot \frac{(bc-1)(a-1) - (b-1)(c-1)}{(ac-1)(ab-1) - (a-1)^2}. \qquad (3)$$

La substitution des valeurs (1), (2), (3) dans les relations (α), (β), (γ) donne pour les valeurs de $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} y$, $\operatorname{tg} z$,

$$\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{\frac{a[(ab-1)(c-1)-(a-1)(b-1)][(ac-1)(b-1)-(a-1)(c-1)]}{[(bc-1)(a-1)-(b-1)(c-1)][(ac-1)(ab-1)-(a-1)^2]}},$$

$$\operatorname{tg} y = \pm \sqrt{\frac{a[(ab-1)(c-1)-(a-1)(b-1)][(bc-1)(a-1)-(b-1)(c-1)]}{[(ac-1)(b-1)-(a-1)(c-1)][(ac-1)(ab-1)-(a-1)^2]}},$$

$$\operatorname{tg} z = \pm \sqrt{\frac{a[(ac-1)(b-1)-(a-1)(c-1)][(bc-1)(a-1)-(b-1)(c-1)]}{[(ab-1)(c-1)-(a-1)(b-1)][(ac-1)(ab-1)-(a-1)^2]}},$$

(E. ARDIN-DELTEIL, à Montpellier.)

[M. L. Barberot, au Valdoie, a résolu la même question.]

PHYSIQUE

4588. — *Le courant d'une pile, dont la force électromotrice est de 50 volts, traverse une spirale conductrice de résistance inconnue. Quelle doit être la résistance de cette spirale pour que dans une minute le courant y dégage une quantité de chaleur égale à 1500 joules? Quelle est l'intensité du courant fourni par la pile?*

On donne la résistance intérieure de la pile $\rho = 4$ *ohms.*

(*Bacc. lettres-sciences, Alger, mars 1899.*)

L'énergie, en joules, qui apparaît dans un conducteur de résistance r traversé par un courant d'intensité i pendant un temps t est donnée par la loi de Joule :

$$W = i^2rt,$$

i étant exprimé en ampères, r en ohms et t en secondes. On doit donc avoir d'après l'énoncé

$$1500 = i^2r \times 60,$$

d'où

$$i^2r = 25. \qquad (1)$$

D'autre part, la force électromotrice de la pile étant de 50 volts et sa résistance intérieure de 4 ohms, on a

$$i = \frac{50}{4+r},$$

ou

$$i^2 = \frac{2500}{16+r^2+8r}.$$

Remplaçant i^2 par sa valeur tirée de (1), il vient

$$25 = \frac{2500r}{16+r^2+8r},$$

d'où

$$r^2 - 92r + 16 = 0.$$

Les racines de cette équation sont :

$$r' = 91^{\text{ohms}},825,$$
$$r'' = 0^{\text{ohm}},175.$$

A chacune de ces résistances correspond une intensité différente.

Pour $r = 91^{\text{ohms}},825$, on a

$$i = \frac{50}{91,825+4} = 0^{\text{amp}},521.$$

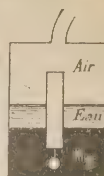
Pour $r = 0^{\text{ohm}},175$, on a

$$i = \frac{50}{0,175+4} = 11^{\text{amp}},976.$$

(H. DAMOISEAU, à Bar-sur-Seine.)

[Ont résolu la même question : MM. M. Bameulle ; C. Croze ; Debenest ; F. Deville ; Donnadieu ; Gillaizeau ; E. Le Maigre ; Le Révérend ; P. Letourneur ; M. Oger ; R. P. ; A. Vidalenc.]

4601. — *On met du mercure dans un vase en fer cylindrique de* 10^{cm} *de rayon; on verse au-dessus* 578^{cc} *d'eau et enfin au-dessus se trouve une atmosphère que l'on peut comprimer. On met dans le vase un flotteur formé d'un prisme droit en verre de* 20^{cm} *de hauteur et de* 500^{cc} *de volume (densité du verre, 2,5) et d'une boule de platine (densité 20) pesant* 3578^{gr}. *On demande quelle position d'équilibre prend le flotteur lorsque la température est 4° et la pression de l'air 1 atmosphère (densité du mercure 13,5; poids du litre d'air* $1^{\text{gr}},29$). *On demande l'effet que produirait un changement de pression sur l'état d'équilibre précédent.*



(*Bacc. lettres-math., Toulouse, novembre 1898.*)

Soit x la hauteur du prisme qui émerge de l'eau. La section du vase est

$$3,1416 \times 100 = 314^{\text{cq}},16,$$

et la section du prisme de verre

$$\frac{500}{20} = 25^{\text{cq}}.$$

La section de la colonne d'eau qui entoure le prisme est donc

$$314,16 - 25 = 289^{\text{cq}},16$$

et sa hauteur $\dfrac{578}{289,16} = 2^{\text{cm}}$. Par suite, la partie du prisme qui plonge dans le mercure a pour hauteur $18 - x$.

Lorsqu'il y a équilibre, le poids du prisme en verre et de la boule de platine fait équilibre : 1° à la poussée du mercure sur la sphère en platine et sur la partie du prisme qui y plonge; 2° à la poussée de l'eau sur le prisme; 3° à la poussée de l'air. On a donc

$$500 \times 2,5 + 3578 = \frac{3578}{20} \times 13,5 + (18-x)25 \times 13,5 + 2 \times 25 + x \times 25 \times 0,00129,$$

d'où

$$x = 11^{\text{cm}}.$$

Si la pression de l'air augmente, la poussée de l'air sur la partie du prisme qui sortait primitivement augmente; pour compenser, il faut que la poussée du mercure diminue; le prisme de verre se soulève légèrement.

Si la pression diminue, l'effet produit est inverse; le prisme s'enfonce légèrement.

(LE RÉVÉREND, lycée de Coutances.)

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil ; R. Blanc ; G. Foucry ; M. Gondran ; G. Lallier ; J. Lamotte ; R. Lavallée ; B. Mathieu ; P. Millevoye ; M. Oger ; A. Pichon ; Rieumajou ; E. Rieux ; G. Salles ; A. Vidalenc ; H. Janois].

CONCOURS DE 1899

ÉCOLE NORMALE DE SÈVRES

Arithmétique, Algèbre et Géométrie.

I. — **4611**. Étant donnés la racine carrée A d'un nombre entier à une unité près et le reste R de l'opération donnant cette racine, on demande quels sont, dans les divers cas possibles, le quotient et le reste de la division du nombre entier par sa racine A.

II. — **4612**. Pour quelles valeurs de m l'équation du second degré en x

$$x_2 - 2mx + 2m^2 + m - 6$$

a-t-elle des racines? Quels sont, suivant les cas, les signes de ces racines?

III. — **4613**. Calculer les côtés d'un quadrilatère plan, convexe, sachant :

que le périmètre du quadrilatère est $2p$,
que la somme des carrés des côtés est $4a^2$,
que l'on peut inscrire un cercle dans le quadrilatère,
que les diagonales du quadrilatère sont rectangulaires.
Parmi tous les quadrilatères correspondant à des valeurs données de p et de a, quel est celui qui possède la plus grande surface ?

(*19 juin, de 8 h. à midi.*)

Physique et Chimie.

I. — Principe de la condensation électrique.

II. — **4614**. Un cube de fer, dont l'arête a 1 décimètre de longueur à 0°, flotte sur du mercure.

On demande quelle est la valeur de la pression qu'exerce le mercure sur une des faces verticales de ce cube lorsque la température du mercure et du fer est 100°.

On donne :
La densité du fer à 0°, $d = 7,80$;
La densité du mercure à 0°, $\delta = 13,59$;
Le coefficient de dilatation absolue du mercure, $\mu = 0,00018$;
Le coefficient de dilatation linéaire du fer, $k = 0,000012$.

III. — Comparer les propriétés chimiques des composés hydrogénés formés par les corps non métalliques dont l'étude est mentionnée au programme d'admission.

(*20 juin, de 8 h. à midi.*)

Histoire naturelle.

I. — Caractères généraux des Vertébrés. Division des Vertébrés en embranchements et en classes ; caractères de ces divisions.

II. — La graine et la germination.

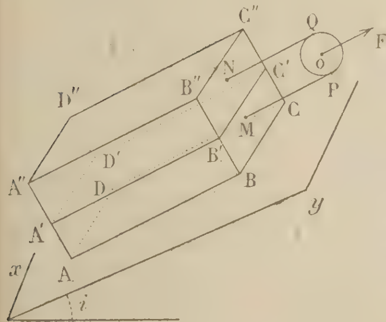
(*23 juin, de 8 h. à midi.*)

CONCOURS GÉNÉRAUX (*Suite.*)

Classe de Première-Sciences.

Mathématiques (Paris et Départements.)

4615. — Deux prismes rectangulaires ABCDA'B'C'D', ou P, et A'B'C'D'A''B''C''D'', ou P', reposent sur un même plan incliné xy ; ils sont superposés l'un à l'autre, P' sur P, de façon à avoir en commun la face A'B'C'D'. Les arêtes AB, CD, A'B', C'D', A''B'', C''D'' sont parallèles aux lignes de plus grande pente du plan incliné. Aux centres M et N des faces BCB'C' et B'C'B''C'' se trouvent attachées les extrémités d'un fil qui s'enroule sur une poulie tellement choisie et disposée que les brins MP et NQ du fil sont parallèles aux lignes de plus grande pente. Enfin au centre O de la poulie s'exerce une force F, parallèle elle aussi aux lignes de plus grande pente et dirigée vers le haut.



On demande les conditions d'équilibre du système.

Si l'équilibre se trouve rompu quand on fait varier F, dire de quelle façon il le sera. Discuter.

p et p' poids des prismes P et P', supposés homogènes.
f coefficient de frottement du prisme P sur le plan incliné.
f' coefficient de frottement du prisme P' sur le prisme P.
i inclinaison du plan xy sur l'horizon.

On néglige la masse de la poulie et l'on suppose le fil parfaitement flexible.

(*28 juin, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.*)

BACCALAURÉATS

SESSION DE JUILLET 1899

PARIS

Lettres-Mathématiques.

Mathématiques.

I. — **4616**. Dans le plan d'un carré ABCD, trouver un point M tel que

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = p^2,$$
$$\overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = q^2.$$

A quelles conditions doivent satisfaire les deux carrés p^2 et q^2 pour que le problème soit possible ?

II. — *1er sujet.* — Calculer $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$ en fonction de $\sin a$, $\cos a$, $\sin b$, $\cos b$.

II. — *2e sujet.* — Résoudre un triangle, connaissant les trois côtés.

II. — *3e sujet.* — Résoudre un triangle, connaissant deux côtés et l'angle compris.

Physique.

I. — **4617**. Un flacon possède à 0° une capacité de 40cc. Peut-on verser dans ce flacon une quantité de mercure telle que, lorsque la température varie, le volume non occupé par le mercure demeure indépendant de la température ? Quel est le poids de mercure à employer ?

Coefficient de dilatation linéaire du verre, $\frac{1}{45\,000}$.

Coefficient de dilatation du mercure, $\frac{1}{5\,500}$.

Densité du mercure à 0°, 13,6.

II. — *1er sujet.* — Effets calorifiques et lumineux des courants. Applications.

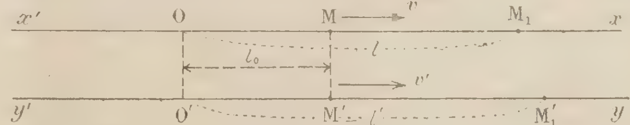
II. — *2e sujet.* — Courants d'induction produits par la variation d'un courant électrique.

II. — *3e sujet.* — Courants thermo-électriques.

Lettres-Sciences.

Mathématiques.

I. — **4618**. Deux mobiles M et M' se meuvent sur deux trajectoires rectilignes parallèles $x'x$, $y'y$ et se trouvent, à l'instant initial, à la même distance l_0 des points de repère O et O', ou origines des espaces et du même côté de ces points, vers la droite, par exemple. Ils sont animés de vitesses respectives v et v' dans ce même sens, mais le mobile M est en outre soumis à une accélération constante γ de sens contraire à la vitesse v. La vitesse v' du mobile M' reste constante pendant



toute la durée du mouvement. Au bout d'un temps x le mobile M est en M_1, ayant parcouru un espace l et le mobile M' est en M'_1, ayant parcouru un espace l'. On demande d'étudier la variation du rapport $\frac{l}{l'}$ quand le temps x varie de moins l'infini à plus l'infini et de représenter cette variation par une courbe figurative.

On supposera $l_0 = 10^m$, $v = 5^m$, $\gamma = 0^m,1$ et $v' = 3^m$.

II. — *1er sujet.* — Rappeler les propriétés essentielles du plan tangent à une surface et les appliquer aux questions suivantes :
Plan tangent à un cylindre par un point donné de sa surface ;
Plan tangent à un cône passant par un point extérieur donné.

II. — *2e sujet.* — Construire l'intersection d'une sphère et d'un plan oblique aux deux plans de projection et donné par ses traces.

II. — *3e sujet.* — Un plan est donné par son échelle de pente, et un point par sa projection sur le plan de comparaison et sa cote ; construire la distance du point au plan.

Physique.

I. — Une lunette astronomique est disposée de façon qu'on voie nettement un objet situé à l'infini. On regarde ensuite avec cette lunette un objet placé à 4^m de l'objectif, et pour le voir nettement on est obligé de faire varier de 8^{cm} la distance de l'oculaire à l'objectif. Quelle est la distance de l'objectif ?

II. — *1er sujet.* — Lois fondamentales des courants.

II. — *2e sujet.* — Poids spécifiques des solides et des liquides.

II. — *3e sujet.* — Bobine de Ruhmkorff.

QUESTIONS PROPOSÉES

4619. — Le nombre entier $2^{155} - 1$ est divisible par $(31)^2$.

4620. — Trouver deux nombres entiers sachant que la somme des quotients obtenus en les divisant par leur plus grand commun diviseur est 7 et que leur produit divisé par ce même plus grand commun diviseur est 60. 60 et 10 30 et 12 20 et 15

(J. Grévin.)

4621. — Vérifier que l'expression

$$5(x^2 + y^2 + z^2) - 4(xy + xz + yz)$$

est la somme de trois polynomes entiers carrés parfaits.

(A. Sainte-Lague, à Agen.)

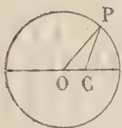
4622. — Résoudre le système d'équations

$$x^2 + y^2 = az^2,$$
$$x^2 - y^2 = bz^2,$$
$$x + y = c.$$

4623. — Exprimer au moyen de l'entier n la somme

$$-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \ldots\ldots - (2n-1)^2 + (2n)^2. = n(2n+1).$$

(*Bacc. lettres-math., Clermont, novembre 1898.*)



4624. — On donne un cercle de rayon R et de centre O ; trouver sur la circonférence un point P tel que l'angle OPC soit maximum. En supposant $OC = \frac{R}{24}$, calculer en degrés et minutes la valeur de l'angle maximum.

(*Bacc. lettres-math., Poitiers, novembre 1898.*)

4625. — Sur AB comme hypoténuse, on construit un triangle rectangle isocèle ABC ; sur BC comme hypoténuse, on construit, extérieurement au précédent, un triangle rectangle isocèle BCC_1, et ainsi de suite. Soit C_n le dernier point obtenu. On demande :

1° La longueur de la ligne brisée $ACC_1C_2 \ldots C_n$;

2° La somme des aires des triangles que l'on a construits ;

3° En considérant les droites AC, CC_1, C_1C_2, ..., $C_{n-1}C_n$ comme représentant des forces en grandeur et direction, de réduire ce système de forces à un couple et à une force passant par B.

(*Bacc. lettres-math., Toulouse, novembre 1898.*)

4626. — Soit un triangle rectangle ABC dont l'hypoténuse BC et la hauteur AH sont données : $BC = a$ et $AH = h$. On considère la bissectrice extérieure DE de l'angle droit A et les perpendiculaires BD et CE abaissées des sommets B et C sur cette droite. 1° Calculer le volume V engendré par le trapèze DBCE tournant autour de DE ; 2° Calculer le volume V′ engendré par le triangle ABC tournant autour de la même droite DE ; 3° Déterminer a en fonction de h, de manière que le rapport $\frac{V}{V'}$ soit égal à $\frac{nh}{a}$, n étant un nombre donné. Conditions que doit remplir n pour la possibilité du problème.

(*Bacc. lettres-math., Nancy, novembre 1898.*)

4627. — Dans un tronc de cône circonscrit à une sphère, on connaît le rapport de la surface latérale à la surface totale. Calculer le rapport des rayons des bases. — Discussion.

(*Bacc. lettres-sciences, Marseille, novembre 1898.*)

4628. — Si AA′, BB′, CC′ sont les hauteurs d'un triangle ABC, on a

$$AB'.BC'.CA' = AC'.BA'.CB' = A'B'.B'C'.C'A'.$$

(G. Delahaye, à Roye.)

4629. — Diviser, à l'aide du compas seul, un arc de cercle dont les extrémités A, B et le centre O sont donnés.

(G. Delahaye.)

4630. — On considère deux cordes AB, CD d'un cercle telles que AB est bissectrice de l'angle formé en joignant son milieu aux deux extrémités de la corde CD. Démontrer que CD est également bissectrice de l'angle formé en joignant son milieu aux extrémités de AB.

4631. — On donne un cercle O et une corde AB. Par un point quelconque M de AB, mener une corde CD telle que l'on ait, en joignant A aux points C et D,

$$\frac{MC}{MD} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AD}^2}.$$

Lorsque M se déplace sur AB, trouver les lieux des points de concours des médianes et des hauteurs du triangle ACD, et le lieu du pied de la bissectrice issue de A.

(E. Fouché.)

4632. — On considère un cercle O et deux points fixes A et B. Par B on mène la sécante BCD, et l'on trace les cordes CAE, DAF. Trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle AEF.

(M. Rebeix, au Puy.)

4633. — Prouver que, dans un triangle, chaque médiane est proportionnelle au sinus de l'angle formé par les deux autres.

(H. Michel, lycée de Douai.)

4634. — Sur l'axe principal d'une lentille convergente L ayant pour distance focale $f = 50^{cm}$, on place un point lumineux P à une distance a de la lentille. Du côté opposé de la lentille on applique un miroir plan M perpendiculaire à l'axe principal de la lentille, la face réfléchissante tournée vers la lentille (celle-ci est supposée infiniment mince). Les rayons lumineux issus de P traversent une première fois la lentille, se réfléchissent contre le miroir plan, traversent une seconde fois la lentille et ressortent enfin pour converger en un point P′ (réel ou virtuel) situé comme le point P sur l'axe principal.

Calculer la distance a' de ce point P′ à la lentille, connaissant a et f.

Étudier la variation de a' quand on fait varier a de ∞ à 0.

Trouver à quelle distance il faut placer le point P pour que le point P′ coïncide avec lui.

(*Bacc. lettres-math., Dijon, novembre 1898.*)

4635. — On suppose qu'une corde de longueur connue AB donne l'ut_0 quand elle supporte un poids de 10^{kg}. On demande :

1° Quelle tension il faut qu'elle supporte pour donner le sol_0 ;

2° Quel poids p il faut mettre sur le plateau M pour exercer cette tension par l'intermédiaire de la presse hydraulique P et du levier BCD. L'extrémité A de la corde est fixée au point fixe A, l'autre extrémité est attachée au levier et D est le point fixe du levier. Les surfaces des pistons sont $S = 0^{mq},01$ et $s = 100^{mmq}$; $BC = 60^{cm}$ et $CD = 20^{cm}$;

3° La pression barométrique intervient-elle dans l'expérience ?

(*Bacc. lettres-math., Toulouse, juillet 1898.*)

4636. — On relie une pile de Daniell à un galvanomètre par l'intermédiaire d'une résistance de 300 ohms ; on obtient une déviation de 40°. En doublant la résistance interposée, la déviation tombe à 30°. On répète la même opération avec une pile de Bunsen et on trouve que pour obtenir les mêmes déviations il faut intercaler successivement des résistances de 550 et de 1100 ohms.

On demande de calculer le rapport des forces électromotrices des deux piles.

(*Bacc. lettres-sciences, Nancy, novembre 1898.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

PUBLIÉ PAR

H. VUIBERT

24^E ANNÉE

1899-1900

PARIS

LIBRAIRIE NONY ET Cie

63, Boulevard Saint-Germain, 63

24e Année. — N° 1. JOURNAL Paris, le 1er Octobre 1899.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.

Abonnements .. Librairie Nony et Cie, Boulᵈ St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (1899)

Mathématiques (Paris et Départements.)

Solution par M. **L. Remy**, élève du lycée Lakanal, Lauréat du concours (1er prix).

I. — **4603**. *Résoudre le système d'équations*

$$y + \frac{1}{z} = a, \qquad (1)$$

$$z + \frac{1}{x} = b, \qquad (2)$$

$$x + \frac{1}{y} = c, \qquad (3)$$

où a, b, c sont des nombres donnés.

Ce système admet deux solutions. Si l'une de ces solutions est formée de nombres rationnels, il en est de même de l'autre ; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que a, b, c soient des nombres rationnels et que l'on ait

$$abc - a - b - c = n + \frac{1}{n},$$

n étant un nombre rationnel.

Que deviennent les valeurs trouvées pour x, y, z quand on y remplace respectivement a, b, c par $\beta + \frac{1}{\gamma}$, $\gamma + \frac{1}{\alpha}$, $\alpha + \frac{1}{\beta}$?

Peut-on choisir a, b, c de manière que le système proposé admette deux solutions distinctes formées de nombres entiers ?

Je tire y et z en fonction de x de (2) et de (3) et je porte dans (1) :

$$\frac{1}{y} = c - x, \qquad \text{d'où} \qquad y = \frac{1}{c - x};$$

$$z = \frac{bx - 1}{x}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{z} = \frac{x}{bx - 1}.$$

Nous obtenons l'équation en x

$$\frac{1}{c - x} + \frac{x}{bx - 1} = a,$$

d'où $(ab - 1)x^2 - (a - b - c + abc)x + (ac - 1) = 0, \qquad (4)$

$$x = \frac{a - b - c + abc \pm \sqrt{(abc - a - b - c)^2 - 4}}{2(ab - 1)}.$$

Remarquons que le système proposé ne change pas quand on y permute circulairement x, y, z et a, b, c. Nous obtiendrons donc les valeurs de y et z en faisant les mêmes permutations dans la valeur trouvée pour x.

Nous avons ainsi deux valeurs pour chaque inconnue : soient x_1, y_1, z_1 les valeurs pour lesquelles le radical est précédé du signe $+$ et x_2, y_2, z_2 celles où il est précédé du signe $-$. Reste à savoir comment il faut associer ces solutions.

Je prétends d'abord que le système admet *deux* solutions (elles sont réelles pourvu que $abc - a - b - c$ ne soit pas compris entre -2 et $+2$). En effet, les formules qui donnent y et z en fonction de x sont du premier degré en y et en z ; à une valeur de x correspond donc une valeur et une seule pour y et pour z. Ceci posé, je dis qu'il faut associer les valeurs qui ont le même signe devant le radical, car si l'on prenait par exemple

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\cdots + \sqrt{}}{\cdots}, \\ y = \frac{\cdots + \sqrt{}}{\cdots}, \\ z = \frac{\cdots - \sqrt{}}{\cdots}, \end{array} \right.$$

on en déduirait par permutations circulaires

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\cdots - \sqrt{}}{\cdots}, \\ y = \frac{\cdots + \sqrt{}}{\cdots}, \\ z = \frac{\cdots + \sqrt{}}{\cdots}, \end{array} \right. \qquad \text{et encore} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\cdots + \sqrt{}}{\cdots}, \\ y = \frac{\cdots - \sqrt{}}{\cdots}, \\ z = \frac{\cdots + \sqrt{}}{\cdots}, \end{array} \right.$$

ce qui donnerait trois systèmes *distincts* de solutions vérifiant le système proposé.

La quantité qui entre sous le radical des deux valeurs de x étant symétrique par rapport à a, b, c, elle est la même pour y et z. Il en résulte que si $(abc - a - b - c)^2 - 4$ est carré parfait, les *deux* solutions du système seront rationnelles.

Mettons $(abc - a - b - c)$ sous la forme d'un binome $(n + n')$ et cherchons à quelle condition doivent satisfaire n et n' pour que $(n + n')^2 - 4$ soit carré parfait.

On sait que si une expression de la forme $n^2 + n'^2 + 2nn' - 4$ est carré parfait, elle ne peut être le carré que de $(n + n')$ ou de $(n - n')$. Or $n^2 + n'^2 + 2nn' - 4$ ne peut être le carré de $n + n'$.

La condition nécessaire et suffisante est donc que

$$2nn' - 4 = -2nn',$$

ou

$$n = \frac{1}{n'}.$$

Donc $abc - a - b - c$ doit être de la forme

$$n + \frac{1}{n}.$$

Il est bien entendu que a, b, c, n sont rationnels.

Que deviennent les valeurs trouvées pour x, y, z quand on y remplace a par $\beta+\frac{1}{\gamma}$, b par $\gamma+\frac{1}{\alpha}$, c par $\alpha+\frac{1}{\beta}$?

Au lieu de faire ces substitutions dans les valeurs trouvées pour x, y, z, effectuons-les dans le système proposé. Nous voyons immédiatement que le système de valeurs

$$\left\{\begin{array}{l} x=\alpha, \\ y=\beta, \\ z=\gamma, \end{array}\right.$$

est solution. Pour trouver l'autre valeur de x, considérons l'équation (4). Le produit x_1x_2 est égal à

$$\frac{ac-1}{ab-1},$$

c'est-à-dire
$$\frac{\left(\beta+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)-1}{\left(\beta+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\gamma+\frac{1}{\alpha}\right)-1},$$

ou
$$\frac{\beta(\alpha+\alpha\beta\gamma)+1}{\gamma(\beta+\alpha\beta\gamma)+1}\times\frac{\alpha}{\beta}.$$

Donc la seconde valeur de x est $\frac{\beta(\alpha+\alpha\beta\gamma)+1}{\gamma(\beta+\alpha\beta\gamma)+1}\times\frac{1}{\beta}$.

On déduit y et z par permutations circulaires.

Pour que les deux solutions soient formées de nombres entiers, il faut d'abord que α, β, γ soient entiers.

Pour que la seconde valeur de x soit entière, il faut *au moins* que le numérateur soit divisible par β. Or $\beta(\alpha+\alpha\beta\gamma)+1$ est une somme de deux termes dont l'un seulement est divisible par β.

Les deux solutions ne pourront donc être formées de nombres entiers que si

$$\alpha=\pm 1, \qquad \beta=\pm 1, \qquad \gamma=\pm 1.$$

Mais alors les deux solutions sont confondues, car dans tous ces cas la quantité

$$abc-a-b-c=\pm 2.$$

Il est donc *impossible* de déterminer a, b, c de façon que le système proposé admette deux solutions *distinctes* formées de nombres entiers.

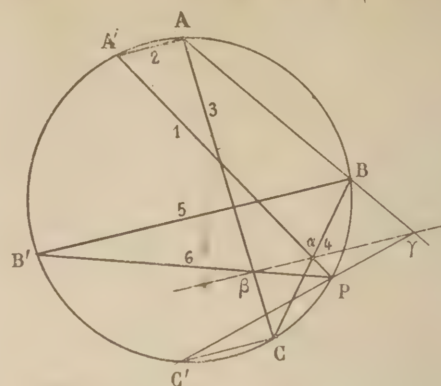
[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil, à Montpellier ; B. Dodier, lycée de Laval ; G. Foucry, école normale de Châlons ; M. Rebeix, à Clermont ; P. Zlatco.]

II. — **4604**. *Étant donné un triangle inscrit dans un cercle, on mène par les sommets* A, B, C *trois parallèles qui rencontrent respectivement le cercle aux points* A′, B′, C′. *On joint un point quelconque* P *du cercle aux points* A′, B′, C′; *les droites* PA′, PB′, PC′ *rencontrent respectivement les côtés* BC, CA, AB *aux points* α, β, γ; *démontrer que ces points* α, β, γ *sont en ligne droite.*

Traçons la droite $\alpha\beta$ et considérons l'hexagone PA′ACBB′ inscrit dans le cercle et formé par les deux droites issues de α, les deux droites issues de β et les parallèles AA′, BB′. Numérotons les côtés et appliquons le théorème de Pascal : les points de rencontre des côtés 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6 sont en ligne droite ; or le point de rencontre des parallèles AA′ et BB′ est rejeté à l'infini dans la direction AA′ : donc la droite $\alpha\beta$ est parallèle à AA′. — De même on démontrerait que $\alpha\gamma$ est parallèle à AA′. Il en résulte que les trois points α, β, γ sont sur une même droite parallèle à AA′.

Ce théorème se prête à la généralisation suivante : supposons que le point de concours I des droites AA′, BB′, CC′ soit à distance finie, ou, en d'autres termes, que ces trois droites soient non plus parallèles mais concourantes.

Le même raisonnement prouvera que les points α, β, γ sont



sur une même droite, qui passe par le point de concours I des droites AA′, BB′, CC′.

Remarquons que toutes les propriétés qui entrent en jeu dans ce théorème sont projectives (intersection de droites, droites parallèles). Si nous projetons la figure sur un plan par projection conique, le théorème se conservera ; il s'applique donc à toutes les coniques.

Cette remarque est d'ailleurs inutile, puisque la démonstration que nous avons employée ne repose que sur le théorème de Pascal et que celui-ci s'étend à toutes les coniques.

Il peut être bon de faire observer que ce théorème général peut être établi directement et qu'on peut en déduire le théorème de Pascal. Le théorème général est dû à M. Paul Aubert, actuellement professeur au Collège Stanislas ; il a été communiqué par M. Appell à l'Académie des Sciences. On trouvera sa démonstration avec des applications intéressantes dans une note de M. Aubert : *Généralisation du théorème de Pascal donnant 9 points en ligne droite.* (Nouvelles Annales, 1889.)

Autres solutions. — I. Je vais démontrer que les trois points α, β, γ sont sur une même droite parallèle à la direction des parallèles AA′, BB′, CC′.

Pour cela, il suffit de montrer que $\alpha\beta$ par exemple est parallèle à CC′, c'est-à-dire que

$$\widehat{C\alpha\beta}=\widehat{\alpha CC'}.$$

Les parallèles AA′, BB′ interceptant des arcs égaux, les angles ACB, A′PB′ sont égaux comme ayant même mesure ; par suite ces angles déterminent le quadrilatère inscriptible PαCβ, et l'on a

$$\widehat{C\alpha\beta}=\widehat{CPB'}.$$

Mais les arcs B′C, BC′ étant égaux comme compris entre parallèles, l'angle CPB′ est égal à l'angle BCC′ ou αCC′ (même mesure). Donc

$$\widehat{C\alpha\beta}=\widehat{\alpha CC'}.$$

C. q. f. d.

II. Les triangles PγA, PαC sont semblables ; en effet les angles adjacents aux côtés PA, PC sont égaux, savoir :

$$\widehat{PAB}=\widehat{PCB} \text{ (même mesure)}$$

et
$$\widehat{APC'}=\widehat{CPA'} \text{ (mesures égales).}$$

On peut donc écrire

$$\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\alpha C}}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}},$$

et de même,

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\beta A}}=\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}.$$

$$\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\gamma B}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}.$$

En multipliant ces égalités membre à membre, il vient

$$\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\gamma B}} = 1,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = 1.$$

Cette dernière relation montre que les trois points α, β, γ sont en ligne droite (réciproque du théorème des transversales).

Remarque. — La propriété établie revient au fond au théorème de Simson généralisé, puisque

$$\widehat{P\gamma B} = \widehat{P\alpha B} = \widehat{P\beta C}.$$

(M. REBEIX, à Clermont.)

[Ont résolu la même question ; MM. N.-G. Alesandrescu ; Amblard, à Saint-Flour ; Benoît François, lycée d'Annecy ; C. Broutin ; H. Dodier, lycée de Laval ; G. Foucry ; L. Guilhem, à Sao-Paulo (Brésil) ; T. Lalescu, lycée de Jassy ; M. Oger, à Tours ; A. Pichon, lycée de Niort ; H. Pitrat, à Saint-Chamond ; P. Tribier.]

ARITHMÉTIQUE

4619. — *Le nombre entier* $2^{155} - 1$ *est divisible par* $(31)^2$.

On a successivement

$$2^{155} - 1 = (2^5)^{31} - 1 = 32^{31} - 1.$$

Tout binome de la forme $a^n - b^n$ étant divisible par $a - b$, la dernière expression précédente est divisible par $32 - 1 = 31$; elle peut donc s'écrire, en mettant ce diviseur en évidence,

$$31(32^{30} + 32^{29} + \ldots + 32 + 1).$$

Il suffit alors de démontrer que la somme entre parenthèses est divisible par 31. Or, chacun des 30 premiers termes composant cette somme est de la forme générale

$$32^n = (31 + 1)^n = m.31 + 1 ;$$

la somme de ces termes plus le dernier terme 1 de la parenthèse est donc de la forme

$$m.31 + 30 + 1 = m.31.$$

C. q. f. d.

(Victor BAROL, école primaire supérieure de Lorgues.)

[Ont résolu la même question : Mlle H. D. ; MM. Bouzy, caporal au 150e de ligne, à Saint-Mihiel ; L. Curt, à Cras-sur-Reyssouze ; J. Fiton, instituteur à Agen ; H. Guillaud, école primaire supérieure de Chantonnay ; R. Henry, instituteur à Sainte-Savine ; H. Janois, à Neufchâtel ; E. Rieux ; A. Redon.]

4620. — *Trouver deux nombres entiers, sachant que la somme des quotients obtenus en les divisant par leur plus grand commun diviseur est* 7 *et que leur produit divisé par ce même plus grand commun diviseur est* 60.

En désignant par d le plus grand commun diviseur des deux nombres, ces nombres peuvent être représentés par qd et $q'd$, q et q' étant deux quotients entiers premiers entre eux. Par hypothèse, on a

$$q + q' = 7,$$

égalité qui n'admet comme solutions positives et entières pour q et q' que les couples de valeurs

$$q = 1,\ q' = 6 ; \qquad q = 2,\ q' = 5 ; \qquad q = 3,\ q' = 4.$$

Pour chacun de ces couples, le produit des deux nombres divisé par leur plus grand commun diviseur d, est de la forme

$$1 \times 6d, \qquad 2 \times 5d, \qquad 3 \times 4d ;$$

pour que l'un de ces produits soit égal à 60, il suffit de prendre respectivement

$$d = 10, \qquad d = 6, \qquad d = 5.$$

Les nombres répondant à la question sont donc

10 et 60, 12 et 30 15 et 20.

(M. OGER, à Tours.)

Remarque. — Au lieu de dire que 60 était le quotient du produit des nombres par leur p. g. c. d., on aurait pu dire que 60 était le plus petit commun multiple des deux nombres.

[Ont résolu la même question : MM. A. Arcizet, instituteur à Cransac ; E. Ardin-Delteil, à Montpellier ; R. Barthélemy ; Bouzy, caporal au 150e de ligne, Saint-Mihiel ; V. Chosson, instituteur à Romans ; L. Curt, à Cras-sur-Reyssouze ; J. Fiton, instituteur à Agen ; J. Grévin, école primaire supérieure de Vervins ; H. Guillaud, école primaire supérieure de Chantonnay ; H. Janois, à Neufchâtel ; T. Lalescu, lycée de Jassy ; J. Lehmann, instituteur à Boufarik ; E. Le Maigre, à Pleyben ; R. Mathé, à Saint-Yorre ; L. Perret, à Pont-de-Vaux ; A. Pichon, lycée de Niort ; E. Rieux ; J. Ménéchal ; A. Prost.]

ALGÈBRE

4616. — *Dans le plan d'un carré* ABCD, *trouver un point* M *tel que*

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = p^2,$$

$$\overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = q^2.$$

A quelles conditions doivent satisfaire les deux carrés p^2 *et* q^2 *pour que le problème soit possible ?*

(*Bacc. lettres-math., Paris, juillet 1899.*)

Par le point M menons la parallèle PQ aux côtés AD, BC. Cette parallèle est déterminée par sa distance $PI = x$ au milieu I de AB ; et le point M, par la distance $MP = y$.

Cela posé, on a, en désignant par $2a$ le côté du carré,

$$\overline{MA}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PM}^2 = (a - x)^2 + y^2,$$

$$\overline{MB}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{MP}^2 = (a + x)^2 + y^2 ;$$

la relation $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = p^2$ devient donc

$$2(x^2 + y^2 + a^2) = p^2. \qquad (1)$$

On verrait de même que la relation $\overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = q^2$ revient à

$$2[x^2 + (2a - y)^2 + a^2] = q^2. \qquad (2)$$

Si on retranche membre à membre les équations (1) et (2), on a

$$8ay - 8a^2 = p^2 - q^2,$$

d'où

$$y = \frac{8a^2 + p^2 - q^2}{8a}.$$

Si on porte cette expression de y dans l'équation (1), on a

$$2x^2 = p^2 - 2a^2 - \frac{(8a^2 + p^2 - q^2)^2}{32a^2},$$

ou

$$64a^2x^2 = 16(p^2 + q^2)a^2 - 128a^4 - (p^2 - q^2)^2.$$

Le problème n'est possible que si x est réel ; y l'est toujours et peut être soit positif, soit négatif. Donc il n'y a de condition à exprimer que relativement à x.

Pour conserver la symétrie, résolvons par rapport à a^2 l'inégalité

$$128a^4 - 16(p^2 + q^2)a^2 + (p^2 - q^2)^2 < 0, \qquad (I)$$

qui exprime que x est réel ; les racines du trinome en a^2 sont

$$a^2 = \frac{p^2 + q^2 \pm \sqrt{(p^2 + q^2)^2 - 2(p^2 - q^2)^2}}{8}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut :

1° que les racines du trinome en a^2 soient réelles, c'est-à-dire que

$$p^4 - 6p^2q^2 + q^4 < 0,$$

ou que
$$3 - 2\sqrt{2} < \frac{p^2}{q^2} < 3 + 2\sqrt{2}\,;$$

2° que a^2 soit compris entre les racines du trinome.

Solution géométrique. — On sait que les points M définis par la condition

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = p^2$$

appartiennent à un cercle ayant son centre au milieu I de AB et dont le rayon, tiré de la relation

$$2\overline{MI}^2 + 2a^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2,$$

a pour valeur
$$MI = \sqrt{\frac{p^2 - 2a^2}{2}}.$$

La relation $\overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = q^2$ définit de même un second cercle ayant son centre au milieu K de CD et un rayon égal à

$$MK = \sqrt{\frac{q^2 - 2a^2}{2}}.$$

L'intersection de ces deux cercles détermine deux points M symétriques par rapport à la droite IK.

La seule condition de possibilité est que les cercles se coupent, c'est-à-dire qu'on ait les deux inégalités

$$\left|\sqrt{\frac{p^2-2a^2}{2}} - \sqrt{\frac{q^2-2a^2}{2}}\right| < 2a < \sqrt{\frac{p^2-2a^2}{2}} + \sqrt{\frac{q^2-2a^2}{2}},$$

inégalités qui se réduisent à l'inégalité (I).

[Ont résolu la même question : MM. A. Arcizet, instituteur à Cransac ; E. Ardin-Delteil, à Montpellier ; Bouzy ; J. Filon, instituteur à Agen ; G. Foucry, école normale de Châlons ; R. Henry, instituteur à Sainte-Savine ; H. Janois, à Neufchâtel ; M. Oger, à Tours ; E. Séclin, à Châteauneuf-sur-Loire ; H. Taurand.]

4623. — *Exprimer au moyen de l'entier n la somme*

$$-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \ldots\ldots - (2n-1)^2 + (2n)^2.$$

(*Bacc. lettres-math., Clermont, novembre 1898.*)

On a successivement

$$-1^2 + 2^2 = -(1-2)(1+2) = 1 + 2,$$
$$-3^2 + 4^2 = -(3-4)(3+4) = 3 + 4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-(2n-1)^2 + (2n)^2 = -(2n-1-2n)(2n-1+2n) = 2n - 1 + 2n.$$

D'après ces résultats, la somme énoncée est égale à la somme des $2n$ premiers nombres entiers. Or, on sait que les n premiers nombres entiers ont pour somme $\frac{n(n+1)}{2}$; la somme cherchée a donc pour expression

$$\frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1).$$

(A. LARUE, à Saint-Trojan.)

Remarque. — En observant que la différence

$$(2n)^2 - (2n-1)^2 = 4n - 1,$$

on voit que la somme proposée n'est autre que la progression arithmétique à n termes

$$\div\ 3.\ 7.\ 11\ \ldots\ldots\ 4n-1,$$

dont la somme est $\frac{1}{2}n[4n - 1 + 3] = n(2n+1)$.

[Ont résolu la même question : Mlle H. D. ; MM. A. Arcizet, instituteur à Cransac ; E. Ardin-Delteil, à Montpellier ; C. Broutin ; L. Curt ; E. Foucart, à Issy ; G. Foucry, école normale de Châlons ; E. Framboise ; H. Guillaud, école primaire supérieure de Chantonnay ; R. Henry, instituteur à Sainte-Savine ; H. Janois, à Neufchâtel ; T. Lalescu, lycée de Jassy ; B. Malhé, S.-N. Mirea, lycée de Ploesti ; M. Oger, à Poitiers ; H. Varennes, à Deux-Chaises ; J. Ménéchal ; A. Prost ; A. Redon.]

4626. — *Soit un triangle rectangle ABC dont l'hypoténuse BC et la hauteur AH sont données : BC = a et AH = h. On considère la bissectrice extérieure DE de l'angle droit A et les perpendiculaires BD et CE abaissées des sommets B et C sur cette droite. 1° Calculer le volume V engendré par le trapèze DBCE tournant autour de DE ; 2° Calculer le volume V′ engendré par le triangle ABC tournant autour de la même droite DE ; 3° Déterminer a en fonction de h, de manière que le rapport $\frac{V}{V'}$ soit égal à $\frac{nh}{a}$, n étant un nombre donné. Conditions que doit remplir n pour la possibilité du problème.*

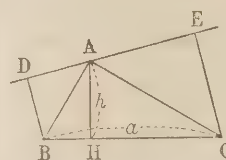
(*Bacc. lettres-math., Nancy, novembre 1898.*)

1° Le tronc de cône engendré par le trapèze DBCE a pour volume

$$V = \frac{\pi}{3}DE(\overline{BD}^2 + \overline{CE}^2 + BD.CE).$$

Or les triangles ABD, ACE étant rectangles isocèles, on a

$$BD = \frac{AB\sqrt{2}}{2}, \qquad CE = \frac{AC\sqrt{2}}{2},$$



d'où

$$\overline{BD}^2 + \overline{CE}^2 = \frac{1}{2}(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2) = \frac{a^2}{2},$$

$$BD.CE = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{ah}{2}\,;$$

d'ailleurs

$$DE = BD + CE = \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{CE}^2 + 2BD.CE} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + ah}.$$

Donc

$$V = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{a^2}{2} + ah}\cdot\frac{a^2 + ah}{2} = \frac{1}{6}\pi a(a+h)\sqrt{\frac{a(a+2h)}{2}}.$$

2° En tournant autour de DE, le triangle ABC engendre un volume V′ exprimé par

$$V' = \text{surf. eng. } BC \times \frac{h}{3} = \pi a(BD + CE)\frac{h}{3},$$

ou, comme
$$BD + CE = DE = \sqrt{\frac{a^2}{2} + ah},$$

$$V' = \frac{1}{3}\pi ah\sqrt{\frac{a(a+2h)}{2}}.$$

3° Le rapport $\frac{V}{V'}$ étant égal à $\frac{a+h}{2h}$, on doit avoir

$$\frac{a+h}{2h} = \frac{nh}{a},$$

ou
$$a^2 + ha - 2nh^2 = 0.$$

Cette équation ayant ses termes extrêmes de signes différents fournit pour a deux valeurs réelles et de signes contraires. Pour que la valeur positive convienne, il faut et il suffit qu'elle soit au moins égale à $2h$. Or en remplaçant a par $2h$ dans le premier membre de l'équation, on obtient

$$2(3-n)h^2\,;$$

donc lorsque $n \geqslant 3$, $2h$ est compris entre les deux valeurs de a, et le problème admet une solution.

Pour $n = 3$, on a $a = 2h$; le triangle ABC est alors rectangle isocèle.

(G. FOUCRY, école normale de Châlons.)

[Ont résolu la même question : MM. Bouzy, caporal au 150e de ligne ; L. Curt,

à Cras-sur-Reyssouze ; E. Framboise ; H. Guillaud, école primaire supérieure de Chantonnay ; J. Lehmann, à Boufarik ; M. Oger, à Tours.]

4627. — *Dans un tronc de cône circonscrit à une sphère, on connait le rapport de la surface latérale à la surface totale. Calculer le rapport des rayons des bases. — Discussion.*

(*Bacc. lettres-sciences, Marseille, novembre 1898.*)

Désignons par x et tx les rayons de base du tronc de cône. Ce tronc étant circonscrit à une sphère a pour apothème $AB = x + tx$ et sa surface latérale est

$$\pi(x + tx)(x + tx) = \pi x^2(1 + t)^2.$$

En écrivant que cette surface est dans un rapport donné k avec la surface totale du tronc, on a

$$\frac{\pi x^2(1+t)^2}{\pi x^2(1+t)^2 + \pi x^2 + \pi x^2 t^2} = k,$$

ou $$(2k-1)t^2 + 2(k-1)t + 2k - 1 = 0.$$

Discussion. — Pour qu'une valeur de t convienne au problème, il faut et il suffit qu'elle soit réelle et positive.

La condition de réalité est

$$(k-1)^2 - (2k-1)^2 \geqslant 0,$$

ou, en décomposant en produit le premier membre,

$$-k(3k-2) \geqslant 0.$$

k étant un rapport évidemment positif, l'inégalité est satisfaite lorsque

$$k \leqslant \frac{2}{3}.$$

Le produit des racines étant égal à $\frac{2k-1}{2k-1} = 1$, est positif ; les deux racines prennent donc le signe de leur somme,

$$-\frac{2(k-1)}{2k-1},$$

ou celui de $2k-1$, puisque $k-1$ est négatif en vertu de la condition de réalité. Donc lorsque $\frac{1}{2} < k < \frac{2}{3}$, il existe deux valeurs de t réelles et positives ; ces deux valeurs sont inverses l'une de l'autre et correspondent à deux troncs de cône égaux circonscrits à la sphère.

Dans le cas particulier où $k = \frac{2}{3}$, les deux valeurs de t deviennent égales à

$$t = \sqrt{1} = 1 ;$$

les deux troncs de cône se confondent alors avec le cylindre circonscrit à la sphère.

L'hypothèse $k = \frac{1}{2}$ ne peut être réalisée. Si elle l'était, l'équation en t donnerait

$$t = 0,$$

et si on se reporte à l'énoncé, on voit que la surface latérale serait équivalente à la surface de base, ce qui est impossible.

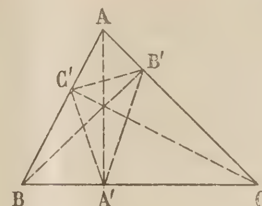
(M. OGER, à Tours).

[Ont résolu la même question : MM. Bouzy, caporal au 150e de ligne, à Saint-Mihiel ; L. Curt ; G. Foucry, école normale de Châlons ; H. Guillaud, école primaire supérieure de Chantonnay ; R. Henry ; J. Lehmann, instituteur à Boufarik ; S.-N. Mirea ; H. Varennes.]

GÉOMÉTRIE

4628. — *Si* AA′, BB′, CC′ *sont les hauteurs d'un triangle* ABC *on a* $AB'.BC'.CA' = AC'.BA'.CB' = A'B'.B'C'.C'A'$.

Le quadrilatère BCB′C′ étant inscriptible dans un cercle de diamètre BC, les triangles AB′C′, ABC sont semblables et donnent



$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

On aurait de même

$$\frac{BC'}{BC} = \frac{BA'}{BA} = \frac{C'A'}{CA},$$

$$\frac{CA'}{CA} = \frac{CB'}{CB} = \frac{A'B'}{AB}.$$

Multiplions ces égalités membre à membre ; il vient, après suppression du dénominateur commun,

$$AB'.BC'.CA' = AC'.BA'.CB' = B'C'.C'A'.A'B'.$$

C. q. f. d.

(G. FOUCRY, école normale de Châlons.)

Remarque. — La première des deux égalités précédentes exprime le théorème de Céva appliqué aux droites concourantes AA′, BB′, CC′.

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil, à Montpellier ; C. Broutin ; G. Delahaye, à Roye ; H. Dodier ; E. Foucart, à Issy ; E. Framboise ; R. Henry ; H. Janois, à Neufchâtel ; T. Lalescu, lycée de Jassy ; B. Mathé ; S.-N. Mirea, lycée de Ploesti ; M. Oger, à Poitiers ; J. Ménéchal.]

4629. — *Diviser en deux parties égales, à l'aide du compas seul, un arc de cercle dont les extrémités* A, B *et le centre* O *sont donnés.*

De A et B comme centres décrivons deux arcs de cercle passant par O, puis de O comme centre un cercle de rayon AB coupant les deux arcs en C et D. Traçons maintenant deux arcs de centres C, D et passant respectivement par B et A ; ces arcs se coupent en E. En prenant alors OE comme rayon commun à deux cercles de centres C, D, l'un des points d'intersection M de ces cercles est le milieu de l'arc AB.

En effet, le point M est par raison de symétrie sur OE ; il suffit donc de montrer qu'il appartient aussi à l'arc AB, c'est-à-dire qu'on a

$$OM = OB.$$

La figure ABOC ayant ses côtés opposés égaux est un parallélogramme ; donc CO est parallèle à AB et par suite perpendiculaire à OE.

Le triangle rectangle COM donne

$$\overline{OM}^2 = \overline{CM}^2 - \overline{CO}^2,$$

ou, comme, par construction, $\overline{CM}^2 = \overline{OE}^2 = \overline{CE}^2 - \overline{CO}^2$,

$$\overline{OM}^2 = \overline{CE}^2 - 2\overline{CO}^2.$$

Or, en considérant la médiane BO du triangle BCD, on a

$$\overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 = 2\overline{CO}^2 + 2\overline{OB}^2,$$

ou, en remplaçant BC par CE et BD par $OA = OB$,

$$\overline{CE}^2 + \overline{OB}^2 = 2\overline{CO}^2 + 2\overline{OB}^2,$$

ou $$\overline{OB}^2 = \overline{CE}^2 - 2\overline{CO}^2 = \overline{OM}^2.$$

C. q. f. d.

(G. DELAHAYE, à Roye.)

4632. — *On considère un cercle O et deux points fixes A et B. Par B on mène la sécante BCD, et l'on trace les cordes CAE, DAF. Trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle AEF.*

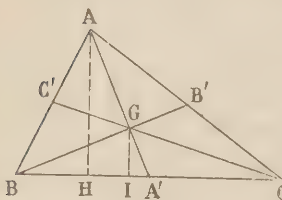
Transformons la figure par rayons vecteurs réciproques en prenant pour pôle le point A et pour module la puissance de A par rapport au cercle O. Dans ces conditions, le cercle O se transforme en lui-même; par suite les points C et E, D et F sont réciproques, d'où il résulte que la droite CD a pour transformée le cercle AEF. Comme cette droite passe par un point fixe B, le cercle AEF passe également par un point fixe B′, inverse du point B; le lieu de son centre I est donc la perpendiculaire élevée au milieu de AB′.

(M. REBEIX, lycée du Puy.)

Remarque. — Le point I, centre du cercle AEF, a pour homologue dans l'inversion un point I′ symétrique de A par rapport à BCD, droite inverse du cercle. Le lieu de I′ étant le cercle de centre B et de rayon BA, on voit que le lieu de I est la droite inverse de ce dernier cercle, dans l'inversion qui a pour pôle A et qui conserve le cercle donné.

4633. — *Prouver que, dans un triangle, chaque médiane est proportionnelle au sinus de l'angle formé par les deux autres.*

On sait que les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point G, situé au tiers de chaque médiane à partir du côté correspondant. D'ailleurs les trois triangles GBC, GCA, GAB sont équivalents; en effet, le triangle GBC, par exemple, ayant même base que le triangle ABC, ces deux triangles sont entre eux comme les hauteurs correspondantes GI, AH. Or $\frac{GI}{AH} = \frac{GA'}{AA'} = \frac{1}{3}$; donc $GBC = \frac{1}{3}$ ABC, et de même pour les deux autres triangles.



Posons pour abréger

$$\widehat{BGC} = \alpha, \qquad \widehat{CGA} = \beta, \qquad \widehat{AGB} = \gamma.$$

En égalant les surfaces des triangles GBC, GCA, GAB, il vient

$$\frac{1}{2}\,GB.GC \sin\alpha = \frac{1}{2}\,GC.GA \sin\beta = \frac{1}{2}\,GA.GB \sin\gamma,$$

ou, en divisant par le produit $\frac{1}{2}$ GA.GB.GC,

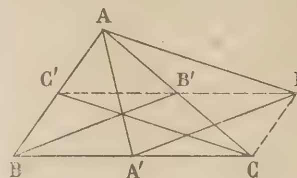
$$\frac{\sin\alpha}{GA} = \frac{\sin\beta}{GB} = \frac{\sin\gamma}{GC},$$

ou, comme $GA = \frac{2}{3}AA'$, etc.,

$$\frac{\sin\alpha}{AA'} = \frac{\sin\beta}{BB'} = \frac{\sin\gamma}{CC'}.$$

(H. MICHEL, lycée de Douai.)

Autre solution. — Prolongeons C′B′ d'une longueur égale B′D et tirons les droites DA, DA′. Je dis que le triangle ADA′ a ses côtés égaux et parallèles aux trois médianes du triangle ABC.



En effet, comme

$$B'D = C'B' = \frac{BC}{2} = BA',$$

la figure BA′DB′ est un parallélogramme et A′D est égal et parallèle à BB′. D'ailleurs le quadrilatère ADCC′, dont les diagonales se coupent mutuellement en leur milieu, est aussi un parallélogramme, de sorte que AD est égal et parallèle à CC′.

En remarquant que dans le triangle ADA′, chaque côté est proportionnel au sinus de l'angle opposé, on obtient immédiatement la propriété énoncée.

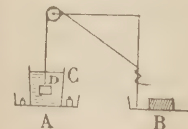
(E. FRAMBOISE.)

Démonstration par la mécanique. — Supposons que GA, GB, GC représentent trois forces appliquées en G. La résultante de GB et de GC vaut évidemment le double de GM. Donc elle est égale et directement opposée à GM; les trois forces GA, GB, GC se font équilibre. On sait dans ce cas (théorème de Stevin) que chacune d'elles est proportionnelle au sinus de l'angle des deux autres.

[Ont résolu la même question : MM. C. Broutin; G. Delahaye, à Roye; H. Dodier; C. Foucry, école normale de Châlons; R. Henry; H. Janois; T. Lalescu, lycée de Jassy].

PHYSIQUE

4609. — *Sur l'un des plateaux A d'une balance de Roberval, supposée juste, on a mis un vase C contenant de l'eau, et à côté de lui des poids marqués. L'autre plateau B fait équilibre au premier au moyen d'une tare et porte une potence au bout de laquelle est suspendu par un fil fin un corps D de poids P qui plonge dans l'eau du vase C, sans en toucher le fond.*



Dénouant le fil qui était attaché à la potence, on laisse le corps reposer sur le fond du vase et on demande :

1° *Ce qui arrivera ;*

2° *Si l'équilibre est rompu, quel poids il faudra mettre ou enlever pour rétablir l'équilibre horizontal du fléau ;*

3° *Quel est le poids spécifique du corps si* $P = 24^{gr},64$ *et si la somme des poids qu'il faut ajouter au plateau A, pour rétablir l'équilibre, quand on raccourcit le fil auquel le corps est suspendu de manière à le maintenir hors de l'eau, est de* $6^{gr},4$.

(*Bacc. lettres-sciences, Caen, novembre 1898.*)

1° Soit d la densité du corps D.

Dans le premier cas, le plateau A subit une force $\frac{P}{d}$ dirigée de haut en bas et représentant le poids de l'eau déplacée par le corps D; le plateau B supporte le poids apparent du corps dans l'eau, $P - \frac{P}{d}$.

Dans le second cas, le plateau A supportant le poids du corps,

l'augmentation de poids sur ce plateau est $P - \frac{P}{d}$. Comme, d'un autre côté, le plateau B s'est allégé, le fléau s'infléchit du côté de A.

2° Pour rétablir l'équilibre, il faut retrancher du plateau A un poids x tel que l'on ait

$$P - \frac{P}{d} - x = -\left(P - \frac{P}{d}\right),$$

d'où $$x = 2\,\frac{P}{d}\left(d - 1\right).$$

Cette valeur de x est positive, car l'énoncé suppose essentiellement $d > 1$.

3° Dans le premier cas, le plateau A subit une poussée $\frac{P}{d}$ de haut en bas. Dans le second, il ne subit plus cette poussée ; il s'est donc allégé de $\frac{P}{d}$. Le plateau B s'est au contraire alourdi de $\frac{P}{d}$. Si p est la surcharge mise dans le plateau A, on a donc

$$p - \frac{P}{d} = \frac{P}{d},$$

d'où $$d = \frac{2P}{p} = \frac{24{,}64 \times 2}{6{,}4} = 7{,}7,$$

nombre qui représente sensiblement la densité du fer.

(LE RÉVÉREND, à Coutances.)

[Ont résolu la même question : MM. H. Debenest ; G. Foucry ; P. Sandon ; P. Tribier.]

4610. — *Un aréomètre destiné aux liquides plus denses que l'eau affleure au point 0 dans de l'eau à la température de 4° centigrades, et au point 15 dans une dissolution saline dont la densité est 1,116. — On le plonge dans du sulfure de carbone que l'on porte successivement aux températures de 0° et de 40° centigrades.*

A la température de 0°, l'aréomètre affleure à la division 32,7.

A la température de 40°, l'aréomètre affleure à la division 27,6.

On demande :

1° La densité du sulfure de carbone à la température de 0° ;

2° La densité du sulfure de carbone à la température de 40° ;

3° Le coefficient de dilatation du sulfure de carbone.

(On négligera l'influence de la variation de température sur le volume de l'aréomètre.)

(Bacc. lettres-math., Montpellier, novembre 1898.)

Soient N le nombre de divisions comprises entre le zéro et le bas de l'instrument, v le volume d'une division, d_0 la densité du sulfure de carbone à 0°, d_{40} sa densité à 40°. Ecrivons que les masses d'eau pure, d'eau salée, de sulfure de carbone à 0°, de sulfure de carbone à 40° sont égales entre elles comme égales chacune à la masse de l'aréomètre :

$$Nv = 1{,}116(N - 15)v = d_0(N - 32{,}7)v = d_{40}(N - 27{,}6)v.$$

On tire de ces équations :

$$N = \frac{15 \times 1{,}116}{0{,}116} = 144{,}3,$$

$$d_0 = \frac{N}{N - 32{,}7} = 1{,}293,$$

$$d_{40} = \frac{N}{N - 27{,}6} = 1{,}2365.$$

On sait que les densités d'un liquide à différentes températures sont inversement proportionnelles aux binomes de dilatation. On a donc

$$\frac{d_{40}}{d_0} = \frac{1}{1 + 40\Delta},$$

Δ désignant le coefficient de dilatation absolue du sulfure de carbone.

Par suite,

$$1 + 40\Delta = \frac{1{,}293}{1{,}2365},$$

d'où $$\Delta = 0{,}00114.$$

(P. SANDON, à Oyé.)

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil ; G. Foucry ; E. Le Maigre ; E. Mallerat ; J. Mouchet ; A. Pichon ; J. Regnaud ; A. Sambucy ; A. Vidalenc ; L. Guilhem, à Sao-Paulo (Brésil).]

CONCOURS DE 1899

ÉCOLE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES DE PARIS

Mathématiques.

ARITHMÉTIQUE

I. — Mesures de poids dans le système métrique.

II. — Etant donnée une sphère de 1745^{cc}, calculer à l'aide des tables de logarithmes le diamètre de la sphère et le poids, en kilogrammes, en supposant le poids spécifique de 7,74.

ALGÈBRE

4637. — Remplacer, dans l'expression

$$6x^5 + mx^4 + nx^3 + px^2 - 21x - 18,$$

les coefficients m, n, p par un système de valeurs tel que le polynome à coefficients numériques ainsi obtenu s'annule pour chacune des hypothèses $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. m=-27 n=15 p=45

Quelles sont les autres racines du même polynome ? -1 et $-\frac{1}{2}$.

GÉOMÉTRIE

4638. — On donne la petite base a et la hauteur h d'un trapèze isocèle dont les côtés égaux font des angles de 45° avec les bases. Calculer le volume et la surface de révolution du solide obtenu lorsqu'on fait tourner successivement le trapèze autour de la petite base, de la grande base et de l'un des autres côtés.

Si l'on déplace un des côtés égaux du trapèze parallèlement à lui-même, quels sont les lieux des centres des circonférences inscrite et circonscrite au triangle formé par la petite base et les deux côtés égaux du trapèze prolongés ?

Dessin géométrique.

4639. — On donne un plan dont les traces horizontale et verticale font avec la ligne de terre des angles qui sont respectivement de 45° et de 30°.

Déterminer la position d'un point situé sur la bissectrice de l'angle des traces, à une distance de 100^{mm} du sommet.

Par ce point, mener une perpendiculaire au plan d'une longueur de 80^{mm}, au-dessus du plan.

Par l'extrémité de cette perpendiculaire, mener un plan parallèle au plan donné.

Le sommet de l'angle formé par les traces sera pris au centre de l'épure et cet angle s'ouvrira vers la droite.

Physique.

I. — **4640**. On détermine : 1° Le volume extérieur d'un thermomètre à mercure par une pesée dans l'eau à 0°, soit 10^{cc} ;

2° La densité moyenne du thermomètre, soit 4.

On porte le thermomètre à 200° ; le mercure dilaté remplit tout le tube.

Calculer : 1° Le volume du mercure contenu dans l'appareil ;

2° Le poids réduit en eau du thermomètre.

Densité du verre, 2,52.

Coefficient de dilatation cubique du verre, $0,29 \times \overline{10}^4$.

Densité du mercure, 13,596.

Coefficient de dilatation absolu du mercure, $0,18 \times \overline{10}^3$.

Chaleur spécifique du verre, 0,198.

Chaleur spécifique du mercure, 0,0330.

II. — Principales méthodes employées pour la détermination des densités des vapeurs.

Dans quel but les chimistes déterminent-ils les densités des vapeurs ?

Chimie.

I. — Composés oxygénés de l'azote.

Pour l'acide azotique, on se bornera à énoncer ses conditions de formation.

II. — **4641**. On grille 100^{kg} d'une pyrite cuivreuse (mélange de sulfure de fer et de sulfure de cuivre) renfermant 1,3 °/₀ de sulfure de cuivre CuS, dans le but d'en retirer le cuivre.

Indiquer :

1° Le volume d'air sec nécessaire à la combustion ;

2° Le poids de fer nécessaire pour précipiter le cuivre à l'état métallique.

La pyrite a pour formule FeS^2.

Poids du litre d'air, 1^{gr},293.

Fe = 56, Cu = 63,5, S = 32. O = 16.

QUESTIONS PROPOSÉES (*)

4642. — Démontrer que la différence entre les cubes de deux nombres entiers consécutifs est terminée par l'un des chiffres 1, 7, 9.

4643. — Lorqu'un triangle à côtés entiers a son aire exprimée par un nombre entier, ce nombre est divisible par 6.

4644. — Trouver deux nombres entiers consécutifs sachant que leur somme multipliée par leur produit est égale à 7440. 15 et 16

(L. Bleux.)

4645. — Si $a^2 + b^2 = c^2$, on a

$$(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c) = 4a^2b^2.$$

4646. — Démontrer que l'expression

$$xyz + (x + y)(y + z)(z + x)$$

est divisible par $x + y + z$.

4647. — Trouver les rapports entre eux des côtés d'un triangle dans lequel les trois côtés et la surface sont quatre nombres entiers consécutifs.

(J. Fourestier.)

4648. — Trouver trois nombres entiers positifs, sachant que leur somme est 14 et qu'en ajoutant l'un d'eux au produit des deux autres, on obtient 19. 5+2×7. – 7+3×4.

(Burgat, école normale d'Albertville.)

4649. — Calculer les côtés d'un triangle rectangle connaissant la hauteur h et l'excès e de l'hypoténuse sur la différence des deux côtés de l'angle droit.

(A. Rozier, collège de Brive.)

4650. — Calculer les trois côtés d'un triangle rectangle connaissant la somme m de l'hypoténuse et de la hauteur correspondante et la différence k des deux côtés de l'angle droit $(b - c = k)$. Discuter le problème.

Application numérique. — $m = 7^m,4$; $k = 1^m$. On calculera a, b, c et la hauteur h relative à l'hypoténuse.

(*Bacc. lettres-sciences, Grenoble, novembre 1898.*)

4651. — Démontrer que les relations

$$x + y + z = a,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = 3a^3$$

entraînent la suivante :

$$(x - y)^4 + (y - z)^4 + (z - x)^4 = 3(x^4 + y^4 + z^4).$$

(E. Sinturel.)

4652. — Construire une circonférence passant par deux points donnés et tangente à une droite donnée (à traiter par le second livre).

(J. Petrignani.)

4653. — Dans un losange ABCD, on joint un point de chacune des diagonales AC, BD aux deux extrémités de l'autre diagonale. Démontrer que les quatre droites ainsi menées déterminent un quadrilatère inscriptible.

4654. — Par un des sommets A d'un triangle et les pieds de la médiane et de la bissectrice issues de A, on fait passer un cercle qui coupe les côtés AB, AC aux points B', C'. Démontrer que BB' = CC'.

(F. Cassagne.)

4655. — Etant donnés un angle XAY et un point B sur le côté AX, déterminer sur le côté AY un point M tel qu'en prenant son symétrique M' par rapport au point B et en abaissant M'P perpendiculaire sur AY, les aires AMB et M'PM soient équivalentes.

(P. Fayolle, école de l'Immaculée Conception.)

4656. — On donne deux droites rectangulaires OA et OB et une circonférence de rayon R et de centre C tangente à ces deux droites. On demande de calculer le rayon x d'une circonférence tangente aux deux droites OA et OB et coupant la première à angle droit.

(*Bacc. lettres-math., Dijon, novembre 1898.*)

4657. — Dans un cercle donné, inscrire un quadrilatère, connaissant le point de rencontre de deux côtés opposés et une circonférence sur laquelle doit se trouver le point de rencontre des deux autres côtés.

(G. Dobrovici.)

4658. — Sur une circonférence passant par trois points donnés A, B, C, on prend un point quelconque P que l'on joint à A et B, puis par C on mène deux droites CM, CN faisant respectivement avec PA, PB des angles connus α, β. Démontrer que le rapport $\frac{CM}{CN}$ est indépendant de la position du point P.

(J. Basset.)

4659. — On prolonge les deux côtés de l'angle droit AB, AC d'un triangle rectangle de longueurs égales AE, AF. Trouver le lieu géométrique des points communs aux cercles de centres B et C passant respectivement par les points E et F, lorsque les longueurs AE, AF varient, tout en restant égales entre elles.

(E. Ferrier, à Limoux.)

4660. — Une barre de fer a une longueur de 1^m, sa densité est 7,8. Elle doit se tenir verticalement dans un bain de mercure de densité 13,6 et y plonger à moitié. Elle est lestée par une lame de platine de même section et dont la densité est 21,5. On demande quelle est sa longueur.

(*Bacc. lettres-math., Besançon, novembre 1898.*)

4661. — Dans le système métrique de la Convention (mètre, gramme-force, seconde), l'accélération due à la pesanteur est représentée, à Paris, par le nombre 9,81. Par quel nombre cette accélération à Paris est-elle représentée dans un système où l'unité de longueur est le kilomètre et l'unité de temps l'heure?

(*Bacc. lettres-math., Bordeaux, novembre 1898.*)

(*) Les questions précédées d'un numéro pair seront résolues dans le numéro du 15 octobre ; les autres, dans le numéro du 1er novembre.

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

24e Année. — N° 2. JOURNAL Paris, le 15 Octobre 1899.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.

Abonnements.. Librairie **Nony** et Cie, Boul^d St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

NOTE D'ARITHMÉTIQUE ET D'ALGÈBRE

par M. **A. Goulard**, professeur au lycée de Marseille.

J'appelle GRANDEUR tout ce qui est décomposable en parties de même espèce. Une grandeur décomposée en parties est la SOMME de ces parties, et celles-ci sont les TERMES de la somme.

Considérons une grandeur qui peut être parcourue, pour ainsi dire, dans deux sens différents (temps, longueur, etc.). Si on la suppose décomposée en parties, on voit qu'une somme ne change pas quand on renverse l'ordre des termes. Ainsi

$$a + b + c + d + e = e + d + c + b + a.$$

Je m'appuierai sur cette simple remarque pour démontrer qu'*une somme ne change pas quand on intervertit d'une façon quelconque l'ordre des termes.*

Démontrons d'abord que, dans une somme de trois termes, on peut permuter les deux derniers. En effet, en renversant l'ordre des trois termes ou seulement des deux premiers, on obtient la suite des égalités

$$a + b + c = c + b + a = b + c + a = a + c + b.$$

On démontrera maintenant, par le procédé connu, que, dans une somme d'un nombre quelconque de termes, on peut permuter les deux derniers, puis qu'on peut permuter deux termes consécutifs, et enfin qu'on peut ranger les termes dans un ordre quelconque.

Pour changer le signe d'une somme algébrique, il suffit de changer le signe de chacun des termes. En effet, imaginons que, sur la droite des segments, on permute le sens positif et le sens négatif : la somme changera de signe, ainsi que chacun des termes.

Cela posé, soient $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ des segments quelconques (ils peuvent être en nombre quelconque). Pour les ajouter, à partir d'une origine A_0, on porte un segment $\overline{A_0A_1}$ égal à $\overline{AB}$; puis, à partir de A_1, on porte un segment $\overline{A_1A_2}$ égal à $\overline{CD}$; enfin, à partir de A_2, on porte un segment $\overline{A_2A_3}$ égal à $\overline{EF}$. On a ainsi

$$\overline{A_0A_3} = \overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF}.$$

On a aussi, en prenant A_3 pour origine,

$$\overline{A_3A_0} = \overline{FE} + \overline{DC} + \overline{BA},$$

ou, en changeant les signes, c'est-à-dire en changeant le sens de chaque segment,

$$\overline{A_0A_3} = \overline{EF} + \overline{CD} + \overline{AB}.$$

Dans une somme algébrique, on peut donc renverser l'ordre des termes. On en déduira, comme pour une somme arithmétique, qu'on peut intervertir l'ordre des termes d'une façon quelconque.

NOTE SUR L'EXISTENCE DE LIGNES BRISÉES CONVEXES D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE COTÉS

par M. **Moreaux**, professeur au lycée de Nancy.

Nous allons prouver qu'*étant donnée une ligne brisée ou polygonale convexe de n côtés, n étant un nombre entier quelconque, il en existe une de* $n + 1$ *côtés.*

Soit, par exemple, la ligne polygonale convexe de quatre côtés ABCDE.

Tous les sommets sont sur les côtés de l'angle C ou à l'intérieur de cet angle, car ils sont sur la droite BC ou au-dessous, ou bien sur la droite CD ou au-dessous.

Si donc on joint un point quelconque I du côté BC, autre que B et C, à un point quelconque K du côté CD, autre que C et D, on obtient une ligne brisée convexe de cinq côtés ABIKDE, car tous les sommets de cette dernière sont sur la droite IK ou au-dessous, c'est-à-dire d'un même côté par rapport à cette droite.

D'après cela, comme une ligne brisée de deux côtés est nécessairement convexe, il y a des lignes brisées convexes de trois côtés, de quatre, de cinq, etc., d'un nombre quelconque de côtés.

Cette démonstration me paraît plus simple, aussi rigoureuse, en tous cas plus à la portée des débutants que celle de M. Guichard, dans son excellent *Traité de Géométrie*, pages 30 et 31.

NOTE SUR LA SOLUTION DE LA QUESTION 4603

La solution de la question **4603**, qui se trouve en tête du numéro du 1er octobre, a été publiée telle qu'elle nous avait été envoyée par l'auteur, comme copie couronnée. Mais il est à propos de faire quelques observations relatives à la façon dont cette solution est présentée. La rédaction manque, en certains endroits, de précision, et c'est peut-être ce manque de précision qui a conduit l'auteur à donner, sur un point, une démonstration incomplète.

On avait trouvé pour des inconnues x, y, z des expressions telles que

$$x = \frac{a - b - c + abc \pm \sqrt{(abc - a - b - c)^2 - 4}}{2(ab - 1)}$$

et celles qui s'en déduisent par des permutations de lettres.

Il s'agissait de démontrer que *si l'une des solutions est formée de nombres rationnels, il en est de même pour l'autre ; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que a, b, c soient des nombres rationnels et que l'on ait*

$$abc - a - b - c = n + \frac{1}{n},$$

n étant un nombre rationnel.

Il fallait d'abord faire remarquer que, les équations données étant

$$y + \frac{1}{z} = a, \qquad z + \frac{1}{x} = b, \qquad x + \frac{1}{y} = c,$$

si x, y, z admettaient un système de valeurs rationnelles, a, b, c étaient des nombres rationnels, au lieu de sous-entendre cette condition pour ne la rappeler que plus loin.

Restait à établir que, cette condition étant réalisée, le nombre $(abc - a - b - c)^2 - 4$ était le carré d'un nombre rationnel. On lit à ce propos dans la solution publiée : « On sait que si une expression de la forme $n^2 + n'^2 + 2nn' - 4$ est carré parfait, elle ne peut être le carré que de $(n + n')$ ou de $(n - n')$ ». Cette affirmation est inexacte, car, par exemple, si $n' = \frac{5}{2} - n$ l'expression considérée devient

$$\frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Or, la somme $n + n'$ est égale à $\frac{5}{2}$, la différence $n - n'$ est $2n - \frac{5}{2}$, et n peut être un nombre rationnel quelconque. On pouvait cependant établir la condition mentionnée dans l'énoncé du problème d'une façon très simple.

Pour que les solutions soient réelles, il faut que

$$(abc - a - b - c)^2 - 4 > 0 ;$$

la parenthèse étant alors plus grande que 2 en valeur absolue, peut se représenter par $n + \frac{1}{n}$, puisque cette expression prend toutes les valeurs non comprises entre $+2$ et -2. Autrement dit, si les équations avaient des solutions réelles, on pouvait trouver un nombre n tel que

$$abc - a - b - c = n + \frac{1}{n}.$$

Alors $(abc - a - b - c)^2 - 4 = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - 4 = \left(n - \frac{1}{n}\right)^2.$

Les valeurs de x, y, z s'exprimaient alors rationnellement au moyen de a, b, c, n.

On peut remarquer aussi que si le système admet une solution composée de nombres rationnels

$$x = \alpha, \qquad y = \beta, \qquad z = \gamma,$$

a, b, c peuvent s'exprimer par

$$a = \beta + \frac{1}{\gamma}, \qquad b = \gamma + \frac{1}{\alpha}, \qquad c = \alpha + \frac{1}{\beta},$$

et

$$abc - a - b - c = \alpha\beta\gamma + \frac{1}{\alpha\beta\gamma}.$$

On a vu que pour que ces racines soient rationnelles, il faut que a, b, c soient des nombres entiers. Il faut évidemment en outre que $n - \frac{1}{n}$ le soit ; mais $n + \frac{1}{n}$ et $n - \frac{1}{n}$ étant rationnels en même temps, $\left(n + \frac{1}{n}\right) + \left(n - \frac{1}{n}\right)$ ou $2n$ l'est aussi.

Donc pour que x, y, z aient des valeurs rationnelles, il faut :

1° Que a, b, c soient des nombres rationnels ;

2° Que $abc - a - b - c = n + \frac{1}{n}$, n étant un nombre rationnel.

Il est évident qu'inversement, si ces conditions sont réalisées, les expressions des inconnues sont rationnelles.

Pour la dernière partie, on pouvait remarquer que si on appelle x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 les systèmes de valeurs des inconnues qui constituent les deux solutions, on a

$$(x_1y_1z_1)(x_2y_2z_2) = 1 ;$$

donc si x_1, y_1, z_1 sont entiers, x_2, y_2, z_2 ne peuvent l'être, à moins que toutes les inconnues aient pour valeur absolue 1.

[Nous avons reçu de M. L. Giboin, élève du collège de Draguignan, lauréat du concours général des Départements (1er prix), de bonnes solutions des questions 4603 et 4604 ; elles nous étaient parvenues trop tard pour être signalées dans le n° 1.]

ARITHMÉTIQUE

4642. — *Démontrer que la différence entre les cubes de deux nombres entiers consécutifs est terminée par l'un des chiffres 1, 7, 9.*

Première solution. — On sait que le cube d'un nombre est terminé par le même chiffre que le cube de ses unités. Donc les cubes de la suite naturelle des nombres sont terminés par les mêmes chiffres que les cubes des chiffres de la suite

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, ...,

c'est-à-dire par

1, 8, 7, 4, 5, 6, 3, 2, 9, 0, 1, ...

Par suite, deux cubes consécutifs de la suite ont leur différence terminée par l'un des chiffres

7, 9, 7, 1, 1, 7, 9, 7, 1, 1, ...,

ce qui justifie l'énoncé.

Seconde solution. — La différence entre les cubes des nombres consécutifs a et $a + 1$ a pour expression

$$(a + 1)^3 - a^3 = 3a(a + 1) + 1.$$

Or le produit $a(a + 1)$ se termine par le même chiffre que le produit de deux chiffres consécutifs quelconques, c'est-à-dire par l'un des chiffres 0, 2 ou 6. Donc le nombre $3a(a + 1) + 1$ se termine par les mêmes chiffres que les trois nombres

$$3 \times 0 + 1, \qquad 3 \times 2 + 1, \qquad 3 \times 6 + 1,$$

c'est-à-dire par l'un des trois chiffres 1, 7, 9.

(Henry Varennes, aux Champs-Rochers.)

[Ont résolu la même question : MM. V. Barol, école primaire supérieure de Lorgues ; R. Bouvaist, école Sainte-Geneviève ; F. Breynaert, école Bossuet ; G. Chollet, à Largeasse ; G. Foucry, école normale de Châlons ; E. Framboise ; J. Hébré ; R. Henry, instituteur-adjoint à Troyes ; H. Janois, instituteur-adjoint à Saint-Calais ; T. Lalescu, lycée de Jassy ; G. Lallier, lycée de Nantes ; A. Lecoutour ; E. Le Maigre ; David Lwòw, à Piatra (Roumanie) : J. Ménéchal, instituteur au Bugue ; Millet, à Orléans ; L. Ollié, à Auch ; L. Patin, instituteur-adjoint à Arvillers ; A. Pichon, lycée de Niort ; A. Sainte-Laguë, lycée de Bordeaux ; L. Troin, collège Rollin ; H. Damoiseau ; P. Dunaime ; L. Giboin ; E. Merle ; E. Moracchini ; G. Oberlin.]

4644. — *Trouver deux nombres entiers consécutifs, sachant que leur somme multipliée par leur produit est égale à 7440.*

Soient x et $x + 1$ les deux nombres consécutifs cherchés. On doit avoir

$$(x + x + 1)x(x + 1) = 7440.$$

Cette équation du troisième degré se résout d'une manière élémentaire en utilisant la remarque suivante :

Si l'on retranche 1 de chacun des deux facteurs extrêmes du premier membre, celui-ci diminue, et l'on peut écrire

$$2x \,.\, x \,.\, x < 7440,$$

ou $x^3 < 3720$;

de même, en ajoutant 1 à chacun des deux premiers facteurs, on aurait

$$(x+1)^3 > 3720.$$

Le nombre 3720 étant ainsi compris entre le cube de x et celui de $x+1$, x est la racine cubique de 3720 à une unité près par défaut ; donc

$$x = 15.$$

Les deux nombres sont donc 15 et 16, comme on le vérifie directement.

(J. MÉNÉCHAL, instituteur au Bugue.)

[Ont résolu la même question : MM. Ladislas Bleux, école primaire supérieure de Vervins ; R. Bouvaist ; G. Chollet, à Largeasse ; Croze ; G. Foucry ; R. Henry ; Hébré ; H. Janois, instituteur à Saint-Calais ; T. Lalescu, lycée de Jassy ; E. Le Maigre, à Bannalec ; David Lwow, à Piatra (Roumanie) ; L. Ollié ; L. Patin, instituteur à Arvillers ; A. Pichon, à Niort ; A. Sainte-Laguë, lycée de Bordeaux ; L. Troin, collège Rollin ; H. Varennes ; F. Velardi, à Messine ; H. Damoiseau ; Houzon ; E. Merle ; E. Sinturel.]

ALGÈBRE

4646. — *Démontrer que l'expression*

$$xyz + (x+y)(y+z)(z+x)$$

est divisible par $x+y+z$.

Première solution. — On sait qu'un polynome entier en x est divisible par $x+a$ lorsqu'il s'annule pour $x = -a$.

Il suffit donc de vérifier que l'expression proposée s'annule pour $x = -(y+z)$. En effet, en y remplaçant x par $-(y+z)$, il vient

$$-(y+z)yz + (-z)(y+z)(-y) = 0.$$

(VICTOR BAROL, école primaire supérieure de Lorgues.)

Seconde solution. — Cherchons à mettre en évidence le facteur $x+y+z = t$. L'expression peut s'écrire

$$xyz + (t-z)(t-x)(t-y),$$

ou, en développant le second terme et réduisant,

$$t^3 - t^2(x+y+z) + t(xy+yz+zx),$$

ou finalement, en remplaçant t par $x+y+z$,

$$(x+y+z)(xy+yz+zx).$$

[Ont résolu la même question : MM. R. Barthélemy, lycée de Toulouse ; R. Bouvaist ; F. Breynaert, école Bossuet ; C. Broutin ; G. Chollet, à Largeasse ; Croze ; G. Delahaye, à Roye ; G. Foucry ; E. Framboise ; J. Hébré ; R. Henry ; H. Janois, instituteur à Saint-Calais ; T. Lalescu, lycée de Jassy ; G. Lallier, lycée de Nantes ; C. Lefebvre, lycée Saint-Louis ; A. Legros, lycée de Rouen ; H. Lévy ; David Lwow, à Piatra (Roumanie) ; J. Ménechal, instituteur au Bugue ; L. Ollié, à Auch ; A. Pichon, à Niort ; H. Pitrat, à Givors ; J. Reynaud, à Genève ; A. Sainte-Laguë, lycée de Bordeaux ; H. Varennes ; P. Zlatco, lycée de Bassorah (Turquie d'Asie) ; L. Giboin ; Houzon ; Lajouanine ; Moracchini ; Oberlin ; Sinturel.]

4648. — *Trouver trois nombres entiers positifs, sachant que leur somme est 14 et qu'en ajoutant l'un d'eux au produit des deux autres, on obtient 19.*

Soient x, y, z les trois nombres demandés.

On doit avoir

$$x+y+z = 14, \quad (1)$$

$$x + yz = 19. \quad (2)$$

Retranchons l'équation (1) de (2) ; on obtient l'équation

$$yz - y - z = 5, \quad (3)$$

qui peut s'écrire, en ajoutant 1 de part et d'autre,

$$(y-1)(z-1) = 6.$$

Le nombre 6 n'étant décomposable en deux facteurs entiers que des deux manières suivantes : 1×6 ou 2×3, l'égalité précédente ne peut être satisfaite qu'en prenant pour y et z les valeurs :

$$y = 2,\quad 7,\quad 3,\quad 4,$$
$$z = 7,\quad 2,\quad 4,\quad 3 ;$$

les valeurs correspondantes de x déduites de l'équation (1) ou de l'équation (2) sont alors

$$x = 5,\quad 5,\quad 7,\quad 7.$$

Les seuls systèmes de nombres entiers répondant à la question sont donc, en supposant que y désigne le plus petit des deux nombres y et z,

$$\begin{cases} x = 5, \\ y = 2, \\ z = 7, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 7, \\ y = 3, \\ z = 4. \end{cases}$$

Remarque. — D'après l'équation (3), le problème traité n'est qu'un cas particulier du suivant :

Trouver deux nombres entiers positifs connaissant l'excès de leur produit sur leur somme.

Dans l'exemple précédent, la somme des deux nombres est en outre assujettie à rester inférieure à 14.

(BURGAT, Instituteur à Meyrieux-Trouet.)

[Ont résolu la même question : MM. R. Bouvaist ; F. Breynaert, école Bossuet ; G. Chollet, à Largeasse ; G. Foucry, école normale de Châlons ; J. Hébré ; R. Henry, instituteur-adjoint à Troyes ; H. Janois, instituteur-adjoint à Saint-Calais ; T. Lalescu, lycée de Jassy ; A. Lecoutour, école primaire supérieure de Saint-Lô ; David Lwow, à Piatra (Roumanie) ; J. Ménechal, au Bugue ; J. Mollat, à Nantes ; A. Sainte-Laguë, lycée de Bordeaux ; H. Varennes ; H. Damoiseau ; E Sinturel.]

4650. — *Calculer les trois côtés d'un triangle rectangle connaissant la somme* m *de l'hypoténuse et de la hauteur correspondante et la différence* k *des deux côtés de l'angle droit* $(b - c = k)$. *Discuter le problème.*

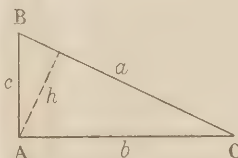
Application numérique : $m = 7^m,4$; $k = 1^m$. *On calculera* a, b, c *et la hauteur* h *relative à l'hypoténuse.*

(Bacc. lettres-sciences, Grenoble, novembre 1898.)

Par hypothèse, on doit avoir

$$a + h = m, \quad (1)$$

$$b - c = k ; \quad (2)$$



le triangle rectangle ABC donne d'ailleurs

$$b^2 + c^2 = a^2, \quad (3)$$

$$bc = ah. \quad (4)$$

Retranchons l'équation (4), préalablement multipliée par 2, de l'équation (3) ; il vient

$$(b-c)^2 = a^2 - 2ah,$$

ou, en tenant compte de (1) et (2),

$$k^2 = a^2 - 2a(m-a),$$

ou

$$3a^2 - 2am - k^2 = 0. \quad (5)$$

Connaissant a, les équations (2) et (4) montrent que b et $-c$ sont racines de l'équation

$$X^2 - kX - a(m-a) = 0. \quad (6)$$

Discussion. — Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit qu'il existe un système de valeurs réelles et positives de b et c (un triangle rectangle étant complètement déterminé par ses deux côtés de l'angle droit).

L'équation (6), vérifiée par b et $-c$, doit donc avoir deux racines réelles et de signes contraires ; pour cela, il faut et il suffit que l'équation ait ses deux termes extrêmes de signes contraires :

$$-a(m-a) < 0,$$

ou

$$a(a-m) < 0,$$

inégalité satisfaite pour toute valeur positive de a inférieure à m.

En remplaçant dans le premier membre de (5), a par m, on obtient $m^2 - k^2$.

Si $m > k$, ce résultat est positif comme le coefficient de a^2 dans (5); m est supérieur à la racine positive de l'équation (5); le problème comporte alors une seule solution fournie par les formules :

$$a = \frac{m + \sqrt{m^2 + 3k^2}}{3}, \qquad \begin{matrix} b \\ -c \end{matrix} \Big\} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4a(m-a)}}{2}.$$

Si $m < k$, m sépare les racines de l'équation (5), et le problème devient impossible. D'ailleurs il est évident qu'on doit avoir

$$a > b - c = k;$$

donc *a fortiori*

$$m = a + h > k.$$

Application numérique. — En prenant $m = 7^m,4$ et $k = 1^m$, on trouve d'abord

$$a = 5, \qquad \text{puis} \qquad \begin{matrix} b \\ c \end{matrix} \Big\} = \Big\{ \begin{matrix} 4^m \\ 3^m \end{matrix} \qquad \text{et} \qquad h = m - a = 2^m,4.$$

(C. BROUTIN, à Orchies.)

[Ont résolu la même question : MM. V. Barol, école primaire supérieure de Lorgues ; R. Barthélemy ; R. Bouvaist ; Burgat ; G. Foucry, école normale de Châlons ; E. Framboise ; R. Henry ; H. Janois, à Saint-Calais ; Julien, à Laon ; E. Le Maigre, à Bannalec ; A. Sainte-Laguë, lycée de Bordeaux ; L. Troin, collège Rollin ; H. Varennes ; J. Haag ; F. Moracchini ; E. Sinturel.]

4656. — *On donne deux droites rectangulaires* OA *et* OB *et une circonférence de rayon* R *et de centre* C *tangente à ces deux droites. On demande de calculer le rayon* x *d'une circonférence tangente aux deux droites* OA *et* OB *et coupant la première à angle droit.*

(*Bacc. lettres-math., Dijon, novembre 1898.*)

Soit I le centre du cercle inscrit dans l'angle AOB et coupant le cercle C en un point M tel que l'angle IMC soit droit.

Le triangle rectangle MIC donne

$$\overline{IC}^2 = R^2 + x^2;$$

d'autre part

$$IC = OC - OI = R\sqrt{2} - x\sqrt{2}.$$

L'équation du problème est donc

$$2(R - x)^2 = R^2 + x^2,$$

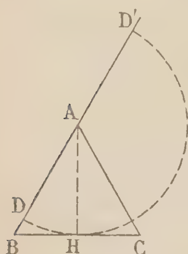
ou

$$x^2 - 4Rx + R^2 = 0.$$

On tire de là

$$x = R(2 \pm \sqrt{3});$$

ces deux valeurs positives correspondent à deux cercles I dont l'un est plus petit et l'autre plus grand que le cercle donné C.



Construction des racines. — On construit le triangle équilatéral ABC de côté 2R, et l'on rabat la hauteur AH en AD ou AD' sur le côté AB; BD et BD' représentent visiblement les racines.

(R. HENRY, à Troyes.)

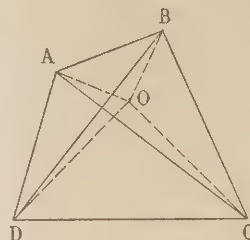
Remarque. — Il est plus simple de construire le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle donné, et d'ajouter ou retrancher la longueur de ce côté à celle du diamètre.

[Ont résolu la même question : MM. V. Barol, école primaire supérieure de Lorgues ; R. Barthélemy ; R. Bouvaist ; F. Breynaert ; Croze ; G. Delahaye, à Roye ; G. Foucry, école normale de Châlons ; E. Framboise ; H. Janois ; G. Lallier, lycée de Nantes ; A. Lecoutour ; A. Legros ; H. Lévy ; D. Lwow, à Piatra (Roumanie) ; J. Ménéchal, au Bugue ; J. Mollat ; L. Ollié, à Auch ; L. Patin ; H. Pitrat, à Givors ; A. Sainte-Laguë, lycée de Bordeaux ; L. Troin, collège Rollin ; H. Varennes ; J. Haag ; Lajouanine ; E. Sinturel.]

GÉOMÉTRIE

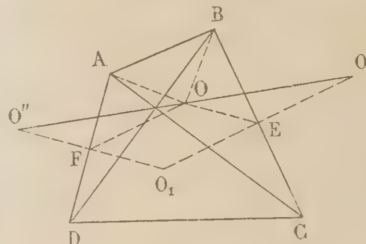
4263. — *Démontrer que les carrés construits intérieurement sur deux côtés opposés* AB, CD *d'un pseudocarré (quadrilatère dont les diagonales sont égales et perpendiculaires) ont même centre et que ce point est le milieu de la droite qui joint les centres des carrés construits extérieurement sur les côtés* BC, DA.

Soit O le centre du carré construit intérieurement sur AB. Je dis que le point O est aussi le centre du carré construit intérieurement sur CD.



Joignons en effet le point O aux points A, B, C, D. Comme par hypothèse AC est égal et perpendiculaire à BD, AO égal et perpendiculaire à BO, il en résulte que les triangles AOC, BOD coïncident si on fait tourner l'un d'eux de 90° autour de O. Donc OC est égal et perpendiculaire à OD, c'est-à-dire que O est le centre du carré construit sur CD.

Soient O' et O'' les centres des carrés construits extérieurement sur BC, DA. Nous allons montrer que le milieu O de O'O'' est le centre du carré construit intérieurement sur AB.



D'après ce qui précède, les perpendiculaires élevées respectivement aux milieux E, F de BC, DA se coupent en un point O_1, centre commun des carrés construits intérieurement sur BC, DA.

Les points O, E, F étant les milieux des côtés du triangle $O_1O'O''$, la figure O_1EOF est un parallélogramme. Donc OE est égal et parallèle à FO_1, et par suite, égal et perpendiculaire à AF ; de même, OF est égal et perpendiculaire à BE. Les triangles OEB, AFO ayant ainsi deux côtés égaux et perpendiculaires, les troisièmes côtés OB et AO jouissent de la même propriété, et O est bien le centre du carré construit intérieurement sur AB.

Remarque. — D'après un cas particulier de la question 4170 (V. *Journal*, 22e année, p. 12), dans un quadrilatère quelconque, les centres des deux carrés extérieurs ayant pour côtés BC, DA et les centres des deux carrés intérieurs ayant pour côtés AB, CD sont les sommets d'un parallélogramme. Dans le cas énoncé, deux des sommets opposés de ce parallélogramme étant confondus, les deux autres sont symétriques par rapport à ce sommet commun.

(TELLIER, à Charleville.)

[Ont résolu la même question : MM. L. Bolzinger ; Boutry ; Burgat ; H. Carpentier ; G. Charpentier ; Costes ; L. Cussenot ; Custaud ; G. Delahaye, A. Delcambre ; M. Deschamps ; Feintuch ; E. Foucart ; A. Gipoulou ; L. Gourdet ; A. Gourdin ; G. Hiernaux ; H. Lefèvre ; E. Le Maigre ; A. Lescure ; H. Lévy ; L. Magne ; A. Maître ; H. Martiny ; E. Mathieu ; A. Mirc ; F. Morel ; G. Pommeron ; M. Rebeix ; A. Sarteel ; E. Sinturel ; Watrin.]

4631. — *On donne un cercle* O *et une corde* AB. *Par un point quelconque* M *de* AB, *mener une corde* CD *telle que l'on ait, en joignant* A *aux points* C *et* D,

$$\frac{MC}{MD} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AD}^2}.$$

Lorsque M *se déplace sur* AB, *trouver les lieux des points de concours des médianes et des hauteurs du triangle* ACD, *et le lieu du pied de la bissectrice issue de* A.

Supposons le problème résolu et soit CD la sécante cherchée. Menons la tangente en A qui rencontre DC prolongé en P.

Les triangles PAC, PDA étant semblables, on a

$$\frac{AC}{AD} = \frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PA},$$

ou, en égalant le carré du premier rapport au produit des deux autres,

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AD}^2} = \frac{PC}{PD}.$$

La relation donnée devient donc

$$\frac{MC}{MD} = \frac{PC}{PD},$$

ce qui exprime que la division PCMD est harmonique. Par suite le point P, situé à la fois sur les polaires des points A et M, est le pôle de la droite AM ou AB.

Pour obtenir la sécante répondant à la question, il suffit donc de joindre le point M au pôle P de la corde AB.

Lieu du point de concours des médianes du triangle ACD. — Considérons la médiane AN ; on sait qu'elle est coupée par les deux autres en un point G situé aux $\frac{2}{3}$ de AN par rapport au sommet A.

L'angle PNO étant droit, le lieu de N est un cercle de diamètre PO passant par A et B ; par suite, le lieu de G est un cercle homothétique passant par A, ce point étant le centre et $\frac{2}{3}$ le rapport d'homothétie.

Comme N ne peut décrire que l'arc de cercle compris dans le cercle O et limité par AB, G ne décrit que l'arc homothétique correspondant.

Lieu du point de concours H *des hauteurs du triangle* ACD. — On sait que les trois points H, G, O sont en ligne droite et que $OH = 3OG$. Dès lors le point H décrit un arc de cercle homothétique de celui décrit par G, O étant le centre et 3 le rapport d'homothétie.

Lieu du pied I *de la bissectrice issue de* A. — La bissectrice AI passe par le milieu E de l'arc CBD. Par suite, l'angle AIC est égal à l'angle PAI comme ayant même mesure ; en effet,

$$\frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{DE}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CE}}{2} = \frac{\text{arc } ACE}{2}.$$

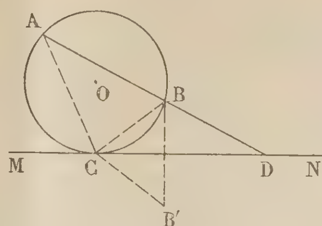
Le triangle PAI est donc isocèle et $PI = PA$, ce qui montre que le lieu de I est un cercle de centre P passant par A et B. La portion utile est limitée à l'arc AB de ce cercle compris dans le cercle O.

(Ernest FOUCART.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Fouché ; H. Lacaze.]

4652. — *Construire une circonférence passant par deux points donnés et tangente à une droite donnée (à traiter par le second livre).*

Supposons le problème résolu : soit O la circonférence passant par les deux points donnés A et B et tangente en C à la droite donnée MN.



Prolongeons AB jusqu'à sa rencontre en D avec MN et joignons le point C aux points A, B et au symétrique B′ de B par rapport à MN.

On a

$$\widehat{B'CD} = DCB,$$

ou, comme $\widehat{DCB} = \widehat{CAB}$ (même mesure),

$$\widehat{B'CD} = \widehat{CAB},$$

ou, en ajoutant l'angle DCA de part et d'autre,

$$\widehat{B'CA} = \widehat{CAB} + \widehat{DCA} = \widehat{ADN}.$$

Le point C se trouve ainsi à la rencontre de la droite MN avec le segment capable de l'angle obtus ADN construit sur AB′ comme base, du côté opposé au point D. La circonférence O est alors déterminée par trois points.

En construisant sur AB′ comme base, et du même côté que D, un segment capable de l'angle aigu ADM, ce segment coupe MN en un point C′ auquel correspond une seconde solution du problème. Les deux segments considérés appartiennent visiblement à un même cercle.

(E. LE MAIGRE, à Bannalec.)

[Ont résolu la même question : MM. V. Barol, école primaire supérieure de Lorgues ; J. Petrignani, lycée de Marseille ; Pascal Zlatco, lycée de Bassorah (Turquie d'Asie) ; H. Jaffré.]

4654. — *Par un des sommets* A *d'un triangle et les pieds de la médiane et de la bissectrice issues de* A, *on fait passer un cercle qui coupe les côtés* AB, AC *aux points* B′, C′. *Démontrer que* $BB' = CC'$.

Soient M et D les pieds de la médiane et de la bissectrice. D'après la propriété relative aux sécantes d'un cercle, on a

$$BB'.BA = BM.BD$$

et

$$CC'.CA = CM.CD.$$

Divisons ces égalités membre à membre ; nous aurons

$$\frac{BB'}{CC'} \cdot \frac{BA}{CA} = \frac{BM}{CM} \cdot \frac{BD}{CD}.$$

Or par hypothèse $BM = CM$, et, en vertu d'une propriété de la bissectrice,

$$\frac{BA}{CA} = \frac{BD}{CD}.$$

Donc $\frac{BB'}{CC'} = 1$, ou $BB' = CC'$.

C. q. f. d.

(Charles LEFEBVRE, lycée Saint-Louis.)

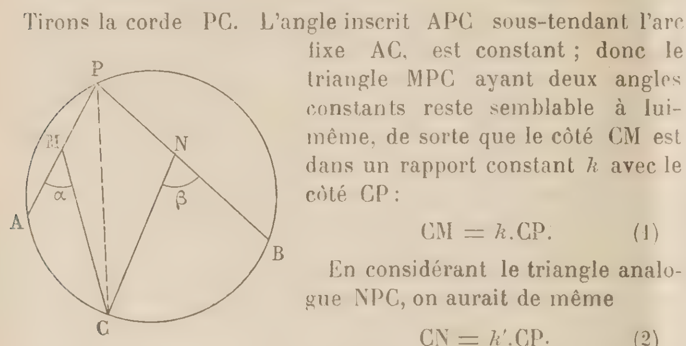
Remarque. — La propriété s'étend également au cercle passant par les points A, M et le pied de la bissectrice extérieure issue de A.

[Ont résolu la même question : MM. V. Barol, école primaire supérieure de Lorgues ; R. Barthélemy ; A. Bétancourt, lycée d'Amiens ; R. Bouvaist ; F. Breynaert ; F. Cassagne, lycée d'Alger ; G. Chollet, à Largeasse ; G. Delahaye, à Roye ; G. Foucry, école normale de Châlons ; E. Framboise ; J. Hébré, R. Henry, à Troyes ; H. Janois, à Saint-Calais ; T. Lalescu ; G. Lallier, lycée de Nantes ; A. Lecoutour ; A. Legros, lycée de Rouen ; H. Lévy ; David Lwow,

à Piatra (Roumanie); J. Ménéchal, au Bugue; Millet, à Orléans; L. Ollié, à Auch; L. Patin; M. Petitjean, collège Chaptal; A. Sainte-Laguë, lycée de Bordeaux; L. Troin, collège Rollin; H. Varennes; L. Giboin, lycée Saint-Louis; H. Jaffré; J. Haag; E. Merle, lycée Charlemagne; E. Moracchini; E. Sinturel.]

4658. — *Sur une circonférence passant par trois points donnés* A, B, C, *on prend un point quelconque* P *que l'on joint à* A *et* B, *puis par* C *on mène deux droites* CM, CN *faisant respectivement avec* PA, PB *des angles connus* α, β. *Démontrer que le rapport* $\frac{CM}{CN}$ *est indépendant de la position du point* P.

Tirons la corde PC. L'angle inscrit APC sous-tendant l'arc fixe AC, est constant; donc le triangle MPC ayant deux angles constants reste semblable à lui-même, de sorte que le côté CM est dans un rapport constant k avec le côté CP :



$$CM = k.CP. \qquad (1)$$

En considérant le triangle analogue NPC, on aurait de même

$$CN = k'.CP. \qquad (2)$$

Des égalités (1) et (2), on déduit par division

$$\frac{CM}{CN} = \frac{k}{k'} = \text{const.}$$

(VICTOR BAROL, école primaire supérieure de Lorgues.)

Solution trigonométrique. — Menons les cordes CA, CB. Dans le triangle CAM, on a

$$\frac{CM}{\sin CAP} = \frac{CA}{\sin \alpha},$$

et dans le triangle CBN,

$$\frac{CN}{\sin CBP} = \frac{CB}{\sin \beta}.$$

Divisons ces deux relations membre à membre, en observant que les angles CAP, CBP, qui sont supplémentaires ou égaux (CAP = CBP si P vient entre A et B) ont même sinus, il vient

$$\frac{CM}{CN} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \text{const.}$$

(R. BARTHÉLEMY.)

[Ont résolu la même question : MM. J. Basset, à Mauriac; C. Broutin; Croze; G. Delahaye, à Roye; G. Foucry; J. Hébré; A. Lecoutour; A. Legros, lycée de Rouen; David Lwow, à Piatra; L. Ollié; L. Palarieru, à Piatra; Petitjean, collège Chaptal; H. Pitrat, à Givors; H. Varennes; L. Giboin, lycée Saint-Louis; J. Haag; Marot; E. Merle, lycée Charlemagne; E. Sinturel.]

PHYSIQUE

4617. — *Un flacon possède à 0° une capacité de 40cc. Peut-on verser dans ce flacon une quantité de mercure telle que, lorsque la température varie, le volume non occupé par le mercure demeure indépendant de la température? Quel est le poids de mercure à employer?*

Coefficient de dilatation du verre, $\frac{1}{45000}$.

Coefficient de dilatation du mercure, $\frac{1}{5500}$.

Densité du mercure à 0°, 13,6.

(*Bacc. lettres-math., Paris, juillet 1899.*)

Appelons k le coefficient de dilatation cubique du verre, Δ celui du mercure, v le volume de mercure tel que le problème soit résolu, V le volume ou la capacité du vase à 0°.

La capacité libre du vase a pour valeur $V - v$.

Portons le vase à une température quelconque t. La capacité du vase deviendra $V(1 + kt)$, et le volume du mercure $v(1 + \Delta t)$.

On doit avoir

$$V(1 + kt) - v(1 + \Delta t) = V - v,$$

d'où
$$v\Delta t = Vkt$$

et
$$v = V\frac{k}{\Delta}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut évidemment que l'on ait

$$\frac{k}{\Delta} < 1.$$

Or
$$k = \frac{3}{45000} = \frac{1}{15000}; \qquad \Delta = \frac{1}{5500}.$$

Donc
$$\frac{k}{\Delta} = \frac{5500}{15000} < 1$$

et le problème est possible.

En appliquant les données numériques, on a

$$v = \frac{40 \times 5500}{15000} = \frac{40 \times 11}{30}.$$

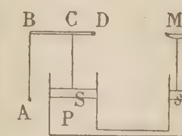
Le poids du mercure est

$$\frac{40 \times 11}{30} \times 13,6 = 199^{gr},466.$$

(J. MÉNÉCHAL, au Bugue.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Arcizet; Ardin-Delteil; L. Curt; H. Dodier; G. Foucry; L. Guilhem; R. Henry; E. Le Maigre; M. Oger; L. Patin.]

4635. — *On suppose qu'une corde de longueur connue* AB *donne l'ut$_0$ quand elle supporte un poids de* 10kg. *On demande :*



1° *Quelle tension il faut qu'elle supporte pour donner le sol$_0$;*

2° *Quel poids* p *il faut mettre sur le plateau* M *pour exercer cette tension par l'intermédiaire de la presse hydraulique* P *et du levier* BCD. *L'extrémité* A *de la corde est fixée au point fixe* A, *l'autre extrémité est attachée au levier et* D *est le point fixe du levier. Les surfaces des pistons sont* $S = 0^{mq},01$ *et* $s = 100^{mm}{}_q$; $BC = 60^{cm}$ *et* $CD = 20^{cm}$;

3° *La pression barométrique intervient-elle dans l'expérience?*

(*Bacc. lettres-math., Toulouse, juillet 1898.*)

1° Soit n le nombre de vibrations correspondant à ut_0. Le nombre de vibrations correspondant à sol_0 est $\frac{n \times 3}{2}$. On sait que le nombre des vibrations d'une même corde est directement proportionnel à la racine carrée des poids qui la tendent. On a donc

$$\frac{n}{\frac{3n}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{P}},$$

d'où
$$P = \frac{90}{4} = 22^{kg},5.$$

Pour avoir sol_0, il faudra donc faire supporter à la corde un poids de 22kg,5.

2° Soit p le poids qu'il faut mettre sur le petit plateau de la presse hydraulique pour produire par l'intermédiaire du levier BD la tension de $22^{kg},5$.

La poussée transmise par le grand piston est égale à $\frac{pS}{s}$.

L'équation d'équilibre du levier est

$$\frac{pS}{s} \times DC = 22{,}5 \times BD,$$

d'où
$$p = 22{,}5 \times \frac{BD}{DC} \times \frac{s}{S}.$$

En appliquant les données numériques, on a

$$p = 22{,}5 \times 4 \times \frac{1}{100} = 900^{gr}.$$

3° Quelle que soit la pression atmosphérique, son action sur le grand piston est équilibrée par celle exercée sur le petit. Donc la pression barométrique n'intervient pas dans l'expérience.

(J. MÉNÉCHAL, au Bugue).

[Ont résolu la même question : MM. E. Ardin-Delteil ; H. Dodier, lycée de Laval ; E. Foucart, à Issy ; E. Framboise ; R. Henry ; A. Lecoutour ; M. Oger, à Tours.]

CONCOURS DE 1899 *(suite)*

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques élémentaires.

4662. — 1° On considère les coniques ayant une directrice fixe D et passant par deux points fixes A et B. Deux de ces coniques passent par un point donné M et se coupent en un nouveau point M' qui est dit *associé* au point M.

On demande d'étudier cette association et plus particulièrement :

a) De déterminer les points M tels que les points M' associés soient indéterminés ;

b) De trouver le lieu des points M tels que chacun d'eux soit confondu avec son associé.

2° Montrer que si le point M décrit une droite quelconque Δ, le point associé M' décrit en général une hyperbole Γ dont on cherchera les asymptotes. Indiquer les régions de la droite Δ qui correspondent aux deux branches de l'hyperbole.

3° On suppose que la droite Δ est placée de telle sorte que la conique Γ devienne une parabole et on propose de trouver le lieu du foyer de cette parabole lorsque Δ se déplace en satisfaisant à cette condition.

4° On suppose que la droite Δ se déplace de telle sorte que les hyperboles Γ correspondantes aient une asymptote commune. On demande, dans ces conditions, de déterminer la courbe enveloppe des axes de symétrie de la conique Γ.

(3 juillet, de 7 h. à 2 h.)

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES

Section des sciences mathématiques.

Arithmétique et Algèbre.

I. — Fractions ordinaires. — Définition et simplification.

II. — **4663.** On donne les trinomes du second degré

$$u = x^2 - 6x + 5, \qquad v = x^2 - 5x + 6,$$

et on considère les fractions

$$y = \frac{u}{v}, \qquad z = \frac{mu + nv}{u + pv},$$

m, n et p désignant des nombres donnés quelconques :

1° Etudier la variation de la fraction $y = \frac{u}{v}$;

2° Comparer la variation de z à celle de y, et montrer que ces deux fonctions de x varient toujours dans le même sens, ou toujours en sens contraires selon que $mp - n$ est positif ou négatif.

3° Déterminer n et p en fonction de m, de manière que le *maximum* et le *minimum* de z soient respectivement égaux au *maximum* et au *minimum*, ou au *minimum* et au *maximum* de y. Distinguer les valeurs de m pour lesquelles on se trouve dans l'un ou dans l'autre de ces deux cas.

(10 juillet, de 8 h. à midi.)

« Géométrie et Cosmographie. »

4664. — On donne une circonférence de centre O et deux diamètres rectangulaires AA', BB'. Soit P un point *mobile* sur cette circonférence; on trace la droite PA' qui coupe le diamètre BB', ou son prolongement, au point Q.

1° Trouver le lieu du point C, centre du cercle circonscrit au triangle BPQ, et le lieu du point C', centre du cercle circonscrit au triangle B'PQ.

Distinguer les parties de ces lieux qui correspondent aux différentes positions du point P sur la circonférence donnée.

2° Démontrer que la somme ou la différence des rayons des cercles circonscrits aux triangles BPQ et B'PQ est constante.

3° Démontrer que le triangle OCC' est rectangle et isocèle, et trouver le lieu du point I, milieu de la droite CC'.

4° Trouver le lieu du point d'intersection M des droites OP et CC' et chercher la tangente à ce lieu au point M.

(11 juillet, de 8 h. à midi.)

Section des sciences physiques et naturelles.

Physique.

I. — Différence de potentiel électrique au contact de corps différents. — Production et entretien du courant.

II. — Définition de l'*unité de chaleur*, ou calorie ; de la *chaleur spécifique* d'un corps solide ; de sa *chaleur de fusion* ; de son *coefficient de dilatation cubique* ; de sa *température de fusion*.

4665. — On suppose qu'on connaisse, pour un corps solide déterminé, sa chaleur spécifique $K = 0{,}03$; sa chaleur de fusion $\lambda = 5{,}34$; son coefficient de dilatation cubique $\delta = \frac{1}{12\,500}$; sa température de fusion $T = 320°$; toutes ces quantités étant rapportées aux unités C.G.S. et à l'échelle centigrade. — On demande de déterminer les valeurs numériques de ces mêmes quantités en substituant à l'échelle centigrade, dans toutes les définitions : 1° l'échelle de Réaumur ; 2° l'échelle de Fahrenheit. (On représentera les quantités à déterminer par les mêmes lettres, affectées de l'indice R ou de l'indice F.)

(8 juillet, de 8 h. à midi.)

Sciences naturelles.

I. — Structure, propriétés et fonctions des muscles.

II. — La graine : sa conformation et son origine.

(11 juillet, de 8 h. à midi.)

ÉCOLE NORMALE PRIMAIRE SUPÉRIEURE

DE SAINT-CLOUD

Mathématiques.

I. — **4666**. Sachant que la somme des carrés des n premiers nombres entiers est $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, trouver la condition nécessaire et suffisante que doit remplir le nombre entier p, pour que la somme des carrés de p nombres entiers consécutifs quelconques soit divisible par p.

II. — **4667**. On donne un plan P, une demi-droite OS perçant le plan P au point O et faisant avec sa projection OS′ sur le plan P un angle de 45°, et deux points A et B sur la demi-droite OS; soit OR une droite du plan P faisant avec OS′ l'angle α ; on demande de déterminer géométriquement sur OR un point M tel que l'on ait $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = k^2$. k étant une longueur donnée ; discuter ; limites de l'angle α.

III. — **4668**. On considère le tronc de cône engendré par le trapèze rectangle ABCD en tournant autour de sa hauteur AB ; on donne la longueur a de l'arête latérale CD, la surface k^2 du trapèze ABCD, et on sait que le carré de la hauteur est égal à la somme des carrés des rayons des deux bases : 1° Calculer la hauteur et les rayons des bases ; discuter ; 2° Donner, en fonction des données, l'équation qui donne le rayon R de la sphère contenant les deux cercles de bases ; conditions de possibilité.

(*26 juin, de 8 h. à midi.*)

Physique, Chimie et Histoire naturelle.

I. — 1° Expérience de la congélation de l'eau dans le vide. — Énoncer les principes de physique qui trouvent leur application dans cette expérience.

4669. — 2° Un miroir plan reçoit les rayons solaires et les renvoie vers une lentille convergente dont la distance focale est de 60 mètres. Il est orienté de telle façon qu'un rayon parti du centre du soleil est réfléchi parallèlement à l'axe principal de la lentille. On demande la nature, la position et la grandeur de l'image du soleil fournie par la lentille. Le diamètre apparent du soleil est de 32 minutes. On admettra que pour de petits angles l'arc se confond avec sa tangente.

II. — Alcalis organiques artificiels.

III. — Absorption intestinale : voie suivie par les matières absorbées. Structure de l'ovule chez les phanérogames ; rôle de ses diverses parties.

(*28 juin, de 8 h. à midi.*)

ÉCOLE NORMALE PRIMAIRE SUPÉRIEURE

DE FONTENAY-AUX-ROSES

Mathématiques.

I. — Condition pour qu'on puisse réduire une fraction à un dénominateur donné. En déduire la réduction de plusieurs fractions au plus petit dénominateur commun.

II. — **4670**. Les nombres entiers a, b, c étant supposés premiers entre eux deux à deux, prouver que les deux nombres

$$a \times b + b \times c + c \times a \qquad \text{et} \qquad a \times b \times c$$

sont premiers entre eux.

III. — **4671**. Sur les côtés d'un angle xAy on prend deux longueurs variables, AM, AN. On trace MP perpendiculaire à Ax et NP perpendiculaire à Ay. Ces droites se rencontrent en P. En supposant P à l'intérieur de l'angle xAy, prouver que si la somme AM + AN demeure constante quand M et N se déplacent sur Ax et Ay respectivement, la somme PM + PN demeure également constante. Examiner si la proposition est encore vraie quand P n'est pas à l'intérieur de l'angle, et comment il faut la modifier quand elle cesse d'être vraie. Enfin, quel est le lieu géométrique du point P?

(*26 juin, de 8 h. à midi.*)

Physique, Chimie et Histoire naturelle.

I. — Du phénomène de la rosée.

II. — Propriétés chimiques du soufre. Usages du soufre.

III. — La racine. Structure. Fonctions.

(*28 juin, de 8 h. à midi.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4672. — Trouver le reste de la division par 977 du nombre 265429 élevé à la 347486e puissance.

4673. — Trouver un nombre de trois chiffres, sachant que la somme des deux extrêmes est égale au nombre formé par les deux premiers chiffres à gauche diminué de 1.

(G. Tastet, lycée de Bordeaux.)

4674. — Simplifier l'expression

$$\frac{(x^2 - a^2 - b^2 + c^2)^2 + 4(ax - bc)^2}{(x - b)^4 - (a - c)^4}.$$

4675. — Résoudre le système d'équations

$$\frac{x+y}{1+xy} = \frac{a}{b+c}, \qquad \frac{x-y}{1-xy} = \frac{b-c}{a}.$$

4676. — Calculer les côtés d'un trapèze sachant :
1° que ces côtés forment une progression arithmétique ;
2° que le périmètre du trapèze est $2p$;
3° que sa surface est m^2.

4677. — On considère un triangle ABC et le cercle circonscrit, O. En A, B, C on mène des tangentes au cercle ; la première rencontre BC en P, et les deux autres se coupent en M. Démontrer que les droites AM et OP sont rectangulaires.

(J. Sire.)

4678. — Dans un triangle ABC, on mène la bissectrice intérieure AD et par le pied D une droite quelconque coupant AB en E et AC en F. Démontrer que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AF \times BE}{AE \times CF}.$$

4679. — On donne une demi-circonférence de diamètre AB = 2R. Par l'extrémité A et le centre O, on mène deux droites, AC, OD, parallèles et faisant avec le diamètre AB un angle x. Elles rencontrent la demi-circonférence en deux points C et D. On joint l'autre extrémité B à C et à D, ainsi que C et D. On a alors le trapèze AODC et le triangle BCD. Déterminer l'angle x pour que l'on ait :
1° Aire du trapèze AODC + aire du triangle BCD = S^2. Discuter et trouver la valeur maxima de S^2 ;
2° Aire du trapèze AODC = 2 fois l'aire du triangle BCD ;
3° Aire du triangle BCD = 2 fois l'aire du trapèze AODC.

(*Bacc. lettres-math., Montpellier, novembre 1898.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry Vuibert.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

24e Année. — N° 3. JOURNAL Paris, le 1er Novembre 1899.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.

Abonnements.. Librairie Nony et Cie, Boul^d St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

ÉCOLE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES DE PARIS (1899)

4637. — *Remplacer, dans l'expression*

$$6x^5 + mx^4 + nx^3 + px^2 - 21x - 18,$$

les coefficients m, n, p *par un système de valeurs tel que le polynome à coefficients numériques ainsi obtenu s'annule pour chacune des hypothèses* $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.

Quelles sont les autres racines du même polynome?

Ecrivons que l'expression donnée s'annule lorsqu'on y fait successivement $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. Il vient

$$6 + m + n + p - 21 - 18 = 0,$$
$$192 + 16m + 8n + 4p - 42 - 18 = 0,$$
$$1458 + 81m + 27n + 9p - 63 - 18 = 0,$$

ou, en simplifiant,

$$m + n + p - 33 = 0, \qquad (1)$$
$$4m + 2n + p + 33 = 0, \qquad (2)$$
$$9m + 3n + p + 153 = 0. \qquad (3)$$

Pour résoudre ce système du premier degré, retranchons respectivement (1) de (2) et (2) de (3); nous aurons

$$3m + n + 66 = 0, \qquad (4)$$
$$5m + n + 120 = 0.$$

De ces deux équations, on déduit, par soustraction,

$$2m + 54 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad m = -27;$$

puis en se reportant aux équations (4) et (1),

$$n = -3(m + 22) = 15,$$
$$p = 33 - (m + n) = 45.$$

D'après ces valeurs, le polynome cherché est

$$6x^5 - 27x^4 + 15x^3 + 45x^2 - 21x - 18;$$

comme il s'annule pour $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, il est divisible par chacun des facteurs $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$, et par suite par leur produit

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

En effectuant la division, on trouve pour quotient le trinome

$$6x^2 + 9x + 3,$$

qui s'annule également pour

$$x = -1, \qquad x = -\frac{1}{2}.$$

Telles sont les deux autres racines du polynome considéré.

(Henry Varennes, aux Champs Rochers.)

Remarque. — Il n'est pas nécessaire d'effectuer la division pour obtenir le trinome $6x^2 + 9x + 3$; on peut trouver immédiatement les coefficients extrêmes, 6 et 3; le polynome du 5e degré est donc le produit des polynomes suivants

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)(6x^2 + \lambda x + 3).$$

Or le coefficient de x dans ce produit est $33 - 6\lambda$, on doit donc avoir

$$33 - 6\lambda = -21, \qquad \lambda = \frac{54}{6} = 9.$$

[Ont résolu la même question : MM. Barberot ; R. Bouvaist ; F. Breynaert ; Burgat ; Croze ; G. Foucry ; E. Framboise ; R. Henry ; H. Janois ; A. Larue ; A. Legros ; J. Lehmann ; D. Lwow ; G. Marie ; J. Mollat ; E. Moracchini ; L. Ollié ; E. Sinturel.]

4638. — *On donne la petite base* a *et la hauteur* h *d'un trapèze isocèle dont les côtés égaux font des angles de 45° avec les bases. Calculer le volume et la surface de révolution du solide obtenu lorsqu'on fait tourner successivement le trapèze autour de la petite base, de la grande base et de l'un des autres côtés.*

Si l'on déplace un des côtés égaux du trapèze parallèlement à lui-même, quels sont les lieux des centres des circonférences inscrite et circonscrite au triangle formé par la petite base et les deux côtés égaux du trapèze prolongés?

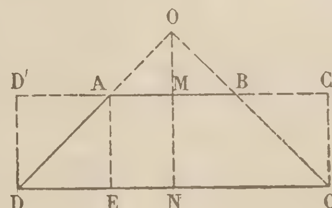
On a $AB = a$, $AF = h$,

$$AD = BC = h\sqrt{2}, \qquad DC = a + 2h.$$

I. — Surfaces et volumes engendrés :

1° *autour de* AB.

$$\text{Surf. } ABCD = \text{surf. } DC + 2 \text{ surf. } AD$$
$$= 2\pi h(a + 2h) + 2\pi h^2\sqrt{2} = 2\pi h[a + h(2 + \sqrt{2})].$$
$$\text{Vol. } ABCD = \text{vol. } DCC'D' - 2 \text{ vol. } ADD'$$
$$= \pi h^2(a + 2h) - \frac{2}{3}\pi h^3 = \frac{\pi h^2}{3}[3a + 4h].$$



2° *autour de* CD.

$$\text{Surf. } ABCD = \text{surf. } AB + 2 \text{ surf. } AD = 2\pi ha + 2\pi h^2\sqrt{2}$$
$$= 2\pi h(a + h\sqrt{2}).$$
$$\text{Vol. } ABCD = 2 \text{ vol. } AENM + 2 \text{ vol. } DAE$$
$$= \pi h^2 a + \frac{2}{3}\pi h^3 = \frac{\pi h^2}{3}[3a + 2h].$$

3° *autour de* AD. — Les côtés non parallèles se coupant à

angle droit sur la droite MN qui joint les milieux des bases, on a

$$OA = OB = \frac{a\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad OD = OC = \frac{(a+2h)\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Surf. ABCD} = \text{surf. AB} + \text{surf. DC} + \text{surf. BC}.$$

Or

$$\text{surf. AB} = \frac{\pi a\sqrt{2}}{2}a = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{surf. CD} = \pi\frac{(a+2h)\sqrt{2}}{2}(a+2h) = \pi\frac{(a+2h)^2\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{surf. BC} = 2\pi\frac{OB+OC}{2}BC = \pi(OB+OC)BC$$

$$= \pi\left(\frac{a}{\sqrt{2}} + h\sqrt{2} + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)h\sqrt{2};$$

donc

$$\text{surf. BC} = 2\pi h(a+h)$$

et

$$\text{surf. ABCD} = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2} + \pi\frac{(a+2h)^2\sqrt{2}}{2} + 2\pi h(a+h)$$

$$= \pi[a^2\sqrt{2} + 2(\sqrt{2}+1)h^2 + 2(\sqrt{2}+1)ah].$$

$$\text{Vol. ABCD} = \text{vol. DCO} - \text{vol. ABO}$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left[\frac{(a+2h)\sqrt{2}}{2}\right]^3 - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3$$

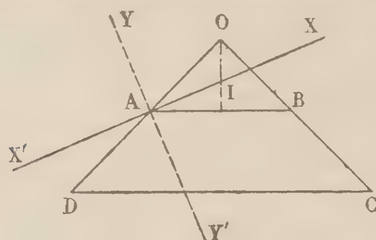
$$= \frac{\sqrt{2}}{6}\pi h[4h^2 + 6ha + 3a^2].$$

II. — Lieux géométriques :

1° *du centre du cercle inscrit au triangle* OAB. — Si, les points A et D restant fixes, le côté BC se déplace parallèlement à lui-même, le centre du cercle inscrit au triangle AOB se trouve sur la bissectrice AX de l'angle fixe OAB.

Le point I décrit la portion AX quand B se déplace de A vers la droite.

On voit aisément que la circonférence exinscrite dans l'angle



A a son centre sur AX et que les circonférences exinscrites dans les angles B et O ont leurs centres sur la bissectrice extérieure YY' de l'angle BAO.

Les lieux des centres des cercles tangents aux trois côtés du triangle DOC sont pour la même raison les bissectrices de l'angle CDO.

2° *du centre du cercle* OAB. — Le triangle AOB étant rectangle en O, le centre du cercle circonscrit est le milieu de AB. Le lieu de ce point est donc la droite fixe AB.

Remarque. — Tous les triangles tels que AOB sont homothétiques par rapport au point A. Tout point de ce triangle décrit donc une droite passant par A.

(L. Ollié, à Auch.)

[Ont résolu la même question : MM. R. Bouvaist ; F. Breynaert ; Croze ; A. Doué ; G. Foucry ; R. Henry ; H. Janois ; E. Le Maigre ; D. Lwow ; J. Ménéchal ; L. Patin ; H. Varennes ; J. Haag.]

4639. — *On donne un plan dont les traces horizontale et verticale font avec la ligne de terre des angles qui sont respectivement de 45° et de 30°.*

Déterminer la position d'un point situé sur la bissectrice de l'angle des traces, à une distance de 100^{mm} *du sommet.*

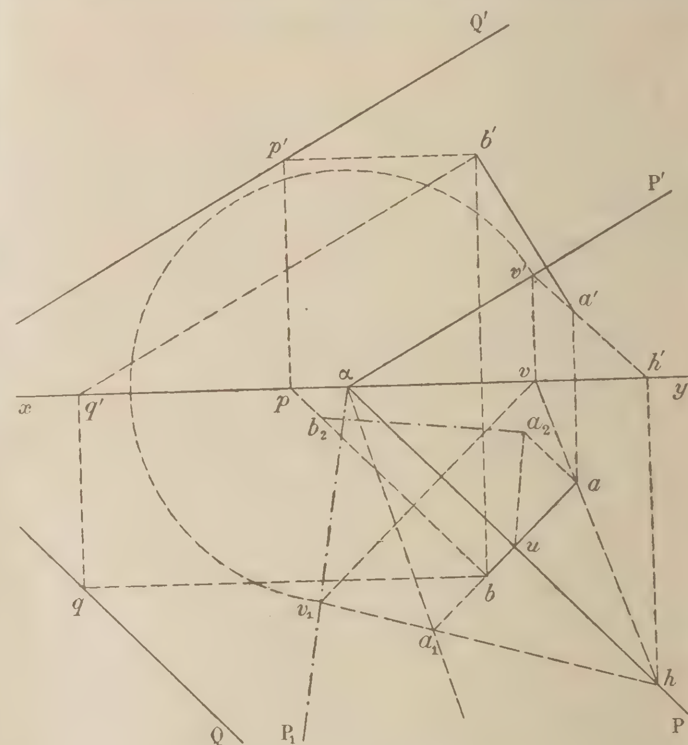
Par ce point, mener une perpendiculaire au plan d'une longueur de 80^{mm}*, au-dessus du plan.*

Par l'extrémité de cette perpendiculaire, mener un plan parallèle au plan donné.

Le sommet de l'angle formé par les traces sera pris au centre de l'épure et cet angle s'ouvrira vers la droite.

Soit $P\alpha P'$ le plan donné défini par ses deux traces. Si l'on rabat ce plan sur le plan horizontal autour de sa trace αP, un point quelconque (v, v') de la trace $\alpha P'$ a pour rabattement le point v_1 qui détermine le rabattement $\alpha P'_1$ de cette dernière trace. Prenons alors sur la bissectrice de l'angle $P\alpha P_1$ le point a_1 tel que $\alpha a_1 = 100^{mm}$; en relevant ensuite la droite v_1a_1, on obtient en (a, a') le relèvement du point a_1.

La perpendiculaire au plan $P\alpha P'$ issue du point (a, a') a ses deux projections perpendiculaires aux traces de même nom du plan ; cette perpendiculaire se rabat autour de sa projection hori-



zontale aa_1 suivant la droite a_2b_2 perpendiculaire au rabattement ua_2 de la droite suivant laquelle le plan projetant vertical de cette perpendiculaire coupe le plan $P\alpha P'$; en prenant $a_2b_2 = 80^{mm}$, on obtient le point b_2, relevé en (b, b').

Pour mener par le point (b, b') un plan parallèle au plan $P\alpha P'$, il suffit de mener par ce point les deux parallèles aux traces αP et $\alpha P'$; ces parallèles percent respectivement le plan vertical et le plan horizontal aux points (p, p') et (q, q') qui appartiennent aux traces verticale et horizontale du plan cherché, ces traces qQ et $p'Q'$ étant d'ailleurs parallèles aux traces de même nom du plan $P\alpha P'$ (on voit que ces deux traces se coupent ici en dehors des limites de l'épure).

(L. Curt, à Thoissey.)

[Ont résolu la même question : MM. Croze ; G. Foucry ; E. Framboise ; D. Lwow ; L. Ollié ; J. Reynaud ; E. Séclin.]

4640. — *On détermine : 1° Le volume extérieur d'un thermomètre à mercure par une pesée dans l'eau à 0°, soit* 10^{cc} ;

2° La densité moyenne du thermomètre, soit 4.

On porte le thermomètre à 200° ; le mercure dilaté remplit tout le tube.

Calculer : 1° Le volume du mercure contenu dans l'appareil ;
2° Le poids réduit en eau du thermomètre.
Densité du verre, 2,52.
Coefficient de dilatation cubique du verre, $0{,}29 \times \overline{10}^{4}$.
Densité du mercure, 13,596.
Coefficient de dilatation absolu du mercure, $0{,}18 \times \overline{10}^{3}$.
Chaleur spécifique du verre, 0,198.
Chaleur spécifique du mercure, 0,0330.

1° Appelons x le volume du mercure contenu dans l'appareil.

A 200°, le volume du thermomètre est

$$10(1 + 0{,}000029 \times 200) = 10^{cc}{,}058,$$

et celui du mercure,

$$x(1 + 0{,}00018 \times 200) = 1{,}036x.$$

Le volume du verre a donc pour valeur à 200°

$$10{,}058 - 1{,}036x,$$

et à 0°

$$\frac{10{,}058 - 1{,}036x}{1 + 0{,}000029 \times 200}.$$

Ecrivons maintenant que le poids du verre plus le poids du mercure représentent le poids de l'instrument :

$$\frac{10{,}058 - 1{,}036x}{1 + 0{,}000029 \times 200} \times 2{,}52 + x \times 13{,}596 = 10 \times 4,$$

d'où

$$11{,}064x = 14{,}886$$

et

$$x = 1^{cc}{,}345.$$

2° Le poids du mercure est

$$13{,}596 \times 1{,}345 = 18^{gr}{,}286,$$

et celui du verre,

$$40 - 18{,}286 = 21^{gr}{,}714.$$

Par suite, le poids réduit en eau du thermomètre est

$$18{,}286 \times 0{,}033 + 21{,}714 \times 0{,}198 = 4^{gr}{,}902.$$

(CH. CROZE.)

[Ont résolu la même question : MM. G. Foucry ; J. Ménéchal ; H. Varennes.]

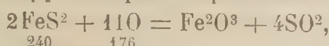
4641. — *On grille* 100^{kg} *d'une pyrite cuivreuse (mélange de sulfure de fer et de sulfure de cuivre) renfermant 1,3 % de sulfure de cuivre* CuS, *dans le but d'en retirer le cuivre.*

Indiquer :
1° Le volume d'air sec nécessaire à la combustion ;
2° Le poids de fer nécessaire pour précipiter le cuivre à l'état métallique.
La pyrite a pour formule FeS^2.
Poids du litre d'air, $1^{gr}{,}293$.

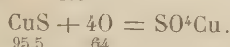
Fe = 56, Cu = 63,5, S = 32, O = 16.

1° Dans 100^{kg} de pyrite cuivreuse il y a $1^{kg}{,}3$ de sulfure de cuivre et $98^{kg}{,}7$ de sulfure de fer.

Le grillage de la pyrite s'opère d'après les réactions suivantes :



$$\underset{240}{2FeS^2} + \underset{176}{11O} = Fe^2O^3 + 4SO^2,$$



$$\underset{95{,}5}{CuS} + \underset{64}{4O} = SO^4Cu.$$

Le poids de l'oxygène nécessaire au grillage de FeS^2 est donc

$$\frac{98{,}7 \times 176}{240} = 72^{kg}{,}38$$

et celui de l'oxygène nécessaire au grillage de CuS,

$$\frac{1{,}3 \times 64}{95{,}5} = 0^{kg}{,}8712.$$

Le poids total de l'oxygène est $72{,}38 + 0{,}8712 = 73^{kg}{,}2512$.

On sait que 100 parties d'air en poids contiennent 23 parties d'oxygène.

Le poids de l'air nécessaire au grillage des 100^{kg} de pyrite est donc

$$\frac{73{,}2512 \times 100}{23} = 318^{kg}{,}4835$$

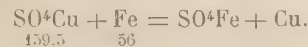
et le volume de cet air,

$$\frac{318{,}4835}{1{,}293} = 246^{mc}{,}313.$$

2° Le poids de sulfate de cuivre obtenu est

$$\frac{159{,}5 \times 1{,}3}{95{,}5} = 2^{kg}{,}171.$$

Le fer plongé dans une dissolution de sulfate de cuivre précipite le cuivre à l'état métallique d'après l'équation



$$\underset{159{,}5}{SO^4Cu} + \underset{56}{Fe} = SO^4Fe + Cu.$$

Le poids du fer nécessaire pour précipiter le cuivre contenu dans $2^{kg}{,}171$ de sulfate de cuivre est donc

$$\frac{56 \times 2{,}171}{159{,}5} = 0^{kg}{,}762.$$

(J. MÉNÉCHAL, au Bugue.)

[Ont résolu la même question : MM. G. Foucry ; R. Henry ; L. Patin ; H. Varennes.]

ARITHMÉTIQUE

4643. — *Lorsqu'un triangle à côtés entiers a son aire exprimée par un nombre entier, ce nombre est divisible par 6.*

La surface étant donnée par $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, je remarque d'abord que si a, b, c, S sont entiers, p doit l'être ; car si p était fractionnaire, il serait de la forme $\frac{n}{2}$, n étant impair, et on aurait

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{n(n-2a)(n-2b)(n-2c)}{16}.$$

Tous les facteurs du numérateur étant impairs, la fraction ne pourrait se simplifier.

Si on pose $p - a = \alpha$, $p - b = \beta$, $p - c = \gamma$, d'où $p = \alpha + \beta + \gamma$, l'expression de S^2 prend la forme

$$S^2 = \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma).$$

Si l'un des nombres α, β, γ est pair, S l'est aussi. Or α, β, γ ne peuvent être tous trois impairs, S étant supposé entier ; car si α, β, γ étaient impairs, on pourrait écrire

$\alpha = \text{mult. } 4 + \alpha'$, $\beta = \text{mult. } 4 + \beta'$, $\gamma = \text{mult. } 4 + \gamma'$,

α', β', γ' étant égaux à ± 1. Alors

$$S^2 = \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) = \text{mult. } 4 + \alpha'\beta'\gamma'(\alpha' + \beta' + \gamma').$$

Si α', β', γ' étaient de même signe, le terme complémentaire serait 3 ; s'ils étaient de signes contraires, ce terme serait -1. En tout cas, on aurait

$$\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) = \text{mult. } 4 - 1 ;$$

or, le carré d'un nombre impair est un multiple de 8 augmenté de 1, donc il n'y a pas de nombre entier dont le carré soit un multiple de 4, diminué de 1.

Si l'un des nombres α, β, γ est multiple de 3, S est multiple de 3. Si aucun de ces nombres n'est multiple de 3, on peut écrire

$\alpha = \text{mult. } 3 + \alpha'$, $\beta = \text{mult. } 3 + \beta'$, $\gamma = \text{mult. } 3 + \gamma'$,

α', β', γ' étant égaux à ± 1 ; on voit alors, comme précédem-

ment, que

$$\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) = \text{mult. } 3 + \alpha'\beta'\gamma'(\alpha'+\beta'+\gamma').$$

Or si α', β', γ' sont de même signe, le terme complémentaire est 3; et ils ne peuvent être de signes contraires, S^2 étant entier, car le terme complémentaire serait alors -1; or le carré d'un nombre entier ne peut être qu'un multiple de 3, ou un multiple de 3 augmenté de 1.

Donc si a, b, c, S sont entiers, S^2 est divisible par les facteurs premiers 2 et 3; donc S l'est aussi, et par suite est divisible par 6.

Remarque. — Le triangle de côtés 3, 4, 5 ayant pour surface S, il n'y a pas lieu de chercher de diviseur supérieur à 6 pour S entier.

ALGÈBRE

4621. — *Vérifier que l'expression*

$$5(x^2+y^2+z^2) - 4(xy+xz+zy)$$

est la somme de trois polynomes entiers carrés parfaits.

L'expression peut s'écrire

$$4x^2+4y^2+4z^2+x^2+y^2+z^2-4xy-4xz-4yz$$

ou, en groupant convenablement les termes,

$$4x^2-4x+y^2+4y^2-4yz+z^2+4z^2-4zx+y\,x^2,$$

ou enfin $\quad (2x-y)^2+(2y-z)^2+(2z-x)^2.$

(ABEL PICHON, lycée de Niort.)

L'expression peut également se mettre sous la forme

$$(2x-z)^2+(2y-x)^2+(2z-y)^2.$$

(ERNEST FOUCART.)

Remarque. — Ce polynome peut se mettre d'une infinité de façons sous forme d'une somme de trois carrés. La décomposition des polynomes en carrés est traitée dans tous les cours de mathématiques spéciales; nous nous bornerons donc à cette simple observation.

[Ont résolu la même question : MM. A. Arcizet, instituteur à Cransac ; V. Barol, école primaire supérieure de Lorgues ; R. Barthélemy ; Bouzy ; C. Broutin ; L. Curt, à Cras-sur-Reyssouze ; H. Dodier, lycée de Laval ; R. Fazembat, à Preignac ; J. Fiton, instituteur à Agen ; R. Henry ; H. Janois ; T. Lalescu, sanatorium Predeal ; A. Lecoutour ; J. Lehmann, instituteur à Boufarik ; B. Mathe, à Saint-Yorre ; S.-N. Mirea, lycée de Ploësti ; L. Perret, à Pont-de-Vaux ; E. Rieux ; A. Sainte-Laguë, lycée d'Agen ; E. Sautreau ; A. Sordet, à Saint-Germain-du-Plain ; H. Varennes, à Deux-Chaises ; J. Ménéchal ; A. Prost ; A. Redon.]

4645. — *Si* $a^2+b^2=c^2$, *on a*

$$(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) = 4a^2b^2.$$

Le premier membre de l'égalité à établir peut s'écrire

$$(a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b),$$

ou, en appliquant l'identité $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$ aux deux premiers et aux deux derniers facteurs,

$$[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2].$$

En remplaçant maintenant c^2 par a^2+b^2, ce dernier produit devient successivement

$$[(a+b)^2-a^2-b^2][a^2+b^2-(a-b)^2] = 2ab \times 2ab = 4a^2b^2.$$

C. q. f. d.

Remarque. — La relation énoncée peut aussi être écrite immédiatement en égalant deux expressions de l'aire d'un triangle rectangle ayant ses côtés mesurés par les nombres a, b, c, et en remarquant que a, b, c n'entrant que par des puissances paires dans les deux membres, la relation est vraie quels que soient les signes de ces membres.

(MILLET, à Orléans.)

[Ont résolu la même question : MM. V. Barol ; R. Barthélemy, lycée de Toulouse ; M. Boesch ; E. Bonnet, à Alger ; R. Bouvaist ; C. Broutin ; Carpinetty, collège de Draguignan ; Croze ; G. Delahaye ; A. Doué ; R. Fazembat ; G. Foucry ; E. Framboise ; F. Galy, lycée de Foix ; L. Gautier ; L. Giboin ; J. Haag ; R. Henry ; C. Jacquet, lycée de Mâcon ; H. Janois ; H. Julien ; Lalescu, lycée de Jassy ; A. Larue ; Lecoutour ; C. Lefebvre, lycée Saint-Louis ; A. Legros, lycée de Rouen ; J. Lehmann ; E. Le Maigre ; D. Lwow ; B. Mathé ; J. Ménéchal ; J. Mollat, à Nantes ; E. Moracchini ; G. Oberlin ; L. Ollié ; G. Oprescu, école militaire de Jassy ; L. Patin ; Petitjean, collège Chaptal ; J. Reynaud ; A. Sainte-Laguë, lycée de Bordeaux ; E. Sinturel ; H. Varennes ; F. Velardi, à Messine ; P. Zlatco, lycée de Bassarah (Turquie d'Asie) ; Mlle R. Campana ; MM. G. Armaingaud ; G. Boissonnet ; F. Breynaert ; Daure ; J. Hébré ; A. Huet ; Hugonnier-Ginet ; G. Marie ; A. Pichon ; P. Vien.]

4647. — *Trouver les rapports entre eux des côtés d'un triangle dans lequel les trois côtés et la surface sont quatre nombres entiers consécutifs.*

Dans la formule connue

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

posons $\quad a = x-1, \quad b = x, \quad c = x+1, \quad S = x+2.$

Il vient, après élévation au carré,

$$(x+2)^2 = \frac{3x}{2}\cdot\frac{x+2}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x-2}{2},$$

ou, en supprimant le facteur commun positif $x+2$,

$$16(x+2) = 3x^2(x-2).$$

Cette équation, mise sous la forme

$$x(3x^2-6x-16) = 32,$$

montre que x est un diviseur de 32, et par suite est égal à l'un des nombres

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32.$$

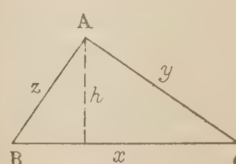
On reconnaît aisément que la seule valeur possible de x est 4. Les côtés du triangle sont donc $a=3$, $b=4$, $c=5$.

Remarque. — La solution précédente suppose implicitement S supérieur au plus grand côté c. En refaisant la mise en équation pour les cas où S est compris entre c et b, entre b et a ou entre a et 0, on constate que ces diverses hypothèses ne donnent aucune nouvelle solution.

[Ont résolu la même question : MM. R. Bouvaist ; Croze ; G. Foucry ; J. Fourestier ; R. Henry ; Hugonnier-Ginet ; H. Janois ; E. Le Maigre ; D. Lwow ; L. Ollié ; A. Sainte-Laguë ; H. Varennes.]

4649. — *Calculer les côtés d'un triangle rectangle connaissant la hauteur h et l'excès e de l'hypoténuse sur la différence des deux côtés de l'angle droit.*

Soient x l'hypoténuse et y, z les deux côtés de l'angle droit du triangle cherché. On doit avoir



$$x-(y-z) = e, \qquad (1)$$

$$y^2+z^2 = x^2, \qquad (2)$$

$$yz = xh. \qquad (3)$$

L'équation (1) s'écrit

$$x-e = y-z,$$

ou, en élevant au carré et tenant compte de (2) et (3),

$$x^2-2xe+e^2 = x^2-2xh,$$

d'où

$$x = \frac{e^2}{2(e-h)}.$$

En remarquant que $(y+z)^2 = y^2+z^2+2yz$, on a

$$y+z = \sqrt{x^2+2xh} = \frac{e}{2(e-h)}\sqrt{e^2+4he-4h^2};$$

d'autre part, $y - z = x - e = \dfrac{e(2h-e)}{2(e-h)}$,

d'où l'on tire, par addition et soustraction,

$$y = e\frac{2h - e + \sqrt{e^2 + 4he - 4h^2}}{4(e-h)},$$

$$z = e\frac{\sqrt{e^2 + 4he - 4h^2} - (2h - e)}{4(e-h)}.$$

Discussion. — Pour que les valeurs de x, y, z conviennent au problème, il faut et il suffit qu'elles soient réelles et positives.

La valeur de x, toujours réelle, sera positive si

$$e > h.$$

le produit yz étant égal à xh est alors positif, donc y et z sont de même signe, et si on prend le signe $+$ devant le radical qui donne $y+z$, on a pour y et z des valeurs positives, sans qu'il y ait à écrire d'autre condition.

Solution géométrique. — En remarquant que

$$e = x - (y - z) = x + z - y = 2(p - y),$$

(p étant le demi-périmètre du triangle), on en conclut que $\dfrac{e}{2}$ représente la distance du sommet A au point de contact D du côté AC avec le cercle O exinscrit dans l'angle C. De là cette construction :

On construit le triangle rectangle isocèle ADO, de côté $\dfrac{e}{2}$, puis on trace le cercle O tangent en D à AD et le cercle A de rayon $AH = h$. En menant à ces deux cercles une tangente commune extérieure, on obtient l'hypoténuse BC du triangle qui est ainsi complètement déterminé.

Discussion. — Le problème n'est évidemment possible qu'autant que la tangente commune BC existe et rencontre AD du côté opposé à D par rapport à A. La seconde condition exige que le diamètre e du cercle O surpasse le rayon h du cercle A :

$$e > h.$$

Dans ce cas, la première condition est toujours remplie ; cette condition revient en effet à écrire que la distance des centres $OA = \dfrac{e}{2}\sqrt{2}$ est au moins égale à la différence des rayons $\dfrac{e}{2}$ et h, ou

$$\frac{e^2}{2} > \left(\frac{e}{2} - h\right)^2,$$

ce qui donne en réduisant

$$e^2 + 4eh - 4h^2 \geqslant 0.$$

Mais on a vu qu'on devait avoir $e > h$; or l'inégalité s'écrit $e^2 + 4h(e-h) \geqslant 0$, donc elle est toujours vérifiée si $e > h$.

(L. OLLIÉ, à Auch.)

Remarque. — Dans l'énoncé, il est question de l'excès e de l'hypoténuse sur la différence des côtés de l'angle droit ; si on prend la différence de ces côtés, dans le sens ordinaire du mot, on doit supposer $y > z$, d'où $e < 2h$. Sans quoi e serait, non plus l'excès de l'hypoténuse sur la différence des côtés de l'angle droit, mais la somme de l'hypoténuse et de la différence absolue de ces côtés.

[Ont résolu la même question : MM. V. Barol ; R. Barthélemy ; Boissonnet ; Bouvaist ; Burgat ; Croze ; L. Curt ; G. Foucry ; E. Framboise ; L. Giboin ; R. Henry ; Hugonnier-Ginet ; Jacquet ; Julien ; J. Lamotte ; J. Lehmann ; Le Maigre ; M. B., à Th.; Sainte-Laguë ; E. Sinturel ; H. Varennes.]

4651. — *Démontrer que les relations*

$$x + y + z = a,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = 3a^3$$

entraînent la suivante :

$$(x-y)^4 + (y-z)^4 + (z-x)^4 = 3(x^4 + y^4 + z^4).$$

Développons le premier membre de l'égalité à établir. On a

$$(x-y)^4 = (x^2 - 2xy + y^2)^2 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4.$$
$$(y-z)^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = y^4 - 4y^3z + 6y^2z^2 - 4yz^3 + z^4.$$
$$(z-x)^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = z^4 - 4z^3x + 6z^2x^2 - 4zx^3 + x^4,$$

d'où, en ajoutant,

$$\begin{aligned}(x-y)^4 + (y-z)^4 + (z-x)^4 = 2(x^4 + y^4 + z^4) - 4x(y^3 + z^3)\\ - 4y(z^3 + x^3) - 4z(x^3 + y^3)\\ + 3x^2(y^2 + z^2) + 3y^2(z^2 + x^2) + 3z^2(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer qu'en tenant compte des relations données, l'ensemble des six derniers termes se réduit à

$$x^4 + y^4 + z^4.$$

En effet, en y remplaçant $y^3 + z^3$ par $3a^3 - x^3$, $y^2 + z^2$ par $2a^2 - x^2$, etc., on a successivement

$$\begin{aligned}&- 4x(3a^3 - x^3) - 4y(3a^3 - y^3) - 4z(3a^3 - z^3)\\ &\quad + 3x^2(2a^2 - x^2) + 3y^2(2a^2 - y^2) + 3z^2(2a^2 - z^2)\\ &= 4(x^4 + y^4 + z^4) - 12a^3(x + y + z)\\ &\quad - 3(x^4 + y^4 + z^4) + 6a^2(x^2 + y^2 + z^2)\\ &= x^4 + y^4 + z^4 - 12a^4 + 12a^4 = x^4 + y^4 + z^4.\end{aligned}$$

C. q. f. d.

(H. JANOIS, instituteur-adjoint, à Saint-Calais.)

Remarque. — La relation à démontrer peut s'écrire

$$(x^4 + y^4 + z^4) + 4(x^3y + x^3z + y^3z + y^3x + z^3x + z^3y) - 6(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2) = 0. \quad (1)$$

Si on désigne par A, B, C les trois parenthèses, on voit facilement que

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = A + 2C,$$
$$(x + y + z)(x^3 + y^3 + z^3) = A + B;$$

mais le premier membre de l'égalité (1) est

$$A + 4B - 6C = 4(A + B) - 3(A + 2C),$$

ou

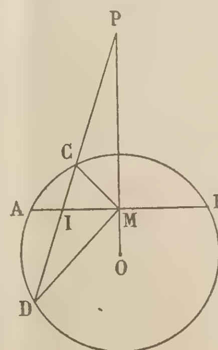
$$4(x + y + z)(x^3 + y^3 + z^3) - 3(x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

On voit alors que si l'on se donne la 4e relation de l'énoncé avec deux des trois premières, la dernière en résulte.

Ont résolu la même question : MM. V. Barol, école primaire supérieure de Lorgues ; R. Barthélemy ; R. Bouvaist ; E. Framboise ; L. Giboin, lycée Saint Louis ; J. Haag ; R. Henry ; E. Le Maigre ; David Lwow, à Piatra ; J. Ménéchal ; E. Moracchini ; L. Ollié ; J. Reynaud, collège de Genève ; A. Sainte-Laguë, lycée de Bordeaux ; H. Varennes ; F. Breynaert ; G. Marie ; E. Sinturel.]

GÉOMÉTRIE

4630. — *On considère deux cordes* AB, CD *d'un cercle telles que* AB *est bissectrice de l'angle formé en joignant son milieu aux deux extrémités de la corde* CD. *Démontrer que* CD *est également bissectrice de l'angle formé en joignant son milieu aux extrémités de* AB.



Joignons C et D au milieu M de AB. Je dis que pour que AB soit bissectrice de l'angle CMD, il faut et il suffit que CD passe par le pôle de AB.

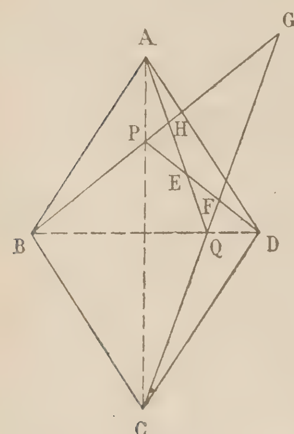
En effet, les droites perpendiculaires AM, MO étant les bissectrices de l'angle CMD, divisent harmoniquement aux points I et P le segment CD. Donc P est le pôle de AB.

La propriété énoncée revient donc à dire que si CD passe par le pôle P de AB,

AB passe à son tour par le pôle de CD. Or cela résulte immédiatement de ce que toute droite CD passant par P a son pôle sur la polaire AB de P.

4653. — *Dans un losange* ABCD, *on joint un point de chacune des diagonales* AC, BD *aux deux extrémités de l'autre diagonale. Démontrer que les quatre droites ainsi menées déterminent un quadrilatère inscriptible.*

Joignons le point P de AC aux extrémités de la diagonale BD et le point Q de BD aux extrémités de la diagonale AC; on forme ainsi le quadrilatère EFGH. Pour démontrer que ce quadrilatère est inscriptible, il suffit de montrer que l'angle FGH est égal à l'angle opposé extérieur HEP. Ces deux angles appartenant aux triangles PGC, PAE, on a



$$\widehat{FGH} = \widehat{APG} - \widehat{ACG},$$
$$\widehat{HEP} = \widehat{CPE} - \widehat{CAE}.$$

Or, dans le triangle isocèle PBD, AC étant bissectrice de l'angle BPD, on peut écrire

$$\widehat{APG} = \widehat{BPC} = \widehat{CPE};$$

le triangle isocèle AQC donne d'ailleurs $\widehat{ACG} = \widehat{CAE}$.

Donc $\widehat{FGH} = \widehat{HEP}$.

C. q. f. d.

(G. FOUCRY, école normale de Châlons-sur-Marne.)

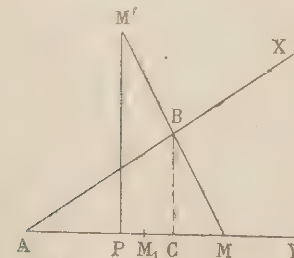
Remarques. — Il est facile de voir que la propriété subsiste lorsque les points P et Q sont pris sur les prolongements de AC et BD.

La propriété énoncée peut aussi s'énoncer sous la forme suivante : Si dans un quadrilatère les bissectrices intérieures (ou extérieures) des angles formés par les deux couples de côtés opposés sont rectangulaires, le quadrilatère est inscriptible. — La réciproque n'est pas vraie.

(H. PITRAT, à Givors.)

[Ont résolu la même question : MM. V. Barol, école primaire supérieure de Lorgues ; G. Boissonnet ; R. Bouvaist ; F. Breynaert ; C. Broutin ; E. Framboise ; L. Giboin, lycée Saint-Louis ; J. Haag ; R. Henry ; Hugonnier-Ginet ; Jacquet, lycée de Mâcon ; H. Janois ; A. Larcher ; Legros, lycée de Rouen ; D. Lwow, à Piatra ; M. B., à Th. ; G. Marie ; Millet ; L. Ollié ; A. Sainte-Laguë, lycée de Bordeaux ; E. Sinturel ; H. Varennes ; Vien; E. Gueudin.]

4655. — *Etant donnés un angle* XAY *et un point* B *sur le côté* AX, *déterminer sur le côté* AY *un point* M *tel qu'en prenant son symétrique* M' *par rapport au point* B *et en abaissant* M'P *perpendiculaire sur* AY, *les aires* AMB *et* M'PM *soient équivalentes.*



Supposons le problème résolu: soit M un point de AY tel que aire AMB = aire M'PM.

Menons la perpendiculaire BC à AY. On a

$$\text{aire AMB} = \frac{1}{2}\,\text{AM.BC}$$

et
$$\text{aire M'PM} = \frac{1}{2}\,\text{PM'.PM} = \text{BC.PM}.$$

Pour que ces deux aires soient équivalentes, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{1}{2}\,\text{AM} = \text{PM},$$

ou, puisque
$$\text{PM} = 2\text{MC},$$
$$\frac{\text{MA}}{\text{MC}} = 4.$$

D'après cette condition, le point M partage le segment AC, prolongé ou non, dans le rapport 4. On obtiendra donc deux points répondant au problème en prenant:

$$\text{soit}\quad \text{AM} = \frac{4}{3}\,\text{AC}, \qquad \text{soit}\quad \text{AM}_1 = \frac{4}{5}\,\text{AC}.$$

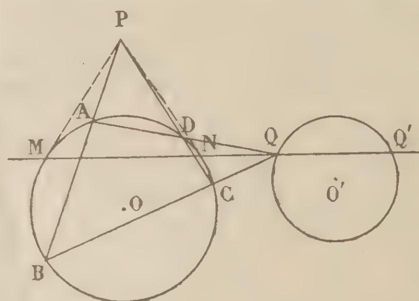
(G. FOUCRY, école normale de Châlons.)

[Ont complètement résolu la question : MM. Broutin ; E. Framboise ; L. Giboin ; R. Henry ; L. Patin ; E. Gueudin.

Ont partiellement résolu la question : MM. V. Barol ; R. Barthélemy ; R. Bouvaist ; F. Breynaert ; Cauvin ; Croze ; Daure ; H. Duchesne ; P. Fayolle ; J. Haag ; F. Galy ; Gautier ; J. Hébré ; T. Lalescu ; Larcher ; A. Lecoutour ; Legros ; J. Lehmann ; J. Mollat ; E. Moracchini ; L. Ollié ; Petitjean ; Sainte-Laguë ; E. Sinturel ; H. Varennes.]

4657. — *Dans un cercle donné, inscrire un quadrilatère, connaissant le point de rencontre de deux côtés opposés et une circonférence sur laquelle doit se trouver le point de rencontre des deux autres côtés.*

Supposons le problème résolu: soit ABCD un quadrilatère inscrit dans le cercle donné O, les côtés opposés AB, CD se coupant au point donné P et les deux autres côtés en un point Q du cercle donné O'.



On sait que si l'on mène à un cercle deux sécantes quelconques PAB, PDC, les droites AD, BC se coupent sur la polaire du point P par rapport à ce cercle. Donc la polaire MN du point P relativement au cercle O détermine par sa rencontre avec le cercle O' les points Q et Q'. Tout revient alors à inscrire dans un cercle un quadrilatère dont les points de rencontre des côtés opposés sont connus. Comme l'un des côtés, PAB par exemple, peut être pris arbitrairement, le problème admet une infinité de solutions ; il n'est d'ailleurs possible qu'autant que la polaire MN du point P rencontre le cercle O'.

La solution resterait la même si au lieu du point Q on considérait le point de rencontre des diagonales AC, BD.

(MILLET, à Orléans.)

[Ont résolu la même question : MM. R. Bouvaist ; Hébré à Marsac ; D. Lwow, à Piatra (Roumanie).]

PHYSIQUE

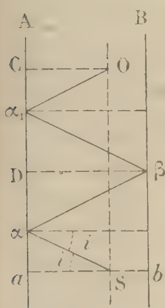
4602. — *On donne deux miroirs plans parallèles* A *et* B, *dont la distance* $ab = 12^{cm}$. *Un point lumineux* S *est placé sur* ab *à* 8^{cm} *du point* a. *On considère un point* O *à* 20^{cm} *au-dessus de*

S et on demande de trouver les points α, β, α_1 où les miroirs sont rencontrés par un rayon lumineux partant de S et arrivant en O après deux réflexions sur A et une sur B. On définira les trois points α, β, α_1 par leurs distances à ab.

(*Bacc. lettres-math., Rennes, novembre 1898.*)

Abaissons les perpendiculaires βD et OC sur le miroir A.

Les deux triangles $\alpha_1 D\beta$ et $a\alpha S$, semblables comme ayant les côtés parallèles, donnent



$$\frac{\alpha_1 D}{a\alpha} = \frac{D\beta}{aS},$$

d'où
$$\alpha_1 D = \frac{12 \times a\alpha}{8} = \frac{3a\alpha}{2}.$$

D'un autre côté, par suite de l'égalité des angles d'incidence et de réflexion, les triangles rectangles $\alpha_1 D\beta$ et $\alpha D\beta$ sont égaux ; il en est de même des triangles $a\alpha S$ et $\alpha_1 CO$.

On a donc
$$\alpha D = \alpha_1 D \quad \text{et} \quad C\alpha_1 = a\alpha,$$
et comme $a\alpha + \alpha D + D\alpha_1 + \alpha_1 C = 20$,

on peut écrire
$$a\alpha + \frac{3a\alpha}{2} + \frac{3a\alpha}{2} + a\alpha = 20,$$
d'où
$$a\alpha = 4.$$

Les distances des trois points α, β, α_1 à ab sont donc
$$a\alpha = 4^{cm},$$
$$\beta b = \frac{3a\alpha}{2} + a\alpha = 10^{cm},$$
et
$$\alpha_1 a = \frac{6a\alpha}{2} + a\alpha = 16^{cm}.$$

(G. HAMOT.)

Autre solution. — On a $a\alpha = aS \operatorname{tg} i = 8 \operatorname{tg} i$

et
$$\alpha D = 12 \operatorname{tg} i,$$
$$\alpha_1 D = 12 \operatorname{tg} i,$$
$$\alpha_1 C = 8 \operatorname{tg} i.$$

Or
$$OS = a\alpha + \alpha D + \alpha_1 D + \alpha_1 C.$$

On a donc
$$40 \operatorname{tg} i = 20,$$
d'où
$$\operatorname{tg} i = \frac{1}{2}.$$

Par suite
$$a\alpha = \frac{aS}{2} = 4^{cm},$$
$$\beta b = \alpha D + a\alpha = 10^{cm},$$
$$\alpha_1 a = 2\alpha D + a\alpha = 16^{cm}.$$

(RIEUMAJOU.)

[Ont résolu la même question : MM. Arcizet ; Ardin-Delteil ; A. Bisson ; R. Blanc ; L. Bois ; Briqueler ; M. Chané ; H. Damoiseau ; Delolme ; H. Dodier ; A. Drocourt ; E. Foucart ; Foucry ; A. Gillaizeau ; M. Gondran ; G. Lallier ; J. Lamotte ; R. Lavallée ; E. Le Maigre ; G. Le Sage ; P. Letourneur ; P. Lupsa ; P. Millevoye ; A. Pichon ; H. Pitrat ; G. Salles ; R. Turgis ; A. Vidalenc ; Vien ; H. Janois ; R. Vollaire.]

CONCOURS DE 1899 (*suite*)

CONCOURS GÉNÉRAUX

Classe de Mathématiques élémentaires.

Physique et Chimie (Paris).

I. — Phénomènes d'influence et de condensation électrique.

II. — **4680**. Deux lentilles, l'une convergente de foyer $f = 10^{mm}$, l'autre divergente de foyer $f' = 25^{mm}$, sont montées aux extrémités d'un même tube, de manière que leurs axes coïncident et que leurs centres soient à une distance fixe de 35^{mm}.

On voudrait, au moyen de ce système, projeter sur un écran l'image réelle d'un petit objet, de manière que le grossissement linéaire fût de 100.

A quelle distance faut-il placer l'objet, à quelle distance l'écran ? On expliquera sur une figure la marche des rayons.

III. — Anhydride et acide azotiques.

CERTIFICAT D'APTITUDE AU PROFESSORAT DES ÉCOLES NORMALES

ET DES ÉCOLES PRIMAIRES SUPÉRIEURES

Aspirants.

Mathématiques.

I. — Démontrer que le plus petit commun multiple de deux nombres entiers est égal au quotient obtenu en divisant le produit de ces deux nombres par leur plus grand commun diviseur.

II. — Trouver deux nombres entiers, connaissant leur produit 51 840 et leur plus petit commun multiple 2 160.

III. — **4681**. On donne deux axes rectangulaires xx', yy' se coupant au point O. Sur Ox, on prend un point A tel que $OA = a$, a étant une longueur donnée. Par ce point A, on mène la droite $zBAz'$, coupant Oy au point B, et telle que l'angle OAB est égal à 60°. Soient M et N les points de rencontre de la droite $zBAz'$ et de la circonférence qui, passant par le point O, a pour centre un point C (qui n'est pas marqué sur la figure) pris sur l'axe $y'y$; on pose $OC = x$.

1° Quelle valeur x_1 faut-il donner à x pour que l'angle MON soit égal à 30° ?

2° En appelant CD la distance du point C à la droite $zBAz'$, déterminer x de telle sorte que l'on ait
$$\overline{MN}^2 + \overline{CD}^2 = k^2,$$
k étant une longueur donnée.

Discussion par rapport à k. Indiquer, en particulier, la position des points M et N, par rapport aux points A et B.

Applications : $k = a\sqrt{3}$ et $k = 2a\sqrt{3}$.

(*3 juillet, de 8 h. à midi.*)

Physique, Chimie et Histoire naturelle.

I. — Montrer par des exemples comment on peut expliquer les phénomènes météorologiques qui dépendent de la chaleur rayonnante.

II. — Diastases et ferments. Indiquer par des exemples leurs effets dans les opérations industrielles et agricoles.

III. — Pollen. — Ovule. — Formation de l'œuf (on ne parlera pas du développement de l'embryon).

Multiplication : Bouturage, marcottage, greffe.

Applications : Production des hybrides, des races, des variétés.

(*4 juillet, de 7 h. à midi.*)

Aspirantes.

Mathématiques.

I. — 1° Evaluation d'une fraction $\frac{A}{B}$ à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10^n}$ près.

Définir l'opération et formuler la règle.

Etablir la condition nécessaire et suffisante pour que la fraction $\frac{A}{B}$ soit égale à une fraction décimale exacte.

2° Dire à quelles conditions doit satisfaire le numérateur de la fraction $\frac{A}{2^3 \times 3 \times 5^2}$ pour que l'évaluation en décimales de cette fraction conduise à une fraction décimale exacte, ou à une fraction périodique simple, ou à une fraction périodique mixte.

II. — **4682**. Sur une droite indéfinie xy on donne deux segments AB et CD extérieurs l'un à l'autre. D'un côté de xy on décrit sur AB le segment de cercle capable d'un angle donné α, et de l'autre côté, on décrit sur CD le segment capable du même angle α. Soient E et F les centres respectifs des cercles auxquels appartiennent ces segments; la droite EF coupe la droite xy en un point K.

1° Montrer que ce point K est le même, quel que soit l'angle α.

2° Trouver le lieu du point de concours des tangentes communes extérieures aux deux cercles, quand α varie.

III. — 1° Définir un polygone régulier et démontrer qu'il est inscriptible dans un cercle.

2° Démontrer le théorème réciproque suivant : Tout polygone inscrit dans une circonférence et dont les côtés sont égaux, est un polygone régulier.

3° Peut-on énoncer un deuxième théorème réciproque? Est-il vrai ou faux?

(*3 juillet, de 8 h. à midi.*)

Physique, Chimie et Histoire naturelle.

I. — Enumérer les principaux effets du courant électrique et décrire, pour chacun d'eux, une expérience propre à le mettre en évidence.

Chercher, parmi ces effets, ceux dont la grandeur peut servir de mesure pour le courant et donner les raisons du choix adopté.

II. — Quelles sont, *dans l'industrie*, les méthodes générales de production ou d'extraction des carbures d'hydrogène?

III. — Respiration chez l'Homme; insister sur l'hygiène de la respiration.

Les roches calcaires. Applications.

(*4 juillet, de 7 h. à midi.*)

ÉCOLE PROFESSIONNELLE SUPÉRIEURE DES POSTES ET DES TÉLÉGRAPHES

(**1re Section.**)

Concours du 10 octobre 1899.

I. — Exposer sans démonstration le procédé qui permet d'obtenir à la fois le plus grand commun diviseur D et le plus petit commun multiple m de deux nombres A et B. En déduire la valeur du produit $D \times m$.

II. — Diviser l'expression $100x^4 - 241x^2 + 36$ par le binome $2x - 3$.

III. — **4683**. Un tronc de pyramide régulière a pour bases parallèles deux carrés dont les côtés sont a et $2a$; sa hauteur est h:

1° Expressions du volume et de la surface totale du solide;

2° Déterminer h de manière qu'il existe une sphère tangente à la fois aux deux bases du solide et à ses quatre arêtes obliques;

3° Le plan contenant les points de contact avec les arêtes divise la surface de la sphère en deux parties dont on demande le rapport.

IV. — **4684**. Etant donné un triangle ABC, on décrit sur AB et sur AC comme diamètres deux circonférences D et E, qui se coupent en A et en un second point désigné par H :

1° Comment le point H est-il situé par rapport au triangle?

2° Par le point A on mène une droite quelconque coupant les deux circonférences respectivement en I et en J. Comparer les angles du triangle HIJ à ceux du triangle ABC et en conclure une relation entre ces deux triangles;

3° Démontrer que, la droite IJ pivotant autour de A, les bissectrices des angles I et J font un angle constant et que chacune d'elles passe par un point fixe situé sur la droite DE. Lieu géométrique du centre du cercle inscrit dans le triangle HIJ.

4° Lieu géométrique du centre du cercle circonscrit au même triangle.

QUESTIONS PROPOSÉES

4685. — Démontrer que l'expression

$$3^{2n+2} - 2^{n+1}$$

est divisible par 7.

(Valette, école normale du Puy.)

4686. — Déterminer une valeur de m telle que le polynome

$$x^4 + 2x^3 - 23x^2 + 12x + m$$

soit identiquement égal au produit de deux trinomes du second degré de la forme

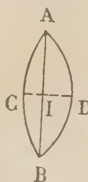
$$(x^2 + ax + c)(x^2 + bx + c);$$

faire connaître les valeurs des paramètres a, b, c et les valeurs de x qui annulent le polynome donné, dans le cas considéré.

(*Bacc. lettres-math., Caen, juillet 1899.*)

4687. — Dans un cône droit, on donne la hauteur h et la surface totale πm^2; calculer le rayon de base.

(*Bacc. lettres-math., Besançon, juillet 1899.*)



4688. — Une lentille biconvexe a pour épaisseur $CD = 2a$; le cercle qui limite les calottes dont elle est formée a pour rayon $IA = r$; le volume de la lentille est $\frac{1}{6}\pi m^3$. Former l'équation qui donne les rayons des sphères auxquelles appartiennent les calottes, et discuter cette équation.

4689. — Pour déterminer le poids spécifique d'un corps soluble dans l'eau, mais insoluble dans l'éther, on emploie la méthode du flacon.

Les données expérimentales sont les suivantes :

Poids du flacon vide.	16gr,349
Poids du flacon contenant la substance.	20 ,624
Poids du flacon contenant la substance et rempli d'éther jusqu'au trait. . . .	63 ,604
Poids du flacon plein d'éther	61 ,299
Poids du flacon plein d'eau	77 ,092

La température étant égale à 4° centigrades, on demande d'établir, d'après les données précédentes, le poids spécifique de la substance.

(*Bacc. lettres-sciences, Constantine, juillet 1899.*)

4690. — Deux personnes A et B se servent successivement de la même lunette pour viser les contours d'un astre tel que la Lune. On demande quelles sont les distances des deux lentilles qui forment l'objectif et l'oculaire de cette lunette astronomique au moment où chacune de ces personnes fait l'observation de cet astre, sachant que la première, A, est infiniment presbyte, c'est-à-dire susceptible de voir nettement les objets placés à une distance infiniment grande, et que la deuxième personne ne peut distinguer les objets que lorsqu'ils sont situés à une distance inférieure à 15cm.

Distance focale de l'objectif.	1m,20
Distance focale de l'oculaire	30mm.

(*Bacc. lettres-math., Montpellier, juillet 1899.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

24e Année. — N° 4. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 15 Novembre 1899.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.

Abonnements.. Librairie **Nony** et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

SUR L'APPLICATION D'UN THÉORÈME CLASSIQUE RELATIF AUX QUESTIONS DE MAXIMUM

par M. **J. Girod**, professeur au lycée Charlemagne.

Il s'agit de ce théorème :

Si des nombres positifs variables x, y, z *ont leur somme constante, le produit* $P = x^p y^q z^r$, *dans lequel les exposants* p, q, r *sont positifs, est maximum lorsque* x, y, z *sont égaux aux nombres obtenus par la division de la somme en parties proportionnelles aux exposants.*

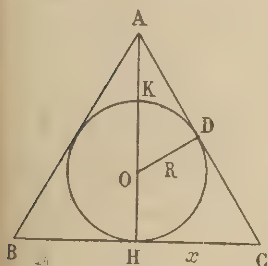
On sait de plus que ce théorème s'étend au cas où les exposants sont des nombres positifs fractionnaires.

Pour l'appliquer à la recherche du maximum d'un certain produit P de nombres positifs variables, il faut donc chercher à grouper les facteurs de ce produit, de manière que la somme des éléments de ces groupes soit constante. On considère à cet effet la relation qui lie entre elles les variables dont se compose le produit P. Cette relation tantôt est donnée d'avance, tantôt résulte d'une propriété géométrique de la figure que l'on a tracée. En général, dans ce dernier cas, la forme de l'équation qui traduit cette propriété n'exprime pas directement que les facteurs de P ont leur somme constante. La principale difficulté de la question consiste alors à transformer cette relation, de manière à mettre en évidence une certaine distribution des facteurs de P qui permette d'appliquer le théorème.

Quelques exemples feront comprendre comment on doit diriger les calculs.

Problème I. — *Trouver le triangle isocèle d'aire minimum circonscrit à une circonférence de rayon* R.

Soient x la demi-base du triangle isocèle ABC et y la hauteur correspondante. On a $S = xy$.



Remarquons d'abord que la recherche directe du minimum de xy échappe au théorème cité précédemment, puisque ce théorème est relatif au maximum d'un produit. On tourne la difficulté en cherchant le maximum de l'inverse de S, qui est aussi un produit. Posons donc

$$u = \frac{1}{xy}.$$

Cherchons maintenant la relation qui lie les deux variables. De la similitude des triangles rectangles AHC et ADO résulte

$$\frac{HC}{OD} = \frac{AH}{AD}.$$

Or $HC = x$, $OD = R$, $AH = y$,

et
$$AD = \sqrt{AH.AK},$$
ou
$$AD = \sqrt{y(y-2R)}.$$

En chassant les dénominateurs, on obtient donc l'équation

$$x\sqrt{y(y-2R)} = Ry,$$

qui conduit à l'équation rationnelle

$$x^2(y-2R) = R^2y.$$

Evidemment, pour déduire de cette relation une certaine somme constante, il faut commencer par distribuer les termes de manière que l'un des deux membres devienne une *somme*.

On est donc conduit nécessairement à l'écrire

$$x^2y = 2Rx^2 + R^2y.$$

Maintenant, pour que le second membre demeure constant, il suffit de diviser les deux membres par x^2y ; on obtient ainsi la relation

$$1 = \frac{2R}{y} + \frac{R^2}{x^2},$$

que l'on remplace par

$$\frac{2}{y} + \frac{R}{x^2} = \frac{1}{R} \qquad (1)$$

dans le but de simplifier les expressions des termes variables qui forment une somme constante.

Mais ces termes variables, $\frac{2}{y}$ et $\frac{R}{x^2}$, dont la somme demeure égale à $\frac{1}{R}$, ne donnent pas un produit égal à la fonction $u = \frac{1}{xy}$ dont on cherche le maximum.

On remarque alors que la fonction u varie dans le même sens que l'une quelconque de ses puissances d'exposant positif, multipliée par un nombre positif constant. Cherchons donc quels exposants positifs α et β il faut attribuer à chacune des quantités $\frac{2}{y}$ et $\frac{R}{x^2}$, pour que le produit des puissances ainsi obtenues reproduise une puissance de u, à un coefficient positif près.

La réponse ici est évidente, mais procédons par ordre, pour nous rendre compte de la marche à suivre dans des cas plus compliqués. Posons $P = \left(\frac{2}{y}\right)^\alpha \left(\frac{R}{x^2}\right)^\beta = \frac{2^\alpha R^\beta}{y^\alpha x^{2\beta}}$.

Pour que P soit proportionnel à une puissance positive de u, il faut et il suffit que les exposants α et 2β de y et de x soient des nombres positifs égaux. Les nombres entiers positifs les plus simples qui vérifient l'équation $\alpha = 2\beta$ sont $\beta = 1$, $\alpha = 2$.

La conclusion est que P, et par suite u, sera maximum lorsqu'on aura

$$\frac{\left(\frac{2}{y}\right)}{2} = \frac{\left(\frac{R}{x^2}\right)}{1}.$$

Formons le rapport $\dfrac{\dfrac{2}{y}+\dfrac{R}{x^2}}{3}$, qui est égal aux précédents. Il se réduit à $\dfrac{1}{3R}$, si on tient compte de la condition

$$\frac{2}{y}+\frac{R}{x^2}=\frac{1}{R}.$$

En égalant le premier rapport à ce troisième, on a pour déterminer y l'équation $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3R}$, d'où $y=3R$.

On voit aisément qu'à cette valeur de la hauteur correspond un triangle équilatéral.

Problème II. — *De tous les segments sphériques à une base de volume constant, quel est celui qui a la plus petite surface convexe?*

Soient x la hauteur variable du segment, et y le rayon de la sphère. L'aire de la calotte est donnée par la formule $S=2\pi xy$. Pour les mêmes raisons que dans le problème I, nous chercherons le maximum du produit $u=\dfrac{1}{xy}$.

Or, si $\dfrac{\pi a^3}{3}$ représente le volume constant du segment, les variables x et y sont liées par la relation connue

$$x^2(3y-x)=a^3.$$

Il faut d'abord modifier cette relation de manière que l'un des deux membres devienne une somme, et la seule façon possible d'y arriver est de l'écrire

$$3yx^2=a^3+x^3.$$

Divisons maintenant les deux membres par yx^2; elle devient

$$\frac{a^3}{yx^2}+\frac{x}{y}=3. \qquad (1)$$

Cherchons quels exposants positifs α et β il faut attribuer aux termes de cette somme, pour que le produit des puissances obtenues reproduise, à un coefficient positif près, une puissance de la fonction $u=\dfrac{1}{xy}$.

Posons donc $P=\left(\dfrac{a^3}{yx^2}\right)^\alpha\cdot\left(\dfrac{x}{y}\right)^\beta$. On a successivement

$$P=\frac{a^{3\alpha}x^\beta}{x^{2\alpha}y^{\alpha+\beta}}, \qquad P=\frac{a^{3\alpha}}{x^{2\alpha-\beta}y^{\alpha+\beta}}.$$

La condition imposée à P exige que les nombres positifs α et β vérifient les équations

$$2\alpha-\beta=\lambda,$$
$$\alpha+\beta=\lambda,$$

dans lesquelles λ est un nombre arbitraire *positif*.

On obtient pour α et β les valeurs $\alpha=\dfrac{2\lambda}{3}$, $\beta=\dfrac{\lambda}{3}$. Les nombres entiers les plus simples correspondent à $\lambda=3$, et sont $\alpha=2$, $\beta=1$. Donc P, et par suite u, sera maximum lorsqu'on aura

$$\frac{\left(\dfrac{a^3}{yx^2}\right)}{2}=\frac{\left(\dfrac{x}{y}\right)}{1}.$$

Comme dans le problème I, formons un troisième rapport égal aux précédents, avec la somme des numérateurs et celle des dénominateurs. Si ensuite on tient compte de la relation $\dfrac{a^3}{yx^2}+\dfrac{x}{y}=3$, on obtient pour valeur de ce troisième rapport $\dfrac{3}{3}$, ou 1. En l'égalant au second, on arrive à $\dfrac{x}{y}=1$, $x=y$.

Ainsi, le segment de surface convexe minimum est un hémisphère.

Problème III. — *Les nombres positifs x et y étant assujettis à vérifier la relation $x-y=a$, dans laquelle a est un nombre positif, trouver le système de valeurs qui rend minimum la fonction $u=\dfrac{x^p}{y^q}$, p et q étant des exposants positifs.*

Il est évident que cette fonction n'a pas de maximum, car lorsque y tend vers zéro par valeurs positives, x tend vers a, et dans ces conditions u croît indéfiniment.

Nous sommes donc amenés à chercher si le rapport inverse $v=\dfrac{y^q}{x^p}$ admet un maximum.

Transformons la relation donnée $x-y=a$, de manière que l'un des deux membres soit une somme. La forme évidente est $x=a+y$. Divisons les deux membres par x; elle devient $1=\dfrac{a}{x}+\dfrac{y}{x}$. Cherchons maintenant quels exposants *positifs* α et β on doit attribuer à $\dfrac{a}{x}$ et à $\dfrac{y}{x}$ pour que le produit $P=\left(\dfrac{a}{x}\right)^\alpha\cdot\left(\dfrac{y}{x}\right)^\beta$ soit proportionnel à une puissance positive de v. On a $P=\dfrac{a^\alpha y^\beta}{x^{\alpha+\beta}}$. On rend P proportionnel à v en posant $\beta=q$ et $\alpha+\beta=p$, d'où $\alpha=p-q$. La valeur $\beta=q$ est positive par hypothèse; pour que α soit aussi positif, il faut que l'on ait $p>q$.

Supposons cette condition remplie. Alors la fonction v passe par un maximum, et par suite u passe par un minimum, lorsque $\dfrac{a}{x}$ et $\dfrac{y}{x}$ vérifient la condition $\dfrac{\left(\dfrac{a}{x}\right)}{p-q}=\dfrac{\left(\dfrac{y}{x}\right)}{q}$.

On considère le rapport $\dfrac{\dfrac{a}{x}+\dfrac{y}{x}}{p}$, qui devient $\dfrac{1}{p}$ si on tient compte de la relation $\dfrac{a}{x}+\dfrac{y}{x}=1$, et en égalant le second rapport à ce troisième, on obtient la condition plus simple $\dfrac{y}{x}=\dfrac{q}{p}$, ou $\dfrac{x}{p}=\dfrac{y}{q}$.

Ainsi, les variables positives x et y étant liées par la relation $x-y=a$ $(a>0)$, la fonction $u=\dfrac{x^p}{y^q}$ est *minimum* lorsque x et y vérifient la condition $\dfrac{x}{p}=\dfrac{y}{q}$, qui n'est évidemment possible que si $p>q$, puisque la relation $x-y=a$ comprend implicitement $x>y$.

Supposons maintenant $p\leqslant q$. Si on remplace, dans $u=\dfrac{x^p}{y^q}$, x par sa valeur $a+y$, on obtient $u=\dfrac{(a+y)^p}{y^q}$. Le minimum est zéro, ou 1, suivant que $p<q$, ou $p=q$, et ce minimum est atteint pour $y=+\infty$.

Problème IV. — *Les variables positives x et y étant assujetties à vérifier la relation $\dfrac{x^5}{y^2}+\dfrac{ay^3}{x}=b^3$, dans laquelle a et b sont des constantes positives, trouver le système de valeurs qui rend maximum la fonction $u=x^7y^2$.*

On ne pourrait pas ici, comme dans les exemples précédents, tirer de la relation donnée l'une des variables en fonction de l'autre, pour exprimer u à l'aide d'une seule d'entre elles.

Soient α et β des nombres positifs, et posons

$$P=\left(\frac{x^5}{y^2}\right)^\alpha\cdot\left(\frac{ay^3}{x}\right)^\beta.$$

On a $\quad P = \frac{a^\beta x^{5\alpha} y^{3\beta}}{y^{2\alpha} x^\beta} = a^\beta x^{5\alpha-\beta} y^{3\beta-2\alpha}.$

Pour que P soit, à un coefficient positif près, égal à une puissance positive de u, il faut et il suffit que l'on ait $\begin{cases} 5\alpha - \beta = 7\lambda, \\ 3\beta - 2\alpha = 2\lambda, \end{cases}$ λ étant un nombre *positif* arbitraire, que nous déterminerons de manière à donner à α et à β les valeurs positives entières les plus simples.

Résolvons ces deux équations par rapport à α et à β. On obtient $\alpha = \frac{23\lambda}{13}$, $\beta = \frac{24\lambda}{13}$. Les valeurs positives entières les plus simples correspondent à $\lambda = 13$, et sont $\alpha = 23$, $\beta = 24$

La conclusion est que P, et par suite u, est maximum lorsqu'on a

$$\frac{\left(\frac{x^5}{y^2}\right)}{23} = \frac{\left(\frac{ay^3}{x}\right)}{24} = \frac{\frac{x^5}{y^2} + \frac{ay^3}{x}}{47} = \frac{b^3}{47}.$$

On voit suffisamment comment a été obtenu le dernier rapport.

Si on égale successivement les deux premiers rapports au dernier, on a pour déterminer x et y des équations de la forme

$x^5 = Ay^2$, $\quad y^3 = Bx$, $\quad$ A et B étant des coefficients positifs.

En introduisant les logarithmes, on arrive aux équations

$$5 \log x - 2 \log y = \log A,$$
$$- \log x + 3 \log y = \log B,$$

et ce système permet de calculer $\log x$ et $\log y$, puisque le déterminant des coefficients a la même valeur numérique 13 que dans les équations d'où nous avons tiré α et β.

Tous les exemples précédents, et beaucoup de ceux que l'on a l'habitude de considérer, rentrent dans quelques cas généraux que nous allons étudier. Nous supposerons que les exposants soient représentés par des lettres, afin de montrer les différentes conclusions auxquelles on peut aboutir.

Problème V. — *Les variables positives x et y étant assujetties à vérifier la relation* $\frac{x^p}{y^q} + \frac{ky^{q'}}{x^{p'}} = k'$, *dans laquelle k, k' et les quatre exposants sont des nombres positifs constants, chercher le système de valeurs qui rend maximum ou minimum la fonction $u = x^a y^b$, a et b étant aussi des nombres positifs.*

Posons $P = \left(\frac{x^p}{y^q}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{ky^{q'}}{x^{p'}}\right)^\beta$, et cherchons à déterminer α et β de manière que, ces nombres étant *positifs*, P soit rendu proportionnel à u^λ, λ étant un nombre dont la discussion suivante fixera le signe. En développant P, on obtient

$$P = k^\beta x^{p\alpha - p'\beta} y^{q'\beta - q\alpha}.$$

Les équations qui déterminent α et β en fonction de λ sont

$$p\alpha - p'\beta = a\lambda,$$
$$- q\alpha + q'\beta = b\lambda.$$

Si on suppose $\frac{p}{q} \neq \frac{p'}{q'}$, on en déduit $\alpha = \frac{\lambda(aq' + bp')}{pq' - qp'}$, et $\beta = \frac{\lambda(aq + bp)}{pq' - qp'}$. Pour que α et β soient positifs, il suffit d'attribuer à λ une valeur du signe de $pq' - qp'$, en particulier de poser $\lambda = pq' - qp'$. Alors on a $\alpha = aq' + bp'$, $\beta = aq + bp$.

Donc deux cas se présentent suivant le signe de $pq' - qp'$.

1° $pq' - qp' > 0$, ou $\frac{p}{q} > \frac{p'}{q'}$. — Alors ces valeurs écrites de α et de β rendent P proportionnel à une puissance *positive* de u, et par suite P et u variant dans le même sens, le maximum de u est atteint quand x et y vérifient la condition

$$\frac{\left(\frac{x^p}{y^q}\right)}{aq' + bp'} = \frac{\left(\frac{ky^{q'}}{x^{p'}}\right)}{aq + bp}.$$

Composons, comme dans les problèmes précédents, un rapport égal à chacun de ces rapports avec la somme de leurs numérateurs et celle de leurs dénominateurs, et remplaçons le numérateur obtenu par la constante k' qui lui est égale, en vertu de la relation donnée. Si on égale successivement à ce troisième rapport chacun des deux premiers, on obtient des équations de la forme $x^p = Ay^q$, $y^{q'} = Bx^{q'}$, d'où résulte, A et B étant positifs,

$$p \log x - q \log y = \log A,$$
$$- p' \log x + q' \log y = \log B,$$

et ces équations permettent de calculer $\log x$ et $\log y$, puisque par hypothèse $pq' - qp' > 0$.

2° $pq' - qp' < 0$, ou $\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'}$. — Alors les valeurs positives de α et β écrites plus haut rendent P proportionnel à une puissance de $\frac{1}{u}$, et par suite au maximum de P correspond le minimum de u.

Donc la fonction u est *minimum* dans les mêmes conditions qui ont été développées.

Etudions maintenant le cas où $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$. On déduit de cette hypothèse $\frac{q'}{q} = \frac{p'}{p}$. Soit m la valeur positive commune de ces deux rapports, et remplaçons q' par qm, p' par pm dans la relation donnée $\frac{x^p}{y^q} + \frac{ky^{q'}}{x^{p'}} = k'$. Elle devient

$$\frac{x^p}{y^q} + k\left(\frac{y^q}{x^p}\right)^m = k'.$$

Posons $\frac{y^q}{x^p} = z$. Ce rapport z doit être racine de l'équation $\frac{1}{z} + kz^m = k'$, ou $kz^{m+1} - k'z + 1 = 0$. Si cette équation n'a pas de racine positive, il n'y a pas de système de nombres positifs x et y qui vérifient la relation donnée, et le problème est impossible.

Supposons qu'elle admette une racine positive $z = c$. Alors, parmi les systèmes possibles de solutions de la relation donnée, considérons celui où les variables positives x et y vérifient la relation $\frac{y^q}{x^p} = c$. On en déduit $y = dx^{\frac{p}{q}}$, en posant $d = \sqrt[q]{c}$.

La fonction $u = x^a y^b$ prend alors la forme

$$u = d^b x^a x^{\frac{p}{q}} = d^b x^{a + \frac{p}{q}}.$$

Si maintenant on fait croître x de zéro à $+\infty$, on voit que u croît aussi de zéro à $+\infty$.

(La fin au prochain numéro.)

ARITHMÉTIQUE

4605. — *Pour quelles valeurs de n l'expression*

$$2^{3n^2+n+6} - 3^{3n+6}$$

est-elle divisible par 7?

L'expression peut s'écrire

$$2^{3(n^2+2)} \times 2^n - (3^3)^{n+2},$$

ou, comme $\quad 2^3 = 8 = m.7 + 1 \quad$ et $\quad 3^3 = 27 = m.7 - 1$,

$$(m.7 + 1)^{n^2+2} \times 2^n - (m.7 - 1)^{n+2},$$

ou $$m.7 + 2^n - (-1)^{n+2}. \qquad (1)$$

Lorsque n est pair, l'expression (1) est de la forme

$$m.7 + 2^{2n'} - 1,$$

et pour que $2^n - 1$ soit divisible par 7 ou $2^3 - 1$, il faut et il suffit qu'on ait

$$n' = 3n'', \qquad \text{et par suite} \qquad n = 6n''.$$

Lorsque n est impair, l'expression (1) prend la forme

$$m.7 + 2^{2n'+1} + 1$$

et n'est jamais divisible par 7, le binome $2^{2n'+1} + 1$ n'étant pas divisible par $2^3 - 1$.

(G. FOUCRY, école normale de Châlons-sur-Marne.)

[Ont résolu la même quetion : MM. V. Barol, école primaire supérieure de Lorgues ; H. Debenest, à Romagne ; S.-N. Mirea ; M. Oger, à Tours ; L. Perret, à Pont-de-Vaux ; A. Popescu, lycée de Jassy ; P. Tribier.]

4673. — *Trouver un nombre de trois chiffres, sachant que la somme des deux extrêmes est égale au nombre formé par les deux premiers chiffres à gauche diminué de 1.*

Soient x, y, z les chiffres des centaines, des dizaines et des unités du nombre cherché.

On doit avoir

$$x + z = 10x + y - 1,$$

ou $$z = 9x + y - 1. \qquad (1)$$

Pour que z représente un chiffre, il faut et il suffit que l'on ait

$$9x + y \leqslant 10.$$

Comme x est toujours au moins égal à 1, cette condition ne peut être remplie qu'en prenant $x = 1$, ce qui entraîne

$$y \leqslant 1, \quad \text{d'où} \quad y = 0 \text{ ou } 1 ;$$

on déduit ensuite de (1),

$$y = 9 + y - 1 = \begin{cases} 8 \\ 9. \end{cases}$$

Les deux nombres 108 et 119 répondent donc à la question, et ce sont les seuls.

(Henry PITRAT, à Givors.)

[Ont résolu la même question ; MM. A. Amblard ; G. Armaingaud ; V. Barol ; R. Barthélemy ; H. Belbenoit ; C. Billionnet ; Bourrec ; J. Cabrol ; A. Cauvin ; F. Clabault ; M. Coleil ; M. Cry ; C. Croze ; R. Coural ; H. Debenest ; Destouches ; G. Droit ; H. Duchesne ; Duvergé ; A. Faga ; G. Foucry ; E. Fourmon ; Gillard ; P. Givry ; M. Gondran ; J. Haag ; R. Henry ; A. Huet ; Hugonnier-Ginet ; H. Janois ; L. Karkowski ; Lajouanine ; T. Lalescu ; A. Larcher ; A. Lecoutour ; E. Le Maigre ; A. Le Moal ; D. Lwow ; R. Manen ; G. Marie ; A. Meynier ; E. Moracchini ; R. Mouzon ; L. Ollié ; P. C., à Peumerit-les-Bains ; P. E., à Vielmur ; L. Patin ; A. Pequignot ; J. Perl ; A. Pichon ; H. Rimbaud ; Rives ; S. N., à Châlons ; Sainte-Laguë ; H. Samion ; G. Tastet ; P. Thonet ; P. Tribier ; Treillou ; Tuïzussian ; Tumerelle.]

ALGÈBRE

4622. — *Résoudre le système d'équations*

$$x^2 + y^2 = az^2,$$
$$x^2 - y^2 = bz^2,$$
$$x + y = c.$$

Première solution. — Des deux premières équations, on déduit, par addition et soustraction,

$$2x^2 = (a+b)z^2, \qquad 2y^2 = (a-b)z^2,$$

d'où $$x = \pm \frac{z\sqrt{a+b}}{\sqrt{2}}, \qquad y = \pm \frac{z\sqrt{a-b}}{\sqrt{2}}.$$

On peut écrire ces équations de façon à distinguer les combinaisons de signes.

$$\frac{x}{\sqrt{a+b}} = \frac{y}{\sqrt{a-b}} = \frac{z}{\sqrt{2}}, \qquad (1)$$

$$\frac{x}{\sqrt{a+b}} = \frac{y}{-\sqrt{a-b}} = \frac{z}{\sqrt{2}}, \qquad (2)$$

$$\frac{x}{\sqrt{a+b}} = \frac{y}{\sqrt{a-b}} = \frac{z}{-\sqrt{2}}, \qquad (3)$$

$$\frac{x}{\sqrt{a+b}} = \frac{y}{-\sqrt{a-b}} = \frac{z}{-\sqrt{2}}. \qquad (4)$$

En combinant les rapports, dans chaque système, de façon à faire apparaître la somme $x + y$ qui est égale à c, on trouve que la valeur commune de ces rapports a l'une des expressions suivantes :

$$\frac{c}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} \quad \text{pour les systèmes (1) et (3),}$$

$$\frac{c}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}} \quad \text{pour les systèmes (2) et (4).}$$

On voit ainsi que les systèmes (1) et (3), ou (2) et (4), donnent les mêmes valeurs pour x et y, la valeur de z changeant de signe de l'un à l'autre.

Ces valeurs de z, x, y ne sont évidemment réelles que lorsque $-b < a < b$.

Seconde solution. — La seconde équation peut s'écrire

$$(x - y)(x + y) = bz^2,$$

ou, en tenant compte de la troisième équation,

$$x - y = \frac{bz^2}{c}.$$

En rapprochant cette équation de l'équation

$$x + y = c,$$

on obtient facilement

$$x = \frac{c^2 + bz^2}{2c}, \qquad y = \frac{c^2 - bz^2}{2c}.$$

D'après ces valeurs, la première équation donnée devient

$$\left(\frac{c^2 + bz^2}{2c}\right)^2 + \left(\frac{c^2 - bz^2}{2c}\right)^2 = az^2,$$

ou, en développant et ordonnant par rapport à z^2,

$$b^2z^4 - 2c^2az^2 + c^4 = 0.$$

Cette équation bicarrée, résolue d'abord par rapport à z^2, donne

$$z^2 = \frac{c^2(a \pm \sqrt{a^2 - b^2})}{b^2},$$

et en extrayant les racines carrées des deux membres,

$$z = \pm \frac{c}{b}\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - b^2}},$$

valeurs toujours réelles lorsque $a^2 \geqslant b^2$.

Si l'on remplace maintenant dans les valeurs de x et y, z^2 par sa valeur, on trouve

$$x = \frac{c}{2b}(a + b \pm \sqrt{a^2 - b^2}),$$

$$y = \frac{c}{2b}(b - a \mp \sqrt{a^2 - b^2}),$$

valeurs réelles en même temps que la valeur de z.

Remarque. — Dans la seconde solution, chaque valeur de z se présente sous la forme d'un radical composé qu'on peut d'ailleurs décomposer en deux radicaux simples, ce qui ramène à la forme des valeurs de z fournies par la première solution.

(Ed. ARDIN-DELTEIL, à Montpellier.)

[Ont résolu la même question : Mlle H. D. ; MM. A. Arcizet ; R. Barthélemy ; Bouzy ; L. Curt ; G. Delahaye ; J. Fiton ; G. Foucry ; H. Guillaud ; R. Henry ; J. Lehmann ; S.-N. Mirea ; L. Perret ; A. Pichon.]

4674. — *Simplifier l'expression*

$$\frac{(x^2-a^2-b^2+c^2)^2+4(ax-bc)^2}{(x-b)^4-(a-c)^4}.$$

En vertu de l'identité $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$, on a

$$(x^2-a^2-b^2+c^2)^2=(x^2+a^2+b^2+c^2)^2-4(a^2+b^2)(x^2+c^2).$$

Le numérateur de l'expression s'écrit alors successivement

$$(x^2+a^2+b^2+c^2)^2-4(a^2+b^2)(x^2+c^2)+4(ax-bc)^2$$
$$=(x^2+a^2+b^2+c^2)^2-4(bx+ac)^2$$
$$=(x^2+a^2+b^2+c^2+2bx+2ac)(x^2+a^2+b^2+c^2-2bx-2ac)$$
$$=[(x+b)^2+(a+c)^2][(x-b)^2+(a-c)^2].$$

Le facteur $(x-b)^2+(a-c)^2$ est ainsi commun aux deux termes de l'expression ; en le supprimant, il reste

$$\frac{(x+b)^2+(a+c)^2}{(x-b)^2-(a-c)^2}.$$

Comme les deux valeurs de x qui annulent le dénominateur n'annulent pas le numérateur, l'expression précédente est irréductible.

(E. SINTUREL.)

[Ont résolu la même question : MM. C. Billionnet ; Lajouanine, lycée de Clermont ; D. Lwow, à Piatra (Roumanie) ; G. Marie ; R. Mouzon, collège de Fontenay ; F. Velardi, à Messine.]

GÉOMÉTRIE

4566. — *Sur deux circonférences sécantes égales, on prend* alternativement *les points* A, B, C, D, E, F... *tels que la distance entre deux points successifs soit égale au rayon commun des deux circonférences.*

Démontrer que :

1° *En continuant l'opération au delà de* F, *on retombe sur le point* A.

2° *Les trois droites* AD, BE, CF *sont concourantes ;*

3° *Les points de concours* H *et* H' *des hauteurs des triangles* ACE *et* BDF *restent fixes lorsque* A *parcourt la circonférence ;*

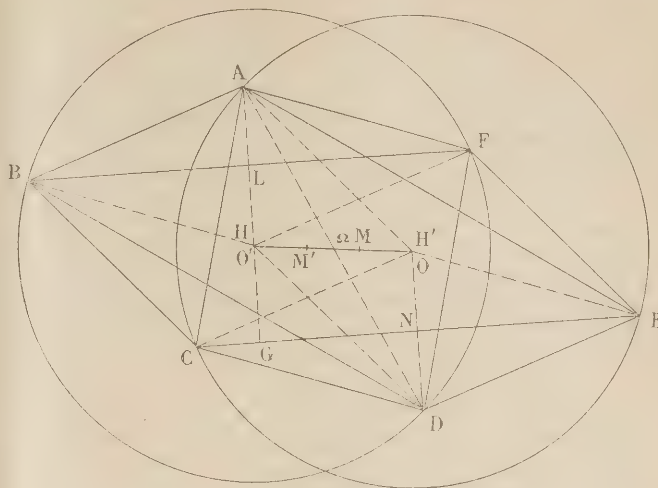
4° *Les points de concours* M *et* M' *des médianes de ces triangles jouissent de la même propriété et que*

$$HM' = MM' = MH'.$$

1° Soient les deux circonférences O et O' de rayon R. Prenons $AB = BC = CD = DE = EF = R$, et joignons F et A. Il suffit de prouver que AF égale le rayon R. Les trois quadrilatères ABCO, BCDO', DEFO' sont des losanges; leurs côtés sont égaux à R. Donc AO est parallèle à BC, BC l'est à O'D et O'D l'est à FE ; par suite AO et FE sont aussi parallèles ; de plus, $OA = FE = R$. Donc la figure AOEF est un parallélogramme et OE égale AF ; or OE est égal à R. Donc $AF = R$.

2° La figure AODO' est un parallélogramme, car les côtés AO et O'D sont égaux et parallèles (voir 1°). Donc les diagonales se coupent en leur milieu et AD passe au milieu de la ligne des centres OO'. On démontrerait de la même manière que BE et CF se coupent au milieu Ω de OO'. Donc les trois droites AD, BE et CF sont concourantes et se coupent en leur milieu. Si l'on fait varier le point A, le point de concours de ces droites, milieu de OO', reste fixe.

3° Le point de concours des hauteurs du triangle ACE se trouve en O', centre de la seconde circonférence. En effet, nous venons de voir que AO'DO est un parallélogramme (voir 2°) ; la ligne AO' est parallèle à OD ; or OD est perpendiculaire sur CE, seconde diagonale du losange OCDE. Il en est donc de même de AO'; AO' est donc la hauteur qui tombe sur CE. On démon-



trerait de même que CO' est la hauteur relative au côté AE. Le point de concours H des hauteurs du triangle ACE est donc en O'.

De même, le point de concours H' des hauteurs du triangle BFD est en O, les deux triangles BFD et ACE étant symétriques par rapport à Ω, milieu de OO'. Les deux triangles ACE et BDF sont donc tels que le centre du cercle circonscrit de l'un est le point de concours des hauteurs de l'autre, et réciproquement. Si A parcourt la circonférence, les points O et O' ne changent pas ; il en est donc de même de H et de H'.

4° On sait que le point de concours des médianes est sur la ligne qui joint l'orthocentre au centre du cercle circonscrit, et à une distance $MO = \frac{1}{3}OH$. La droite OH ou OO' étant fixe, M l'est aussi et ne change pas lorsque A varie. Dans le triangle BDF, on a de même $M'O' = \frac{1}{3}OO'$, de sorte qu'on peut écrire

$$HM' = M'M = MH'.$$

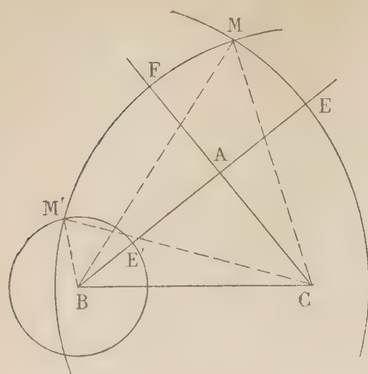
Remarque. — Pour un point A quelconque de la circonférence O, le point B n'existe qu'autant qu'on a $O'A < O'B + BA$, ou $O'A < 2R$; par suite le point A ne peut parcourir que l'arc du cercle O compris dans la circonférence O' de rayon 2R. Lorsque $OO' < R$, l'arc comprend toute la circonférence O, puisque celle-ci est intérieure à la circonférence O' de rayon 2R $(OO' < 2R - R)$.

(R. MANEN, petit séminaire de Massals.)

[Ont résolu la même question : MM. C. Broutin ; H. Debenest ; E. Foucart ; G. Foucry ; M. Oger ; Billionnet ; Danchaud ; Jacquet ; Janois ; Trouillé ; Van Cauwenberghe.]

4659. — *On prolonge les deux côtés* AB, AC *de l'angle droit d'un triangle rectangle de longueurs égales* AE, AF. *Trouver le lieu géométrique des points communs aux cercles de centres* B *et* C *passant respectivement par les points* E *et* F, *lorsque les longueurs* AE, AF *varient, tout en restant égales entre elles.*

Soit M un point du lieu. On a



$$MB = BE = AB + AE,$$
$$MC = CF = AC + AF,$$

d'où, en retranchant,

$$MB - MC = AB - AC.$$

La différence des distances du point M aux points B et C est ainsi constante et égale à celle du point A aux mêmes points. Par suite, le lieu de M est une des branches d'une hyperbole passant par A et ayant B et C comme foyers. Toute la branche appartient au lieu, les distances AE et AF pouvant aussi bien être prises toutes deux en sens contraire de leur sens primitif.

Si E et F viennent sur AB et AC, on a

$$MB = AB - AE, \qquad MC = AC - AF$$

et les cercles ne se coupent que si

$$MB + MC > BC,$$

ou $$AB + AC - BC > AE + AF = 2AE.$$

Or, le premier membre est $2(p - a)$. Donc les points E et F doivent rester du même côté que A par rapport aux points de contact de AB, AC avec le cercle inscrit.

Si E et F viennent en dessous de B et C, on a

$$MB = AE - AB, \qquad MC = AF - AC,$$

d'où on déduit

$$MC - MB = AB - AC.$$

On a alors la seconde branche de l'hyperbole. Pour que les cercles se coupent, il faut que

$$AE - AB + AF - AC > BC,$$

ou $$2AE > AB + AC + BC = 2p,$$

autrement dit que E et F dépassent les points de contact de AB et AC avec le cercle exinscrit.

Mais si l'on prend seulement l'une des distances AE et AF en sens contraire, par exemple $AE' = AF$, le point M' correspondant décrit alors une ellipse de foyers B, C et passant par A. En effet, dans ce cas, on a

$$M'B = BE' = AB - AE',$$
$$M'C = CF = AC + AF,$$

d'où, en ajoutant,

$$M'B + M'C = AB + AC.$$

(J. LEHMANN, instituteur à Douéra.)

Remarque. — Si les cercles de centres B et C, au lieu de passer par les points E et F, passaient par les points F et E, le lieu de M serait tel que

$$\overline{MB}^2 - \overline{MC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2,$$

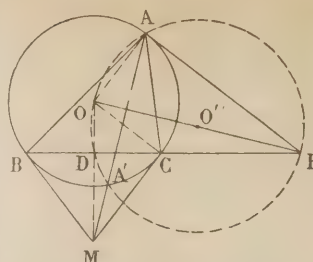
c'est-à-dire une droite passant par A et perpendiculaire à BC.

(CH. CROZE, à Saint-Pons.)

[Ont résolu la même question : MM. F. Breynaert ; C. Broutin ; L. Curt ; E. Ferrier ; G. Foucry ; L. Giboin ; Hugonnier-Ginet ; H. Janois ; A. Larue ; A. Lecoutour ; D. Lwow ; L. Ollié ; E. Sinturel ; H. Varennes.]

4677. — *On considère un triangle* ABC *et le cercle circonscrit,* O. *En* A, B, C *on mène des tangentes au cercle ; la première rencontre* BC *en* P, *et les deux autres se coupent en* M. *Démontrer que les droites* AM *et* OP *sont rectangulaires.*

Première solution. — Tirons OC et OM qui coupe BC en D.



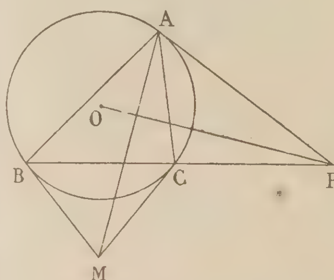
Le quadrilatère ODPA est inscriptible dans un cercle ayant son centre au milieu O' de OP. D'ailleurs le triangle rectangle OMC donne

$$\overline{MC}^2 = MO.MD,$$

ce qui montre que le point M est d'égale puissance par rapport aux cercles O, O'; ce point est donc situé sur la corde AA' commune à ces deux cercles, laquelle est, comme on sait, perpendiculaire à la ligne des centres OO'. AA' est la corde de contact des tangentes menées de P au cercle O.

(C. BILLIONNET, à Sainte-Colombe.)

Seconde solution. — On sait que les polaires des points d'une droite par rapport à un cercle, passent par un même point qui est le pôle de la droite par rapport au cercle. Ici les polaires des points A et M se coupent au point P, pôle de la droite AM. Donc AM et OP sont rectangulaires.



(PAUL THONET, athénée royal d'Anvers.)

Remarque. — 1° La droite AM est la *symédiane* du triangle ABC qui part du point A.

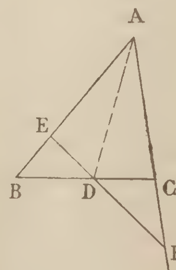
2° Si au lieu d'un cercle on avait donné une conique quelconque, on aurait vu que OP était le diamètre conjugué des cordes parallèles à AM. Donc OP passe par le milieu du segment déterminé sur AM par la conique, quelle que soit la nature de cette conique.

[Ont résolu la même question : MM. Amblard ; Armaingaud ; V. Barol ; Bon ; Bouvaist ; Clabault ; Debenest ; G. Delahaye ; Doué ; Duvergé ; Hébré ; Jouart ; A. Legros ; H. Miconnet ; Noguès ; Ollié ; P. E., à Vielmur ; A. Pequignot ; Petit ; P. Plisson ; Royer ; S. N., à Châlons ; A. Sainte-Laguë ; J. Sire ; C. Soulas ; Tuizussian ; A. Tumerelle ; Ch. Vanier ; Vaslin ; Vaunac ; Jacquet.]

4678. — *Dans un triangle* ABC *on mène la bissectrice intérieure* AD *et par le pied* D *une droite quelconque coupant* AB *en* E *et* AC *en* F. *Démontrer que*

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AF \times BE}{AE \times CF}.$$

Première solution. — La bissectrice AD de l'angle A étant commune aux triangles ABC et AEF, on a



$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}, \qquad \frac{AE}{AF} = \frac{ED}{DF},$$

ou, en multipliant membre à membre,

$$\frac{AB.AE}{AC.AF} = \frac{BD.ED}{DC.DF}.$$

Les triangles DBE, DCF ayant un angle égal, les produits BD.ED et DC.DF des côtés comprenant cet angle sont entre eux dans le rapport des surfaces, qui sont elles-mêmes proportionnelles aux bases BE et CF, puisque le point D est équidistant de ces bases.

Donc
$$\frac{AB.AE}{AC.AF} = \frac{BE}{CF},$$
ou
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AF.BE}{AE.CF}.$$

C. q. f. d.

(A. FAGA, école des Hautes Études commerciales.)

Seconde solution. — Appliquons le théorème de Ménélaüs au triangle ABC coupé par la transversale EDF ; on a
$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EA}{EB} \cdot \frac{FC}{FA} = 1,$$
ou, comme $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ à cause de la bissectrice AD,
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AF.BE}{AE.CF}.$$

C. q. f. d.

Remarque. — La relation précédente subsiste évidemment si la transversale EDF passe par le pied de la bissectrice extérieure de l'angle A.

(H. MICONNET, à Tramayes.)

[Ont résolu la même question : Mlle A. Dourdin ; MM. d'Amphernet ; G. Armaingaud ; V. Barol ; R. Barthélemy ; R. Bazin ; H. Belbenoit ; C. Billionnet ; H. Blanc ; M. Boesch ; G. Boissonnet ; E. Bon ; Bourrec ; R. Bouvaist ; T. Brandhoff ; J. Cabrol ; E. Chaineau ; R. Charles ; F. Clabault ; M. Coleil ; Y. Collin ; M. Cry ; Ch. Croze ; H. Debenest ; G. Delahaye ; A. Doué ; G. Droit ; H. Duchesne ; A. Dupouy ; Duvergé ; G. Foucry ; E. Fourmon ; Gillard ; A. Grolleau ; J. Haag ; J. Hébré ; R. Henry ; Hugonnier-Ginet ; Jacquet ; H. Janois ; Jouart ; H. Julien ; Lajouanine ; T. Lalescu ; A. Larcher ; A. Laudet ; A. Lecoutour ; Ch. Lefebvre ; A. Legros ; E. Le Maigre ; A. Le Moal ; J. Limasset ; D. Lwow ; R. Manen ; A. Martrou ; J. Maury ; J. Ménéchal ; E. Moracchini ; Mouzon ; Nebbia ; R. Noguès ; L. Ollié ; P. E., à Vielmur ; L. Patin ; Pequignot ; P. Petit ; H. Pitrat ; P. Plisson ; L. Richard ; H. Rimbaud ; Rives ; E. Roncaglia ; S. N., à Châlons ; A. Sainte-Laguë ; A. de Saint-Gabriel ; H. Samion ; E. Sinturel ; C. Soulas ; A. Trabbia ; Tuïzussian ; Treillon ; Tumerelle ; Vaslin ; E. Vaunac ; L. Veyret ; Vialaret ; Vien.]

PHYSIQUE

4636. — *On relie une pile de Daniell à un galvanomètre par l'intermédiaire d'une résistance de 300 ohms ; on obtient une déviation de 40°. En doublant la résistance interposée, la déviation tombe à 30°. On répète la même opération avec une pile de Bunsen et on trouve que pour obtenir les mêmes déviations il faut intercaler successivement des résistances de 550 et de 1100 ohms.*

On demande de calculer le rapport des forces électromotrices des deux piles.

(*Bacc. lettres-sciences, Nancy, novembre 1898.*)

Les intensités du courant, et par suite les déviations, sont inversement proportionnelles aux résistances totales du circuit. On a donc, pour la pile de Daniell,
$$\frac{40}{30} = \frac{R+600}{R+300},$$
R désignant la résistance de la pile et du galvanomètre.

On a de même, pour la pile de Bunsen,
$$\frac{40}{30} = \frac{R'+1100}{R'+550}.$$

On tire de ces deux équations
$$R = 600 \qquad \text{et} \qquad R' = 1100.$$

La force électromotrice d'une pile est le produit de l'intensité du courant par la résistance totale du circuit. On a, en appelant E la force électromotrice de la pile de Daniell et E' celle de la pile de Bunsen,
$$E = I(R+300), \qquad E' = I(R'+550),$$
d'où
$$\frac{E}{E'} = \frac{900}{1650} = \frac{6}{11}.$$

[Ont résolu la même question : MM. E. Ardin-Delteil ; V. Barol, école primaire supérieure de Lorgues ; E. Foucart, à Issy ; R. Henry ; H. Janois, à Neufchâtel ; M. Oger, à Tours ; H. Varennes.]

4660. — *Une barre de fer a une longueur de 1^m, sa densité est 7,8. Elle doit se tenir verticalement dans un bain de mercure de densité 13,6 et y plonger à moitié. Elle est lestée par une lame de platine de même section et dont la densité est 21,5. On demande quelle est sa longueur.*

(*Bacc. lettres-math., Besançon, novembre 1898.*)

Appelons x la longueur de la lame de platine (en centimètres).

Puisqu'il y a équilibre, nous pouvons écrire que le poids total P du flotteur est équivalent au poids P' du mercure déplacé.

On a
$$P = 100 \times s \times 7,8 + x \times s \times 21,5$$
et
$$P' = (50+x)s \times 13,6.$$
Donc
$$100 \times 7,8 + x \times 21,5 = (50+x)13,6,$$
d'où
$$x = -\frac{100}{7,9}.$$

Cette valeur négative de x montre qu'on ne pourra pas réaliser l'expérience en lestant la barre de fer par addition de platine. Ce résultat pouvait être prévu *a priori* puisque, sans être lestée de platine, la barre de fer s'enfoncerait déjà de plus de la moitié de sa longueur (7,8 étant supérieur à la moitié de 13,6).

(H. PITRAT, à Givors.)

[Ont résolu la même question : Mlle Campana ; MM. F. Breynaert ; Croze ; J. Hébré ; R. Henry ; H. Janois ; J. Ménéchal ; E. Le Maigre ; E. Sinturel ; H. Varennes.]

4661. — *Dans le système métrique de la Convention (mètre, gramme-force, seconde), l'accélération due à la pesanteur est représentée, à Paris, par le nombre 9,81. Par quel nombre cette accélération à Paris est-elle représentée dans un système où l'unité de longueur est le kilomètre et l'unité de temps l'heure ?*

(*Bacc. lettres-math., Bordeaux, novembre 1898.*)

Dans le système de la Convention, le nombre 9,81 représente en mètres l'accélération due à la pesanteur en une seconde. Par suite, si l'on représente cette accélération en kilomètres, elle aura une valeur 1000 fois moindre, soit $\frac{9,81}{1000}$.

Si maintenant la pesanteur, au lieu d'agir pendant une seconde, agit pendant une heure ou 3600 secondes, le nombre qui représentait l'accélération dans le système de la Convention prendra une valeur 3600 fois plus forte.

Le nombre demandé est donc
$$\frac{9,81 \times 3600}{1000} = 35,316.$$

Ce nombre représente en kilomètres l'accélération due à la pesanteur en une heure.

(R. FAZEMBAT, à Preignac.)

[Ont résolu la même question : MM. V. Barol ; M. Boesch ; F. Breynaert ; Croze ; R. Henry ; A. Julien ; David Lwow ; J. Ménéchal ; Millet ; L. Simonet.]

BACCALAURÉATS

SESSION D'OCTOBRE 1899

PARIS

Lettres-Mathématiques.

Mathématiques.

I. — **4691**. Calculer les rayons de base d'un tronc de cône, connaissant l'apothème a et sachant :
1° Que la surface totale est égale à la surface d'un cercle de rayon a ;
2° Que l'apothème fait avec la grande base un angle donné A.
Discussion.

II. — *1er sujet.* — Mener par un point donné une tangente à une ellipse.

II. — *2e sujet.* — Intersection d'une droite et d'une parabole.

II. — *3e sujet.* — Relation entre le carré d'une corde perpendiculaire à l'axe d'une parabole et sa distance au sommet.

Physique.

I. — **4692**. Le piston d'une pompe foulante a une surface de 30 décimètres carrés. La course du piston est de 1^m. On se sert de la pompe pour puiser dans un grand réservoir une dissolution saline dont la densité est 1,1 et pour refouler ce liquide à une hauteur de 15^m.
On demande : 1° le poids de liquide refoulé à chaque coup de piston ; 2° le travail absorbé par chaque coup de piston.

II. — *1er sujet.* — Miroirs sphériques convexes ;

II. — *2e sujet.* — Lentilles divergentes ;

II. — *3e sujet.* — Réfraction d'une lumière simple par un prisme.

Lettres-Sciences.

Mathématiques.

I. — **4693**. On considère un triangle rectangle ABC dont le côté AC est vertical ; ce triangle est défini par son côté horizontal $AB = c$ et son angle $B = \alpha$.

On considère toutes les droites telles que AD, partant du sommet de l'angle droit A et se rendant aux différents points de l'hypoténuse BC ; on considère également des points pesants partant en même temps de A sans vitesse initiale et glissant sans frottement sur ces différentes droites en vertu de l'action de la pesanteur.

On demande :

1° De trouver celle des droites AD qui est parcourue par le point mobile dans le temps le plus court ;

2° De trouver ensuite l'angle α, par l'une de ses lignes trigonométriques, dans le cas où ce temps le plus court est égal à la moitié de celui qu'emploie le point mobile à parcourir le côté vertical AC.

II. — *1er sujet.* — Définition de l'ellipse par la propriété des foyers. — Tracé de la courbe par points. — Axes. — Sommets. — Cercles directeurs.

II. — *2e sujet.* — Propriétés de la sous-tangente et de la sous-normale à la parabole. — Équation de la parabole.

II. — *3e sujet.* — Définition de l'hélice ; propriétés de la tangente et de la sous-tangente. — Projection de la courbe sur un plan parallèle à l'axe.

Physique.

I. — **4694**. Un baromètre à tube cylindrique vertical, d'une section de 3^{cq}, contient une colonne de mercure de 77^{cm} de hauteur ; au-dessus la chambre barométrique vide a une capacité de 24^{cc}. On y introduit 1 centigramme d'air sec. La température étant $0°$, on demande la nouvelle hauteur du mercure dans le tube au-dessus de la cuvette. Celle-ci est assez large pour que le niveau du mercure n'y varie pas sensiblement.

II. — *1er sujet.* — Éclairage électrique.
II. — *2e sujet.* — Spectroscope. — Analyse spectrale.
II. — *3e sujet.* — Notions de photographie.

CONCOURS DE 1899 *(suite)*

CONCOURS GÉNÉRAUX

Classe de Seconde moderne.

Mathématiques (Paris et Départements).

I. — **4695**. Soit un prisme triangulaire dont la section droite ABC a pour côtés les longueurs données a, b, c. (On supposera $a > b > c$).
On considère la section plane AB'C' telle que ce triangle soit équilatéral.
1° Évaluer le rapport R de CC' à BB' ;
2° Construire B'C' en supposant calculée la valeur numérique de R ;
3° Nombre des plans passant par A, qui coupent le prisme suivant un triangle équilatéral.

II. — **4696**. Étant donné un triangle ABC, trouver un point D de son plan tel que la figure ABCD soit la projection, sur ce même plan, d'un tétraèdre régulier.
(Dans le tracé de l'épure, on prendra le triangle ABC rectangle en A et tel que l'angle ABC ait $\sqrt{2}$ pour tangente.)

Physique et Chimie (Paris).

I. — Pile de Volta. — Piles à courant constant.

II. — Cuivre et ses principaux composés.

III. — **4697**. On veut projeter sur un écran l'image d'un petit objet lumineux au moyen d'un système de deux lentilles d'épaisseurs négligeables, de même axe, l'une convergente et l'autre divergente, de distances focales 3^{cm} et 2^{cm}, distantes de $4^{cm},02$. La distance de l'objet à la lentille convergente étant 6^{cm}, quelle devra être la distance de l'écran à l'objet ? Quel sera le rapport des grandeurs linéaires de l'image et de l'objet ? Construire cette image.

QUESTIONS PROPOSÉES

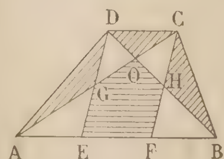
4698. — Démontrer que si x est un nombre entier positif, les nombres

$$10x^2 + 5x, \qquad 8x^2 + 4x + 1, \qquad 6x^2 + 7x + 1$$

peuvent représenter les côtés d'un triangle qui a tous ses angles aigus, et dont la surface est représentée par un nombre entier.

4699. — On donne dans un triangle deux côtés b et c, et la bissectrice de l'angle A. On demande :
1° La condition pour que le triangle existe ;
2° L'expression de la surface du triangle.

4700. — Dans l'intérieur d'un trapèze ABCD dont les diagonales se coupent en O, et par les extrémités D, C de la petite base, on mène deux parallèles qui rencontrent la grande base AB aux points E, F et les diagonales AC, BD aux points G, H. Démontrer que le pentagone EGOHF équivaut à la somme des trois triangles AGD, DOC, CHB.



(H. Liéger.)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

24e Année. — N° 5. JOURNAL Paris, le 1er Décembre 1899.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.

Abonnements.. Librairie Nony et Cie, Boulᵈ St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

SUR L'APPLICATION D'UN THÉORÈME CLASSIQUE RELATIF AUX QUESTIONS DE MAXIMUM

par M. **J. Girod**, professeur au lycée Charlemagne (*Fin*).

Problème VI. — *Les variables positives x et y vérifiant la même relation que dans le problème précédent, chercher le système de valeurs qui rend maximum ou minimum la fonction $v = \frac{x^a}{y^b}$, a et b étant des exposants positifs.*

Considérons la relation donnée $\frac{x^p}{y^q} + k\frac{y^{q'}}{x^{p'}} = k'$, et posons encore $P = \left(\frac{x^p}{y^q}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{ky^{q'}}{x^{p'}}\right)^\beta$. On a $P = \frac{k^\beta x^{p\alpha - p'\beta}}{y^{q\alpha - q'\beta}}$. Déterminons α et β de manière que P soit proportionnel à v^λ. Les équations qui expriment cette condition sont

$$p\alpha - p'\beta = a\lambda, \qquad q\alpha - q'\beta = b\lambda.$$

Si on suppose $pq' - qp' \neq 0$, on déduit de ces équations $\alpha = \frac{\lambda(aq' - bp')}{pq' - qp'}$ et $\beta = \frac{\lambda(aq - bp)}{pq' - qp'}$, formules que l'on pouvait déduire du problème précédent en remplaçant b par $-b$. Pour la commodité de la discussion, mettons α et β sous la forme

$$\alpha = \frac{\lambda b\left(\frac{a}{b} - \frac{p'}{q'}\right)}{q\left(\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'}\right)}, \qquad \beta = \frac{\lambda b\left(\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right)}{q'\left(\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'}\right)}.$$

Les valeurs prises par α et β ne peuvent être positives que si les différences $\frac{a}{b} - \frac{p'}{q'}$ et $\frac{a}{b} - \frac{p}{q}$ sont de même signe, c'est-à-dire si $\left(\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right)\left(\frac{a}{b} - \frac{p'}{q'}\right) > 0$. Pour que cette inégalité soit vérifiée, il faut que $\frac{a}{b}$ ne soit pas compris entre les racines $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ de son premier membre. Si on suppose que $\frac{a}{b}$ soit supérieur aux deux nombres $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$, les différences $\frac{a}{b} - \frac{p}{q}$ et $\frac{a}{b} - \frac{p'}{q'}$ sont positives, et dès lors à une valeur de λ ayant le signe de $\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'}$ correspondent des valeurs positives de α et de β.

En particulier, si on pose $\lambda = pq' - qp'$, on obtient les deux nombres positifs $\alpha = aq' - bp'$ et $\beta = aq - bp$.

La conclusion est que la fonction $P = \left(\frac{x^p}{y^q}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{ky^{q'}}{x^{p'}}\right)^\beta$, dans laquelle α et β ont les valeurs précédemment écrites, passe par un maximum lorsque x et y vérifient les relations

$$\frac{\left(\frac{x^p}{y^q}\right)}{\alpha} = \frac{\left(\frac{ky^{q'}}{x^{p'}}\right)}{\beta} = \frac{k}{\alpha + \beta},$$

desquelles on déduit des équations de la forme $x^p = Ay^q$ et $y^{q'} = Bx^{p'}$ permettant de calculer x et y par logarithmes, comme dans le problème précédent. Deux cas résultent maintenant de la comparaison de $\frac{p}{q}$ et de $\frac{p'}{q'}$.

Si l'on a $\frac{p}{q} > \frac{p'}{q'}$, l'exposant $\lambda = pq' - qp'$ de la fonction v^λ qui constitue la partie variable de P est un nombre positif ; et par suite les valeurs obtenues pour x et y rendent aussi v *maximum*.

Si au contraire on a $\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'}$, l'exposant de v^λ est négatif, et au maximum de v^λ correspond le *minimum* de v.

Supposons maintenant que $\frac{a}{b}$ soit inférieur à $\frac{p}{q}$ et à $\frac{p'}{q'}$. On aperçoit aisément que le système de valeurs de x et de y précédemment déterminées rend v minimum si $\frac{p}{q} > \frac{p'}{q'}$ et maximum si $\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'}$.

En résumé, v est capable d'un maximum ou d'un minimum si $\frac{a}{b}$ n'est pas compris entre les rapports $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$; d'un minimum si $\frac{a}{b}$ est plus rapproché de celui des deux nombres $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ qui correspond au terme de la somme $\frac{x^p}{y^q} + \frac{y^{q'}}{x^{p'}}$ où la disposition des variables x et y est la même que dans la fonction $v = \frac{x^a}{y^b}$; d'un minimum si le plus voisin de $\frac{a}{b}$ est celui qui est fourni par le terme où la disposition des variables est inverse.

Considérons enfin le cas où $\frac{a}{b}$ est compris entre $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$. En posant $\lambda = pq' - qp'$, on obtient pour α et β des valeurs de signes contraires.

Supposons par exemple que l'on ait $\alpha > 0$ et $\beta = -\beta'$. La conclusion est que v^λ est proportionnel au *rapport* des quantités $\left(\frac{x^p}{y^q}\right)^\alpha$ et $\left(\frac{ky^{q'}}{x^{p'}}\right)^{\beta'}$.

Or soient z et t des nombres positifs quelconques, assujettis seulement à vérifier la relation $z + t = k'$. Il est toujours possible de déterminer un système de valeurs de x et de y de manière que $\frac{x^p}{y^q} = z$ et $\frac{ky^{q'}}{x^{p'}} = t$, car si on introduit les logarithmes, on voit que le déterminant formé avec les coefficients de $\log x$ et de $\log y$ est $pq' - qp'$.

La question revient alors à considérer la fonction $\frac{z^\alpha}{t^{\beta'}}$ dans

laquelle les nombres positifs z et t ne sont assujettis à aucune autre condition que $z+t=k'$. Or il est évident que cette fonction prend toutes les valeurs entre zéro et $+\infty$; il en est de même alors de v^λ et par suite de v, quel que soit le signe de λ.

L'hypothèse $\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'}$ conduit encore, comme dans le problème précédent, à cette conclusion que $v=\frac{x^a}{y^b}$ prend toutes les valeurs positives, quels que soient a et b.

Problème VII. — *Les variables positives x et y étant assujetties à vérifier la relation $\frac{x^p}{y^q}+\frac{x^{p'}}{y^{q'}}=k$, trouver le système de valeurs qui rend maximum ou minimum la fonction $v=\frac{x^a}{y^b}$.*

Posons $\quad \mathrm{P}=\left(\frac{x^p}{y^q}\right)^\alpha\cdot\left(\frac{x^{p'}}{y^{q'}}\right)^\beta=\frac{x^{p\alpha+p'\beta}}{y^{q\alpha+q'\beta}}.$

Pour que l'on ait $\mathrm{P}=v^\lambda$, il faut que α et β vérifient les équations

$$p\alpha+p'\beta=a\lambda,\qquad q\alpha+q'\beta=b\lambda.$$

Ecartons d'abord l'hypothèse $pq'-qp'=0$. On peut, sans particulariser le problème, supposer que l'on a $\frac{p}{q}>\frac{p'}{q'}$. Alors, des équations précédentes on tire

$$\alpha=\frac{\lambda(aq'-bp')}{pq'-qp'},\qquad \beta=\frac{\lambda(bp-aq)}{pq'-qp'}.$$

Nous écrirons ces formules ainsi

$$\alpha=\frac{\lambda b\left(\frac{a}{b}-\frac{p'}{q'}\right)}{q\left(\frac{p}{q}-\frac{p'}{q'}\right)},\qquad \beta=\frac{\lambda b\left(\frac{p}{q}-\frac{a}{b}\right)}{q'\left(\frac{p}{q}-\frac{p'}{q'}\right)}.$$

Pour que l'on puisse déterminer λ de manière que α et β soient positifs, il faut que $\frac{a}{b}$ vérifie l'inégalité

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{p'}{q'}\right)\left(\frac{p}{q}-\frac{a}{b}\right)>0.$$

Cette inégalité exprime que $\frac{a}{b}$ doit être compris entre $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$, et puisque $\frac{p'}{q'}<\frac{p}{q}$, on doit avoir $\frac{p'}{q'}<\frac{a}{b}<\frac{p}{q}$. Les deux différences $aq'-bp'$ et $bp-aq$ sont alors positives, et par suite, à une valeur positive quelconque de λ correspondent des valeurs positives de α et de β. En particulier, si on pose $\lambda=pq'-qp'$, on obtient $\alpha=aq'-bp'$, $\beta=bp-aq$. La conclusion est que, sous les conditions $\frac{p'}{q'}<\frac{a}{b}<\frac{p}{q}$, la fonction $u=\frac{x^a}{y^b}$ passe par un *maximum* lorsque x et y vérifient les équations $\quad \frac{\left(\frac{x^p}{y^q}\right)}{\alpha}=\frac{\left(\frac{x^{p'}}{y^{q'}}\right)}{\beta}=\frac{k}{\alpha+\beta}.$

On en déduit un système unique de valeurs pour $\log x$ et $\log y$, à cause de l'hypothèse $pq'-qp'>0$. Evidemment la fonction $v_1=\frac{y^b}{x^a}$ passerait par un minimum dans les mêmes conditions.

Supposons maintenant que $\frac{a}{b}$ ne soit pas compris entre $\frac{p'}{q'}$ et $\frac{p}{q}$, et que l'on ait par exemple $\frac{a}{b}>\frac{p}{q}$. Alors la valeur de α écrite précédemment est positive, celle de β est négative. Désignons cette dernière par $-\beta'$. La conclusion est que v^λ est identique au *rapport* des deux quantités $\left(\frac{x^p}{y^q}\right)^\alpha$ et $\left(\frac{x^{p'}}{y^{q'}}\right)^{\beta'}$.

On peut donc poser $v^\lambda=\frac{z^\alpha}{t^{\beta'}}$, z et t étant des variables positives, assujetties seulement à vérifier la relation $z+t=k$. D'où il suit que v prend toutes les valeurs positives.

Enfin, si on suppose $\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'}$, on montre, comme dans les deux problèmes précédents, que la relation donnée $\frac{x^p}{y^q}+\frac{x^{p'}}{y^{q'}}=k$ comprend la relation $\frac{x^p}{y^q}=c$, c étant la racine positive (qui existe toujours) de l'équation $z+z^m=k$; d'où on conclut que la fonction $v=\frac{x^a}{y^b}$ est proportionnelle à une certaine puissance de la seule variable y.

Généralisation. — Les trois derniers problèmes sont des cas particuliers d'un problème, dont l'énoncé le plus général est le suivant :

Trouver le système de valeurs qui rend maximum ou minimum la fonction $u=x^ay^b$, ou la fonction $v=\frac{x^a}{y^b}$, a et b étant des exposants positifs *entiers ou fractionnaires, lorsque les variables positives x et y sont assujetties à vérifier une équation à trois termes, entiers ou non, rationnels ou irrationnels.*

Supposons que les trois termes se trouvent au premier membre de l'équation ; alors, puisque les trois coefficients ne peuvent être de même signe, l'un a le signe contraire à celui des deux autres. Isolons ce terme dans un membre de l'équation, de manière que tous les coefficients prennent le signe $+$, puis divisons les deux membres de l'équation par la partie variable de ce terme isolé. Alors les principaux cas qui peuvent se présenter rentrent dans les sept types suivants d'équation, abstraction faite des coefficients numériques positifs :

$$\left\{\begin{array}{ll} x^py^q+x^{p'}y^{q'}=k & (1)\\ \frac{1}{x^py^q}+\frac{1}{x^{p'}y^{q'}}=k & (2)\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x^py^q+\frac{x^{p'}}{y^{q'}}=k & (3)\\ \frac{1}{x^py^q}+\frac{y^{q'}}{x^{p'}}=k & (4)\end{array}\right.$$

$$x^py^q+\frac{1}{x^{p'}y^{q'}}=k \qquad (5)$$

$$\frac{x^p}{y^q}+\frac{y^{q'}}{x^{p'}}=k \qquad (6)$$

$$\frac{x^p}{y^q}+\frac{x^{p'}}{y^{q'}}=k \qquad (7)$$

L'étude que nous avons faite des fonctions $u=x^ay^b$ et $v=\frac{x^a}{y^b}$, lorsque x et y vérifient la relation (6), et celle de la fonction v en tenant compte de la relation (7), indiquent suffisamment la façon de procéder dans les autres cas. D'ailleurs on peut supprimer du tableau les relations (2) et (4), en les rattachant aux relations (1) et (3), si l'on introduit les fonctions

$$u_1=\frac{1}{x^ay^b},\qquad\text{et}\qquad v_1=\frac{y^b}{x^a}.$$

Voici un tableau qui indique en regard des relations qui sont écrites à la première colonne, les conditions que doivent remplir les exposants positifs a et b de chacune des fonctions $u=x^ay^b$ et $v=\frac{x^a}{y^b}$ pour que la fonction considérée soit capable d'un maximum ou d'un minimum. Il est entendu que, lorsque le rap-

port $\frac{a}{b}$ ne remplit pas les conditions écrites, u et v prennent toutes les valeurs positives. Lorsque la fonction admet un maximum ou un minimum, le système des valeurs correspondantes de x et de y se calcule comme nous avons fait dans les trois problèmes précédents.

Si on introduit l'hypothèse $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ dans les relations (1), (3), (4) et (5), on montre, comme nous l'avons fait précédemment, que chacune de ces relations comprend alors une relation de la forme $\frac{x^p}{y^q} = k'$, ou $x^py^q = k'$, k' étant une constante positive, d'où résulte que les fonctions u et v prennent toutes les valeurs positives. L'hypothèse $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ ne change rien aux conclusions relatives à la relation (2).

	$u = x^ay^b$	$v = \frac{x^a}{y^b}$
1° $x^py^q + x^{p'}y^{q'} = k.$	Admet un maximum si $\frac{a}{b}$ est compris entre $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$.	Prend toutes les valeurs positives quel que soit $\frac{a}{b}$.
2° $x^py^q + \frac{x^{p'}}{y^{q'}} = k.$	Admet un maximum si $\frac{a}{b} > \frac{p}{q}$ quel que soit $\frac{p'}{q'}$.	Admet un maximum si $\frac{a}{b} > \frac{p'}{q'}$ quel que soit $\frac{p}{q}$.
3° $x^py^q + \frac{1}{x^{p'}y^{q'}} = k.$	Admet un maximum ou un minimum si $\frac{a}{b}$ n'est pas entre $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$: Un maximum si $\frac{p}{q}$ est le plus voisin de $\frac{a}{b}$. Un minimum si $\frac{p'}{q'}$ est le plus voisin de $\frac{a}{b}$.	Admet un maximum si $\frac{p}{q} > \frac{p'}{q'}$. Un minimum si $\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'}$ quel que soit $\frac{a}{b}$.
4° $\frac{x^p}{y^q} + \frac{y^{q'}}{x^{p'}} = k.$	Admet un maximum si $\frac{p}{q} > \frac{p'}{q'}$. Un minimum si $\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'}$, quel que soit $\frac{a}{b}$.	Admet un maximum ou un minimum si $\frac{a}{b}$ n'est pas entre $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$. Un maximum si $\frac{p}{q}$ est le plus voisin de $\frac{a}{b}$. Un minimum si $\frac{p'}{q'}$ est le plus voisin de $\frac{a}{b}$.
5° $\frac{x^p}{y^q} + \frac{x^{p'}}{y^{q'}} = k.$	Prend toutes les valeurs positives quels que soient a et b.	Admet un maximum lorsque $\frac{a}{b}$ est entre $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$.

Une forme limite simple de la relation (4) de ce tableau est $x^p + y^{q'} = k$; elle correspond au cas où les exposants des dénominateurs deviennent nuls. Pour montrer l'avantage qui résulte, dans un pareil cas, de l'introduction des exposants fractionnaires, traitons le problème suivant :

Problème IX. — *Trouver le maximum de* $u = x^ay^bz^c$, *sachant que les nombres positifs* x, y, z *doivent vérifier la relation* $x^\alpha + y^\beta + z^\gamma = k$, *les exposants étant tous positifs.*

Il est aisé de faire apparaître dans u les termes de la somme k. Il suffit de l'écrire ainsi : $u = (x^\alpha)^{\frac{a}{\alpha}}.(y^\beta)^{\frac{b}{\beta}}.(z^\gamma)^{\frac{c}{\gamma}}$.

D'où résulte que u est maximum lorsque x, y et z vérifient les relations $\frac{x^\alpha}{\left(\frac{a}{\alpha}\right)} = \frac{y^\beta}{\left(\frac{b}{\beta}\right)} = \frac{(z)^\gamma}{\left(\frac{c}{\gamma}\right)} = \frac{k}{\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}}$.

On en déduit des équations de la forme $x^\alpha = A$, $y^\beta = B$, $z^\gamma = C$ qui permettent de calculer x, y et z par logarithmes.

On traiterait d'une façon identique le problème inverse : trouver le minimum de k, sachant que u est constant. Voici un exemple :

Problème X. — *Trouver le minimum de* $y = \operatorname{tg}^p x + \operatorname{cotg}^q x$, *$x$ variant de zéro à* $\frac{\pi}{2}$.

On met la relation $\operatorname{tg} x.\operatorname{cotg} x = 1$ sous la forme

$$(\operatorname{tg}^p x)^{\frac{1}{p}}.(\operatorname{cotg}^q x)^{\frac{1}{q}} = 1.$$

Dès lors on voit que y est minimum lorsque x vérifie l'équation

$$\frac{\operatorname{tg}^p x}{\left(\frac{1}{p}\right)} = \frac{\operatorname{cotg}^q x}{\left(\frac{1}{q}\right)}, \quad \text{ou} \quad p \operatorname{tg}^p x = q \operatorname{cotg}^q x.$$

On en déduit

$$\operatorname{tg}^{p+q}(x) = \frac{q}{p}, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tg} x = \sqrt[p+q]{\frac{q}{p}}.$$

ARITHMÉTIQUE

4672. — *Trouver le reste de la division par 977 du nombre 265 429 élevé à la 347 486ᵉ puissance.*

En effectuant la division de 265 429 par 977, on trouve

$$265429 = \text{mult. } 977 + 662,$$

ou, en élevant à la puissance indiquée,

$$(265\,429)^{347\,486} = \text{mult. } 977 + 662^{347\,486}.$$

977 étant un nombre premier absolu et ne divisant pas 662, on a, d'après le théorème de Fermat,

$$662^{976} = \text{mult. } 977 + 1.$$

Or $\qquad 347\,486 = \text{mult. } 976 + 30\,;$

donc $\quad 662^{347\,486} = (662^{976})^m . 662^{30} = \text{mult. } 977 + 662^{30}.$

Tout revient à trouver le reste de la division de 662^{30} par 977. Afin de restreindre autant que possible les calculs, nous opérerons de proche en proche :

$$(662)^{30} = (662^2)^{15} = (\text{mult. } 977 + 548)^{15} = \text{mult. } 977 + 548^{15},$$
$$(548)^{15} = (548^3)^5 = (\text{mult. } 977 + 712)^5 = \text{mult. } 977 + 712^5,$$
$$(712^2)^2 . 712 = (\text{mult. } 977 - 119)^2 . 712 = \text{mult. } 977 + (119)^2 . 712,$$
$$(119)^2 . 712 = (\text{mult. } 977 + 483) 712 = \text{mult. } 977 + 969.$$

Le reste demandé est donc 969.

(C. BILLIONNET.)

Remarque. — En observant que $662 = 977 - 315$, on voit que

$$662^{30} = \text{mult. } 977 + 315^{30}$$

et on peut opérer sur 315^{30} au lieu de 662^{30}.

[M. A. Meynier, à Sciez, a résolu la même question.]

4685. — *Démontrer que l'expression* $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ *est divisible par 7.*

Première solution. — On a successivement

$$3^{2n+2} - 2^{n+1} = 9^{n+1} - 2^{n+1} = (7+2)^{n+1} - 2^{n+1} = \text{mult. } 7.$$

Autrement :

$$3^{2n+2} - 2^{n+1} = 9^{n+1} - 2^{n+1} = (9-2)(9^n + 9^{n-1}.2 + \ldots + 2^n) = \text{mult. } 7.$$

On peut remarquer que si n est impair, l'expression est encore divisible par $9 + 2 = 11$.

Seconde solution. — Nous allons faire voir que si la divisibilité est vraie pour une certaine valeur $m - 1$ de n, elle subsiste par cela même pour $n = m$. En effet, de l'hypothèse

$$3^{2m} - 2^m = \text{mult. } 7,$$

on déduit, en multipliant par $3^2 = 9 = 2 + 7$,

$$3^{2(m+1)} - 2^{m+1} - 7 . 2^m = \text{mult. } 7,$$

ou

$$3^{2(m+1)} - 2^{m+1} = \text{mult. } 7.$$

La divisibilité étant évidente pour $n = 0$ est vérifiée par suite de proche en proche pour $n = 1, 2, 3$, etc.

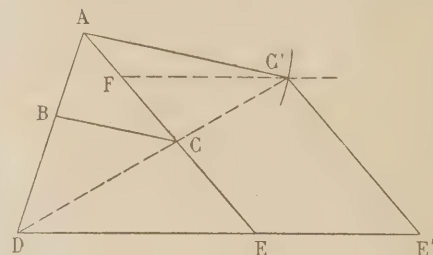
[DAVID LWOW, à Piatra (Roumanie.)]

[Ont résolu la même question : Mlle R. Campana ; MM. A. Arcizet ; L. Artis ; L. Barberot ; V. Barol ; Barreau ; E. Baudouin ; R. Bazin ; M. Bégué ; H. Belbenoit ; R. Bellencourt ; C. Billionnet ; J. Bourrec ; R. Bouvaist ; T. Brandhof ; A. Caillet ; A. Carré ; Carpinetty ; E. Chaineau ; F. Clabault ; Croze ; Damoiseau ; Daure ; A. Desportes ; G. De France ; O. Destouches ; Donnadieu ; H. Duchesne ; A. Dupouy ; Duvergé ; Floresco ; J. Foucard ; G. Foucry ; E. Fournon ; F. Galy ; Gamard ; Gillard ; P. Givry ; M. Gondran ; E. Gourdon ; L. Grillet ; J. Haag ; A. Hardy ; J. Hébré ; R. Henry ; A. Huet ; Hugonnier-Ginet ; E. Istrasescu ; Jacquet ; H. Julien ; J.-M. Lagarde ; Lajounine ; Lalescu ; Laly ; J. Lamotte ; A. Laudet ; A. Lecoutour ; C. Lefebvre ; J. Lehmann ; E. Le Maigre ; A. Le Moal ; P. Le Verrier ; G. Luquet ; E. Malleret ; B. Mathé ; J. Ménéchal ; E. Merle ; A. Meynier ; E. Millet ; R. Mouzon ; L. Ollié ; Oprescu ; L. Patin ; Pendariès ; Pequignot ; M. Petitjean ; A. Pichon ; H. Pitrat ; F. Pouget ; P. Plisson ; C. Reboul ; E. Refusin ; L. Richard ; E. Roncaglia ; M. Royer ; E. Sinturel ; Thérézien ; P. Thonet ; M. Treillou ; A. Tumerelle ; P. Valentin ; Valette ; L. Ventre ; Vial ; Vialaret ; Vien ; P. Zlatco ; Besseige ; Filon ; M. B. d. B. ; R. Barthélemy ; Loignon.]

ALGÈBRE

4466. — *Construire un triangle connaissant* A, $b + a = h$, $c + a = k$. — *Discuter.* — *Calculer ensuite les côtés de ce triangle.*

Supposons le problème résolu : soit ABC le triangle cherché. Prolongeons les côtés AB et AC d'une même longueur égale à a ; on obtient ainsi le triangle ADE, déterminé par les deux côtés $AD = h$, $AE = k$ et l'angle compris A.



Tout revient alors à mener la droite BC de manière qu'on ait

$$DB = BC = CE.$$

Pour cela, prolongeons la droite DC jusqu'à sa rencontre en C' avec la parallèle à BC issue de A, puis menons la parallèle C'E' à AE. Les deux quadrilatères DBCE, DAC'E' étant homothétiques, on a

$$DA = AC' = C'E'.$$

On peut donc considérer le point C' comme l'intersection de la circonférence de centre A et de rayon $AD = h$ avec la parallèle à DE menée par le point F de AE tel que $EF = h$. Connaissant le point C', on en déduit C, et ensuite BC en menant par C une parallèle à AC'.

Discussion. — Les données h et k jouant ici le même rôle, il est permis de supposer $h < k$; le point F tombe alors entre A et E. Le point C doit d'ailleurs se trouver entre E et F, autrement le point B serait sur le prolongement de AD ; cette condition, d'ailleurs suffisante, exige qu'on ait

$$AC' > AF, \qquad \text{ou} \qquad h > k - h, \qquad \text{ou} \qquad k < 2h.$$

En tenant compte de l'hypothèse $h < k$, on voit que k ne peut varier qu'entre h et $2h$; le problème a dans ce cas une seule solution.

Calcul des côtés. — Ces côtés vérifient les trois équations

$$b + a = h, \qquad c + a = k, \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

L'élimination de b et c conduit à l'équation suivante :

$$(1 - 2\cos A)a^2 - 2(h+k)(1 - \cos A)a + h^2 + k^2 - 2hk\cos A = 0.$$

Discussion. — Pour qu'une valeur de a convienne, il faut et il suffit qu'elle soit réelle, positive et inférieure à h et k, afin que les valeurs correspondantes de b et c soient positives.

Formons $f(0)$, $f(h)$ et $f(k)$. On trouve

$$f(0) = h^2 + k^2 - 2hk\cos A,$$
$$f(h) = k(k - 2h),$$
$$f(k) = h(h - 2k).$$

Comme $\cos A < 1$, $f(0)$ est toujours positif (on peut remarquer que $f(0) = \overline{DE}^2$). Si, pour fixer les idées, on suppose $h < k$, $f(k)$ est négatif ; par suite, suivant le signe du coefficient $1 - 2\cos A$ de a^2, 0 ou k sépare les deux valeurs de a, qui sont alors réelles : une seule de ces valeurs est donc comprise entre 0 et k. Cette valeur sera aussi comprise entre 0 et h si $f(h)$ est de même signe que $f(k)$, ce qui entraîne $k < 2h$.

On retombe ainsi sur les résultats trouvés plus haut.

(G. SCHOONHEERE.)

[Ont résolu la même question : MM. L. Bois ; B. Lachenaud ; Lehmann ; J. Moisson ; F. Pégorier ; A. Pichon ; P. Sailly ; A. Vergnole.]

4675. — *Résoudre le système d'équations*

$$\frac{x+y}{1+xy}=\frac{a}{b+c}, \qquad \frac{x-y}{1-xy}=\frac{b-c}{a}.$$

Première solution. — Ces deux équations du premier degré par rapport à y donnent

$$y=\frac{a-(b+c)x}{b+c-ax}, \qquad y=\frac{b-c-ax}{(b-c)x-a}.$$

En égalant ces deux valeurs, il vient

$$-[a-(b+c)x][a-(b-c)x]=(b+c-ax)(b-c-ax),$$

ou, après avoir simplifié,

$$(a^2+b^2-c^2)x^2-4abx+a^2+b^2-c^2=0.$$

Cette équation fournit pour x deux valeurs réelles si l'on a

$$4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2 \geqslant 0,$$

ou $$[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2] \geqslant 0,$$

inégalité qui n'est possible que lorsque les deux facteurs du premier membre sont positifs, ce qui, en supposant $b>0$, entraîne $$|a-b| \leqslant c \leqslant a+b.$$

Les deux valeurs de x ont pour expression

$$x=\frac{2ab \pm \sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}}{a^2+b^2-c^2};$$

on pourrait en déduire directement les valeurs correspondantes de y, mais les expressions de ces dernières se présentant ainsi sous une forme compliquée, il vaut mieux remarquer que le système pouvant s'écrire

$$\frac{y+x}{1+xy}=\frac{a}{b+c}, \qquad \frac{y-x}{1-xy}=\frac{c-b}{a},$$

y prend la même valeur que x lorsqu'on permute b et c. On a alors

$$y=\frac{2ac \pm \sqrt{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}}{a^2+c^2-b^2}.$$

(MAXIME GONDRAN, à Caen.)

Seconde solution. — En vertu d'une propriété bien connue des proportions, la première équation du système peut s'écrire

$$\frac{x+y+1+xy}{x+y-1-xy}=\frac{a+b+c}{a-b-c},$$

ou $$\frac{(x+1)(y+1)}{(x-1)(y-1)}=\frac{a+b+c}{-a+b+c}; \qquad (1)$$

de même, la seconde équation s'écrit

$$\frac{(x+1)(y-1)}{(y+1)(x-1)}=\frac{a+b-c}{a-b+c}. \qquad (2)$$

Multiplions membre à membre les équations (1) et (2) :

$$\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}=\frac{(a+b)^2-c^2}{c^2-(a-b)^2},$$

extrayons la racine carrée de chaque membre, il vient

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{\sqrt{(a+b)^2-c^2}}{\pm\sqrt{c^2-(a-b)^2}},$$

ou, en utilisant encore la propriété rappelée plus haut,

$$x=\frac{\sqrt{(a+b)^2-c^2} \pm \sqrt{c^2-(a-b)^2}}{\sqrt{(a+b)^2-c^2} \mp \sqrt{c^2-(a-b)^2}},$$

formule où l'on suppose les signes supérieurs ou inférieurs pris ensemble.

Pour obtenir de même les valeurs de y, on divise (1) par (2), ce qui donne $$\frac{(y+1)^2}{(y-1)^2}=\frac{(a+c)^2-b^2}{b^2-(a-c)^2},$$

ou $$y=\frac{\sqrt{(a+c)^2-b^2} \pm \sqrt{b^2-(a-c)^2}}{\sqrt{(a+c)^2-b^2} \mp \sqrt{b^2-(a-c)^2}},$$

avec correspondance des signes supérieurs ou inférieurs.

Si l'on rend rationnel le dénominateur de ces valeurs de x et y en multipliant haut et bas par la quantité conjuguée, on retrouve les expressions obtenues en premier lieu.

(F. MOUZON, collège de Fontenay.)

[Ont résolu la même question : MM. R. Barthélemy ; G. Delahaye ; Duvergé ; R. Henry ; H. Janois ; Lajouanine ; D. Lwow ; G. Marie ; L. Patin ; S. N., à Châlons ; E. Sinturel ; P. Thonet ; L. Veyret.]

4686. — *Déterminer une valeur de* m *telle que le polynome*

$$x^4+2x^3-23x^2+12x+m$$

soit identiquement égal au produit de deux trinomes du second degré de la forme

$$(x^2+ax+c)(x^2+bx+c);$$

faire connaître les valeurs des paramètres a, b, c *et les valeurs de* x *qui annulent le polynome donné, dans le cas considéré.*

(*Bacc. lettres-math.*, *Caen, juillet* 1899.)

En développant le produit des deux trinomes, il vient

$$x^4+(a+b)x^3+(ab+2c)x^2+c(a+b)x+c^2.$$

Pour que ce polynome soit identique au polynome donné, il faut et il suffit que les coefficients des puissances semblables de x et les termes indépendants soient les mêmes dans les deux polynomes. On doit donc avoir

$$a+b=2, \qquad (1)$$
$$ab+2c=-23, \qquad (2)$$
$$c(a+b)=12, \qquad (3)$$
$$c^2=m. \qquad (4)$$

En remplaçant dans l'équation (3), $a+b$ par 2, on obtient

$$c=6,$$

et les équations précédentes donnent

$$a+b=2, \qquad ab=-35, \qquad m=36.$$

Par suite, a et b vérifient l'équation

$$X^2-2X-35=0,$$

qui a pour racines -5 et 7.

Le polynome donné peut alors s'écrire sous la forme

$$(x^2-5x+6)(x^2+7x+6);$$

il s'annule :

soit pour $x^2-5x+6=0$ d'où $x=2$ et $x=3$;

soit pour $x^2+7x+6=0$ d'où $x=-1$ et $x=-6$.

(E. FOURMON, lycée de Tulle.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Arcizet ; L. Barberot ; V. Barol ; R. Bellencourt ; M. Begué ; R. Bouvaist ; J. Chemineau ; F. Clabault ; A. Collin ; Croze ; H. Damoiseau ; G. De France ; O. Destouches ; H. Duchesne ; Duvergé ; Estang ; Eyssério ; J. Foucard ; G. Foucry ; E. Fourmon ; J. Gauthier ; A. Gérardin ; L. Grillet ; J. Haag ; A. Hardy ; R. Henry ; A. Huet ; Hugonnier-Ginet ; Jacquet ; A. Jouffray ; H. Julien ; Karkowski ; A. Larue ; A. Laudet ; J. Lehmann ; P. Le Verrier ; D. Lwow ; J. Maury ; R. Mouzon ; Noël ; L. Ollié ; Oprescu ; P. E., à Vielmur ; L. Patin ; A. Pequignot ; M. Petitjean ; P. Plisson ; Reboul ; Refusin ; A. de St-Gabriel ; E. Sinturel ; Thérézien ; Tumerelle ; Valentin ; Vial ; E. Vila ; P. Zlatco ; Fiton ; Istrasescu ; J. Perl.]

GÉOMÉTRIE

4352. — *On donne un point* P *dans le plan d'un triangle* ABC. *Mener par le point* P *une sécante qui rencontre les côtés* AB, BC, CA *en des points* D, E, F *tels que le point* D *soit le milieu de* EF.

Proposons-nous plus généralement de déterminer la sé-

cante PEDF de manière que l'on ait

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \lambda,$$

λ étant un nombre donné positif ou négatif.

Considérons le triangle EFC coupé par la sécante ADB ; on a, d'après le théorème de Ménélaüs,

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} \times \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = 1.$$

Or $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \lambda$; on a donc

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{AF}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \times \frac{1}{\lambda}.$$

Nous sommes donc ramenés à tirer par le point P une droite qui coupe les droites CA, CB en des points F et E tels que l'on ait

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BE}} = \frac{1}{\lambda} \times \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}},$$

le second membre de cette relation étant connu.

Nous appliquerons pour la construction une des méthodes qui ont été données dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*. (Note de M. Goulard, 22e année, p. 113.)

Nous n'aurons jamais qu'une solution.

Dans le cas qui nous occupe, le rapport $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{DF}}$ est égal à -1. Appliquons la méthode de Pétersen, signalée par M. Goulard.

Nous considérerons le cercle circonscrit au triangle ABC. Puis comme ici $\lambda = -1$, l'on aura $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{BE}} = -\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$; le cercle lieu des points dont les distances aux points A et B est λ est ici le cercle ayant pour points diamétralement opposés les pieds des bissectrices de l'angle C. Ce cercle coupe le cercle ABC en un second point, M. Pour déterminer la droite PEDF on déterminera un de ses points, F, en prenant l'intersection de AC avec le segment capable d'un angle égal à $\widehat{MCB}$ décrit sur PM comme corde et du même côté de ce segment que AC.

On obtient deux points F et F' qui fournissent deux sécantes PEDF, PE'D'F' ; on prend celle de ces sécantes qui est telle que les points A et B soient situés de part et d'autre de cette sécante.

Le problème est évidemment toujours possible et ne fournit qu'une solution, que le point P soit intérieur ou extérieur au triangle.

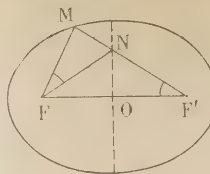
(M. REBEIX, lycée du Puy.)

[Ont résolu la même question : MM. J. Delpont ; E. Dumas ; L. Jardin ; Jouanneau ; H. Michel, lycée de Douai.]

4599. — *Déterminer sur une ellipse de grand axe* $2a$ *et de distance focale* $FF' = 2c$ *un point M tel que l'angle MFF' soit double de l'angle MF'F.*

(*Bacc. lettres-math., Bordeaux, mars 1899.*)

Solution géométrique. — L'angle MFF' étant par hypothèse le double de l'angle MF'F, la bissectrice de cet angle a son pied N sur le petit axe de l'ellipse. De plus les triangles MFN, MF'F ayant un angle commun et un angle égal sont semblables ; on peut donc écrire



$$\frac{MF}{MF'} = \frac{FN}{F'F} = \frac{MN}{MF} = \frac{MF + MF'}{MF' + 2c + MF},$$

ou

$$\frac{MF}{MF'} = \frac{FN}{2c} = \frac{a}{a+c}.$$

Connaissant le rapport et la somme des rayons vecteurs MF et MF', on peut facilement obtenir leurs longueurs :

$$\frac{MF}{a} = \frac{MF'}{a+c} = \frac{2a}{2a+c};$$

mais il est plus simple de remarquer que la formule $FN = \dfrac{2ac}{a+c}$ détermine le point N ; le point M se trouve alors à l'intersection de la droite F'N et de la droite symétrique de FF' par rapport à FN.

Comme $FN > c$, le point N, et par suite M, existe toujours.

(ABEL PICHON, lycée de Niort.)

Solution trigonométrique. — Posons $\widehat{MF'F} = x$, et écrivons que, dans le triangle MFF', les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés. Nous aurons

$$\frac{MF}{\sin x} = \frac{MF'}{\sin 2x} = \frac{2c}{\sin(180^\circ - 3x)},$$

ou, comme $MF + MF' = 2a$,

$$\frac{2a}{\sin x + \sin 2x} = \frac{2c}{\sin 3x}.$$

Cette équation, développée, devient

$$a(3 \sin x - 4 \sin^3 x) = c(\sin x + 2 \sin x \cos x),$$

ou, en divisant par $\sin x$, qui n'est jamais nul ici,

$$3a - 4a \sin^2 x = c + 2c \cos x,$$

ou

$$4a \cos^2 x - 2c \cos x - (a + c) = 0.$$

On trouve pour $\cos x$ deux valeurs réelles de signes contraires. Comme le discriminant de cette équation est

$$c^2 + 4a(a+c) = (c + 2a)^2,$$

les racines sont rationnelles et ont pour valeur

$$\cos x = \frac{c - (c + 2a)}{4a} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos x = \frac{c + c + 2a}{4a} = \frac{c+a}{2a}.$$

L'angle FMF' ayant pour valeur $180^\circ - 3x$, x ne peut surpasser 60°, de sorte que $\cos x$ doit être compris entre 1 et $\dfrac{1}{2}$; la seule valeur acceptable est donc

$$\cos x = \frac{c+a}{2a},$$

qui réalise toujours ces conditions.

(SAÏD GALLAND, lycée d'Alger.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Arcizet; V. Barol ; R. Blanc ; L. Bois; Chedeville ; H. Dodier ; A. Drocourt ; L. Ferron ; G. Foucry ; M. Gondran ; F. Ladevèze ; A. Larue ; E. Le Maigre ; Rieumajou ; Vien ; Jacquet, lycée de Mâcon ; H. Janois ; R. Vollaire.]

4683. — *Un tronc de pyramide régulière a pour bases parallèles deux carrés dont les côtés sont a et $2a$; sa hauteur est h :*

1° Expressions du volume et de la surface totale du solide ;

2° Déterminer h de manière qu'il existe une sphère tangente à la fois aux deux bases du solide et à ses quatre arêtes obliques ;

3° Le plan contenant les points de contact avec les arêtes divise la surface de la sphère en deux parties dont on demande le rapport.

(*École supérieure des Postes et des Télégraphes, 1899.*)

1° On sait que le volume d'un tronc de pyramide de bases B, b et de hauteur h est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} h(B + b + \sqrt{Bb}) ;$$

or ici $\qquad B = (2a)^2 = 4a^2 \qquad$ et $\qquad b = a^2$;

par suite $\qquad V = \frac{1}{3} h(4a^2 + a^2 + 2a^2) = \frac{7}{3} a^2h.$

La surface totale est égale à la somme $5a^2$ des deux bases, plus 4 fois la surface d'une face latérale telle que BCB′C′ :

$$S = 5a^2 + 4 \text{ surf. BCB'C'}.$$

En menant par les centres O, O′ des deux bases les perpendiculaires OI, O′I′ à BC, B′C′, puis la parallèle I′K à OO′, on obtient le triangle IKI′ dont les côtés de l'angle droit sont égaux à $a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$ et h. Par suite

$$\text{Surf. BCB'C'} = \frac{1}{2}(2a + a).\text{II'} = \frac{3}{2} a \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2}$$

et

$$S = a(5a + 3\sqrt{a^2 + 4h^2}).$$

2° Toute sphère tangente aux quatre arêtes obliques a son centre sur l'axe de symétrie OO′ ; cette sphère devant en outre être tangente aux deux bases admet OO′ comme diamètre. Il suffit donc de déterminer la hauteur $OO' = h$ du trapèze AOO′A′ dont les bases sont $AO = a\sqrt{2}$ et $A'O' = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, de façon que le côté AA′ soit à une distance $MP = \frac{h}{2}$ du milieu M de OO′. Dans ce cas, le triangle AMA′ est rectangle en M, et l'on a

$$\overline{MP}^2 = PA.PA',$$

ou, comme $\quad PA = AO = a\sqrt{2} \quad$ et $\quad PA' = A'O' = \frac{a}{2}\sqrt{2},$

$$\frac{h^2}{4} = a^2, \qquad \text{d'où} \qquad h = 2a.$$

3° Le plan contenant le point de contact P et ses analogues est parallèle aux bases du tronc et divise la sphère en deux zones dont les surfaces sont entre elles comme leurs hauteurs ON, NO′. Le rapport de ces deux zones est donc

$$\frac{O'N}{NO} = \frac{A'P}{PA} = \frac{A'O'}{AO} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

(DONNADIEU, à Mézin.)

[Ont résolu la même question : MM. G. Armaingaud ; L. Artis ; L. Barberot ; H. Belbenoit ; C. Billionnet ; G. Boissonnet ; T. Brandhof ; A. Cauvin ; F. Clabault ; Cougnoux ; Croze ; M. Cry ; Damoiseau ; Daure ; Destouches ; Estang ; G. Foucry ; J. Gauthier ; Gillard ; P. Givry ; E. Gourdon ; L. Grillet ; E. Gueudin ; J, Haag ; J. Hébré ; R. Henry ; H. Julien ; Lajouanine ; H. Lefèvre ; J. Lehmann ; E. Le Maigre ; D. Lwow ; B. Mathé ; Meynier ; H. Miconnet ; L. Ollié ; P. E., à Vielmur ; A. Pequignot ; L. Pont ; L. Richard ; A. de St-Gabriel ; E. Sinturel ; Vialaret ; Vien ; Filon ; Loignon.]

PHYSIQUE

4689. — *Pour déterminer le poids spécifique d'un corps soluble dans l'eau, mais insoluble dans l'éther, on emploie la méthode du flacon.*

Les données expérimentales sont les suivantes :

Poids du flacon vide	$16^{gr},349$
Poids du flacon contenant la substance .	20 ,624
Poids du flacon contenant la substance et rempli d'éther jusqu'au trait . .	63 ,604
Poids du flacon plein d'éther	61 ,299
Poids du flacon plein d'eau	77 ,092

La température étant égale à 4° centigrades, on demande d'établir, d'après les données précédentes, le poids spécifique de la substance.

(*Bacc. lettres-sciences, Constantine, juillet 1899.*)

Le poids de la substance est de $\;20,624 - 16,349 = 4^{gr},275.$

Le poids d'un égal volume d'éther est de

$$61,299 + 4,275 - 63,604 = 1^{gr},97.$$

Donc la densité de la substance par rapport à l'éther est exprimée par $\frac{4,275}{1,97}$.

Or l'éther remplissant le flacon a un poids de

$$61,299 - 16,349 = 44^{gr},95.$$

Le poids du même volume d'eau est de

$$77,092 - 16,349 = 60^{gr},743.$$

La densité de l'éther a donc pour valeur

$$\frac{44,95}{60,743}.$$

Par suite, le poids spécifique de la substance est de

$$\frac{4,275}{1,97} \times \frac{44,95}{60,743} = 1,6058.$$

(COUGNOUX, à Tulle.)

[Ont résolu la même question : MM. Arcizet ; Baudot ; E. Baudouin ; R. Bazin ; Belbenoit ; Bellencourt ; Boudier ; Bourrec ; M. Brun ; R. Charles ; J. Chemineau ; F. Collard ; J. Crétinon ; Creuze ; Daure ; Estang ; J Favier ; Fourmon ; Gillard ; Gondran ; E. Gourdon ; L. Grillet ; E. Gueudin ; J. Haag ; J. Haine ; Hamot ; Hébré ; Henry ; Jouffray ; H. Julien ; Lagarde ; Lajouanine ; A. Lecoutour ; R. Lemai ; Limasset ; David Lwow ; G. Luguet ; Malleret ; B. Mathé ; J. Maury ; A. Meynier ; F. Mengailhon ; Millet ; Nicod ; L. Nige ; R. Ollivier ; Patin ; Pendariès ; Pequignot ; E. Refusin ; M. Royer ; Treillou ; P. Valentin ; Vial ; Vialaret ; Vien ; Finoquet.]

4690. — *Deux personnes* A *et* B *se servent successivement de la même lunette pour viser les contours d'un astre tel que la Lune. On demande quelles sont les distances des deux lentilles qui forment l'objectif et l'oculaire de cette lunette astronomique au moment où chacune de ces personnes fait l'observation de cet astre, sachant que la première,* A, *est infiniment presbyte, c'est-à-dire susceptible de voir nettement les objets placés à une distance infiniment grande, et que la deuxième personne ne peut distinguer les objets que lorsqu'ils sont situés à une distance inférieure à 15^{cm}.*

Distance focale de l'objectif	$1^{m},20$
Distance focale de l'oculaire	30^{mm}.

(*Bacc. lettres-math., Montpellier, juillet 1899.*)

L'astre visé étant assez éloigné pour que les rayons qu'il envoie sur l'objectif puissent être considérés comme parallèles, son image par rapport à l'objectif est située au foyer principal de

cette lentille. Cette image fonctionne comme objet par rapport à l'oculaire, et donne une image virtuelle. Dans le cas de l'observateur A, l'image virtuelle ainsi produite doit se former à l'infini. Le foyer principal de l'oculaire coïncide alors avec celui de l'objectif, et la distance des deux lentilles est égale à la somme des distances focales, c'est-à-dire à

$$1^m,20 + 0^m,03 = 1^m,23.$$

Un myope devant accommoder la lunette pour la vision à la distance maxima de sa vision distincte, c'est-à-dire à 15^{cm}, il faut amener l'image virtuelle donnée par l'oculaire à se former à la distance de 15^{cm}. Si donc on désigne par x la distance de l'oculaire à l'image réelle fonctionnant comme objet, on a, d'après l'équation aux foyers conjugués,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{15} = \frac{1}{3},$$

d'où

$$x = 2^{cm},5.$$

La distance des deux lentilles sera donc égale à

$$1^m,20 + 0^m,025 = 1^m,225$$

dans le cas de l'observateur B.

(A. LE MOAL, à Morlaix.)

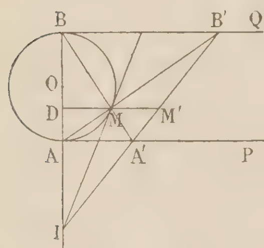
[Ont résolu la même question : Mlle R. Campana ; MM. R. Bazin ; F. Clabault ; J. Chemineau ; C. Croze ; Cry ; Duvergé ; Henry ; H. Julien ; J. Haag ; Lecoutour ; Le Maigre ; Maille d'Escomps ; Patin ; Pendariès ; R. Pequignot ; E. Refusin ; Rieux ; A. de St-Gabriel ; Vial ; Vien.]

CONCOURS DE 1899 *(suite)*

CERTIFICAT D'APTITUDE A L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES

Mathématiques.

4701 (*). — On donne deux droites parallèles AP, BQ, et un cercle O tangent à ces droites aux points A et B. Soit M un point quelconque du cercle O ; on mène les droites MA et MB qui coupent BQ et AP en B' et A', on trace la droite A'B', et on mène la perpendiculaire MD à AB.



1° Soit M' le point d'intersection de MD et de A'B' ; démontrer que l'on a MD = MM', et trouver le lieu du point M', quand le point M décrit le cercle O ;

2° Ce lieu est une ellipse E ; on la fait tourner d'un angle u autour de AB, et on l'amène ainsi dans une certaine position E' : déterminer l'angle u de manière que le cercle O soit la projection orthogonale de l'ellipse E' ;

3° Soit I le point d'intersection des droites AB, A'B' ; démontrer que la droite IM est tangente au cercle O et la droite IM' à l'ellipse E ;

4° Calculer la longueur MD, de manière que la surface totale du tronc de cône engendré par le trapèze ABB'A' tournant autour de AB soit équivalente à m fois la surface du cercle O (m désignant un nombre donné).

(10 juillet, de 8 h. à midi.)

Physique et Chimie.

I. — Réflexion du son ; ses conséquences. — Les rapprocher des phénomènes analogues observés dans les autres parties de la Physique.

II. — Comment prépare-t-on, au laboratoire, les acides chlorhydrique, bromhydrique et iodhydrique, gazeux ou dissous ?

(On remplacera les descriptions d'appareils par des croquis faciles à interpréter.)

(*) Les parties 1° et 3° ont déjà été traitées dans *L'Éducation Mathématique* (N° du 1er avril 1899, p. 109).

III. — Trois flacons A, B, C contiennent chacun un sel dissous dans l'eau pure. On vous propose d'y placer les étiquettes. Vous savez : qu'il y a un chlorure, un bromure et un iodure ; que les métaux sont le calcium, le baryum et le mercure, mais vous ignorez de quel sel fait partie chaque métal. Quels essais ferez-vous ?

(11 juillet, de 8 h. à midi.)

Histoire naturelle.

I. — Appareil respiratoire des Vertébrés ovipares et des Articulés.

II. — Caractères généraux des plantes monocotylédones. — Les Graminées ; parasites de ces plantes.

(12 juillet, de 8 h. à midi.)

QUESTIONS PROPOSÉES

4702. — Démontrer que, n étant entier et positif, l'expression

$$3^{3n+2} + 2^{n+4}$$

est toujours divisible par 25.

(A. SAINTE-LAGUE, lycée de Bordeaux.)

4703. — Démontrer que a^2+4 n'est jamais un carré parfait, a étant entier.

(A. LAUDET.)

4704. — Etant donnés deux trinomes du 2e degré

$$ax^2 + bx + c, \qquad a'x^2 + b'x + c',$$

montrer qu'il y a deux valeurs de λ pour lesquelles l'équation

$$ax^2 + bx + c + \lambda(a'x^2 + b'x + c') = 0$$

a ses racines égales. Discuter l'équation qui donne les valeurs de λ.

4705. — Étant donné un cercle de rayon α, on mène une sécante AB et les tangentes en A et B qui se coupent en C, puis on abaisse $OD = \beta$ perpendiculaire sur AB en D.

1° Calculer en fonction de α et β les rayons des cercles inscrit, circonscrit et exinscrit au triangle ABC.

2° Déterminer les valeurs de β pour lesquelles la somme de ces rayons a une valeur donnée. Discuter et considérer en particulier le cas où cette somme est minimum.

(Bacc. lettres-math., Montpellier, novembre 1899.)

4706. — Lieu des centres des cercles tangents à un cercle et à un diamètre fixe de ce cercle.

(Victor BAROL.)

4707. — Par les extrémités d'une corde AB d'un cercle O on mène deux droites qui déterminent dans un cercle concentrique les cordes CD, C'D'. Démontrer que les cordes CC' et DD' coupent AB ou son prolongement en deux points symétriques par rapport au milieu de AB.

4708. — Un corps de petites dimensions descend verticalement dans un tube rempli d'eau à 4° et dont la hauteur est 2^m. Partant sans vitesse initiale de la surface du liquide, il arrive au fond en 1 seconde et demi. On demande de trouver le poids spécifique de ce corps en supposant qu'on puisse considérer comme négligeable la résistance du liquide au mouvement.

(Bacc. lettres-sciences, Rennes, juillet 1899.)

4709. — Une lentille convergente, placée à 1^m d'un objet rectiligne perpendiculaire à son axe principal, en donne une image réelle longue de 25^{cm}. Placée à 50^{cm} de l'objet, elle fournit une image réelle encore et égale aux 2/3 de cet objet. On demande la distance focale de la lentille et la longueur de l'objet.

(Bacc. lettres-math., Dijon, juillet 1899.)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

24e Année. — N° 6. JOURNAL Paris, le 15 Décembre 1899.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.
Abonnements.. Librairie Nony et Cie, Boulᵈ St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

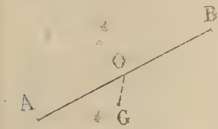
SUR LA THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DE LA BALANCE

La théorie élémentaire de la balance est généralement mal exposée et paraît aussi mal comprise par les candidats aux Écoles et aux différents diplômes. Il faut avouer que le sujet est habituellement négligé par les auteurs, ballotté entre les mathématiques et la physique et traité sans grand souci des principes essentiels de la mécanique. Quelques clichés sur l'horizontalité du fléau, la condition de justesse souvent additionnée d'une considération parasite relative à la position d'équilibre, et l'on passe à la question de la sensibilité. Celle-ci est presque toujours bien étudiée, parce qu'on est alors forcé d'appliquer enfin à la machine un raisonnement rigoureux.

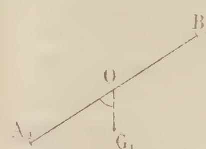
On a esquissé dans ce journal (*) une étude très brève de la balance romaine qui se présente, dans les cours, après celle de la balance ordinaire. Si simple que soit la théorie de cette dernière, il n'est peut-être pas inutile d'en rappeler aussi les points principaux.

Définition. — Cette balance est un levier (du premier genre) qui prend toujours la même position d'équilibre lorsqu'il est sollicité par des poids égaux quelconques, agissant chacun à l'une de ses extrémités.

Théorie. — Laissant de côté la description physique de l'instrument, on ne représentera du levier ou fléau qu'une droite supposée passant par le point (axe) fixe O et par les points d'application A et B des poids ou charges ; le centre de gravité du fléau est en G.



La position type d'équilibre sous des charges égales est immédiatement indiquée : c'est celle qui correspond à une valeur *nulle* de ces charges, c'est-à-dire la position d'équilibre du fléau seul (**). Comme tout corps pesant mobile autour d'un point fixe, ce fléau sera en équilibre lorsque son centre de gravité G sera venu en G_1 sur la verticale du point fixe O. Cet équilibre sera stable si G_1 est alors au dessous du point fixe. Pour qu'il puisse en être ainsi, il faut que le fléau soit placé de telle façon que G soit habituellement du même côté de AB que l'obstacle sur lequel repose l'arête du couteau fixe (***). La position correspondante de AB, qui sera la position type d'égalité des charges, se construit facilement en plaçant OG en OG_1, vertical, et traçant A_1B_1 de manière qu'il fasse avec OG_1 l'angle AOG, invariable dans le fléau.



Des poids égaux, agissant en A_1 et B_1, ne changeront pas cette position d'équilibre si l'on a $OA_1 = OB_1$, ou $OA = OB$, c'est-à-dire si les *bras* du fléau sont égaux. Réciproquement, si les bras du fléau sont égaux, l'équilibre dans cette position ne pourra être réalisé que sous des charges égales, car il faut alors que la résultante de ces poids passe par le point O.

Justesse de la balance. — Une balance est dite juste quand elle satisfait à sa définition, c'est-à-dire quand elle prend la même position d'équilibre sous des charges égales quelconques, et réciproquement. L'égalité des bras du fléau est, d'après ce que l'on vient de voir, la condition *unique* de justesse de l'instrument. Ainsi une balance dont les bras seraient l'un de fer et l'autre de bois, ou de matières et de formes différentes, serait rigoureusement juste, sous la condition d'égalité de ces bras.

Repère de la position type d'équilibre sous charges égales. — Comme il existe une infinité de positions d'équilibre sous charges *inégales* (*), il faut par quelque moyen reconnaître la position d'équilibre correspondant à l'égalité (ou à la nullité) des charges. C'est dans ce but que le fléau est muni d'une aiguille se déplaçant devant une portion de cercle gradué. On marque zéro devant la position de l'aiguille, déterminée une fois pour toutes, correspondant à l'équilibre d'égalité de charges.

Horizontalité du fléau. — Elle n'apparait nullement, à aucun moment de la théorie. Si cependant, en fait, cette horizontalité de A_1B_1 correspond approximativement à l'équilibre d'égalité, c'est que l'angle AOG est généralement voisin d'un droit, de telle sorte que OG_1 étant vertical, A_1B_1 est sensiblement horizontal. Deux raisons principales expliquent cette valeur de l'angle AOG : la première,



c'est que le constructeur, pour obtenir l'égalité des bras du fléau, est amené à construire un fléau homogène symétrique par rapport à une droite passant par O (petite diagonale du losange) ; la seconde, c'est que pour l'expérimentateur ne voulant pas s'astreindre à utiliser l'aiguille, la position horizontale du fléau est la plus facile à reconnaître. Mais rien n'astreint à s'imposer cette condition ; rien n'autorise non plus à l'introduire *a priori*. Rigoureusement, elle n'est jamais absolument satisfaite.

Poids des plateaux. — On laisse souvent de côté cette consi-

(*) *Journal de mathématiques élémentaires*, 15 novembre 1897.

(**) Cette proposition, presque évidente, montre la possibilité de réaliser la définition de l'instrument. On a admis *a priori* cette possibilité afin d'éviter de traiter ici le cas général des balances quelconques.

(***) C'est ce que l'on exprime souvent en disant que « le centre de gravité est au-dessous du point fixe ». On veut dire qu'il *peut y venir* sans que le fléau se renverse. De plus on joint cette condition physique de réalisation à celle de justesse, ce qui est peu justifié.

(*) Cela s'établit quand on traite algébriquement la question générale de l'équilibre, ou la sensibilité en particulier.

dération. Les plateaux ou bassins peuvent être exactement de même poids et alors rien n'est évidemment changé à ce qui précède. Mais il est beaucoup plus fréquent qu'ils soient de poids inégaux. Dans ce cas, la position d'équilibre de la balance, plateaux vides, n'est plus celle du fléau seul. AB prendra la position A_2B_2, parfaitement définie, mais différente de A_1B_1. Rien n'empêche de prendre cette position A_2B_2 comme position repérée : on y est même forcé si l'on ne veut pas modifier l'instrument ou le mode de pesée. Il suffit encore de marquer le zéro devant la position correspondante de l'aiguille. Il est évident que des poids égaux, placés dans les bassins, correspondront à cette position repérée si la condition de justesse $OA_2 = OB_2$ ou $OA = OB$ est encore satisfaite, et réciproquement.

Si l'on désire que cette position type A_2B_2 soit horizontale, on pourra surcharger d'une façon permanente l'un des plateaux. C'est ce que l'on fait couramment dans la pratique ; la justesse de la balance n'en est pas altérée. La condition de cette justesse est encore l'égalité des bras du fléau ; elle est toujours unique, nécessaire et suffisante.

D.

CONCOURS GÉNÉRAL DE SECONDE MODERNE (1899)

Mathématiques.

Solutions par M. **F. Labérenne**, professeur au lycée d'Orléans.

I. — **4695**. *Soit un prisme triangulaire dont la section droite* ABC *a pour côtés les longueurs données a,b,c. (On supposera $a > b > c$.)*

On considère la section plane AB'C', *telle que ce triangle soit équilatéral.*

1° *Evaluer le rapport* R *de* CC' *à* BB' ;

2° *Construire* B'C' *en supposant calculée la valeur numérique de* R ;

3° *Nombre de plans passant par* A, *qui coupent le prisme suivant un triangle équilatéral.*

1° *Evaluation du rapport* R *de* CC' *à* BB'.

Soit α le côté du triangle équilatéral, et posons $CC' = x$, $BB' = y$; nous avons

$$x^2 = \alpha^2 - b^2, \qquad y^2 = \alpha^2 - c^2,$$

d'où
$$y^2 - x^2 = b^2 - c^2, \tag{1}$$
$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{\alpha^2 - b^2}{\alpha^2 - c^2}. \tag{2}$$

Supposons d'abord les deux sommets B' et C' d'un même côté du plan BAC ; c étant par hypothèse inférieur à b, on a $CC' < BB'$, et par suite si par C' on mène la parallèle $C'C'_1$ à BC, C'_1 tombe dans l'intervalle BB' et l'on a

$$\alpha^2 = (y-x)^2 + a^2.$$

Remplaçons α^2 par l'expression

$$(y-x)^2 + a^2$$

dans la relation (2) ; il vient

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{(y-x)^2 + a^2 - b^2}{(y-x)^2 + a^2 - c^2},$$

d'où, en multipliant les deux membres par $y^2[(y-x)^2 + a^2 - c^2]$,

$$(y-x)^2x^2 + (a^2 - c^2)x^2 - (y-x)^2y^2 - (a^2 - b^2)y^2 = 0,$$

$$(y-x)^2(x^2 - y^2) + x^2(a^2 - c^2) - y^2(a^2 - b^2) = 0,$$

et en ayant égard à la relation (1),

$$(c^2 - b^2)(y-x)^2 + x^2(a^2 - c^2) - y^2(a^2 - b^2) = 0,$$
$$(a^2 - b^2)x^2 - 2(c^2 - b^2)xy + (c^2 - a^2)y^2 = 0.$$

Divisons les deux membres de cette dernière équation par y^2, il vient

$$(a^2 - b^2)\frac{x^2}{y^2} - 2(c^2 - b^2)\frac{x}{y} + c^2 - a^2 = 0,$$

de sorte que le rapport R de CC' à BB' est racine de l'équation du second degré

$$(a^2 - b^2)R^2 - 2(c^2 - b^2)R + c^2 - a^2 = 0. \tag{3}$$

Si B' et C' sont de part et d'autre du plan ABC, on voit aisément en menant la parallèle $B'B'_1$ à BC que l'on a

$$\alpha^2 = (y+x)^2 + a^2$$

et R est alors racine de l'équation

$$(a^2 - b^2)R^2 + 2(c^2 - b^2)R + c^2 - a^2 = 0, \tag{4}$$

qui n'est autre que l'équation aux racines changées de signes de l'équation (3) (*).

2° *Construire* B'C' *en supposant calculée la valeur numérique de* R.

Pour résoudre la question, il suffit de construire les deux longueurs BB' et CC'.

Comme nous connaissons R et que nous avons d'ailleurs la relation

$$\overline{BB'}^2 - \overline{CC'}^2 = b^2 - c^2,$$

nous sommes amenés pour construire BB' et CC' à résoudre le problème suivant : *Construire deux droites connaissant leur rapport* R *et la différence de leurs carrés* $b^2 - c^2$.

Après avoir construit deux droites m et n telles que

$$\frac{m}{n} = R,$$

nous menons par un point O deux droites rectangulaires Ox, Oy ; sur Ox nous prenons à partir de O, $OC = m$, m étant la plus petite des deux longueurs m et n ; du point C comme centre, avec n comme rayon, nous décrivons une circonférence qui rencontre Oy en B ; nous inscrivons ensuite dans l'angle OCB une droite D'E' parallèle à OB et égale à l'un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est b et l'autre côté c.

Ces constructions effectuées,

$$CC' = CE' \quad \text{et} \quad BB' = CD'.$$

3° *Nombre de plans passant par A qui coupent le prisme suivant un triangle équilatéral.*

Reprenons l'équation (3)

(*) On a là un cas particulier d'une loi très générale ; dans la première hypothèse les deux termes du rapport $\frac{CC'}{BB'}$ étaient de même sens, dans la seconde ils étaient de sens contraires. Or d'une façon générale (le rapport ou le produit) de deux segments portés soit sur une même droite, soit sur deux droites parallèles, est positif si les segments sont de même sens, et négatif s'ils sont de sens contraires. C'est pourquoi le passage d'une hypothèse à l'autre conduit à changer le signe de R dans l'équation primitive.

$$(a^2 - b^2) - 2(c^2 - b^2)R + c^2 - a^2 = 0. \qquad (3)$$

On a par hypothèse

$$a^2 - b^2 > 0, \qquad c^2 - a^2 < 0.$$

L'équation a donc deux racines distinctes et de signes contraires ; comme l'équation (4) n'est autre que l'équation aux racines changées de signes de l'équation (3), la racine positive de (3) convient au cas où les deux points B' et C' sont d'un même côté du plan ABC tandis que la racine négative prise en valeur absolue s'applique au cas où B' et C' sont de part et d'autre du plan ABC ; CC' devant être d'autre part inférieur à BB', la condition nécessaire et suffisante pour qu'une racine de (3) soit acceptable est qu'elle soit comprise entre -1 et $+1$.

Substituons -1 et 1 à R dans le premier membre de l'équation (3) ; le résultat de la substitution de -1 est

$$3(c^2 - b^2)$$

et le résultat de la substitution de 1,

$$b^2 - c^2.$$

Le coefficient $a^2 - b^2$ de R^2 étant positif, ainsi que $b^2 - c^2$, 1 est extérieur aux racines tandis que -1 est compris entre les deux racines ; la racine positive convient donc seule et il n'existe pas de plan passant par A coupant le prisme suivant un triangle équilatéral AB'C' de manière que B' et C' soient de part et d'autre du plan ABC.

Donc il existe deux plans P et P' passant par A et coupant le prisme suivant un triangle équilatéral, et il n'en existe que deux ; ces deux plans sont symétriques par rapport au plan ABC.

Remarque. — Il suit évidemment de là que par chacun des deux autres sommets B et C du triangle ABC, — et plus généralement par un point quelconque de la surface prismatique, — on peut mener deux plans qui coupent cette surface suivant un triangle équilatéral ; l'un de ces plans est parallèle à P et l'autre à P' ; de plus on n'en peut mener que deux, car si un plan non parallèle à P ou a P' coupait le prisme suivant un triangle équilatéral, on pourrait par le point A mener plus de deux plans coupant cette surface suivant un triangle équilatéral.

Un raisonnement analogue au précédent nous montre d'ailleurs qu'il existe deux plans et deux seulement passant par chacun des sommets B et C et coupant le premier suivant un triangle équilatéral.

[Ont résolu la même question : MM. V. Barol, à Vallauris ; G. Bieber, élève du collège Chaptal, lauréat du concours (1er accessit) ; R. Bouvaist ; Jacquet, lycée de Mâcon ; D. Lwow, élève à Piatra (Roumanie) ; H. Rimbaud, collège d'Ambert ; Vial, à Tournus.]

II. — **4696**. *Etant donné un triangle* ABC, *trouver un point* D *de son plan tel que la figure* ABCD *soit la projection sur ce même plan d'un tétraèdre régulier.*

(*Dans le tracé de l'épure, on prendra le triangle* ABC *rectangle en* A *et tel que l'angle* ABC *ait* $\sqrt{2}$ *pour tangente.*)

Ce problème est une application immédiate du précédent.

Le point D cherché est la projection sur le plan du triangle ABC du quatrième sommet d'un tétraèdre régulier dont une face A'B'C' est la section faite dans le prisme droit ayant pour base le triangle A, B, C et pour arêtes latérales les perpendiculaires menées au plan du triangle par les sommets A, B, C, par un plan qui coupe le prisme suivant un triangle équilatéral.

D'ailleurs tout plan qui coupe ce prisme suivant un triangle équilatéral étant parallèle à l'un ou à l'autre des deux plans P et P' menés par A et qui coupent la surface prismatique suivant un triangle équilatéral, il est aisé de voir qu'il n'existe sur le plan du triangle ABC que deux points qui répondent à la question.

Prenons le plan du triangle ABC pour plan horizontal de projection et menons par le sommet A le plan qui coupe la surface prismatique définie ci-dessus suivant un triangle équilatéral AB'C', les sommets B' et C' étant situés au-dessus du plan horizontal.

Pour construire la projection verticale du triangle AB'C', il nous faut connaître les cotes des points B' et C'.

Or les distances des points B' et C' au plan horizontal sont mesurées par les longueurs BB' et CC' considérées dans le problème précédent.

Reprenons donc l'équation (3)

$$(a^2 - b^2)R^2 - 2(c^2 - b^2)R + c^2 - a^2 = 0. \qquad (3)$$

Dans le cas particulier où le triangle ABC est rectangle en A et où $\operatorname{tg}\widehat{ABC} = \sqrt{2}$, on a $b = c\sqrt{2}$, $b^2 = 2c^2$, $c^2 = \frac{a^2}{3}$, $b^2 = \frac{2a^2}{3}$, et l'équation (3) devient, toutes réductions faites,

$$R^2 + 2R - 2 = 0.$$

La racine positive $R = \sqrt{3} - 1$ de cette équation convient seule.

On a donc $$\frac{CC'}{BB'} = \sqrt{3} - 1,$$

et d'autre part $$\overline{BB'}^2 - \overline{CC'}^2 = b^2 - c^2.$$

Épure. — Après avoir ainsi déterminé le rapport $\frac{CC'}{BB'}$ nous avons effectué les constructions suivantes pour déterminer le point D.

Construction du triangle ABC. — Nous prenons une portion de droite BC pour hypoténuse ; sur BC comme diamètre nous décrivons une circonférence ; nous menons le rayon OE de cette circonférence perpendiculaire à BC, et nous achevons le carré OEKB ; nous menons la diagonale OK, puis du point O comme centre, avec OK comme rayon, nous décrivons un arc de cercle qui rencontre le rayon OE prolongé au point F ; nous menons BF qui rencontre la circonférence décrite sur BC comme diamètre au point A et nous tirons AC et AB :

Le triangle BAC est rectangle en A et la tangente de l'angle ABC est égale à $\sqrt{2}$.

Construction de BB' *et de* CC'. — Sur AC comme diamètre nous décrivons une demi-circonférence ; du point A comme centre, avec AB comme rayon, nous décrivons un arc de cercle qui rencontre en G la demi-circonférence décrite sur AC comme diamètre. Dans le triangle rectangle AGC nous avons

$$\overline{CG}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AG}^2 = b^2 - c^2.$$

Nous construisons le côté CV du triangle équilatéral inscrit dans le cercle de diamètre BC ; nous prenons sur VC, à partir de V, une longueur VM égale au rayon du cercle ; nous avons alors

$$CM = BO \times (\sqrt{3} - 1).$$

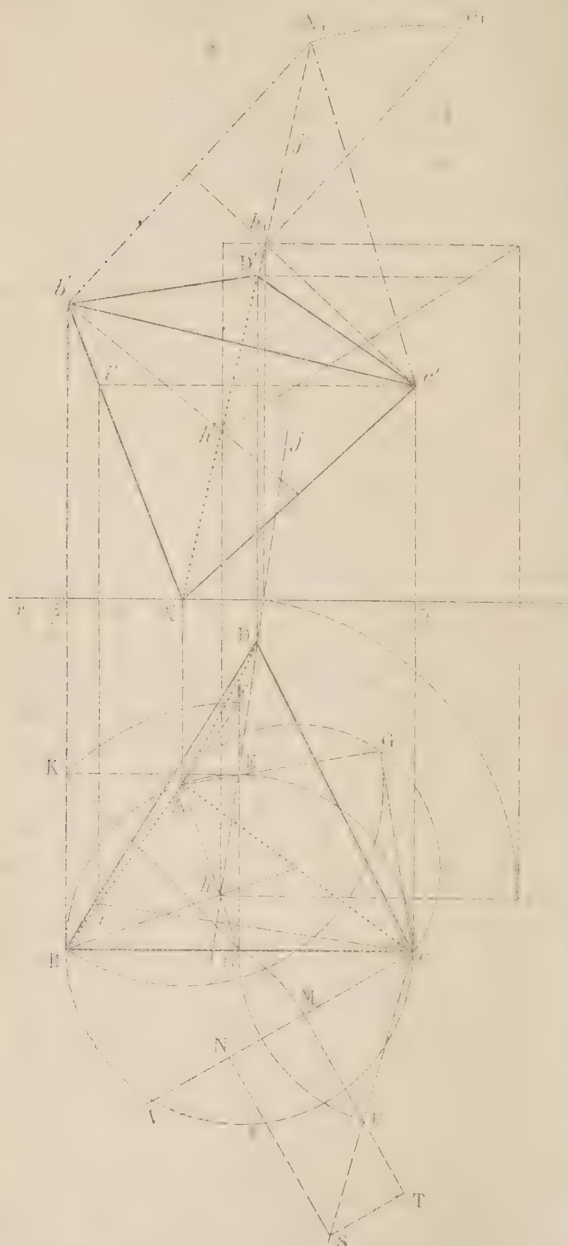
Au point M nous menons la perpendiculaire MU à CV et du point C comme centre, avec une longueur égale au rayon BO, nous décrivons un arc de cercle qui rencontre MU au point U ; nous inscrivons dans l'angle MCU, NS parallèle à MU et égale à CG. Ces constructions effectuées,

$$CC' = CN, \qquad BB' = CS.$$

Projections du tétraèdre régulier. — Nous avons pris la ligne de terre parallèle à BC ; une ligne de rappel donne en A', sur xy, la projection verticale du sommet (A, A') ; pour avoir la projection verticale du sommet (B, b') nous menons de B une ligne de rappel et nous prenons sur cette ligne, à partir de xy et au-dessus de xy, $\beta b' = CS$. Une construction analogue nous donne en c' $(\gamma c' = CN)$ la projection verticale du sommet C',

de sorte que la projection verticale du triangle équilatéral AB'C' est le triangle A'$b'c'$. BC étant parallèle à xy, la droite (BC, $b'c'$) est de front ; elle se projette en vraie grandeur sur le plan vertical et le triangle AB'C' se projette sur le plan vertical suivant un triangle isocèle ($b'A' = c'A'$).

Pour construire les projections du quatrième sommet Δ du tétraèdre régulier, nous rabattons le triangle AB'C' sur le plan de front qui passe par (BC, $b'c'$) ; pour obtenir le rabattement du



triangle, il suffit de construire le triangle équilatéral $b'A_1c'$ dont un côté est $b'c'$. Nous construisons ensuite le centre h_1 du triangle équilatéral $b'A_1c'$; h_1 est le rabattement du pied H de la perpendiculaire ΔH abaissée du quatrième sommet Δ sur la face AB'C' ; les projections horizontale et verticale du point H sont les points de concours h et h' des médianes des triangles BAC et $b'A'c'$.

Nous avons construit en h_1D_1 la longueur de la perpendiculaire ΔH.

Pour achever l'épure, nous menons du point (h, h') la perpendiculaire (hj, $h'j'$) au plan AB'C' [$h'j'$ se confond avec A'A, et nous avons construit hj à l'aide de l'horizontale (ci, $c'i'$) du plan] ; nous prenons ensuite sur (hj, $h'j'$), à partir de (h, h'), une longueur égale à h_1D_1 en rabattant le plan qui projette (hj, $h'j'$) horizontalement sur le plan de front qui passe par (h, h').

Nous avons ainsi en (D, D') le quatrième sommet du tétraèdre régulier dont une face est le triangle AB'C' ; le point D ainsi déterminé répond à la question.

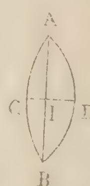
Sur l'épure, nous avons figuré les projections du tétraèdre avec la ponctuation, laquelle n'offre aucune difficulté.

Le second point D qui répond à la question est la projection sur le plan du triangle BAC du symétrique de Δ par rapport au plan AB'C'.

Dans le cas particulier où le triangle ABC serait équilatéral, les deux points D se confondraient avec le centre du triangle ABC et les deux plans P et P' avec le plan ABC.

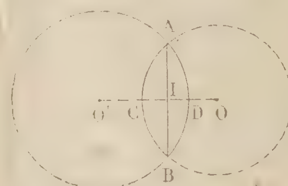
[Ont résolu la même question : MM. G. Bieber, élève du collège Chaptal, lauréat du concours (1er accessit) ; R. Bouvaist, école Ste-Geneviève ; Jacquet, lycée de Mâcon ; D. Lwow, à Piatra (Roumanie).]

ALGÈBRE



4688. — *Une lentille biconvexe a pour épaisseur* $CD = 2a$; *le cercle qui limite les calottes dont elle est formée a pour rayon* $IA = r$; *le volume de la lentille est* $\frac{1}{6}\pi m^3$. *Former l'équation qui donne les rayons des sphères auxquelles appartiennent les calottes, et discuter cette équation.*

Soient x et y les rayons des deux sphères O et O' considérées. On a



$$r^2 = CI(2x - CI),$$
$$r^2 = DI(2y - DI),$$

d'où

$$x = \frac{r^2 + \overline{CI}^2}{2CI}, \quad y = \frac{r^2 + \overline{DI}^2}{2DI}. \quad (1)$$

On a aussi

$$\text{vol. ACB} = \frac{1}{6}\pi CI(\overline{CI}^2 + 3r^2),$$

$$\text{vol. ADB} = \frac{1}{6}\pi DI(\overline{DI}^2 + 3r^2),$$

ou, en ajoutant,

$$\frac{1}{6}\pi[CI(\overline{CI}^2 + 3r^2) + DI(\overline{DI}^2 + 3r^2)] = \frac{1}{6}\pi m^3,$$

ou

$$\overline{CI}^3 + \overline{DI}^3 + 3r^2(CI + DI) = m^3.$$

Or

$$CI + DI = 2a,$$

$$\overline{CI}^3 + \overline{DI}^3 = (CI + DI)^3 - 3CI.DI(CI+DI)$$
$$= 8a^3 - 6aCI.DI ;$$

donc

$$8a^3 - 6aCI.DI + 3r^2(CI + DI) = m^3,$$

d'où

$$CI.DI = \frac{8a^3 + 6ar^2 - m^3}{6a}.$$

Connaissant CI + DI et CI.DI, on en déduit $x + y$ et xy au moyen de (1) ; on trouve ainsi

$$x + y = \frac{a(8a^3 + 12ar^2 - m^3)}{8a^3 + 6ar^2 - m^3},$$

$$xy = \frac{(m^3 - 8a^3)^2 - 48a^4r^2}{24a(8a^3 + 6ar^2 - m^3)}.$$

Vu la complication de ces expressions, il est préférable de dis-

cuter l'équation

$$X^2 - 2aX + \frac{8a^3 + 6ar^2 - m^3}{6a} = 0,$$

qui fournit les valeurs de CI et DI.

Remarquons tout d'abord qu'à un système de valeurs réelles et positives de CI et DI correspond un système de valeurs réelles et positives de x et y.

Il suffit donc d'exprimer que l'équation précédente a ses deux racines réelles et positives, ce qui conduit à la double inégalité

$$2a(a^2 + 3r^2) \leqslant m^3 \leqslant 2a(4a^2 + 3r^2).$$

Suivant que l'on donne à m^3 sa valeur minimum ou sa valeur maximum, la lentille a ses deux faces convexes égales ou devient plan-convexe.

(L. OLLIÉ, à Auch.)

[Ont résolu la même question : MM. C. Billionnet ; R. Bouvaist ; Donnadieu ; Finoquet ; R. Gallice ; A. Gérardin ; H. Julien ; J. Lehmann ; D. Lwow ; Thérézien ; G. Marcellin ; M. B., à M. V.]

4698. — *Démontrer que si x est un nombre entier positif, les nombres*

$$10x^2 + 5x, \qquad 8x^2 + 4x + 1, \qquad 6x^2 + 7x + 1$$

peuvent représenter les côtés d'un triangle qui a tous ses angles aigus, et dont la surface est représentée par un nombre entier.

Posons

$$a = 10x^2 + 5x, \qquad b = 8x^2 + 4x + 1, \qquad c = 6x^2 + 7x + 1,$$

et comparons ces trois quantités. On a

$$a - b = 2x^2 + x - 1, \qquad a - c = 4x^2 - 2x - 1.$$

Ces deux différences sont positives dans l'hypothèse énoncée, puisque $x \geqslant 1$; donc a est le plus grand des trois côtés.

A ce plus grand côté correspond le plus grand angle, qui sera aigu si l'on a

$$a^2 < b^2 + c^2,$$

ou

$$(a - b)(a + b) < c^2,$$

ou

$$(2x^2 + x - 1)(18x^2 + 9x + 1) < (6x^2 + 7x + 1)^2,$$

ce qui peut s'écrire

$$(x + 1)(2x - 1).(3x + 1)(6x + 1) < [(x + 1)(6x + 1)]^2,$$

ou

$$(2x - 1)(3x + 1) < (x + 1)(6x + 1),$$

ou

$$8x + 2 > 0,$$

inégalité vérifiée pour toute valeur positive de x.

D'ailleurs, la condition $a < b + c$ étant visiblement remplie, le triangle existe toujours.

On a

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Or ici

$$p = \frac{a + b + c}{2} = 12x^2 + 8x + 1 = (2x + 1)(6x + 1),$$

$$p - a = 2x^2 + 3x + 1 = (x + 1)(2x + 1),$$

$$p - b = 4x^2 + 4x = 4x(x + 1),$$

$$p - c = 6x^2 + x = x(6x + 1).$$

Donc

$$S = \sqrt{4x^2(x + 1)^2(2x + 1)^2(6x + 1)^2}$$
$$= 2x(x + 1)(2x + 1)(6x + 1).$$

Cette valeur de S représente bien un nombre entier pour une valeur entière de x.

Dans le cas particulier $x = 1$, le triangle a ses côtés représentés par les nombres consécutifs 13, 14, 15 et sa surface par le nombre entier 84.

(L. OLLIÉ, à Auch.)

[Ont résolu la même question ; MM. V. Barol ; E. Baticle ; Bégué ; H. Belbenoit ; Billionnet ; E. Bon ; E. Cognet ; M. Coleil ; Croze ; M. Cry ; A. Cunin ; O. Destouches ; G. Foucry ; Gamard ; P. Givry ; M. Gondran ; R. Henry ; Hugonnier-Ginet ; A. Jouffray ; A. Lecoutour ; H. Lefèvre ; J. Limasset ; G. Luquet ; D. Lwow ; E. Malleret ; R. Manem ; G. Marie ; R. Mouzon ; A. Pequignot ; M. Petit ; P. Petit ; M. Petitjean ; R. Rives ; A. Sauvageon ; Sinoquet ; E. Sinturel ; P. Thonet ; F. Vérot ; Vial ; J. Lehmann.]

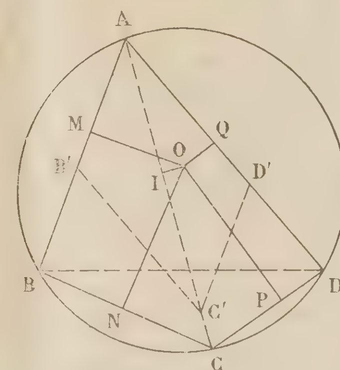
GÉOMÉTRIE

4120. — *Si par un point* O *pris dans l'intérieur d'un quadrilatère inscriptible* ABCD *on abaisse des perpendiculaires* OM, ON, OP, OQ *sur les côtés* AB, BC, CD, DA, *on a la relation*

$$AB.OP + CD.OM = AD.ON + BC.OQ.$$

Sur la diagonale AC prenons $AC' = BD$ et menons les parallèles C'B', C'D' à AD, AB.

La figure AB'C'D' est un parallélogramme dans lequel les triangles AB'C', C'D'A sont tous deux égaux au triangle DCB (un côté égal et les angles égaux).



Si l'on mène la perpendiculaire OI à AC, on a, en considérant AC' comme la résultante des deux forces AB', AD' et appliquant le théorème des moments :

$$AC'.OI = AB'.OM - AD'.OQ \ (*),$$

ou, comme

$$AC' = BD, \quad AB' = CD, \quad AD' = BC,$$

$$BD.OI = CD.OM - BC.OQ.$$

En appliquant le raisonnement fait sur l'angle BAD à l'angle analogue BCD, on aurait

$$BD.OI = DA.ON - AB.OP.$$

Donc

$$CD.OM - BC.OQ = DA.ON - AB.OP,$$

ou

$$AB.OP + CD.OM = AD.ON + BC.OQ.$$

C. q. f. d.

(E. MIGNOT à Pontarlier.)

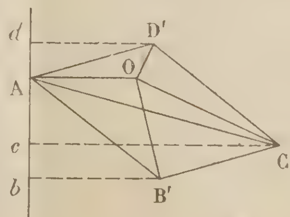
[M. Auguste Coland, du collège Saint-François Xavier, à Besançon, a résolu la même question.]

4483. — *On donne une circonférence* O *et sur cette circonférence trois points fixes* A, B, C. *On joint les points* B *et* C *à un point variable* D *de la circonférence, et par le point* A *on mène les parallèles à* DB *et* DC ; *soit* AEDF *le parallélogramme ainsi formé.*

(*) Cette relation revient à démontrer que dans le parallélogramme AB'C'D', on a

$$OAC = OAB' - OAD',$$

O étant un point quelconque situé dans l'angle C'AD'.



Or en projetant B', C', D' en b, c, d sur une perpendiculaire à AO, la relation devient

$$Ac = Ab - Ad$$

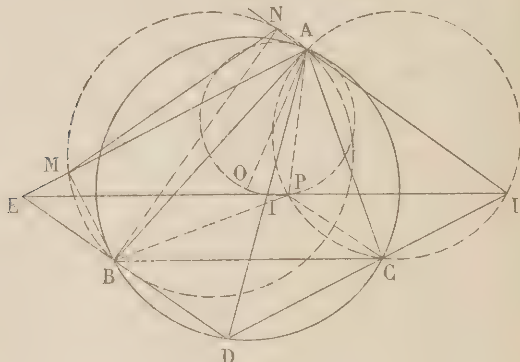
et comme $Ad = bc$, cette dernière est une identité.

1° *Prouver que la diagonale* EF *du parallélogramme passe par un point fixe* P ;

2° *On projette le point* B *en* M *et* N *sur* AE *et* AF *et le point* C *en* M′ *et* N′ *sur ces mêmes droites ; trouver l'enveloppe de chacune des droites* MN *et* M′N′.

3° *Supposant que le point* A *se déplace sur la circonférence* O, *trouver le lieu géométrique du point* P.

1° Le centre I du parallélogramme AEDC étant le milieu de la corde AD, décrit la circonférence de diamètre OA. Je dis que la diagonale EF coupe cette circonférence en un point fixe P. En effet, le triangle ADF est semblable au triangle CBA, puisque $\widehat{ADF} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{DFA} = 180° - \widehat{BDC} = \widehat{BAC}$ (ou $\widehat{DFA} = \widehat{BDC} = \widehat{BAC}$ si D est au-dessus de BC) ; donc le triangle ADF reste semblable à lui-même, de sorte que l'angle AIF formé par un côté et la médiane correspondante est constant ; cet angle étant inscrit dans le cercle OA y intercepte un arc constant AP, ce qui établit la fixité du point P.



2° Les points M et N sont situés sur la circonférence de diamètre AB. L'angle inscrit MBN ayant ses côtés perpendiculaires à ceux de DFA, la corde MN soustend un arc de grandeur constante et par suite enveloppe un petit cercle ayant son centre au milieu de AB.

On verrait de même que la droite M′N′ enveloppe un cercle ayant son centre au milieu de AC.

3° L'angle constant AFD a son sommet F sur un cercle de corde AC. Comme en outre l'angle inscrit AFI est aussi constant, la droite EF coupe la circonférence de ce segment en un point fixe, qui n'est autre que le point P déjà considéré. Le quadrilatère APCF est donc inscriptible, ainsi que son analogue AEBP. On peut donc écrire

$$\widehat{APB} = 180° - \widehat{AEB},$$

$$\widehat{APC} = 180° - \widehat{AFC},$$

ou, en ajoutant et observant que $\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = \widehat{BAC}$,

$$\widehat{APB} + \widehat{APC} = 360° - 2\widehat{BAC},$$

ou $$2\widehat{BAC} = 360° - (\widehat{APB} + \widehat{APC}) = \widehat{BPC}.$$

Le lieu du point P est donc un segment de base BC capable de l'angle $2\widehat{BAC}$ ou de son égal BOC ; cette dernière remarque montre que le point O appartient au lieu. Le point P, situé sur le cercle de diamètre OA, étant toujours intérieur au cercle O, l'arc BOC répond seul au lieu du point P.

(Ont résolu la même question : MM. L. Ecoffard, école primaire supérieure de Dôle ; M. Rebeix, lycée du Puy ; P. Tribier, à Guéret ; L. Troin, collège de Draguignan.)

4684. — *Étant donné un triangle* ABC, *on décrit sur* AB *et sur* AC *comme diamètres deux circonférences* D *et* E, *qui se coupent en* A *et en un second point désigné par* H :

1° *Comment le point* H *est-il situé par rapport au triangle ?*

2° *Par le point* A *on mène une droite quelconque coupant les deux circonférences respectivement en* I *et en* J. *Comparer les angles du triangle* HIJ *à ceux du triangle* ABC *et en conclure une relation entre ces deux triangles ;*

3° *Démontrer que, la droite* IJ *pivotant autour de* A, *les bissectrices des angles* I *et* J *font un angle constant et que chacune d'elles passe par un point fixe situé sur la droite* DE. *Lieu géométrique du centre du cercle inscrit dans le triangle* HIJ.

4° *Lieu géométrique du centre du cercle circonscrit au même triangle.*

(*École supérieure des Postes et des Télégraphes, 1899.*)

1° Les angles AHB, AHC étant droits, les points B, H, C sont en ligne droite et H est le pied de la hauteur issue de A.

2° Les angles AIH, ABH, inscrits dans le cercle D, sont égaux comme ayant même mesure si I est sur le segment HAB, ou comme supplémentaire d'un même angle si I est sur le segment qui complète la circonférence. De même

$$\widehat{AJH} = \widehat{ACH}.$$

Donc les triangles HIJ, ABC ayant les mêmes angles sont semblables.

3° Soit ω le point de rencontre des bissectrices des angles I et J. On a

$$\widehat{I\omega J} = 180° - \left(\frac{I}{2} + \frac{J}{2}\right)$$

$$= 180° - \frac{B+C}{2} = 90° + \frac{A}{2}.$$

$\left(\text{Si } \omega \text{ passe au-dessous de DE, } \widehat{I\omega J} \text{ devient égal à } 90° - \frac{A}{2}\right).$

Les bissectrices ωI, ωJ font ainsi entre elles un angle constant ; elles passent d'ailleurs par les milieux M, N des arcs fixes AMH et ANH. Il en résulte que le point ω, centre du cercle inscrit, décrit un cercle de corde MN. Lorsque I décrit la circonférence D, on voit facilement que ω décrit la circonférence MNH (H est un point du lieu correspondant au cas où, la droite AIJ devenant AH, le triangle HIJ se réduit au point H).

4° Le centre O du cercle circonscrit au triangle HIJ se trouve à l'intersection des perpendiculaires élevées aux milieux des côtés HI, HJ. Ces perpendiculaires passent visiblement par les centres D, E des deux cercles de la figure et font entre elles un angle égal au supplément de l'angle IHJ, c'est-à-dire à 180° — A si le point O est au-dessus de DE. L'angle devient égal à A si O est au-dessous de DE. Le lieu du point O est donc un cercle de corde DE. On reconnait sans peine que lorsque I décrit la circonférence D, le point O décrit la circonférence DEH.

(LALESCU, Lycée-Internat de Jassy.)

(Ont résolu la même question : MM. G. Armaingaud ; Barol ; Bazin ; H. Belbenoît ; C. Billionnet ; H. Blanc ; Boissonnet ; Bouvaist ; T. Brandhoff ; Bussière ; A. Cauvin ; Clabault ; Croze ; G. Delahaye ; Destouches ; Duverge ; G. Foucry ; E. Fourmon ; Gillard ; P. Givry ; M. Gondran ; Gourdon ; L. Grillet ; J. Hébré ; R. Henry ; Laly ; A. Larue ; L. Lassence ; Lecoutour ; C. Lefebvre ; H Lefèvre ; A. Le Moal ; D. Lwow ; B. Mathé ; J. Ménéchal ; E. Ménissier ; L. Ollié ;

Opresco ; P. E., à Vielmur ; L. Patin ; A. Pequignot ; M. Petitjean ; H. Pitrat ; Plisson ; Richard ; Rigaudière ; de Saint-Gabriel ; E. Sinturel ; P. Thonet ; L. Ventre ; Vial ; Vialaret ; E. Baudot ; A. Doué ; Jacquet.]

PHYSIQUE

4692. — *Le piston d'une pompe foulante a une surface de 30 décimètres carrés. La course du piston est de* 1^{m}. *On se sert de la pompe pour puiser dans un grand réservoir une dissolution saline dont la densité est 1,1 et pour refouler ce liquide à une hauteur de* 15^{m}.

On demande : 1° le poids de liquide refoulé à chaque coup de piston ; 2° le travail absorbé par chaque coup de piston.

(*Bacc. lettres-math., Paris, novembre 1899.*)

La pompe débite à chaque coup de piston un volume de liquide égal à la capacité du corps de pompe, c'est-à-dire égal à

$$30 \times 10 = 300^{dc}.$$

Le poids de ce liquide est de

$$1,1 \times 300 = 330^{kg},$$

ou

$$330 \times 981\,000 = 323\,730\,000 \text{ dynes}.$$

L'effort à développer pour faire descendre le piston est égal au poids d'une colonne de liquide ayant pour base le piston et pour hauteur la distance verticale du niveau du liquide dans le bassin à l'orifice du tube de refoulement. Cet effort a donc pour valeur

$$30 \times 150 \times 1,1 \text{ kilogrammes}.$$

En remarquant que le déplacement total du piston est de 1^{m}, le travail effectué est de

$$30 \times 150 \times 1,1 \times 1 = 4\,950 \text{ kilogrammètres},$$

ou, dans le système C.G.S.,

$$4\,950 \times \frac{98\,100\,000}{10^7} = 48\,559^{\text{joules}},5.$$

(B. MATHÉ, à St-Yorre.)

[Ont résolu la même question : MM. L. Barberot ; Belbenoit ; Billionnet ; M. Boesch ; M. Brun ; A. Collin ; Croze ; J. Crétinon ; M. Cry ; Daure ; Duvergé ; L. Eysséric ; G. Foucry ; de St-Gabriel ; M. Gondran ; Haag ; G. Hamot ; R. Henry ; Jacquet ; H. Joffré ; H. Julien ; Lajouanine ; A. Lecoutour ; J. Léauzon ; David Lwow, à Piatra ; Mengailhon ; L. Patin ; Pequignot ; Pichon ; Sauvageon ; L. Veyret ; Vial ; Vien ; Vige.]

4694. — *Un baromètre à tube cylindrique vertical, d'une section de* 3^{cq}, *contient une colonne de mercure de* 77^{cm} *de hauteur ; au-dessus la chambre barométrique vide a une capacité de* 24^{cc}. *On y introduit 1 centigramme d'air sec. La température étant 0°, on demande la nouvelle hauteur du mercure dans le tube au-dessus de la cuvette. Celle-ci est assez large pour que le niveau du mercure n'y varie pas sensiblement.*

(*Bacc. lettres-sciences, Paris, novembre 1899.*)

Le volume de l'air sec introduit dans la chambre barométrique est égal à

$$\frac{10^{mgr} \times 76}{1,293 \times 77} = 7^{cc},633.$$

Soit x la hauteur dont baisse le mercure après l'introduction de l'air sec. Le volume de cet air est $(24 + 3x)^{cc}$ et sa force élastique équivaut à la pression exercée par une colonne de mercure de x^{cm}. On a donc, en appliquant la loi de Mariotte,

$$7,633 \times 77 = x(24 + 3x),$$

d'où

$$x^2 + 8x - 195,91 = 0.$$

En écartant la racine négative qui ne peut être acceptée, on a

$$x = 10^{cm},55.$$

La nouvelle hauteur du mercure dans le tube au-dessus de la cuvette est donc de

$$77 - 10,55 = 66^{cm},45.$$

(L. EYSSERIC, à Lodève.)

[Ont résolu la même question : MM. Bégué ; Billionnet ; H. Blanc ; M. Boesch ; J. Bourrec ; A. Collin ; Croze ; G. Foucry ; M. Gondran ; Haag ; R. Henry ; H. Julien ; Lajouanine, à Clermont ; A. Lecoutour ; M. B. à M. V. ; B. Mathé ; E. Le Maigre ; P. Noel ; Pequignot ; M. Petit ; Pichon ; F. Pouget ; R. Rive ; A. Sauvageon ; Sinturel ; L. Veyret.]

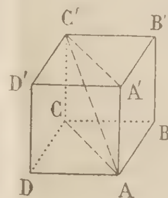
CONCOURS DE 1899 (*suite*)

ÉCOLE NATIONALE ET SPÉCIALE DES BEAUX-ARTS

SECTION D'ARCHITECTURE

Mathématiques.

I. — **4710.** Dans un parallélépipède rectangle ABCDA'B'C'D', les côtés AD, AB, AA' sont respectivement les côtés de l'hexagone, du carré, du triangle équilatéral, inscrits dans un cercle de rayon R :



1° Calculer le volume V et la diagonale du parallélépipède ;

2° On fait tourner le rectangle AA'C'C passant par les arêtes opposées AA', CC', autour de la parallèle menée par A' à la diagonale AC' ; calculer le volume V' et la surface S' du solide ainsi engendré ;

3° Calculer R par logarithmes sachant que $V = 0^{mc},034786$; mettre tous les calculs.

II. — **4711.** Réduire à la forme la plus simple possible l'expression

$$\frac{2x^2 - x}{2x^2 - 5x + 2} - \frac{63x^2 - 84x + 28}{(21x - 14)(2x - 3)} + \frac{mx}{4x - 5} + \frac{12 - 6x}{3x^2 - 12x + 12};$$

ceci fait, former et résoudre l'équation obtenue en égalant à $\frac{3m + 9}{2}$ l'expression trouvée ; mettre tous les calculs.

(*1re session, 27 avril. — Durée : 2 heures.*)

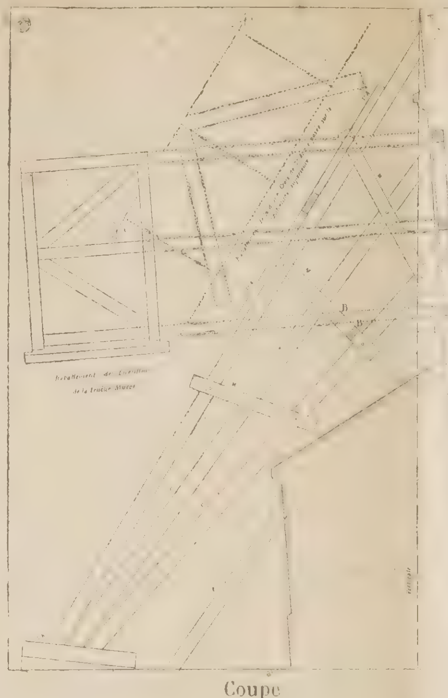
Géométrie descriptive.

Un bâtiment A, A menace ruine et présente un surplomb prononcé. Au pied de ce bâtiment est une autre petite construction en appentis, qui a subi le même déversement. Au-dessus du toit de l'appentis se trouve une fenêtre murée et étrésillonnée.

L'étaiement est constitué par deux batteries, chacune de trois contrefiches C, C reliées par trois couples de moises M, M, portant sur une couche Ch, et butant sur le mur déversé au moyen de cales c, c ; deux autres étais E, scellés dans le sol, soutiennent l'appentis. Les deux batteries de contrefiches et les deux étais E sont dans les plans verticaux

indiqués en élévation par les lignes marquées XC, XC_1, axes de chaque étaiement.

Enfin les deux contrefiches supérieures des deux batteries sont reliées l'une à l'autre par deux pièces de bois disposées en croix de Saint-André, marquées S^t-A sur la coupe, et dont il est donné un rabattement.



Coupe

Élévation

On donne également un rabattement des étrésillons de la fenêtre murée ;

BB épaisseur et écartement des moises, l'épaisseur des contrefiches étant égale à cet écartement ; DD largeur de la couche *Ch*.

1° Reproduire la coupe et compléter l'élévation par la projection de toutes les pièces de bois ;

2° Faire la projection horizontale au-dessous de la coupe et vue de haut en bas ; on placera la projection horizontale de la batterie dont l'axe est XC_1 à 9^{cm} du bas du cadre ;

3° Tracer toutes les ombres dans chacune des trois projections : coupe, élévation, projection horizontale ; ombres à 45 degrés.

Nota. — Les candidats sont priés de mettre au crayon ou à l'encre rouge toutes les lignes de construction.

Dimensions du cadre de l'épure : largeur 50^{cm}, hauteur 65^{cm}.

(*1re session, 28 avril. — Durée : 8 heures.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4712. — Trouver quatre nombres entiers consécutifs, sachant que leur produit est égal à 120. (H. Pitrat, à Givors.)

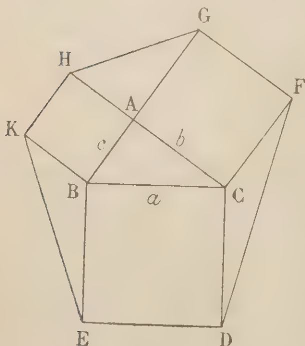
4713. — Démontrer que si les fractions $\frac{1}{D}$, $\frac{1}{D'}$, dont les dénominateurs sont premiers entre eux, donnent naissance à des fractions périodiques simples ayant chacune p chiffres à la période :

1° La fraction $\frac{1}{DD'}$ donne aussi une fraction périodique simple ayant p chiffres à la période ;

2° $D + D'$ divise $P + P'$, P et P' étant les nombres représentés par l'ensemble des chiffres de chaque période.

4714. — Résoudre l'équation

$$\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x-3)^2} = \sqrt[3]{(x-2)(x-3)}.$$



4715. — ABC est un triangle rectangle en A ; on construit les carrés BCDE, ACFG, ABKH et l'on mène les droites DF, GH, KE : connaissant le périmètre $2p$ du triangle ABC et la surface $2S^2$ du polygone EDFGHKE, trouver les côtés a, b, c du triangle. Discussion : le périmètre étant fixe, quelles sont les valeurs de a, b, c correspondant au maximum et au minimum de S^2 ?

(On pourra prendre pour inconnues auxiliaires la somme et la différence des côtés de l'angle droit.)

(*Bacc. lettres-math., Poitiers, juillet 1899.*)

4716. — Soient AD et BE les bissectrices des angles extérieurs en A et B d'un triangle ABC, ces bissectrices étant limitées aux côtés opposés.

1° Ces bissectrices peuvent être égales sans que le triangle soit isocèle ; la longueur du côté c est comprise entre les longueurs des côtés a et b. On a alors

$$\frac{1}{c-a} + \frac{1}{c-b} + \frac{c}{ab} = 0.$$

2° Si on donne b et c $(b < c)$, on trouve pour a une valeur acceptable et une seule.

3° Si on donne b et c $(b > c)$, qu'arrive-t-il ?

(G. Fontené.)

4717. — Démontrer que le produit des distances d'un point d'un cercle aux côtés d'un triangle inscrit est égal au produit des distances de ce point aux tangentes qui ont pour point de contact les sommets de ce triangle.

(C. Blanc, à Lyon.)

4718. — Construire un triangle connaissant les points où la médiane, la bissectrice et la hauteur partant d'un même sommet coupent le cercle circonscrit.

(Duvergé, lycée de Bordeaux.)

4719. — Étant données une circonférence O et une droite D, on décrit une circonférence ayant son centre O' sur D et coupant orthogonalement le cercle O. Trouver le lieu du milieu M de la corde commune aux circonférences O et O' lorsque O' décrit D.

(P. Le Verrier, lycée Janson.)

4720. — On chauffe $4^{gr},5$ d'acide oxalique bien sec avec de l'acide sulfurique concentré en excès. Les gaz dégagés, desséchés sur de la ponce sulfurique, sont entièrement recueillis sur le mercure. On demande :

1° Le volume total de gaz obtenu dans les conditions normales de température et de pression ;

2° La nature des gaz dégagés et leur proportion dans le mélange.

Données. — 1° Poids du litre d'hydrogène dans les conditions normales, $0^{gr},089$;

2° $\left\{\begin{array}{llll} \text{Poids atomiques :} & C = 12, & H = 1, & O = 16 ; \\ \text{ou équivalents :} & C = 6, & H = 1, & O = 8. \end{array}\right.$

(*Bacc. lettres-sciences, Aix, juillet 1899.*)

4721. — Une lentille convergente O et un miroir sphérique concave S ont pour axe commun la ligne OS. La lentille a une distance focale de 10^m. Le miroir a une distance focale de 2^m. La distance OS entre le miroir et la lentille est égale à 8^m. L'axe OS du système optique étant dirigé vers le centre du soleil considéré comme objet infiniment éloigné, et les rayons tombant d'abord sur la lentille O, on demande :

1° De construire l'image du soleil dans ce système optique et de tracer la marche physique des rayons lumineux ; 2° de calculer la distance de cette image au point O.

(*Bacc. lettres-math., Bordeaux, novembre 1899.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

TABLE DES MATIÈRES

Année 1898-1899

NOTES

Pages.

Numéros des questions

ARITHMÉTIQUE

Numéros des questions — Pages.

ALGÈBRE

GÉOMÉTRIE

Lieux géométriques.

TRIGONOMÉTRIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

MÉCANIQUE

PHYSIQUE

Problèmes sur la pesanteur et l'élasticité des corps.

Problèmes sur l'électricité.

Problèmes sur l'optique.

CHIMIE

EXAMENS ET CONCOURS

CONCOURS GÉNÉRAUX

ECOLES

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES

ENSEIGNEMENT PRIMAIRE

DIVERS

BACCALAURÉATS

	BACCALAURÉATS	
	LETTRES-MATHÉMATIQUES	LETTRES-SCIENCES
Alger. . . .	10	56, 71, 128, 136, 141
Tunis. . . .	15	
Bastia. . . .	48, 62	
Besançon . . .	40, 80, 103	40, 56
Bordeaux . . .	5, 16, 40, 45, 77, 136, 144	138, 144
Caen	28, 40, 76, 88, 103, 128, 138.	32, 47, 128, 143
Clermont . . .	16, 40, 55, 106, 122, 136	136
Dijon. . . .	120, 135	120, 135
Grenoble . . .	136	72, 96
Lille	15, 72, 88	136
Lyon	2, 24, 40	
Marseille . . .	31, 86	
Montpellier . .	2, 24, 96, 128, 136	112, 142
Nancy.		96, 112
Nice	32, 47	
Paris	63, 79, 80, 93, 104, 135	64, 104, 120, 127, 132
Poitiers. . . .	48, 62	
Rennes. . . .	5, 16, 30, 56, 72, 128, 139, 142, 144	88, 103
Toulouse . . .	21, 23, 24, 39, 120, 136, 144	

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet, Facdouel, Dir.

24e Année. — N° 7. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 1er Janvier 1900.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.

Abonnements.. Librairie Nony et Cie, Boul^d St-Germain, 63, PARIS.

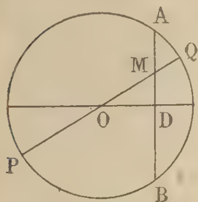
Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

SUR LES PROBLÈMES DE MAXIMUM ET DE MINIMUM

Il semble à propos de donner ici quelques remarques, d'ailleurs très simples et bien connues, relativement à l'application à divers problèmes des théorèmes généraux sur les maxima et minima. Car certaines de ces remarques répondent à des observations qui nous ont été faites à l'occasion de l'intéressant article de M. Girod, publié dans les numéros du 15 novembre et du 1er décembre.

1. D'abord nous ferons observer que les théorèmes sur les maxima et minima sont établis dans certaines conditions précises; or, dans les applications on peut trouver des problèmes comportant des conditions plus restrictives.

Pour préciser, donnons un exemple : *soit un cercle de rayon* R *et une corde* AB *à une distance* d *du centre; on mène un diamètre qui coupe la corde* AB *en* M *et le cercle en* P *et* Q; *trouver le maximum du produit* MP $\times$ MQ.



La somme MP + MQ est égale à 2R; d'après un théorème bien connu, le produit de deux facteurs dont la somme est constante est maximum lorsque les facteurs sont égaux. Mais le théorème en question ne suppose, relativement aux facteurs, rien autre que ceci : leur somme est constante. Tandis que dans le problème considéré, on voit tout de suite que la différence des deux facteurs doit être supérieure ou au moins égale à $2d$.

2. Il ne serait pas exact de dire que le théorème tombe en défaut; car au fond cette proposition équivaudrait à celle-ci : le théorème n'est pas toujours vrai. Ce que l'on peut dire, c'est que l'énoncé du problème contenant une restriction qui ne figure pas dans l'hypothèse correspondant au théorème général, la condition de maximum donnée par ce théorème n'est pas réalisable.

3. Mais on peut établir un théorème d'énoncé plus général, qui est le suivant : *Le produit de deux facteurs dont la somme est constante est d'autant plus grand que la différence des facteurs est plus petite.*

En effet, soit $2a$ la somme des facteurs; si on désigne par $2z$ leur différence, le produit est

$$a^2 - z^2.$$

Il est donc d'autant plus grand que z est plus petit.

Si, comme dans l'exemple cité plus haut, on a $z \geqslant d$, on voit que le maximum a lieu pour $z = d$.

4. Plus généralement, quand on a à trouver le maximum de $x^m y^p$, x et y étant liés par l'équation

$$x + y = a,$$

on sait que, lorsque x et y ne sont assujettis à aucune autre condition, le maximum du produit $x^m y^p$ a lieu si

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{p} = \frac{a}{m+p}.$$

Mais si cette condition n'est pas réalisable, x étant assujetti à varier dans un intervalle qui ne comprend pas $\frac{am}{m+p}$, la fraction considérée a la plus grande valeur possible lorsque la différence entre x et $\frac{am}{m+p}$ est aussi petite qu'il est possible, eu égard aux conditions du problème. Ce résultat s'obtient très facilement par l'emploi de la dérivée de

$$x^m(a - x)^p.$$

5. Nous terminerons en indiquant un moyen simple d'établir les réciproques des théorèmes de maximum.

Le théorème sur le maximum du produit

$$x_1 x_2 \ldots x_m,$$

lorsque

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = a,$$

les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_m$ étant positifs, se traduit par l'inégalité

$$x_1 x_2 \ldots x_m \leqslant \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}{m}\right)^m,$$

qui se transforme en égalité si

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_m. \qquad (1)$$

Cette inégalité montre que :

1° si $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ est donné, on a le maximum du produit des termes si les conditions (1) sont réalisées ;

2° réciproquement, si $x_1 x_2 \ldots x_m$ est donné, le minimum de la somme des facteurs (toujours supposés positifs) a lieu dans les mêmes conditions.

On peut établir d'une façon analogue les réciproques des autres théorèmes.

ÉCOLE NORMALE DE SÈVRES (1899)

4611. — *Etant donnés la racine carrée* A *d'un nombre entier à une unité près et le reste* R *de l'opération donnant cette racine, on demande quels sont, dans les divers cas possibles, le quotient et le reste de la division du nombre entier par sa racine* A.

Si N est le nombre entier, on a, par hypothèse,

$$N = A^2 + R,$$

le reste R étant au plus égal à 2A. Par suite, le quotient de N par A sera égal à A plus la partie entière de $\frac{R}{A}$ (si elle existe) et le reste sera celui de la division $\frac{R}{A}$. On est ainsi conduit à distinguer l'un des cas suivants :

1° $R = 0$,	le quotient est A	et le reste	0 ;
2° $0 < R < A$,	— A	—	R ;
3° $R = A$,	— $A + 1$	—	0 ;
4° $A < R < 2A$,	— $A + 1$	—	$R - A$;
5° $R = 2A$,	— $A + 2$	—	0.

(G. FOUCRY, école normale de Châlons-sur-Marne.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Arcizet, instituteur à Cransac ; A. Bouzy ; V. Chosson, instituteur à Romans ; L. Curt ; J. Fiton, instituteur à Agen ; L. Guilhem, à Saô-Paulo (Brésil) ; R. Henry, instituteur à Sainte-Savine ; H. Janois ; J. Ménéchal ; M. Oger ; L. Perrel ; A. Sordet ; Taurand ; H. Varennes.]

4612. — *Pour quelles valeurs de m l'équation du second degré en x*

$$x^2 - 2mx + 2m^2 + m - 6 = 0$$

a-t-elle des racines? Quels sont, suivant les cas, les signes de ces racines?

Pour que l'équation admette deux racines réelles, il faut et il suffit qu'on ait

$$m^2 - (2m^2 + m - 6) \geqslant 0,$$

ou

$$(m + 3)(m - 2) \leqslant 0,$$

inégalité vérifiée pour toute valeur de m comprise entre -3 et 2 :

$$-3 \leqslant m \leqslant 2.$$

Le signe des racines dépend de celui de leur produit :

$$2m^2 + m - 6 = 2(m + 2)\left(m - \frac{3}{2}\right).$$

Si $-2 < m < \frac{3}{2}$, ce produit est négatif et les racines sont de signes contraires. Si $-3 < m < -2$, ou $2 > m > \frac{3}{2}$, les racines prennent le signe de leur demi-somme, m.

Les conclusions précédentes peuvent se résumer ainsi :

$m < -3$,	pas de racines ;
$-3 < m < -2$,	deux racines négatives ;
$-2 < m < \frac{3}{2}$.	deux racines de signes contraires, la plus grande en valeur absolue étant du signe de m ;
$\frac{3}{2} < m < 2$,	deux racines positives ;
$m > 2$,	pas de racines.

(J. FITON, instituteur à Agen.)

[Ont résolu la même question : MM. V. Barol, école primaire supérieure de Lorgues ; Bouzy, caporal au 150e de ligne ; G. Broutin, lycée de Tourcoing ; A. Chapron, instituteur à Loudéac ; L. Curt ; H. Dodier, lycée de Laval ; E. Foucart ; G. Foucry, école normale de Châlons ; R. Henry, instituteur à Sainte-Savine ; H. Janois ; J. Lehmann, instituteur à Boufarik ; B. Mathé ; J. Ménéchal ; M. Oger, à Tours ; L. Patin, instituteur à Arvillers ; E. Séclin ; A. Sordet ; H. Taurand ; L. Troin ; H. Varennes.]

4613. — *Calculer les côtés d'un quadrilatère plan, convexe, sachant :*

que le périmètre du quadrilatère est $2p$,

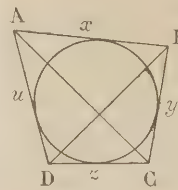
que la somme des carrés des côtés est $4a^2$,

que l'on peut inscrire un cercle dans le quadrilatère,

que les diagonales du quadrilatère sont rectangulaires.

Parmi tous les quadrilatères correspondant à des valeurs données de p et de a, quel est celui qui possède la plus grande surface?

Désignons par x, y, z, u les côtés consécutifs AB, BC, CD, DA du quadrilatère.



L'énoncé donne d'abord

$$x + y + z + u = 2p, \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 4a^2. \quad (2)$$

Le quadrilatère devant être circonscriptible à un cercle, on a, en vertu d'une propriété connue,

$$x + z = y + u. \quad (3)$$

D'après un lieu géométrique connu, les diagonales AC et BD seront rectangulaires si l'on a

$$x^2 - y^2 = u^2 - z^2,$$

ou

$$x^2 + z^2 = y^2 + u^2. \quad (4)$$

Des équations (1) et (3), (2) et (4), on déduit respectivement

$$x + z = y + u = p, \quad (5)$$

$$x^2 + z^2 = y^2 + u^2 = 2a^2. \quad (6)$$

Elevons maintenant chacun des membres des équations (5) au carré et retranchons du résultat les membres correspondants des équations (6) ; il vient, après division par 2,

$$xz = yu = \frac{p^2 - 2a^2}{2}. \quad (6')$$

Il résulte des équations (5) et (6') que x et z, y et u sont racines de l'équation

$$X^2 - pX + \frac{p^2 - 2a^2}{2} = 0, \quad (7)$$

ce qui entraîne

soit $x = y$, $z = u$; soit $x = u$, $z = y$.

Dans les deux cas, une des diagonales AC, BD divise la figure en deux parties symétriques

Discussion. — Pour que l'équation (7) fournisse pour x et z ou y et u des valeurs acceptables, il faut et il suffit que ses racines soient réelles et positives.

La condition de réalité est

$$p^2 - 2(p^2 - 2a^2) \geqslant 0,$$

ou

$$p \leqslant 2a.$$

Les deux racines ayant leur somme p positive seront positives en même temps que leur produit, c'est-à-dire lorsque

$$p^2 - 2a^2 > 0, \quad \text{ou} \quad p > a\sqrt{2}.$$

Le problème n'est donc possible qu'autant qu'on a

$$a\sqrt{2} < p \leqslant 2a.$$

Pour $p = 2a$, $x = z = y = u = a$; le quadrilatère devient un carré de côté a.

Pour $p = a\sqrt{2}$, deux des côtés x, y, z, u s'annulent ; le problème est impossible.

Maximum de la surface. — En nous plaçant par exemple dans le cas où $x = u$, $z = y$, le quadrilatère ABCD a une surface S double de celle du triangle ABC ; donc

$$S = xy \sin B,$$

ou, comme $xy = xz = \frac{p^2 - 2a^2}{2}$,

$$S = \frac{p^2 - 2a^2}{2} \sin B.$$

p et a étant supposés donnés, S atteint son maximum en même temps que $\sin B$, c'est-à-dire quand

$$\sin B = 1, \quad \text{d'où} \quad B = 90°.$$

Dans ce cas, le quadrilatère ayant les angles opposés B et D droits est inscriptible dans un cercle de diamètre

$$AC = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+z^2} = a\sqrt{2}\,;$$

la surface maximum du quadrilatère est alors égale à

$$S = \frac{p^2 - 2a^2}{2}.$$

D'après la discussion précédente, on peut remarquer que parmi toutes les valeurs de S correspondant à diverses valeurs de p, la plus grande correspond à $p = 2a$, le quadrilatère devenant dans ce cas un carré de côté a.

(H. JANOIS, à Neufchâtel.)

Remarque. — 1° Parmi tous les quadrilatères ayant des côtés donnés, celui qui a la plus grande surface est le quadrilatère inscriptible qu'on peut construire avec ces côtés. On pouvait trouver sans calcul le dernier résultat en profitant de cette remarque.

2° Dans le cas général, les côtés étant deux à deux égaux, le quadrilatère est circonscrit à *deux* cercles dont l'un est intérieur et l'autre extérieur.

[Ont résolu la même question : MM. E. Ardin-Delteil, à Montpellier ; R. Henry, instituteur à Sainte-Savine ; J. Ménéchal, instituteur au Bugue ; M. Oger, à Tours ; H. Varennes, à Deux-Chaises.]

4614. — *Un cube de fer, dont l'arête a 1 décimètre de longueur à 0°, flotte sur du mercure.*

On demande quelle est la valeur de la pression qu'exerce le mercure sur une des faces verticales de ce cube lorsque la température du mercure et du fer est 100°.

On donne :

La densité du fer à 0°, $d = 7,80$;

La densité du mercure à 0°, $\delta = 13,59$;

Le coefficient de dilatation absolue du mercure, $\mu = 0,00018$;

Le coefficient de dilatation linéaire du fer, $k = 0,000012$.

A 100° la longueur de chaque arête du cube devient $10^{cm}(1+100k)$ ou $10^{cm},012$, et la surface d'une des faces horizontales $\overline{10,012}^2 = 100^{cq},24$.

Le cube flottant dans le mercure subit de bas en haut une poussée verticale égale à son propre poids, qui est de 7800^{gr}, et égale aussi au poids du volume de liquide déplacé.

La densité du mercure à 100° est donnée par la formule

$$D_{100} = \frac{\delta}{1+\mu t},$$

d'où
$$D_{100} = \frac{13,59}{1,018} = 13,35.$$

Le volume de mercure déplacé est donc de

$$\frac{7800}{13,35} = 584^{cc},27.$$

Ce volume est aussi le volume de la partie du cube qui est immergée.

La hauteur de la partie immergée est de

$$\frac{584,27}{100,24} = 5^{cm},828.$$

La partie de la face verticale considérée peut être assimilée à la paroi latérale d'un vase. La pression supportée par cette partie est égale à $SH\delta'$, S représentant la surface pressée, H la distance verticale de son centre de gravité à la surface libre du liquide, δ' la densité du liquide à la température de l'expérience.

Cette pression vaut donc

$$10,012 \times 5,828 \times \frac{5,828}{2} \times 13,35 = 2269^{gr},925.$$

(J. MÉNÉCHAL, au Bugue.)

ARITHMÉTIQUE

4702. — *Démontrer que, n étant entier et positif, l'expression*

$$3^{3n+2} + 2^{n+4}$$

est toujours divisible par 25.

Première solution. — Transformons chacun des termes de l'expression ; on a successivement

$$3^{3n+2} = 3^{3n}.3^2 = 9.27^n = 9(25+2)^n = m.25 + 9.2^n,$$
$$2^{n+4} = 2^n.2^4 = 16.2^n = (25-9)2^n = m.25 - 9.2^n.$$

En ajoutant membre à membre les termes extrêmes de ces égalités, il vient

$$3^{3n+2} + 2^{n+4} = m.25.$$

C. q. f. d.

(H. JULIEN, à Origny-en-Thiérache.)

Seconde solution. — Pour $n = 0$, l'expression est précisément égale au diviseur 25. Pour étendre la divisibilité par 25 à une valeur quelconque de n, il suffit de montrer qu'en passant de la valeur n à la valeur suivante $n+1$, l'expression s'augmente d'un multiple de 25.

En effet, on a

$$3^{3(n+1)+2} + 2^{(n+1)+4} - (3^{3n+2} + 2^{n+4})$$
$$= 3^{3n+2}(3^3 - 1) + 2^{n+4} = 3^{3n+2}(m.25+1) + 2^{n+4}$$
$$= m.25 + (3^{3n+2} + 2^{n+4}) = m.25.$$

(J. LAMOTTE, lycée de Nantes.)

[Ont résolu cette question : MM[lles] G. Bruno ; D. P., à Phalempin ; J. Gravet ; E. Lazar ; MM. J. Aine ; A. Amblard ; M. Antoine ; A. Arcizet ; L. Artis ; L. Barberot ; V. Barol ; E. Baudoin ; H. Belbenoit ; C. Billionnet ; M. Boesch ; J. Bourrec ; R. Bouvaist ; J. Cabrol ; A. Caillet ; Carré ; F. Clabault ; E. Cognet ; F. Collard ; Y. Collin ; Couguoux ; M. Cry ; H. Damoiseau ; Daure ; O. Destouches ; Donnadieu ; H. Duchesne ; M. Dussouy ; Duvergé ; Estang ; G. Florescu ; G. Foucry ; S. Galland ; R. Gamard ; A. Gérardin ; J. Germa ; Gillard ; M. Gondran ; J. Haag ; R. Henry ; Jacquet ; H. Jaffré ; H. Janois ; Lajouanine ; T. Lalescu ; A. Lecoutour ; J. Lehmann ; A. Lelloa ; E. Le Maigre ; H. Lévy ; G. Luquet ; E. Malleret ; G. Marcellin ; C. Marie ; P. Marion ; B. Mathé ; M. B., à V. ; J. Ménéchal ; A. Meynier ; R. Mouzon ; P. Noël ; L. Ollié ; A. Pequignot ; M. Petit ; A. Pichon ; Pille ; H. Pitrat ; Raynaud ; C. Reboul ; E. Refutin ; L. Riat ; E. Rieux ; R. Rives ; M. Royer ; A. de Saint-Gabriel ; A. Sainte-Lagüe ; T. Sfintescu ; P. Sickler ; G. Sinoquet ; C. Thérézien ; L. Thiébert ; P. Thonet ; M. Treillou ; P. Valentin ; C. Vanier ; A. Vary ; F. Vérot ; Vial ; Vialaret ; Aubry ; Debenest ; A. Hardy ; P. Le Verrier ; Loignon ; Sinturel.]

4703. — *Démontrer que $a^2 + 4$ n'est jamais un carré parfait, a étant entier.*

Première solution. — Supposons en effet que a^2+4 puisse être le carré du nombre entier b. On aurait

$$a^2 + 4 = b^2,$$

ou
$$(b-a)(b+a) = 4.$$

Le nombre 4 n'étant décomposable en deux facteurs entiers que des deux manières suivantes : 1×4 ou 2×2, l'égalité précédente entraîne :

soit $b - a = 1$, $b + a = 4$, d'où $a = \frac{3}{2}$;

soit $b - a = 2$, $b + a = 2$, d'où $a = 0$.

Les deux valeurs obtenues pour a étant l'une fractionnaire, l'autre nulle, on en conclut que l'expression a^2+4 ne peut être carré parfait pour aucune valeur entière de a.

(RENÉ PAUCOT, lycée de Saint-Omer.)

Seconde solution. — Remarquons que si $a > 1$, a^2+4 est toujours compris entre les carrés consécutifs

$$a^2 \quad \text{et} \quad (a+1)^2.$$

Par suite, a^2+4 ne peut représenter un carré parfait dans le cas où a est un nombre entier autre que 1 ; il en est de même lorsque $a = 1$, comme on le vérifie directement.

(LOUIS THIÉBERT, lycée de Nancy.)

[Ont résolu cette question : Mlles G. Bruno ; J. Gravel ; MM. J. Aine ; A. Amblard ; d'Amphernet ; L. Artis ; L. Barberot ; H. Belbenoit ; C. Billionnet ; J. Bourrec ; R. Bouvaist ; A. Caillet ; Carpinetty ; J. Chemineau ; F. Clabault ; F. Collard ; A. Collin ; Cougnoux ; M. Cry ; H. Damoiseau ; Duvergé ; J. Erba ; Estang ; G. Foucry ; E. Fourmon ; J. Germa ; Gillard ; P. Givry ; J. Haag ; J. Hébré ; R. Henry ; A. Huet ; H. Jaffré ; H. Julien ; H. Janois ; Lajouanine ; T. Lalescu ; J. Lamotte ; A. Lecoutour ; J. Lehmann ; G. Luquet ; D. Lwow ; E. Malleret ; G. Marcellin ; P. Marion ; B. Mathé ; M. B., à V. ; J. Maury ; H. Ménielle ; A. Meynier ; F. Moreau ; R. Mouzon ; P. Noël ; L. Ollié ; J. Pendaries ; A. Pequignot ; Pertin ; M. Petit ; A. Pichon ; Raynaud ; C. Reboul ; E. Refutin ; R., à A. ; E. Rieux ; R. Rives ; M. Royer ; G. Sinoquet ; H. Tellier ; Q. Tuïssuzian ; P. Valentin ; C. Vanier ; A. Vary ; F. Vérot ; Vial ; Vialaret ; Vien ; L. Vige ; Debenest ; A. Hardy ; P. Le Verrier ; Loignon ; Sinturel.]

ALGÈBRE

4681. — *On donne deux axes rectangulaires xx', yy' se coupant au point* O. *Sur* Ox, *on prend un point* A *tel que* OA $= a$, *a étant une longueur donnée. Par ce point* A, *on mène la droite* zBAz', *coupant* Oy *au point* B, *et telle que l'angle* OAB *est égal à* 60°. *Soient* M *et* N *les points de rencontre de la droite* zBAz' *et de la circonférence qui, passant par le point* O, *a pour centre un point* C *(qui n'est pas marqué sur la figure) pris sur l'axe* $y'y$; *on pose* OC $= x$.

1° *Quelle valeur x_1 faut-il donner à x pour que l'angle* MON *soit égal à* 30° ?

2° *En appelant* CD *la distance du point* C *à la droite* zBAz', *déterminer x de telle sorte que l'on ait*

$$\overline{\text{MN}}^2 + \overline{\text{CD}}^2 = k^2,$$

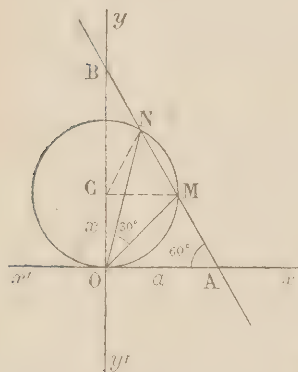
k étant une longueur donnée.

Discussion par rapport à k. Indiquer, en particulier, la position des points M *et* N, *par rapport aux points* A *et* B.

Applications : $k = a\sqrt{3}$ *et* $k = 2a\sqrt{3}$.

(Certificat d'aptitude au professorat des écoles normales, 1899.)

1° L'angle inscrit MON valant 30°, l'angle au centre MCN vaut 60° et le triangle MCN est équilatéral. Par suite, le triangle BMC ayant les angles en M et B complémentaires, est rectangle en C et a pour côtés



$$\text{CM} = x, \qquad \text{BM} = 2\text{CM} = 2x,$$
$$\text{BC} = a\sqrt{3} - x.$$

D'où l'équation

$$x^2 + (a\sqrt{3} - x)^2 = 4x^2,$$

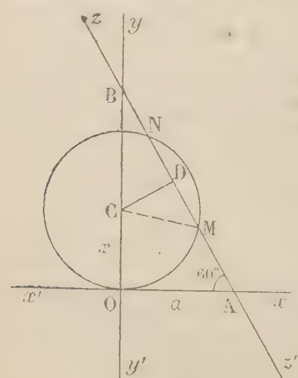
ou $2x^2 + 2a\sqrt{3}x - 3a^2 = 0$.

et, en résolvant,

$$x = \frac{a(\sqrt{3} \pm 3)}{2}.$$

Ces deux valeurs déterminent deux cercles C qui coupent AB en deux points M situés sur les bissectrices de l'angle droit xOy (le triangle MOC étant en effet rectangle isocèle).

2° Dans le triangle rectangle BCD, CD étant opposé à un angle de 30°,



$$\text{CD} = \frac{\text{BC}}{2} = \frac{a\sqrt{3} - x}{2} ;$$

d'ailleurs

$$\text{MN} = 2\text{DM} = 2\sqrt{x^2 - \overline{\text{CD}}^2}.$$

En égalant à k^2 la somme des carrés de ces valeurs, il vient

$$\frac{(a\sqrt{3} - x)^2}{4} + 4x^2 - (a\sqrt{3} - x)^2 = k^2,$$

ou, en simplifiant,

$$13x^2 + 6a\sqrt{3}.x - (9a^2 + 4k^2) = 0.$$

Discussion. — L'équation précédente ayant ses deux termes extrêmes de signes différents, admet deux racines réelles et de signes contraires. Pour que l'une de ces racines convienne au problème, il suffit qu'elle rende réelle la valeur de MN, c'est-à-dire qu'on ait

$$x^2 - \left(\frac{a\sqrt{3} - x}{2}\right)^2 \geqslant 0,$$

ou

$$(x + a\sqrt{3})(3x - a\sqrt{3}) \geqslant 0,$$

inégalité vérifiée pour

$$x < -a\sqrt{3}, \qquad \text{ou} \qquad x > \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Or en substituant $-a\sqrt{3}$ et $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ à x dans le premier membre de l'équation, on obtient

$$f(-a\sqrt{3}) = 4(3a^2 - k^2),$$
$$f\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4}{3}(a^2 - k^2).$$

Si $k^2 < a^2$, ces deux résultats sont positifs ou du signe du coefficient de x^2 ; les deux racines sont comprises entre $-a\sqrt{3}$ et $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ et ne peuvent convenir.

Si $a^2 < k^2 < 3a^2$, $f\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)$ devient négatif et $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ sépare les deux racines ; la racine positive est alors acceptable.

Si $k^2 > 3a^2$, les deux résultats deviennent tous deux négatifs ; $-a\sqrt{3}$ et $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ séparent les deux racines qui conviennent ici toutes deux.

Pour $k^2 = a^2$ ou $k^2 = 3a^2$, on a respectivement $x' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ou $x'' = -a\sqrt{3}$; les cercles C correspondants sont alors tangents à AB.

Position des points M *et* N *par rapport aux points* A *et* B. — Le cercle correspondant à la valeur négative de x étant tout entier du côté opposé à B par rapport à Ox, rencontre toujours AB en deux points placés sur Az'.

Le cercle correspondant à la valeur positive de x coupe AB en deux points situés entre A et B lorsque $x < \frac{\text{OB}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; dans le cas contraire, l'un des points est sur AB et l'autre sur Bz. En observant que

$$f\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{39a^2 - 16k^2}{4},$$

on voit que lorsque $k^2 < \frac{39a^2}{16}$, $f\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ est positif et $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ supérieur à la racine positive.

La discussion peut donc se résumer ainsi :

$k^2 < a^2$, 0 solution ;

$a^2 < k^2 < 3a^2$, 1 solution : M sur AB, N sur AB ou Bz suivant que $k^2 <$ ou $> \frac{39a^2}{16}$;

$k^2 > 3a^2$, 2 solutions : M sur AB et N sur Bz ; M' et N' sur Az'.

Applications. — 1° $k = a\sqrt{3}$. L'équation du problème est ici

$$13x^2 + 6a\sqrt{3}.x - 21a^2 = 0,$$

d'où

$$x' = -a\sqrt{3}, \qquad x'' = \frac{7a\sqrt{3}}{13}.$$

On a vu plus haut que dans ce cas le cercle correspondant à la

racine négative est tangent à AB ; l'autre cercle contient le point B, puisque $2x'' > a\sqrt{3}$.

2° $k = 2a\sqrt{3}$. L'équation du problème devient

$$13x^2 + 6a\sqrt{3}\,.\,x - 57a^2 = 0,$$

d'où $$x' = \frac{-19a\sqrt{3}}{13}, \qquad x'' = a\sqrt{3}.$$

L'un des cercles a son centre en B.

(L. CURT, à Thoissey.)

[Ont résolu la même question : MM. R. Bellencourt ; C. Billionnet ; G. Boissonnet ; A. Chapron ; F. Clabault ; R. Croze ; H. Damoiseau ; Donnadieu ; Fiton ; J. Haag ; R. Henry ; H. Julien ; A. Laudet ; A. Lecoutour ; H. Lefèvre ; J. Lehmann ; J. Maury ; M. B., à V. ; H. Miconnet ; L. Ollié ; A. Pequignot ; A. Pichon ; P. Plisson ; Tumerelle.]

4687. — *Dans un cône droit, on donne la hauteur h et la surface totale πm^2 ; calculer le rayon de base.*

(*Bacc. lettres-math., Besançon, juillet 1899.*)

En désignant par x le rayon de base AH, on doit avoir

$$\pi x^2 + \pi x \text{SA} = \pi m^2,$$

ou, en supprimant π et remplaçant SA par $\sqrt{x^2 + h^2}$,

$$x^2 + x\sqrt{x^2 + h^2} = m^2.$$

Isolons le radical :

$$x\sqrt{x^2 + h^2} = m^2 - x^2, \qquad (1)$$

puis élevons chaque membre au carré, nous aurons

$$x^2(x^2 + h^2) = (m^2 - x^2)^2,$$

ou $$x^2h^2 = m^4 - 2m^2x^2,$$

d'où l'on tire, en écartant la valeur négative,

$$x = \frac{m^2}{\sqrt{2m^2 + h^2}} = \frac{m^2\sqrt{2m^2 + h^2}}{2m^2 + h^2}.$$

Cette valeur réelle et positive de x ne convient à l'équation (1) qu'autant qu'elle est moindre que m, condition d'ailleurs toujours remplie, puisque l'inégalité

$$\frac{m^2}{\sqrt{2m^2 + h^2}} < m$$

revient à $$0 < m^2 + h^2.$$

Le problème est donc toujours possible et admet une solution unique.

(Léon BARBEROT, au Valdoie.)

[Ont résolu la même question : MM. André ; G. Armaingaud ; Artis ; Bameulle ; V. Barol ; Barreau ; E. Baudot ; E. Baudouin ; Belbenoit ; Bellencourt ; Billionnet ; Bourrec ; R. Bouvaist ; T. Brandhof ; M. Brun ; Carpinetty ; Cauvin ; Chaineau ; Chapron ; A. Charbonnier ; F. Clabault ; F. Collard ; Cougnoux ; J. Crétinon ; Croze ; Cry ; Damoiseau ; De France ; Desportes ; Destouches ; Donnadieu ; Duchesne ; A. Dupouy ; Duvergé ; Eysséric ; Estang ; J. Foucard ; Foucry ; Fourmon ; Gallice ; J. Gauthier ; Gérardin ; Gillard ; P. Givry ; M. Gondran ; E. Gourdon ; Grillet ; Gueudin ; J. Haag ; Hébré ; Henry ; A. Huet ; E. Istrasescu ; Jacquet ; Jouffray ; H. Julien ; Karkowski ; Lagarde ; Lajouanine ; Lalescu ; Lamotte ; G. Lallier ; Laly ; Laudet ; Lecoutour ; Le Maigre ; Le Moal ; Limasset ; Lwow ; Maille d'Escomps ; Malleret ; B. Mathé ; J. Maury ; Ménéchal ; Mengailhon ; E. Merle ; A. Meynier ; Millet ; Mouzon ; Nicod ; Noël ; Ollié ; Oprescu ; P. E., à Vielmur ; Palis ; Patin ; Pendariès ; Perdu ; J. Perl ; Reboul ; Refutin ; L. Richard ; Royer ; A. de St-Gabriel ; Sinturel ; C. Soulas ; H. Tellier ; Thérézien ; P. Valentin ; Vien ; R. Barthélemy ; P. Besseige ; M. Coleil ; J. Fiton ; R. Lemai.]

GÉOMÉTRIE

3333. — *Construire un triangle connaissant la base de grandeur et de position, la différence des angles adjacents et une droite contenant le troisième sommet.*

Première solution. — Supposons le problème résolu : soit ABC un triangle déterminé par la base BC, la différence $B - C = \alpha$ des angles à la base et la droite MN qui contient le sommet A.

On a, en posant $\widehat{BMN} = \beta$,

$$B = 180° - (\widehat{BAM} + \beta),$$
$$C = \widehat{CAM} + \beta,$$

ou $$\alpha = 180° - (\widehat{BAM} + \widehat{CAM}) - 2\beta,$$

ou, en observant que $\widehat{BAM} + \widehat{CAM}$ est égal à l'angle formé par AB avec la droite AC′ symétrique de AC par rapport à MN,

$$\widehat{BAC'} = 180° - \alpha - 2\beta.$$

L'angle BAC′ étant ainsi connu, le point A s'obtient en prenant l'intersection de la droite MN avec un segment capable de corde BC′. La seule condition de possibilité est

$$\alpha < 180° - 2\beta.$$

Le second point de rencontre du cercle ABC′ avec la droite MN se trouvant, dans le cas de figure considéré, à droite de la perpendiculaire élevée au milieu de BC, ne répond pas à la question.

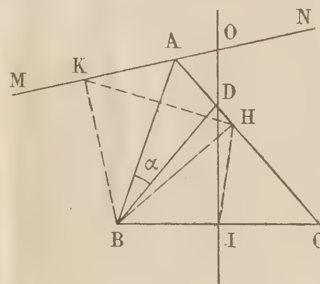
Lorsque $\widehat{BAC'} = 180°$, ce qui implique à la fois $\alpha = \beta = 0$, le segment capable se réduit à la droite BC′, dont l'intersection avec la parallèle MN à BC détermine un triangle isocèle qui donne la solution du problème dans ce cas particulier.

Pour traiter complètement le problème, il conviendrait de voir ce que devient la solution précédente suivant la position relative des points B, C, M entre eux et suivant la position du point A par rapport à la droite BC′. Nous laissons au lecteur le soin de faire cet examen qui n'offre aucune difficulté.

(P. LORTON, pensionnat des Frères maristes, à Marcigny.)

Seconde solution. — La perpendiculaire élevée au milieu I de BC coupe AC en un point D tel que $\widehat{DBC} = C$; donc

$$\widehat{ABD} = B - C = \alpha.$$



Nous allons montrer que lorsque l'angle constant ABD pivote autour de B, la projection H du point B sur AD décrit un cercle fixe.

En effet, joignons H aux points I, K, projections du point B sur les droites fixes OD, OA. Le quadrilatère BIHD est inscriptible dans un cercle de diamètre BD ; donc

$$\widehat{BHI} = \widehat{BDI} = 90° - \widehat{DBI} ;$$

de même $$\widehat{BHK} = \widehat{BAK} = 90° - \widehat{ABK}.$$

On en déduit par addition

$$\widehat{IHK} = 180° - \widehat{DBI} - \widehat{ABK}$$
$$= 180° - (\widehat{IBK} - \alpha)$$
$$= \widehat{MOI} + \alpha.$$

Le point H appartient ainsi à un cercle connu passant par les points fixes I et K ; comme il est d'ailleurs sur le cercle I de diamètre BC, il est complètement déterminé. En traçant ensuite la droite CH, sa rencontre avec MN donne le sommet A du triangle cherché.

(P. XAMBEU, collège Chaptal.)

Remarque. — Le problème revient à trouver l'intersection d'une

branche d'hyperbole avec une droite. Car le lieu des sommets des triangles ABC tels que la différence des angles B et C soit constante est une hyperbole qui passe par B et C, la branche passant par B correspondant aux points A tels que $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$.

[Ont résolu la même question : MM. J. Basset ; E. Blandre, à Bruxelles ; R. Boufti, à Saint-Jean-de-Luz ; L. Chenais ; M. Constandaki, école militaire de Jassy ; Dhavernas ; G. Delahaye ; Dubesset ; E. Foucart ; Gaetano Scorza, à Florence ; C. Grimpret ; L. Hédiard ; P. Laffon ; Tocci Lavangidreis, école industrielle de Fermo ; P. Lavie ; R. Masquart ; Mésenguy ; J. Poirier ; A. Radix ; Tarade ; Thomas ; F. Vallée.]

4421. — *Dans une ellipse on considère les points* H *et* H′ *situés sur le petit axe à la même distance c du centre.*

Démontrer que la somme des carrés de leurs distances à une tangente quelconque à l'ellipse est constante et égale à $2a^2$.

Soient F, F′ les foyers de l'ellipse, O son centre. Sur la perpendiculaire en O à FF′, prenons les points H, H′ tels que

$$OH = OH' = OF;$$

il s'agit de démontrer que les distances HK, H′K′ des points H, H′ à une tangente quelconque vérifient la relation

$$\overline{HK}^2 + \overline{H'K'}^2 = 2a^2.$$

Pour cela, projetons les points F, F′, O en D, D′, I sur la tangente et par H′, F′ menons à cette tangente des parallèles qui coupent respectivement HK en L, FD en M.

OI joignant les milieux des côtés non parallèles d'un trapèze, on a, entre les valeurs algébriques des segments de la figure, les relations

$$\overline{HK} + \overline{H'K'} = 2\overline{OI}$$

et

$$\overline{HK} - \overline{H'K'} = \overline{HK} - \overline{LK} = \overline{HL}.$$

Elevons ces deux égalités au carré et ajoutons ; il vient

$$2(\overline{HK}^2 + \overline{H'K'}^2) = 4\overline{OI}^2 + \overline{HL}^2.$$

Or

$$2\overline{OI} = \overline{FD} + \overline{F'D'},$$

et, en remarquant que les triangles HH′L, F′FM sont égaux,

$$\overline{HL}^2 = \overline{F'M}^2 = 4c^2 - \overline{FM}^2 = 4c^2 - (\overline{FD} - \overline{F'D'})^2.$$

Par suite

$$2(\overline{HK}^2 + \overline{H'K'}^2) = (\overline{FD} + \overline{F'D'})^2 - (\overline{FD} - \overline{F'D'})^2 + 4c^2$$
$$= 4\overline{FD}.\overline{F'D'} + 4c^2,$$

ou, en se rappelant que $\overline{FD}.\overline{F'D'} = b^2$,

$$\overline{HK}^2 + \overline{H'K'}^2 = 2(b^2 + c^2) = 2a^2.$$

La démonstration précédente subsiste lorsque l'ellipse est remplacée par une hyperbole, les points H et H′ étant alors pris sur l'axe non transverse.

(M. REBEIX, à Eygurande.)

[Ont résolu la même question : MM. L.-A. Blanc, à Clermont-Ferrand ; Ch. Szabo, école réale de Gyor (Hongrie) ; P. Vincent, école nationale d'Arts et Métiers d'Aix.]

4568. — *Etant donné un triangle* ABC, *on demande de déterminer sur les côtés* BC, CA, AB *des points* A′, B′, C′ *tels que le cercle* AB′C′ *ait un rayon donné* R *et soit coupé respectivement par les cercles* BA′C′ *et* CA′B′ *sous des angles donnés* α *et* β.

Remarquons d'abord que le second point M commun aux cercles AB′C′, BA′C′ appartient également au cercle CA′B′. En effet, on a

$$\widehat{A'MB'} = 4\,\text{dr.} - (\widehat{B'MC'} + \widehat{A'MC'}).$$

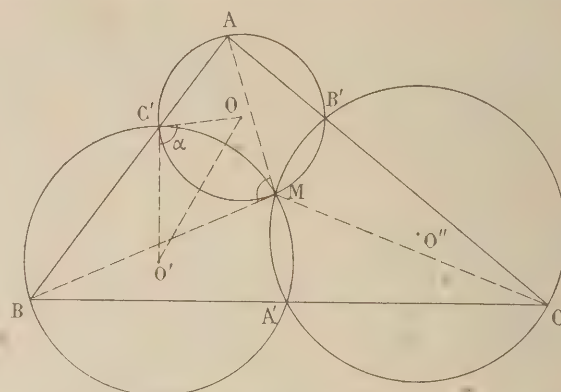
Or $\widehat{B'MC'} = 2\,\text{dr.} - A$ et $\widehat{A'MC'} = 2\,\text{dr.} - B$;

donc $\widehat{A'MB'} = A + B = 2\,\text{dr.} - C.$

C. q. f. d.

Cela posé, supposons le problème résolu. Soit M le point commun aux trois cercles AB′C′, BA′C′, CA′B′, dont les centres sont respectivement O, O′, O″.

L'angle OC′O′ ayant ses côtés perpendiculaires aux tangentes



en C′ aux cercles O, O′ est égal à l'un des angles α formés par ces tangentes ; d'ailleurs le triangle C′OO′ est semblable au triangle MAB, puisque $\widehat{O} = \widehat{A}$ et $\widehat{O'} = \widehat{B}$ (même mesure) ; par suite $\widehat{AMB} = \widehat{OC'O'} = \alpha$. On verrait de même que $\widehat{AMC} = \widehat{OB'O''} = \beta$. Le point M est donc à l'intersection de deux segments de cercles, de bases AB et AC et capables respectivement des angles α et β.

Connaissant alors deux points A, M du cercle O et son rayon R, on peut facilement déterminer ce cercle dont la circonférence coupe AB, AC aux points C′, B′. On en déduit ensuite le point A′ en décrivant l'un des cercles O′, O″ déterminés par trois points.

Comme il y a généralement deux cercles O, le problème comporte deux solutions distinctes.

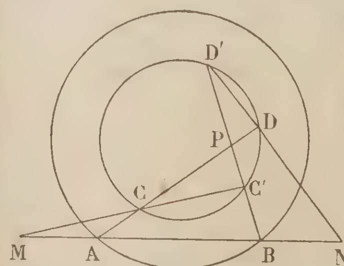
Pour que l'un des cercles O existe, il faut et il suffit qu'on ait $R \geqslant \frac{AM}{2}$; cette condition remplie, les cercles O′ ou O″ n'existent qu'autant que M ne tombe pas sur AB ou sur AC, ce qui implique α et $\beta < 180°$.

(P. LE VERRIER, lycée Janson-de-Sailly.)

[Ont résolu la même question : MM. J. Borgey ; E. Foucart ; Pelvoisin ; G. Tastet.]

4707. — *Par les extrémités d'une corde* AB *d'un cercle* O *on mène deux droites qui déterminent dans un cercle concentrique les cordes* CD, C′D′. *Démontrer que les cordes* CC′ *et* DD′ *coupent* AB *ou son prolongement en deux points symétriques par rapport au milieu de* AB.

Soient M, N les points de rencontre de AB avec les cordes CC′, DD′, et P le point d'intersection des cordes CD, C′D′.



Considérons le triangle PAB coupé par les deux transversales MCC′ et NDD′. En vertu du théorème de Ménélaüs, on a

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{CA}} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'P}} = 1,$$

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{DP}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{D'B}}{\overline{D'P}} = 1,$$

ou, en multipliant membre à membre,

$$\left(\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}\right)\left(\frac{\overline{CP} \cdot \overline{DP}}{\overline{C'P} \cdot \overline{D'P}}\right)\left(\frac{\overline{C'B} \cdot \overline{D'B}}{\overline{CA} \cdot \overline{DA}}\right) = 1.$$

Le second et le troisième rapport entre parenthèses, exprimant respectivement le rapport de deux puissances du point P ou des points A, B (équidistants du centre) par rapport au cercle concentrique, sont égaux à 1 ; donc

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = 1,$$

ou

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{NA}},$$

condition qui entraîne visiblement la symétrie des points M, N par rapport au milieu de AB.

(Paul THONET, athénée royal d'Anvers.)

[Ont résolu cette question ; MM. A. Amblard ; d'Amphernet ; R. Barthélemy ; H. Blanc ; R. Bouvaist ; F. Clabault ; A. Dussouy ; R. Henry ; Lajouanine ; M. B. à V. ; L. Ollié ; P. Petit ; F. Pouget ; E. Raüber ; C. Reboul ; H. Tellier ; L. Trapinaud ; M. Treillou ; D. Tuïssuzian ; Vial ; Bon ; Laly.]

PHYSIQUE

4708. — *Un corps de petites dimensions descend verticalement dans un tube rempli d'eau à 4° et dont la hauteur est 2ᵐ. Partant sans vitesse initiale de la surface du liquide, il arrive au fond en 1 seconde et demie. On demande de trouver le poids spécifique de ce corps en supposant qu'on puisse considérer comme négligeable la résistance du liquide au mouvement.*

(*Bacc. lettres-sciences, Rennes, juillet 1899.*)

Désignons par V le volume du corps, par x son poids spécifique.

Le poids du corps est Vx ; la poussée qu'il subit de la part de l'eau, $V \times 1$. Si le corps tombait librement, la force qui le solliciterait serait Vx ; la force qui le sollicite quand il est plongé dans l'eau a pour valeur $Vx - V = V(x-1)$.

Les forces étant proportionnelles aux accélérations qu'elles impriment, on a, en désignant par γ l'accélération du mouvement du corps dans l'eau,

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{V(x-1)}{Vx},$$

d'où

$$\gamma = g\frac{x-1}{x}.$$

D'un autre côté, on a

$$200 = \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

Remplaçons γ par sa valeur, il vient

$$200 = \frac{1}{2}\, g \times \frac{x-1}{x} \times t^2,$$

d'où

$$\frac{x-1}{x} = \frac{200 \times 2}{981 \times \overline{1,5}^2}$$

et

$$x = 1,221.$$

(J. LAVERDANT, à La Châtre.)

[Ont résolu la même question : Mˡˡᵉˢ M. D. P. ; J. Gravet ; Coralie Manea ; MM. A. Achard ; J. Aine ; d'Amphernet ; Arcizet ; Belbenoit ; Billionnet ; Bourrec ; G. Bruno ; Carpinetty ; A. Collin ; M. Cry ; Destouches ; Duchesne ; Dupouy ; G. Foucry ; J. Germa ; Gillard ; P. Givry ; M. Gondran ; Haag ; Henry ; Jacquet ; H. Joffré ; H. Julien ; Lajouanine ; Lecoutour ; Le Maigre ; G. Lemasurier ; F. Limouzi ; G. Luquet ; M. B., à V. ; P. Marion ; Maury ; Ménéchal ; Moreau ; Mouzon ; P. Noël ; R. Paucot ; Pequignot ; J. Perpère ; H. de la Perrelle ; Pertin ; Petit ; Pille ; R., à A. ; Raynaud ; Refutin ; R. Simon ; Sinoquet ; Soulas ; L. Thiébert ; P. Thonet ; M. Treillou ; Valentin ; Vialaret ; Vien ; Villain ; Aubry ; Bertagna ; Debenest ; Trapinaud.]

4709. — *Une lentille convergente, placée à 1ᵐ d'un objet rectiligne perpendiculaire à son axe principal, en donne une image réelle longue de 25ᶜᵐ. Placée à 50ᶜᵐ de l'objet, elle fournit une image réelle encore et égale aux 2/3 de cet objet. On demande la distance focale de la lentille et la longueur de l'objet.*

(*Bacc. lettres-math. Dijon, juillet 1899.*)

Appelons p' et p'_1 les distances de l'image à la lentille dans les deux cas.

L'équation aux foyers conjugués donne, dans le premier cas,

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \qquad (1)$$

et, dans le second,

$$\frac{1}{50} + \frac{1}{p'_1} = \frac{1}{f}. \qquad (2)$$

On a aussi, dans le premier cas,

$$\frac{25}{o} = \frac{p'}{100} \qquad (3)$$

et, dans le second,

$$\frac{\frac{2}{3}o}{o} = \frac{p'_1}{50}, \qquad (4)$$

d'où

$$p'_1 = \frac{100}{3}.$$

Cette valeur de p'_1, transportée dans (2), donne

$$\frac{1}{50} + \frac{3}{100} = \frac{1}{f},$$

d'où

$$f = 20^{cm}.$$

En portant cette valeur de f dans (1), il vient

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{20},$$

d'où

$$p' = 25^{cm}.$$

Enfin, cette valeur de p' transportée dans (3) donne

$$\frac{25}{o} = \frac{25}{100},$$

d'où

$$o = 100^{cm}.$$

La distance focale de la lentille est donc de 20ᶜᵐ, et la longueur de l'objet est de 1ᵐ.

(P. NOEL.)

[Ont résolu la même question : Mˡˡᵉˢ M. Degand ; J. Gravet ; MM. Arcizet ; Barol ; Barberot ; E. Baudoin ; F. Broc ; C. Billionnet ; Bourrec ; G. Bruno ; M. Chavet ; F. Clabault ; A. Collin ; Cry ; Destouches ; Duchesne ; E. Fourmon ; Foucry ; S. Galland ; A. de Saint-Gabriel ; A. Gérardin ; J. Germa ; P. Givry ; F. Grenier ; M. Gondran ; Haag ; R. Henry ; H. Julien ; Lagarde ; G. Lallier ; J. Lehmann ; A. Lecoutour ; T. Lemoyne ; David Lwow ; F. Limouzi ; Lajouanine ; J. Laverdant ; M. B., à V. ; Malassini ; Maubeck ; Marot ; Ménéchal ; Ménielle ; Marion ; Le Moal ; A. Meynier ; A. Le Maigre ; A. Mouzon ; Paucot ; M. Petit ; Pequignot ; J. Pendariès ; J. Perpère ; Raynaud ; E. Refutin ; Remondet ; E. Rieux ; Rives ; M. Reyer ; V. Sickler ; R. Simon ; P. Thiébaut ; P. Thonet ; Vachon ; P. Valentin ; Vary ; Vialaret ; Vien ; Aubry ; Bertagna ; Bon ; Debenest ; Duvergé ; Loignon ; Moreau.]

CONCOURS DE 1899 (*suite*)

CERTIFICAT D'APTITUDE A L'ENSEIGNEMENT DE LA COMPTABILITÉ

Aspirants et Aspirantes.

Commerce et Comptabilité.

1. — Lettres de crédit. — Ouverture de crédit. — Virements de compte.

II. — Une société industrielle émet à 90 °/₀ 5 000 obligations de 100^fr^ *nominal* rapportant 5 °/₀ d'intérêts remboursables par voie de tirage au sort en 7 années. L'annuité permet de rembourser :

Au 31 décembre	1892	614 obligations.
—	1893	645 —
—	1894	677 —
—	1895	711 —
—	1896	746 —
—	1897	784 —
—	1898	823 —

Les intérêts de l'amortissement sont payables à partir du 1er janvier de l'année suivante. On sait que les droits qui frappent les valeurs mobilières, sauf l'impôt du timbre payé par abonnement, sont à la charge de l'obligataire.

On demande de passer au Journal les écritures relatives à l'émission de cet emprunt passé ferme à une maison de banque le 10 mars 1892 et réglé comptant le 10 avril suivant ; à la dotation de l'intérêt et de l'amortissement payables en 1898, à partir du 1er janvier ; ces deux charges de l'emprunt sont imputées sur les frais généraux de l'exercice 1897, clos le 31 décembre. On sait d'ailleurs que ces frais généraux sont incorporés intégralement dans le prix de revient de la fabrication de la société ;

Au payement de l'intérêt et de l'amortissement ci-dessus ; on supposera que sur le nombre d'obligations restantes, 160 sont nominatives, les autres au porteur à la date du 31 décembre au soir, et que le cours moyen de l'obligation, en 1897, a été de 96^fr^.

On présentera, à la date du 10 juin 1898, les soldes des différents comptes relatifs à l'emprunt, en supposant que le dernier coupon est réglé sur 1 450 titres dont 50 nominatifs et le dernier amortissement sur 700 titres, et que rien ne reste dû au fisc.

Il n'existe aucun arriéré des coupons et amortissements des années antérieures.

Arithmétique appliquée au commerce (*).

I. — Une personne emprunte 10 000^fr^ à intérêts composés au taux de 4 °/₀.

Cette somme doit être remboursée en 8 ans par annuités, mais au bout de 5 ans l'intérêt du prêt est réduit à 3 1/2 °/₀.

On demande :

1° Quelle est la somme restant due sur les 10 000^fr^ à la fin de la 5e année ;

2° Quelle est l'annuité que l'emprunteur devra payer pendant les 3 dernières années.

II. — Un négociant doit à Saint-Pétersbourg 20 000 roubles argent.

Quel est pour lui celui des deux moyens suivants de se libérer qui est le plus économique :

1° Acheter à Paris du papier sur Berlin qu'il revendra à Berlin pour y acheter les 20 000 roubles sur Saint-Pétersbourg ;

2° Acheter à Paris du papier sur Amsterdam qu'il revendra à Amsterdam pour y acheter les 20 000 roubles sur Saint-Pétersbourg ?

Les cours des changes sont :

A Paris sur Berlin 123, 3 mois et 4 °/₀ d'escompte ;

A Paris sur Amsterdam 208 1/4, 3 mois et 4 °/₀ d'escompte ;

A Berlin sur Saint-Pétersbourg 160, 3 mois et 3 °/₀ d'escompte ;

A Amsterdam sur Saint-Pétersbourg 98, 3 mois et 2 1/2 °/₀ d'escompte.

QUESTIONS PROPOSÉES

4722. — Trouver un nombre X de trois chiffres qui divise le nombre des chiffres obtenus en écrivant la suite naturelle des nombres entiers de 1 à X.

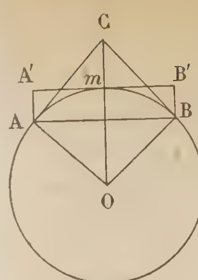
Généraliser.

(R. Manen.)

4723. — Décomposer en facteurs l'expression

$$(x+y+z)^5 - (y+z-x)^5 - (z+x-y)^5 - (x+y-z)^5.$$

(*) L'usage de la table des logarithmes n'est pas autorisé.



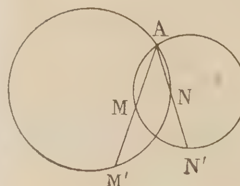
4724. — Couper une sphère de rayon R par un plan AB de telle sorte que le volume du secteur AmBO soit une fraction $\frac{1}{n}$ du volume du cylindre ABB'A'.

(*Bacc. lettres-math., Besançon, juillet 1899.*)

4725. — Démontrer que si A', B', C' sont les pieds des hauteurs d'un triangle ABC, on a

$$AB.AC' + BC.BA' + CA.CB' = AB.BC' + BC.CA' + CA.AB' = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

(Georges Delahaye, à Roye.)



4726. — On donne deux cercles qui se coupent en A. Par A on mène deux sécantes qui coupent les cercles en M, N, M', N'. Trouver le lieu du second point d'intersection des cercles qui passent par A, M, N, A, M', N'.

(H. R., collège Rollin.)

4727. — Etant donné un triangle ABC rectangle en A, on considère un point P variable sur l'hypoténuse. On trace le cercle passant par P et B dont le centre est en ω sur AB, puis le cercle passant par P et C dont le centre est en ω' sur AC. Ces deux cercles se coupent en P et P'.

1° Démontrer que P, P', ω, ω', A sont sur un cercle ;

2° Démontrer que ce cercle passe par un point fixe autre que A quand P varie ;

3° Trouver le lieu de P' ;

4° Trouver l'enveloppe de la droite ωω'.

(L. Ollié, à Auch.)

4728. — Si AC est le plus grand des deux segments d'une droite AB divisée en moyenne et extrême raison, on a

$$3\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2.$$

(A démontrer géométriquement.)

(J. Négrétzu, lycée de Craïova.)

4729. — Une éprouvette remplie de mercure repose sur la cuve à mercure à la température de 0° ; on y introduit 1^cc^ d'un certain gaz recueilli sur la cuve à eau à la température de 15° et à la pression de 75^cm^ de mercure.

L'éprouvette est cylindrique à base plane de 1^cm^ de diamètre intérieur ; la pression est normale ; la tension maximum de la vapeur d'eau à 0° et à 15° est 4^mm^,6 et 12^mm^,7 de mercure ; le coefficient de dilatation du gaz est $\frac{1}{273}$.

On demande le volume occupé par le gaz dans l'éprouvette :

1° Si la hauteur intérieure h de l'éprouvette au-dessus du niveau dans la cuvette est 1^cm^ ;

2° Si elle est 76^cm^.

On négligera la variation de niveau du mercure dans la cuvette.

(*Bacc. lettres-math., Lille, juillet 1899.*)

4730. — Une pile de force électromotrice E = 1^volt^,48 a une résistance intérieure r = 1^ohm^,3 et elle est fermée par un fil conjonctif de 2^ohms^ de résistance. Quelle est la différence de potentiel efficace V aux pôles ?

(*Bacc. lettres-sciences, Grenoble, juillet 1899.*)

Erratum. — Page 22, au bas de la solution 4653 : lire « la réciproque est vraie », au lieu de « n'est pas vraie ».

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

24e Année. — N° 8. JOURNAL Paris, le 15 Janvier 1900.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL....................	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.

Abonnements.. Librairie **Nony** et Cie, Boulᵈ St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

CONCOURS DE 1899

Mathématiques élémentaires.

4662. — 1° *On considère les coniques ayant une directrice fixe* D *et passant par deux points fixes* A *et* B. *Deux de ces coniques passent par un point donné* M *et se coupent en un nouveau point* M′ *qui est dit* associé *au point* M.

On demande d'étudier cette association et plus particulièrement :

a) De déterminer les points M *tels que les points* M′ *associés soient indéterminés ;*

b) De trouver le lieu des points M *tels que chacun d'eux soit confondu avec son associé.*

2° *Montrer que si le point* M *décrit une droite quelconque* Δ, *le point associé* M′ *décrit en général une hyperbole* Γ *dont on cherchera les asymptotes. Indiquer les régions de la droite* Δ *qui correspondent aux deux branches de l'hyperbole.*

3° *On suppose que la droite* Δ *est placée de telle sorte que la conique* Γ *devienne une parabole et on propose de trouver le lieu du foyer de cette parabole lorsque* Δ *se déplace en satisfaisant à cette condition.*

4° *On suppose que la droite* Δ *se déplace de telle sorte que les hyperboles* Γ *correspondantes aient une asymptote commune. On demande, dans ces conditions, de déterminer la courbe enveloppe des axes de symétrie de la conique* Γ.

I. — Nous allons d'abord démontrer que par trois points donnés A, B, M passent en général deux coniques ayant pour directrice une droite donnée D; chacune de ces courbes est déterminée d'une manière unique si l'on connait le foyer correspondant à la directrice donnée ; tout revient donc à déterminer ce foyer.

Si l'on donne d'abord deux points seulement A et B, et la directrice D, le foyer F correspondant (*fig.* 1) est tel que le rapport de ses distances aux deux points A et B soit le même que le rapport des distances Aa, Bb de ces deux mêmes points à la directrice, car on a

$$\frac{AF}{Aa} = \frac{BF}{Bb},$$

et, par conséquent,

$$\frac{FA}{FB} = \frac{Aa}{Bb}.$$

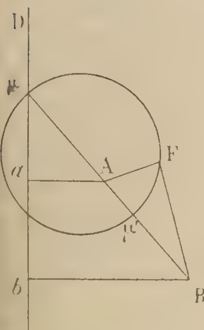


Fig. 1

Le lieu des points F satisfaisant à cette condition est une circonférence ayant un diamètre dirigé suivant la droite AB ; le point de rencontre μ de cette droite avec la directrice D est l'une des extrémités de ce diamètre, car la relation

$$\frac{\mu A}{\mu B} = \frac{Aa}{Bb}$$

indique que le point μ fait partie du lieu ; l'autre extrémité μ′ du diamètre dont on vient de parler est le point conjugué harmonique de μ par rapport à A et B.

Si l'on considère maintenant (*fig.* 2) les trois points A, B, M, et la directrice D, on déterminera les points de rencontre μ, β, α de cette droite avec les côtés du triangle ABM, et les points conjugués harmoniques μ′, β′, α′ de ces points par rapport aux sommets ; un foyer F cherché se trouvera à l'intersection de deux des circonférences de diamètres μμ′, ββ′, αα′ ; on voit qu'il existe en général deux points F et F′ répondant à la question.

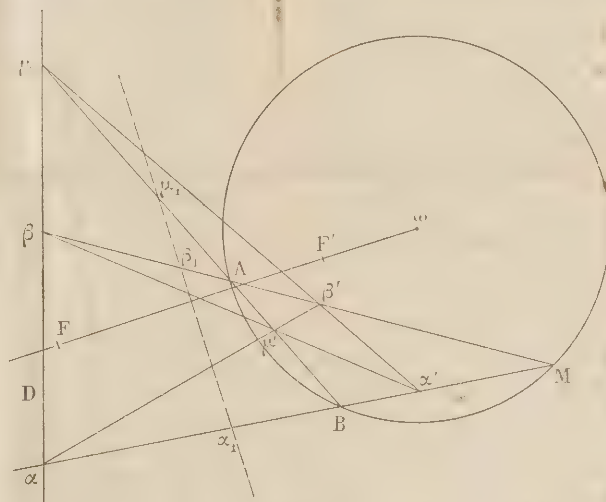


Fig. 2

Remarquons que les six points μ, μ′, β, β′, α, α′ sont les six sommets d'un quadrilatère complet dont ABM est le triangle diagonal et dont la directrice D est l'un des côtés ; les autres sont les droites μβ′α′, βμ′α′, αμ′β′ ; les points F et F′ sont les points communs aux trois cercles décrits sur les diagonales du quadrilatère comme diamètres et sont les points orthoptiques de ce quadrilatère. On peut ajouter que le cercle circonscrit au triangle ABM est orthogonal aux trois cercles précédents, que ceux-ci ont leurs centres μ_1, β_1, α_1 sur la droite de Newton joignant les milieux des diagonales du quadrilatère et qu'enfin F et F′ sont les points limites du système de cercles ayant avec le cercle ω circonscrit à ABM la droite $\mu_1\beta_1\alpha_1$ comme axe radical.

Les points F et F′, et par suite les deux coniques correspondantes, sont réels et distincts, imaginaires ou confondus suivant que la droite $\mu_1\beta_1\alpha_1$ ne coupe pas le cercle ω, le coupe en deux points distincts ou lui est tangente.

Pour que l'une des coniques répondant à la question soit décomposable, il faut et il suffit que le foyer correspondant soit situé sur D. Ce cas se présente lorsque les trois points A, B, M sont en ligne droite; il existe alors une seule conique passant par les trois points et ayant pour directrice la droite D, et cette conique est constituée par la droite ABM et par sa symétrique par rapport à D. Un autre cas de décomposition est celui où l'un des trois points est situé sur D, et où les droites qui le joignent aux deux autres sont symétriques par rapport à D.

II. — Plaçons-nous dans le cas où il passe deux coniques par les trois points A, B, M ; elles se coupent alors en un quatrième point M′ qui est toujours réel lorsque les trois premiers points communs A, B, M le sont, et cela quand même les deux coniques seraient imaginaires. Pour déterminer ce quatrième point M′, nous chercherons à former les couples de sécantes communes aux deux coniques; ces deux dernières ont mêmes directions d'axes, celle de la directrice et la direction perpendiculaire, et les points où ces courbes coupent la droite de l'infini sont conjugués harmoniques par rapport aux points à l'infini dans ces deux directions d'axes. D'après le théorème de Sturm, toutes les coniques passant par les quatre points communs aux deux premières jouissent de la même propriété et ont par conséquent leurs axes parallèles à ceux de ces deux courbes ; en particulier, les couples de sécantes communes sont tels que leurs bissectrices soient parallèles à la directrice et à la perpendiculaire à cette droite.

Fig. 3

Il résulte de là (*fig.* 3) que l'on obtiendra le point M′ en menant les deux droites BM′ et AM′ respectivement parallèles aux symétriques de AM et BM par rapport à la direction D. Les quatre points A, B, M, M′ sont sur une même circonférence ; pour le voir, il suffit de remarquer que les angles AMB et AM′B sont égaux et inscriptibles dans une même circonférence; on peut aussi le démontrer en se reportant à la figure 2 ; nous avons vu en effet que les foyers F et F′ des deux coniques sont conjugués par rapport au cercle circonscrit au triangle ABM ; ils le seront aussi par rapport au cercle circonscrit au triangle ABM′, par conséquent ces deux cercles doivent être confondus, et M′ est situé sur la circonférence passant par A, B, M.

Si l'on ajoute à cela que MM′ est constamment parallèle à la symétrique de AB par rapport à D, on voit que l'on peut donner de M′ une deuxième construction qui conduit au même résultat que celle que nous venons d'indiquer, et qui est la suivante : par les trois points A, B et M on fait passer une circonférence, et par M une droite parallèle à la symétrique de AB par rapport à D; le point M′ où cette droite rencontre de nouveau la circonférence est le point cherché.

Les deux constructions que nous venons de donner ne font intervenir que la direction de la directrice D et en aucune façon sa position. L'étude de l'association qui existe entre M et M′, étude qui constitue le problème actuel, peut dès lors être dégagée de toute considération relative aux directrices des coniques, et dans les paragraphes suivants nous ferons cette étude en prenant comme définition l'une ou l'autre des constructions que nous venons d'indiquer. Nous ferons cependant quelques remarques relatives à l'influence que peut avoir la position de la directrice pour le problème tel qu'il est posé.

Nous avons supposé dans ce qui précède que les trois points A, B, M et la directrice D déterminent deux coniques distinctes ; il existe alors un seul point M′, commun à ces deux coniques en dehors des trois premiers. Lorsqu'il n'y a qu'une seule conique satisfaisant aux conditions données, ou que les deux solutions sont confondues, tous les points de cette conique double peuvent être considérés comme étant des points communs M′ ; cela se présente dans trois cas :

1° Lorsque la droite de Newton $\mu_1\beta_1\alpha_1$ (*fig.* 2) est tangente au cercle circonscrit au triangle ABM ; les points M satisfaisant à cette condition forment une courbe d'ordre supérieur que nous n'étudierons pas, mais qu'il serait facile de construire point par point. La construction de la figure 3 ne donne cependant dans ce cas qu'un seul point M′ correspondant à chaque point M, et c'est ce seul point que nous ferons intervenir désormais.

2° Lorsque le point M se trouve sur la droite AB, en dehors des points A et B ; les deux coniques se confondent en une seule composée de AB et de sa symétrique par rapport à D ; tous les points de ces deux droites peuvent être considérés comme des points M′, mais la construction de la figure 3 donne un seul point à l'infini, que nous considérerons seul dans ce qui suit :

3° Lorsque D est bissectrice de l'angle AMB ou de son supplément ; les deux coniques se réduisent à une seule, constituée par les deux côtés de l'angle précédent, et tous les points de ces droites peuvent être pris comme points M′ ; mais la construction de la figure 3 ne donne qu'un seul point, que nous prendrons seul comme précédemment.

III. — Nous nous posons donc maintenant la question suivante :

Etant donnés deux points A et B et une direction D, à chaque point M du plan on fait correspondre un point M′ par l'une des constructions suivantes qui sont équivalentes : on trace par A et B deux droites AM′ et BM′ respectivement symétriques des directions BM et AM par rapport à D, leur point de rencontre M′ est le point associé de M ; ou bien on trace la circonférence passant par A, B et M, et par M on mène une droite symétrique de la direction AB par rapport à D ; le point M′ où elle coupe la circonférence est le point associé de M ; on demande d'étudier l'association des points M et M′.

Nous nous plaçons dans le cas où D n'est pas parallèle à AB.

1° On voit d'abord que cette association est réciproque, car le point associé de M′ n'est autre que M.

2° La transformée d'une droite quelconque Δ du plan est une conique passant par trois points fixes ; si l'on suppose en effet que M décrive la droite Δ, les deux faisceaux AM et BM sont homographiques ; les faisceaux AM′ et BM′ qui leur correspondent homographiquement jouissent de la même propriété, et M′ décrit une conique passant par les points A et B.

Lorsque le point M vient au point M_1 de rencontre de Δ et de AB (*fig.* 3), M′ est à l'infini dans la direction symétrique de AB par rapport à D ; ce point à l'infini, que nous appellerons C, appartient à toutes les coniques transformées de toutes les droites du plan. A deux droites Δ et Δ′ correspondent deux coniques qui ont en commun les trois points A, B, C et un quatrième point ; ce dernier est le point associé du point commun avec deux droites Δ et Δ′.

3° Lorsque M est situé sur un des côtés du triangle ABC, M′ reste confondu avec un des sommets ; à AB, AC, BC correspondent respectivement les sommets C, A et B.

4° Inversement, si M est en un des sommets du triangle, M′ est indéterminé sur un des côtés; aux points C, A, B, corres-

pondent respectivement les côtés AB, AC, BC ; ce sont du reste les seuls cas où un point ait une infinité de points associés. La conique transformée d'une droite Δ ne peut se décomposer que si cette droite passe par un des sommets du triangle ABC, la conique se compose d'un côté de ce triangle et d'une autre droite.

5° Il existe une infinité de points confondus avec leur associé ; pour qu'un point M satisfasse à cette condition, il faut et il suffit que les droites AM et BM aient des directions symétriques par rapport à D.

Le lieu des points M ainsi obtenus (*fig.* 4) est une hyperbole équilatère, comme cela résulte de l'homographie des faisceaux AM et BM ; les asymptotes de l'hyperbole sont l'une parallèle et l'autre perpendiculaire à D ; la courbe passe par A et B, et y a pour tangentes les côtés AC et BC, de sorte que le centre est le milieu de AB.

Fig. 4.

Toutes ces propriétés montrent que l'association des points M et M′ est une transformation de Cremona particulière ; c'est une transformation quadratique ayant comme points fondamentaux les points A, B et C en ce sens qu'à une droite correspond une conique passant toujours par ces trois points. Cette transformation jouit des mêmes propriétés que la transformation par rayons vecteurs réciproques ; nous allons même montrer qu'elle n'en diffère pas essentiellement, et que l'on passe de l'une à l'autre par une transformation homographique.

Supposons en effet que l'on considère l'association des points M et M′ telle qu'elle est définie par la deuxième construction, et qu'on transforme homographiquement le plan de façon que les points A et B deviennent les points cycliques a et b du plan transformé ; ceux du premier deviennent alors deux points i et j du nouveau plan ; soient c, m et m' les transformés de C, M et M′ (*fig.* 5). La circonférence ABMM′ se transforme dans une circonférence $ijmm'$, et la droite MM′, qui passe par C, se transforme dans une droite cmm' ; on obtient donc le point m' correspondant à m en prenant l'intersection de la circonférence mij avec la droite cm ; le point m' est donc le transformé de m par rayons vecteurs réciproques, c étant le pôle d'inversion et $ci \times cj$ en étant la puissance.

Fig. 5.

Dans la théorie de l'inversion, il existe une infinité de points confondus avec leurs inverses, et leur lieu est une circonférence de centre c, coupant la droite ij en des points conjugués par rapport à i et j ; cette circonférence correspond homographiquement à l'hyperbole équilatère que nous avons trouvée.

IV. — Nous avons vu que si M décrit une droite Δ, M′ décrit une conique circonscrite au triangle ABC ; elle a ainsi une première direction asymptotique AC ; on obtiendra la seconde en supposant que M s'éloigne à l'infini sur Δ ; M′ s'éloigne alors à l'infini dans la direction symétrique de Δ par rapport à D. Cette direction ne se confondra avec la première direction asymptotique que si Δ est parallèle à AB ; la conique deviendra dans ce cas une parabole et dans les autres cas elle sera une hyperbole.

Plaçons-nous d'abord dans le cas général, et cherchons les asymptotes de l'hyperbole Γ transformée d'une droite Δ ; nous savons que l'une des asymptotes est parallèle à AC et l'autre parallèle à la symétrique de Δ par rapport à D ; nous allons d'abord déterminer la première de ces deux asymptotes et démontrer qu'elle passe par le point M_1 de rencontre de AB et de Δ. Considérons en effet l'asymptote et la droite Δ ; nous savons que le point associé au point de rencontre de ces deux droites est le quatrième point commun aux deux coniques qui leur correspondent ; mais l'asymptote étant une droite parallèle à AC, sa transformée, comme on le voit immédiatement en appliquant la deuxième construction, est confondue avec elle-même ; pour être plus exact, sa transformée est une conique constituée par l'asymptote elle-même et par la droite AB, qui correspond tout entière au point C. Les deux coniques transformées ont en commun les points A et B et le point C qui compte double ; on en conclut que le point de rencontre de l'asymptote et de Δ est un point ayant C comme associé, et par conséquent se trouve sur la droite AB, ce que nous voulions établir.

On tracera donc par le point M_1 (*fig.* 6) une parallèle M_1C_1 à

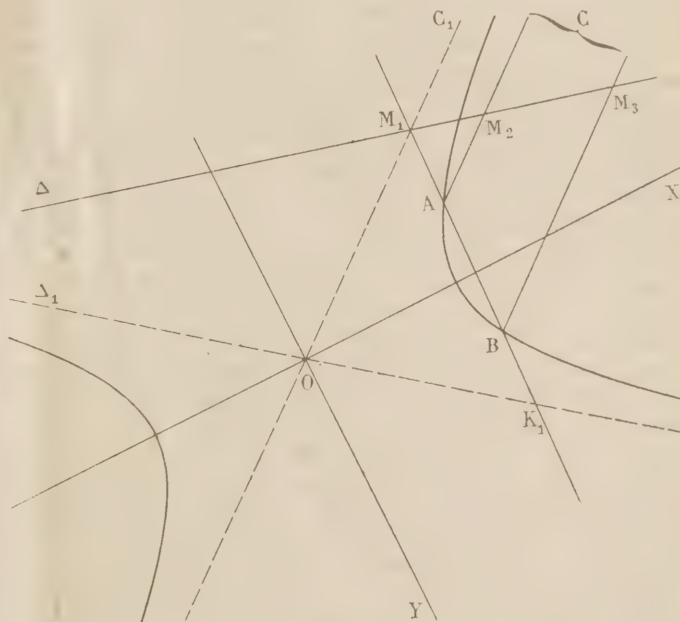


Fig. 6.

AC, puis on prendra sur AB un point K_1 symétrique de M_1 par rapport au milieu de AB, et on tracera par K_1 une parallèle à la symétrique de Δ par rapport à D ; on aura de cette façon les asymptotes de l'hyperbole Γ.

Comme le point M_1 est le seul point de Δ à distance finie dont l'associé soit à l'infini, il sépare Δ en deux demi-droites dont chacune correspond à chacune des branches de Γ ; il est facile de distinguer celle des deux branches qui correspond à une des demi-droites, en remarquant que les points A et B sont les associés des points de rencontre M_2 et M_3 de Δ avec AC et BC.

Dans la dernière partie de l'énoncé, on demande d'étudier le cas où les hyperboles Γ ont une asymptote commune ; si c'est la

droite $K_1\Delta_1$ qui est fixe, le point M_1 est, comme K_1, un point fixe de AB, et l'autre asymptote M_1C_1 est aussi fixe; l'hyperbole Γ reste ainsi invariable, ainsi que la droite Δ; le seul cas intéressant à étudier est donc celui où l'asymptote M_1C_1 est seule invariable. Dans ce cas la droite Δ tourne autour du point fixe M_1 et l'autre asymptote $K_1\Delta_1$ tourne autour du point K_1 qui est aussi fixe; chaque point O de M_1C_1 est le centre d'une hyperbole Γ dont les axes OX, OY sont les bissectrices de l'angle M_1OK_1 et de son supplément; l'enveloppe de ces axes est la parabole de foyer K_1 et de directrice M_1C_1, car les tangentes à cette parabole issues d'un point O de la directrice se confondent avec les bissectrices OX et OY.

V. — La conique transformée d'une droite Δ est une parabole lorsque Δ est parallèle à AB; pour déterminer la courbe, nous chercherons les tangentes aux points A et B qui sont associés respectivement des points M_2 et M_3 de rencontre de Δ avec AC et BC (*fig.* 7); ces tangentes AT_2 et BT_3 ont des directions

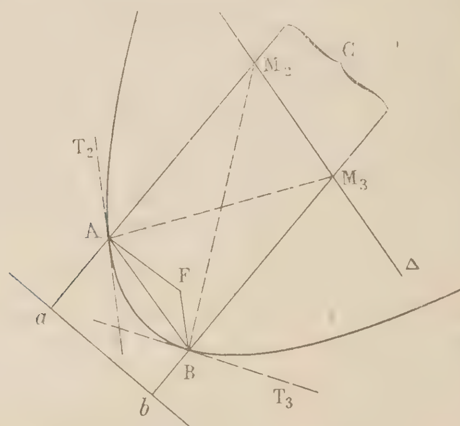


Fig. 7.

symétriques par rapport à D des directions de BM_2 et AM_3; connaissant les tangentes aux deux points A et B, et la direction AC de l'axe, on aura le foyer F en menant des droites AF et BF faisant avec les tangentes les mêmes angles que AC et BC avec ces dernières droites.

Lorsque Δ se déplace parallèlement à elle-même, la directrice de la parabole reste constamment perpendiculaire à la direction AC, et la différence des distances Aa, Bb des points A et B à cette directrice reste constante; comme on a

$$FA - FB = Aa - Bb,$$

le point F se trouve constamment sur une hyperbole ayant pour foyers les points A et B; cette hyperbole se réduit à la perpendiculaire au milieu de AB lorsque AB et AC sont rectangulaires.

Nous avons supposé dans tout ce qui précède que AB n'est pas parallèle à D; lorsque cela a lieu, la question ne présente plus d'intérêt; le point associé d'un point M est le symétrique de ce point par rapport à la perpendiculaire au milieu de AB, et la transformée d'une droite Δ est sa symétrique par rapport à cette perpendiculaire.

H. V.

Bonne solution : M. Dufour, répétiteur au lycée de Tourcoing.
Autre solution : M. Rebeix, à Clermont.

ARITHMÉTIQUE

4712. — *Trouver quatre nombres entiers consécutifs, sachant que leur produit est égal à* 120.

Solution arithmétique. — En décomposant 120 en ses facteurs premiers, on reconnaît immédiatement que les quatre nombres consécutifs cherchés sont

$$2, \ 3, \ 4, \ 5.$$

Généralisation. — *Trouver quatre nombres en progression arithmétique de raison a sachant que leur produit est* P.

Soit x le plus petit des quatre nombres. On doit avoir

$$x(x+a)(x+2a)(x+3a) = P,$$

ou, en tenant compte de l'identité $\alpha\beta = \dfrac{(\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2}{4}$,

$$[(2x+3a)^2 - 9a^2][(2x+3a)^2 - a^2] = 16P.$$

Si l'on pose $2x + 3a = y$, cette équation devient

$$(y^2 - 9a^2)(y^2 - a^2) = 4P,$$

ou

$$y^4 - 10a^2y^2 + 9a^4 - 4P = 0.$$

En résolvant cette équation bicarrée, on obtient

$$y = \pm\sqrt{5a^2 \pm 4\sqrt{a^4 + P}},$$

et par suite

$$x = \frac{-3a \pm \sqrt{5a^2 \pm 4\sqrt{a^4+P}}}{2}.$$

Dans le cas particulier de l'énoncé, $a = 1$ et $P = 120$, la formule précédente donne, en écartant les deux racines imaginaires,

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{5 + 4 \times 11}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -5. \end{cases}$$

Les nombres satisfaisant au problème sont donc 2, 3, 4, 5 ou bien -5, -4, -3, -2.

(X. ROCHE, à Lé[illegible].)

Remarque. — 1° Lorsque dans un problème on a à déterminer des nombres en progression arithmétique, il est ordinairement commode de prendre comme on l'a fait ici, pour inconnue la moyenne arithmétique des inconnues, si celle-ci n'est pas donnée.

2° Les inconnues devant être des nombres entiers, on pourrait résoudre le problème, quand même celui-ci aurait conduit à une équation de degré élevé, non réductible à une équation de degré moindre.

Par exemple, si on a à trouver n nombres entiers consécutifs de produit P, n étant donné numériquement, on a l'équation

$$x(x+1)(x+2)\ldots[x+(n-1)] = P.$$

Mais x doit être diviseur de P, et il suffit de voir quels diviseurs de P vérifient l'équation.

[Ont résolu la même question : Mlle G. Oddos; MM. A. Amblard; d'Amphernet; M. Antoine; E. Anzemberger; Arcizet; L. Barberot; V. Barol; C. Billionnet; H. Blanc; M. Boesch; E. Bon; Bourrec; R. Bouvaist; T. Briet; M. Brun; G. Capgras; Carpinetty; V. Chosson; F. Clabault; G. Cleuziou; E. Cognet; M. Coleil; F. Collard; Y. Collin; Cougnoux; J. Coupat; M. Cry; Damoiseau; O. Destouches; M. Douvillé; H. Duchesne; A. Dupouy; Duvergé; G. Foucry; A. Gérardin; J. Germa; M. Gondran; Guillard; Haag; Hamot; J. Hébré; R. Henry; Hugonnier-Ginet; H. Janois; A. Jouffroy; Julien; X. Lacreuse; Lajouanine; T. Lalescu; A. Lecoutour; C. Lefebvre; D. Lwow; M. B., à V.; Malassiné; G. Marcellin; B. Mathé; L. Maubeck; Mateescu; H. Ménielle; A. Meynier; R. Mouzon; P. Noël; L. Ollié; Pequignot; M. Petit; A. Pichon; Pille; Pitrat; Platrier; Pouget; C. Reboul; Remondet; L. Riat; H. Rimbaud; R. Rives; Sainte-Laguë; A. de Saint-Gabriel; A. Sauvageon; Sinoquet; E. Sinturel; P. Thonet; J. Trouillé; Ch. Vallot; A. Vary; N. Vaslin; Velardi; F. Vérot; Vial; Vialaret; G. Bernoux; P. Besseige; Bonnenfant; Gillard; G. Minault; L. Mouren; Vachon.]

ALGÈBRE

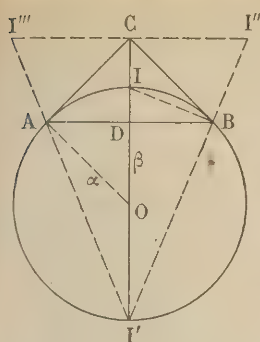
4705. — *Étant donné un cercle de rayon* α, *on mène une sécante* AB *et les tangentes en* A *et* B *qui se coupent en* C, *puis on abaisse* $OD = \beta$ *perpendiculaire sur* AB *en* D.

1° *Calculer en fonction de* α *et* β *les rayons des cercles inscrit, circonscrit et exinscrits au triangle* ABC.

2° *Déterminer les valeurs de* β *pour lesquelles la somme de ces rayons a une valeur donnée. Discuter et considérer en particulier le cas où cette somme est minimum.*

(*Bacc. lettres-math., Montpellier, novembre 1899.*)

1° Le cercle circonscrit au triangle ABC admettant OC comme diamètre, son rayon est



$$R = \frac{OC}{2} = \frac{\alpha^2}{2\beta}.$$

Soient I et I' les extrémités du diamètre CO du cercle O. Les points I et I', milieux des arcs AB, sont situés sur les deux bissectrices de l'angle ABC ; ces points sont donc les centres des cercles inscrit et exinscrit dans l'angle C ; par suite les rayons de ces cercles sont

$$r = \mathrm{ID} = \alpha - \beta,$$
$$r_1 = \mathrm{I'D} = \alpha + \beta.$$

Les centres I'' et I''' des cercles exinscrits dans les angles A et B sont situés sur la bissectrice extérieure de l'angle C ; cette bissectrice étant perpendiculaire à CO ou parallèle à AB, les rayons des cercles I'' et I''' sont égaux à

$$r_2 = r_3 = \mathrm{CD} = \mathrm{OC} - \beta = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta}.$$

Egalons à m la somme des rayons des cinq cercles ; nous aurons

$$\frac{\alpha^2}{2\beta} + 2\alpha + \frac{2(\alpha^2 - \beta^2)}{\beta} = m,$$

ou, en ordonnant par rapport à β,

$$4\beta^2 - 2(2\alpha - m)\beta - 5\alpha^2 = 0.$$

Discussion. — Cette équation, ayant ses termes extrêmes de signes contraires, admet deux racines réelles et de signes contraires. Pour que la racine positive convienne, il faut et il suffit qu'elle soit inférieure à α, autrement dit que α soit extérieur aux racines, c'est-à-dire rende positif le premier membre de l'équation ci-dessus :

$$4\alpha^2 - 2(2\alpha - m)\alpha - 5\alpha^2 > 0,$$

ou
$$2m\alpha - 5\alpha^2 > 0,$$

ou
$$m > \frac{5}{2}\alpha.$$

Dans le cas où m prend sa valeur minimum, on a $\beta = \alpha$; le triangle ABC se réduit alors au point I.

(Jérémie LAVERDAUT, collège de La Châtre.)

[Ont résolu cette question : MM. d'Amphernet ; G. Armaingaud ; L. Barberot ; C. Billionnet ; H. Damoiseau ; Duvergé ; J. Germa ; Gillard ; M. Gondran ; J. Haag ; J. Hébré ; H. Julien ; J. Lehmann ; D. Lwow ; M. B., à V. ; R. Mouzon ; A. Pequignot ; L. Ollié ; A. de Saint-Gabriel ; G. Sinoquet ; Vien ; Debenest.]

4714. — *Résoudre l'équation*

$$\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x-3)^2} = \sqrt[3]{(x-2)(x-3)}.$$

Divisons les deux membres de l'équation par $\sqrt[3]{(x-3)^2}$; il vient

$$\sqrt[3]{\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2} + 1 = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x-3}},$$

ou, en posant
$$\sqrt[3]{\frac{x-2}{x-3}} = t,$$

$$t^2 - t + 1 = 0,$$

d'où
$$t = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

A ces deux valeurs imaginaires de t correspondent pour x deux valeurs imaginaires fournies par les deux équations

$$\sqrt[3]{\frac{x-2}{x-3}} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Remarque. — En résolvant comme ci-dessus l'équation

$$\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2} = \sqrt[3]{(x-2)(x-3)},$$

on verrait qu'elle admet deux racines réelles.

(M. B., instituteur à M. V.)

N.-B. — Plusieurs de nos correspondants, après avoir élevé les deux membres de l'équation proposée au cube, ont obtenu la racine $x = \frac{5}{2}$ sans songer à vérifier si cette valeur convenait bien. Or dans le cas présent cette racine est étrangère à l'équation et provient de l'élévation au cube effectuée pour faire disparaître les radicaux.

[Ont résolu la même question : MM. L. Barberot ; Briet ; G. Delahaye ; Destouches ; G. Foucry ; J. Haag ; R. Henry ; D. Lwow ; G. Marcellin ; Mouzon ; P. Noël ; M. Petit ; H. Pitrat ; Sainte-Laguë ; F. Velardi ; d'Amphernet ; R. Bouvaist ; Y. Collin ; Gillard ; Minault ; L. Ollié ; A. Pichon.]

GÉOMÉTRIE

4417. — *Dans un triangle* ABC *on mène des sommets* A, B, C *les hauteurs* AA', BB', CC' *relatives aux côtés opposés, et on désigne par* α, β, γ *les points de rencontre des hauteurs des triangles* AB'C', BC'A', AC'B'. *Démontrer :*

1° *Que les droites* A'α, B'β, C'γ *sont concourantes en un point* ω ;

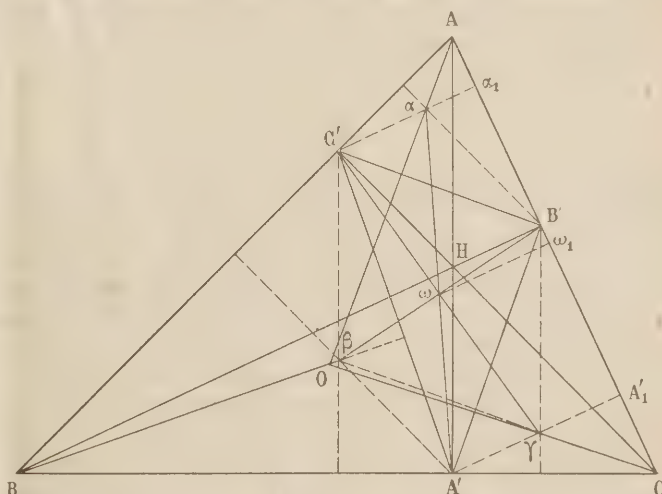
2° *Que la distance du point* ω *au côté* AC $= b$ *du triangle* ABC *a pour expression en fonction des côtés*

$$\delta_b = \frac{(a^4 + c^4)[3b^4 + (a^2 - c^2)^2] - b^2(a^2 + c^2)[3(a^2 - c^2)^2 + b^4]}{32a^2bc^2S},$$

S *désignant la surface du triangle* ABC ;

3° *Que les droites* Aα, Bβ, Cγ *se coupent au centre du cercle circonscrit au triangle* ABC.

1° Soit H le point de rencontre des hauteurs AA', BB', CC'. Le quadrilatère HA'βC' ayant ses côtés opposés parallèles est un parallélogramme et A'β = HC' ; pour la même raison B'α = HC'. Les triangles $\alpha\beta$C', B'A'H se déduisent l'un de l'autre par une translation amenant C' en H ; donc $\alpha\beta$ est égal et parallèle à A'B'.



Les droites A'α et B'β, diagonales du parallélogramme A'B'$\alpha\beta$, se coupent donc mutuellement en leurs milieux ω. On verrait de même que le point ω est aussi le milieu de C'γ.

2° Soient A'_1, ω_1, α_1 les projections des points A', ω, α sur le côté AC. On a

$$\delta_b = \omega\omega_1 = \frac{A'A'_1 + \alpha\alpha_1}{2}.$$

Les triangles AA'A'_1 et BCB' étant semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires, on a

$$\frac{A'A'_1}{A'A} = \frac{CB'}{CB}.$$

Or $\quad A'A = \dfrac{2S}{a}, \qquad CB' = \dfrac{b^2 + a^2 - c^2}{2b}, \qquad CB = a.$

Donc $$A'A'_1 = \frac{S(b^2 + a^2 - c^2)}{a^2 b}.$$

Pour calculer $\alpha\alpha_1$, remarquons que ce segment est, dans le triangle AB'C', l'homologue de HC' dans le triangle semblable ABC, ce qui permet d'écrire

$$\frac{\alpha\alpha_1}{HC'} = \frac{AB'}{AB} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Il reste à calculer HC'. Or

$$HC' = CC' - CH;$$

$$CC' = \frac{2S}{c},$$

$$CH.CC' = CA'.CB = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \cdot a,$$

d'où $$CH = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2CC'} = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{4S}$$

et $$HC' = \frac{2S}{c} - \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{4S}.$$

Par suite

$$\alpha\alpha_1 = \frac{S(b^2 + c^2 - a^2)}{bc^2} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{8bS}$$

et $$\delta_b = \frac{S(b^2 + a^2 - c^2)}{2a^2 b} + \frac{S(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc^2} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{16bS}$$

$$= \frac{(a^4 + c^4)[3b^4 + (a^2 - c^2)^2] - b^2(a^2 + c^2)[3(a^2 - c^2)^2 + b^4]}{32a^2bc^2S}.$$

(Cette dernière expression s'obtient en remplaçant $16S^2$ par $[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]$).

3° Les droites BC, B'C' étant antiparallèles, les droites AA', Aα sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle A, et comme AA' est une hauteur, Aα passe par le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC (propriété connue); il en est de même des droites Bβ, Cγ, ce qui établit la dernière partie.

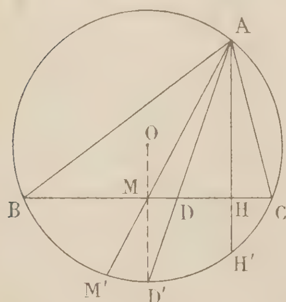
(L. CURT, école normale de Bourg.)

[Ont complètement résolu la question : MM. C. Couturier, à Melle-lès-Gand; Drovin, à Vitry-en-Perthois; H. Janois, à Neufchâtel; M. Rebeix, à Eygurande; J. Vidaillet.

Ont résolu la 1re et la 3e parties: MM. G. Bidaux; M. Boutry; F. Pégorier; F. Vaunac.]

4718. — *Construire un triangle connaissant les points où la médiane, la bissectrice et la hauteur partant d'un même sommet coupent le cercle circonscrit.*

Supposons le problème résolu : soit ABC un triangle dont on connaît les points M', D', H' où la médiane AM, la bissectrice AD et la hauteur AH coupent le cercle circonscrit O.



La droite OM joignant le centre O au milieu de la corde BC est perpendiculaire à cette corde, c'est-à-dire parallèle à AH; cette même droite contient d'ailleurs le milieu D' de l'arc BC.

De là cette construction : Par les trois points donnés M', D', H' on fait passer un cercle O; on trace le rayon OD' et la corde parallèle H'A; la corde AM' rencontre OD' au point M par lequel on mène ensuite la corde BC perpendiculaire à OD' ou H'A.

La construction précédente dépend uniquement de l'existence du cercle O et de la corde BC. Or ce cercle et cette corde existent tant que les points M', D', H' ne sont pas en ligne droite et les points M', H' non situés d'un même côté par rapport au rayon OD'.

Dans l'un des cas particuliers où D' se confond avec M' ou H', le cercle O devient indéterminé et la corde BC est tangente au cercle respectivement en D' ou en A (point diamétralement opposé à D' dans le second cas). Dans ces deux cas, le triangle n'existe plus et se réduit à une droite ou à un point.

Lorsque les trois points M', D', H' coïncident, le cercle O et la corde BC deviennent indéterminés, le point A étant diamétralement opposé à D'. Dans ce cas, une infinité de triangles isocèles répondent à la question.

(P. GUILLARD, école Saint-François-de-Sales, à Dijon.)

[Ont résolu la même question : Mlle M. Degand; MM. Amblard; d'Amphermet; E. Anzemberger; Arcizet; L. Artis; Barberot; V. Barol; Barthélemy; E. Baudouin; C. Billionnet; Blanc; M. Boesch; E. Bon; Bourrec; Bourvéau; Bouvaist; T. Briet; C., à Lavelanet; Capgras; F. Clabault; Coleil; Y. Collin; Cougnoux; M. Cry; Damoiseau; Debenest; O. Destouches; M. Douvillé; Duclo; Dupont; G. Foucry; J. Germa; M. Gondran; F. Grenier; Haag; G. Hamot; R. Henry; A. Huet; Hugonnier-Ginet; Jacquemin; Janois; A. Jouart; X. Lacreuse; Lajouanine; Lalescu; A. Lecoutour; Lefebvre; A. Legros; Lehmann; D. Lwow; Malassiné; Marot; Marquet; Mateescu; Mathé; H. Ménielle; A. Meynier; Mouzon; P. Noël; Ollié; P. E., à Vielmur; A. Pequignot; M. Petit; C. Platrier; G. Picou; Pille; H. Pitrat; F. Pouget; R., à A.; C. Reboul; Rimbaud; Rives; Sainte-Laguë; Sinoquet; Sinturel; J. Trouillé; Tuïssuzian; Valentin; Ch. Vallot; N. Vaslin; F. Vérot; Vien; L. Audoyer; Bernoux; Bonnenfant; Brélivet; Durand; M. Brun; Gillard; Meugailhou; Mouren.]

TRIGONOMÉTRIE

4549. — *On donne dans un triangle l'angle qui a pour sommet A, la hauteur h relative à ce sommet et le rayon R du cercle circonscrit. Calculer sin B, sin C, ainsi que les côtés a, b et c. Construire géométriquement les solutions*

(Bacc. lettres-math., Paris, mars-avril 1899.)

Des relations

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

on déduit $$a = 2R \sin A,$$

$$\sin B = \frac{b}{2R}, \qquad \sin C = \frac{c}{2R}.$$

Il suffit donc de calculer les côtés b et c. Pour cela, remplaçons dans les deux relations

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$
$$ah = bc \sin A,$$

a par sa valeur $2R \sin A$; il vient

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 4R^2 \sin^2 A,$$
$$bc = 2Rh,$$

ce qui peut s'écrire

$$b^2 + c^2 = 4R^2 \sin^2 A + 4Rh \cos A,$$
$$2bc = 4Rh.$$

On déduit de là par addition et soustraction, puis extraction des racines carrées,

$$b + c = \sqrt{4R^2 \sin^2 A + 4Rh(\cos A + 1)}.$$
$$b - c = \pm \sqrt{4R^2 \sin^2 A + 4Rh(\cos A - 1)}.$$

On en conclut facilement les valeurs de b et c. Pour que ces valeurs soient acceptables, il faut et il suffit qu'elles soient réelles; si elles sont réelles, elles sont évidemment positives (deux telles valeurs suffisent en effet avec l'angle A à déterminer complètement le triangle). On doit donc avoir

$$4R^2 \sin^2 A + 4Rh(\cos A - 1) \geqslant 0,$$

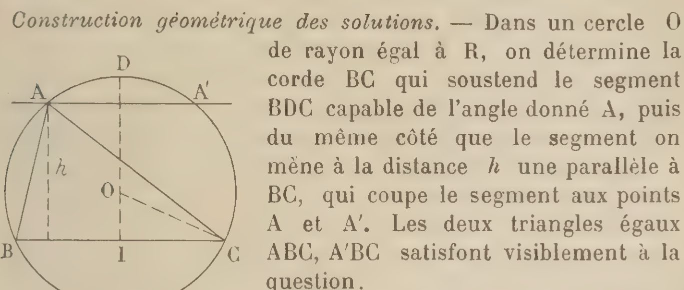
ou, en divisant par le facteur positif $4R(1 - \cos A)$,

$$R(1+\cos A) - h \geqslant 0,$$

ou
$$h \leqslant 2R\cos^2\frac{A}{2}.$$

Lorsque $h = 2R\cos^2\frac{A}{2}$, on a $b = c$, et le triangle devient isocèle.

Construction géométrique des solutions. — Dans un cercle O de rayon égal à R, on détermine la corde BC qui soustend le segment BDC capable de l'angle donné A, puis du même côté que le segment on mène à la distance h une parallèle à BC, qui coupe le segment aux points A et A′. Les deux triangles égaux ABC, A′BC satisfont visiblement à la question.



Pour que ces triangles existent, il faut et il suffit qu'on ait

$$h \leqslant DI = R + R\cos A = 2R\cos^2\frac{A}{2}.$$

(P. CAZEAUX.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Ardin-Delteil ; C. Billionnet ; E. Foucart ; F. Ladevèze ; Lamothe ; A. Pichon ; G. Tastet ; Veron ; Vial.]

PHYSIQUE ET CHIMIE

4720. — *On chauffe* $4^{gr},5$ *d'acide oxalique bien sec avec de l'acide sulfurique concentré en excès. Les gaz dégagés, desséchés sur de la ponce sulfurique, sont entièrement recueillis sur le mercure. On demande :*

1° *Le volume total de gaz obtenu dans les conditions normales de température et de pression ;*

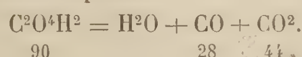
2° *La nature des gaz dégagés et leur proportion dans le mélange.*

Données. — 1° *Poids du litre d'hydrogène dans les conditions normales,* $0^{gr},089$;

2° *Poids atomiques :* C = 12, H = 1, O = 16,
ou équivalents : C = 6, H = 1, O = 8.

(*Bacc. lettres-sciences, Aix, juillet 1899.*)

L'acide oxalique chauffé avec de l'acide sulfurique concentré en excès se décompose totalement en eau, oxyde de carbone et gaz carbonique suivant l'équation



$$\underset{90}{C^2O^4H^2} = H^2O + \underset{28}{CO} + \underset{44}{CO^2}.$$

La ponce sulfurique retenant l'eau, les gaz dégagés sont l'oxyde de carbone et le gaz carbonique.

Calculons séparément d'abord le poids, puis le volume de chacun de ces gaz fournis par $4^{gr},5$ d'acide oxalique.

Le poids de l'oxyde de carbone est $\frac{4,5 \times 28}{90} = 1^{gr},4$.

Le poids du gaz carbonique est $\frac{4,5 \times 44}{90} = 2^{gr},2$.

D'un autre côté, les poids moléculaires des deux gaz étant proportionnels aux poids de volumes égaux de ces gaz, le poids d'un litre d'oxyde de carbone est $\frac{0,089 \times 28}{2} = 1^{gr},246$,

et le poids d'un litre de gaz carbonique $\frac{0,089 \times 44}{2} = 1^{gr},958$.

On a, par suite, pour le volume de l'oxyde de carbone, $\frac{1,4}{1,246} = 1^{lit},123$, et pour le volume du gaz carbonique, $\frac{2,2}{1,958} = 1^{lit},123$.

Le volume total est donc de $2^{lit},246$ et les deux gaz occupent des volumes égaux dans le mélange.

(M. BRUN, à Aubenas.)

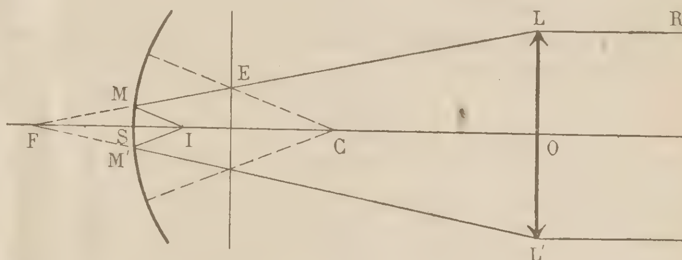
[Ont résolu la même question : Mlle G. Oddos ; MM. L. Audoyer ; C. Billionnet ; J. Crétinon ; M. Cry ; H. Duchesne ; Duvergé ; G. Foucry ; M. Gondran ; J. Haag ; R. Henry ; Hugonnier-Ginet ; H. Julien ; Lajouanine ; A. Lecoutour ; H. Lévy ; David Lwow ; A. Mateescu ; Mengailhou ; P. E., à Vielmur ; A. Pequignot ; M. Petit ; Remondet ; Royer ; A. de Saint-Gabriel ; Vialaret.]

4721. — *Une lentille convergente O et un miroir sphérique concave S ont pour axe commun la ligne OS. La lentille a une distance focale de* 10^m. *Le miroir a une distance focale de* 2^m. *La distance OS entre le miroir et la lentille est égale à* 8^m. *L'axe OS du système optique étant dirigé vers le centre du soleil considéré comme objet infiniment éloigné, et les rayons tombant d'abord sur la lentille O, on demande :*

1° *De construire l'image du soleil dans ce système optique et de tracer la marche physique des rayons lumineux ;* 2° *de calculer la distance de cette image au point O.*

(*Bacc. lettres-math., Bordeaux, novembre 1899.*)

1° L'image du soleil se forme sur l'axe principal. Il suffit donc, pour construire cette image, de tracer la marche d'un rayon quelconque ; le point où le rayon réfléchi par le miroir coupe l'axe OS est l'image du soleil. Considérons un rayon tel que RL



qui rencontre un des bords de la lentille : il se réfracte suivant LF (F étant le foyer de la lentille), à 2^m en arrière du miroir. Ce rayon coupant en E le plan focal principal du miroir, se réfléchit suivant MI, parallèlement à CE, qui est l'axe secondaire correspondant au point E. Donc l'image du soleil est en I.

La construction précédente montre que tous les rayons reçus par la lentille sont contenus après réfraction dans le cône LFL′, et après réflexion sur le miroir, dans le cône MIM′.

2° L'équation aux foyers conjugués applicable dans ce cas est

$$-\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}.$$

Or p ou SF = 2^m. On a donc

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{2},$$

d'où
$$p' = 1.$$

Par suite,
$$IO = 8 - 1 = 7^m.$$

(MARCEL PETIT.)

[Ont résolu la même question : MM. Billionnet ; E. Bou ; Briet ; M. Coleil ; M. Cry ; Debenest ; Haag ; R. Henry ; Hugonnier-Ginet ; Lajouanine ; David Lwow ; Ménielle ; A. Meynier ; P. Noël ; Pequignot ; A. de Saint-Gabriel ; A. Sainte-Laguë ; A. Sauvageon ; G. Simoquet ; Vien ; Gillard.]

CONCOURS DE 1899 *(suite)*

ÉCOLE MILITAIRE DE L'ARTILLERIE ET DU GÉNIE
(VERSAILLES)

Division de l'Artillerie et du Génie.
(Candidats de l'Artillerie et du Génie.)

Arithmétique.

I. — Exposer la théorie de la multiplication et de la division des fractions ordinaires.

II. — Décomposition d'un nombre en facteurs premiers ; définition et recherche du plus petit commun multiple de plusieurs nombres.

III. — Démontrer que le produit de trois nombres pairs consécutifs est divisible par 48.

IV. — Un cheval peut traîner une voiture contenant un poids de 1 500^{kg} ; sa vitesse est de 4^{km},250 par heure ; il faut 12^{h} pour charger la voiture et le même temps pour la décharger. Le prix de la journée de 10^{h} est de 5^{fr}. Calculer le prix du transport de 2 500^{mc} de terre à une distance de 850^{m}, sachant que le mètre cube de terre pèse 1 200^{kg}.

(*1er décembre, de 1 h. 1/2 à 5 h. 1/2.*)

Algèbre.

I. — Simplifier l'expression
$$\frac{30x^2-19x-4}{35x^2+13x-12}.$$

II. — Résoudre le système d'équations
$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{3},$$
$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=\frac{1}{4}.$$

III. — Etablir la formule des intérêts composés, le temps de placement comprenant une fraction d'année.

IV. — Calculer les dimensions du cône de volume maximum inscrit dans une sphère de rayon donné R.

(*2 décembre, de 1 h. 1/2 à 5 h. 1/2.*)

Géométrie.

I. — Tracer une droite qui soit moyenne proportionnelle à deux droites données.

II. — Construire un triangle isocèle connaissant son périmètre et sa hauteur.

III. — Un tronc de prisme triangulaire est équivalent à la somme de trois pyramides ayant pour base commune l'une des bases et pour sommets ceux de l'autre base.

IV. — Etant donnée une sphère, trouver son rayon par une construction plane.

(*5 décembre, de 1 h. 1/2 à 5 h. 1/2.*)

Trigonométrie.

I. — Transformer en produit la somme $\cos p + \cos q$ ou la différence $\cos p - \cos q$.

II. — Résoudre le triangle

$a = 87^{m},35$, $B = 55^{\circ}\,23'\,32'',9$, $C = 28^{\circ}\,35'\,41'',7$.

(*Trigonométrie et Topographie, 6 décembre, de 7 h. 1/2 à 11 h. 1/2.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4731. — A désignant un nombre entier quelconque, D et D' désignant les différences de ce nombre avec les carrés qui le comprennent, montrer que $A - DD'$ est un carré.

(R. Bouvaist, école Sainte-Geneviève.)

4732. — Discuter le système d'équations
$$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = m^4,$$
$$x^2 + y^2 = \lambda xy.$$

(A. Sainte-Lague, lycée de Bordeaux.)

4733. — Calculer les côtés et les angles d'un quadrilatère, sachant :
1° qu'il est inscriptible ;
2° qu'il est circonscriptible ;
3° que son périmètre est $2p$;
4° que le produit des diagonales est k^2 ;
5° que l'angle aigu des diagonales est α.

4734. — La formule de Brassine
$$6VR = \sqrt{\sigma(\sigma - aa')(\sigma - bb')(\sigma - cc')},$$
$$aa' + bb' + cc' = 2\sigma,$$
dans laquelle a et a', b et b', c et c' sont les couples d'arêtes opposées d'un tétraèdre, V le volume, R le rayon de la sphère circonscrite, peut se déduire par rayons vecteurs réciproques de la formule
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$
(La formule de Brassine est l'analogue, pour l'espace, de la formule plane $abc = 4RS$.)

(G. Fontené.)

4735. — Généralisation de la question 4717 : si un polygone de $2n$ côtés est inscrit dans un cercle, le produit des distances d'un point de la circonférence aux côtés de rang pair est égal au produit des distances de ce point aux côtés de rang impair.

4736. — F et F' étant les foyers d'une ellipse donnée et M désignant un point de cette ellipse, on considère les deux cercles tangents aux trois côtés du triangle MFF' et dont les centres O_1, O_2 sont situés sur la tangente en M à l'ellipse. Démontrer que, lorsque le point M se déplace sur l'ellipse considérée, les deux points O_1, O_2 décrivent respectivement deux droites dont on indiquera la position par rapport à l'ellipse.

(*Bacc. lettres-sciences, Toulouse, juillet 1899.*)

4737. — Etant donnés un point O et une droite Δ, on joint un point M du plan au point O par une droite qui coupe Δ en P, et on prend M', conjugué de M par rapport à OP.

1° Démontrer que si M décrit une droite D, M' décrit une droite D'. Montrer que les droites D perpendiculaires aux droites D' correspondantes sont tangentes à une parabole qui a pour foyer O et pour directrice Δ.

2° Démontrer que si M décrit un cercle, M' décrit une courbe du 2e degré ; reconnaître la nature de cette courbe d'après la position de C dans le plan.

3° Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que, M décrivant un cercle C, M' décrive le même cercle.

4738. — Un baromètre a 1^{m} de longueur au-dessus du mercure de la cuvette et 1^{cq} de section intérieure. Il renferme une colonne de mercure de 0^{m},760 de hauteur et la température est 0°. On introduit dans la chambre de ce baromètre 1^{cc} d'air mesuré dans les conditions normales de température et de pression, et on demande :

1° Quelle sera la densité de l'atmosphère qui surmontera la colonne de mercure ;

2° Quelle sera la hauteur barométrique observée ;

3° De combien il faudra enfoncer le tube barométrique dans la cuvette pour que la densité de l'air qu'il contient soit égale à celle de l'air extérieur.

(*Bacc. lettres-sciences, Caen, juillet 1899.*)

4739. — Un vase cylindrique A de 1^{m} de hauteur et de 10^{cq} de section porte à sa partie inférieure un tube latéral B de section négligeable qui s'ouvre dans l'atmosphère au niveau même de la base supérieure. Ce vase contient de l'air sec et du mercure qui remplit le fond du vase et tout le tube B. A 0° la hauteur occupée par l'air est de 50^{cm} et sa pression de 125^{cm} de mercure. On porte tout le système à la température de 200° et l'on demande :

1° Quelle sera la hauteur occupée par l'air ;

2° Quel poids de mercure se sera écoulé par le tube B.

Densité du mercure à 0°, 13,6 ;

Coefficient de dilatation absolue du mercure, $\frac{1}{5550}$;

Coefficient de dilatation de l'air, $\frac{1}{273}$.

On négligera la dilatation du vase.

(*Bacc. lettres-math., Poitiers, juillet 1899.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

24e Année. — N° 9. JOURNAL Paris, le 1er Février 1900.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.

Abonnements.. Librairie Nony et Cie, Boulᵈ St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

NOTE SUR QUELQUES IDENTITÉS

par M. C. Rech, professeur au lycée de Lons-le-Saunier.

I. — Considérons m nombres différents $a, b, c, \ldots, k, l$.

Formons le polynome de degré m

$$f(x) \equiv (x-a)(x-b)\ \ldots\ (x-l).$$

Désignons par $f'(x)$ le polynome obtenu en faisant la somme des quotients de $f(x)$ respectivement par $(x-a)$, $(x-b)$, ..., $(x-l)$; autrement dit, posons

$$f'(x) \equiv (x-b)(x-c)\ldots(x-l) + (x-c)(x-d)\ldots(x-l)(x-a) + \ldots + (x-a)\ \ldots\ (x-k).$$

$f'(x)$ est de degré $(m-1)$; en y faisant successivement x égal à $a, b, \ldots, l$, on obtient

$$f'(a) = (a-b)(a-c)\ \ldots\ (a-l),$$
$$f'(b) = (b-c)(b-d)\ \ldots\ (b-l)(b-a),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f'(l) = (l-a)(l-b)\ \ldots\ (l-k).$$

Considérons d'autre part un polynome *arbitraire* de degré $(m-1)$

$$\varphi(x) \equiv A_0x^{m-1} + A_1x^{m-2} + \ldots + A_{m-2}x + A_{m-1}.$$

Si on forme le polynome de degré $(m-1)$

$$\Sigma\frac{\varphi(a)}{f'(a)}(x-b)(x-c)\ \ldots\ (x-l) \equiv \frac{\varphi(a)}{f'(a)}(x-b)(x-c)\ \ldots\ (x-l)$$
$$+ \frac{\varphi(b)}{f'(b)}(x-c)\ldots(x-l)(x-a) + \ldots + \frac{\varphi(l)}{f'(l)}(x-a)(x-b)\ldots(x-l),$$

ce polynome prend respectivement pour $x=a$, $x=b$, ..., $x=l$ les valeurs $\varphi(a), \varphi(b), \ldots, \varphi(l)$, c'est-à-dire les mêmes valeurs que $\varphi(x)$; ces deux polynomes de degré $(m-1)$, égaux pour m valeurs de x, sont donc identiques et l'on peut écrire

$$\varphi(x) \equiv \Sigma\frac{\varphi(a)}{f'(a)}(x-b)(x-c)\ \ldots\ (x-l).$$

Les coefficients de la plus haute puissance de x dans les deux membres sont identiques, c'est-à-dire que l'on a

$$\Sigma\frac{\varphi(a)}{f'(a)} \equiv A_0,$$

ou $$A_0\Sigma\frac{a^{m-1}}{f'(a)} + A_1\Sigma\frac{a^{m-2}}{f'(a)} + \ldots + A_{m-1}\Sigma\frac{1}{f'(a)} \equiv A_0.$$

On en déduit immédiatement les identités suivantes, appelées *identités d'Euler*

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma\frac{1}{f'(a)} \equiv 0,\\ &\Sigma\frac{a}{f'(a)} \equiv 0,\\ &\ldots\ldots\ldots,\\ &\Sigma\frac{a^{m-2}}{f'(a)} \equiv 0,\\ &\Sigma\frac{a^{m-1}}{f'(a)} \equiv 1.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Exemple. — Prenons $m = 3$; on a les identités

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} \equiv 0,$$
$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} \equiv 0,$$
$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \equiv 1.$$

II. — On a identiquement $f(a) \equiv 0$, $f(b) \equiv 0$, ..., $f(l) \equiv 0$; par suite, $F(x)$ étant une fonction quelconque prenant une valeur déterminée pour chacune des valeurs de x

$$x = a,\quad x = b,\quad \ldots,\quad x = l,$$

on a

$$\frac{f(a)F(a)}{f'(a)} \equiv 0,$$
$$\frac{f(b)F(b)}{f'(b)} \equiv 0,$$
$$\ldots\ldots$$
$$\frac{f(l)F(l)}{f'(l)} \equiv 0,$$

d'où, par addition,

$$\Sigma\frac{f(a)F(a)}{f'(a)} \equiv 0. \qquad (2)$$

Si nous désignons par $(-1)^np_n$ la somme des produits n à n des nombres $a, b, \ldots, l$, c'est-à-dire si nous posons

$$\left\{\begin{aligned} &\Sigma a = -p_1,\\ &\Sigma ab = +p_2,\\ &\ldots\ldots\ldots,\\ &ab\ldots l = (-1)^mp_m,\end{aligned}\right.$$

le polynome $f(x)$ peut se mettre sous la forme

$$f(x) \equiv x^m + p_1x^{m-1} + p_2x^{m-2} + \ldots + p_{m-1}x + p_m,$$

et par suite l'identité (2) sous la forme (2')

$$\Sigma\frac{a^mF(a)}{f'(a)} + p_1\Sigma\frac{a^{m-1}F(a)}{f'(a)} + p_2\Sigma\frac{a^{m-2}F(a)}{f'(a)} + \cdots$$
$$+ p_m\Sigma\frac{F(a)}{f'(a)} \equiv 0. \qquad (2)$$

En particulier, prenons $F(x) = x^n$ (n entier algébrique) ; on obtient

$$\Sigma\frac{a^{m+n}}{f'(a)} + p_1\Sigma\frac{a^{m+n-1}}{f'(a)} + p_2\Sigma\frac{a^{m+n-2}}{f'(a)} + \cdots + p_m\Sigma\frac{a^n}{f'(a)} \equiv 0.$$

En faisant successivement $n = 0, 1, 2, \ldots$
$n = -1, -2, \ldots$

et en tenant compte de (1), on obtient les deux séries d'identités

$$\left\{\begin{aligned} &\Sigma\frac{a^m}{f'(a)} + p_1 \equiv 0,\\ &\Sigma\frac{a^{m+1}}{f'(a)} + p_1\Sigma\frac{a^m}{f'(a)} + p_2 \equiv 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} p_m \Sigma \dfrac{1}{af'(a)} + 1 = 0, \\ p_m \Sigma \dfrac{1}{a^2 f'(a)} + p_{m-1} \Sigma \dfrac{1}{af'(a)} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Ces formules permettent ainsi de calculer de proche en proche les fonctions symétriques $\Sigma \dfrac{a^p}{f'(a)}$ en fonction des fonctions symétriques élémentaires $p_1, p_2, \dots, p_m$ des nombres $a, b, \dots, l$ (p entier algébrique).

Exemple. — Prenons $m = 3$; on obtient les identités

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = a+b+c,$$

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)} = (a+b+c)^2 - (bc+ca+ab),$$

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-c)(b-a)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} = \frac{1}{abc},$$

$$\frac{1}{a^2(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b^2(b-c)(b-a)} + \frac{1}{c^2(c-a)(c-b)} = \frac{bc+ca+ab}{a^2b^2c^2}.$$

Application. — Considérons d'abord le polynome

$$\Sigma \frac{(x-a)^n}{f'(a)} = x^n \Sigma \frac{1}{f'(a)} - nx^{n-1} \Sigma \frac{a}{f'(a)} + \dots + (-1)^{n-1} nx \Sigma \frac{a^{n-1}}{f'(a)} + (-1)^n \Sigma \frac{a^n}{f'(a)}.$$

Pour $n < m-1$, on a $\Sigma \dfrac{(x-a)^n}{f'(a)} = 0$;

— $n = m-1$, — $\Sigma \dfrac{(x-a)^{m-1}}{f'(a)} = (-1)^{m-1}$;

— $n = m$, — $\Sigma \dfrac{(x-a)^m}{f'(a)} = (-1)^{m-1} mx + (-1)^m \Sigma a.$

Exemple (*). — $m = 3$.

$$\frac{(x-a)^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-b)^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-c)^3}{(c-a)(c-b)} = 3x - (a+b+c),$$

d'où

$$(x-a)^3(b-c) + (x-b)^3(c-a) + (x-c)^3(a-b) + 3x(b-c)(c-a)(a-b) = (a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b).$$

Considérons maintenant un polynome quelconque $g(x)$ de degré m

$$g(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m;$$

on a, d'après ce qui précède,

$$\Sigma \frac{g(x-a)}{f'(a)} = a_0 \Sigma \frac{(x-a)^m}{f'(a)} + a_1 \Sigma \frac{(x-a)^{m-1}}{f'(a)} + \dots + a_m \Sigma \frac{1}{f'(a)} = a_0[(-1)^{m-1} mx + (-1)^m \Sigma a] + (-1)^{m-1} a_1,$$

c'est-à-dire

$$\Sigma \frac{g(x-a)}{f'(a)} = (-1)^{m-1} [ma_0 x - a_0 \Sigma a + a_1].$$

III. — Reprenons

$$f'(x) = (x-b)(x-c)\dots(x-l) + (x-c)\dots(x-l)(x-a) + \dots + (x-a)\dots(x-k).$$

Si nous développons le second membre, nous obtenons

$$f'(x) = mx^{m-1} + (m-1)p_1 x^{m-2} + (m-2)p_2 x^{m-3} + \dots + p_{m-1};$$

d'autre part $\qquad f'(x) = \Sigma \dfrac{f(x)}{x-a}.$

Or $\quad \dfrac{f(x)}{x-a} = x^{m-1} + (a+p_1)x^{m-2} + (a^2 + ap_1 + p_2)x^{m-3} + \dots + (a^{m-1} + \dots + p_{m-1})$;

(*) *Éducation mathématique*, 1er décembre 1899, question 394.

par suite $\quad f'(x) = mx^{m-1} + (\Sigma a + mp_1)x^{m-2} + (\Sigma a^2 + p_1 \Sigma a + mp_2)x^{m-3} + \dots$

On a donc l'identité

$$mx^{m-1} + (m-1)p_1 x^{m-2} + (m-2)p_2 x^{m-3} + \dots + p_{m-1} = mx^{m-1} + (\Sigma a + mp_1)x^{m-2} + \dots + (\Sigma a^{m-1} + p_1 \Sigma a^{m-2} + \dots + mp_{m-1});$$

on en déduit les identités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma a + p_1 = 0, \\ \Sigma a^2 + p_1 \Sigma a + 2p_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \Sigma a^{m-1} + p_1 \Sigma a^{m-2} + \dots + p_{m-2} \Sigma a + (m-1)p_{m-1} = 0. \end{array}\right.$$

Ce sont les formules de Newton, permettant le calcul de $\Sigma a, \dots, \Sigma a^{m-1}$ en fonction de $p_1 p_2 \dots p_{m-1}$.

Considérons l'identité (2'); prenons pour $F(x)$ le polynome $x^n f'(x)$ (n entier algébrique); on aura l'identité

$$\Sigma a^{m+n} + p_1 \Sigma a^{m+n-1} + \dots + p_m \Sigma a^n = 0;$$

en faisant successivement $n = 0, 1, 2, \dots$

$n = -1, -2, \dots$

on obtiendra des formules donnant les sommes des puissances semblables positives ou négatives des nombres $a, b, \dots, l$.

ÉCOLE NORMALE PRIMAIRE SUPÉRIEURE
DE FONTENAY-AUX-ROSES (1899)

4670. — *Les nombres entiers* a, b, c *étant supposés premiers entre eux deux à deux, prouver que les deux nombres*

$$a \times b + b \times c + c \times a \qquad \text{et} \qquad a \times b \times c$$

sont premiers entre eux.

En effet, si les deux nombres $ab + bc + ca$ et abc n'étaient pas premiers entre eux, ils admettraient au moins un diviseur premier p autre que 1. p divisant abc diviserait l'un des facteurs a, b, c, a par exemple ; par suite, p diviserait la somme

$$ab + bc + ca$$

et l'une de ses parties $ab + ca$; p devrait alors diviser l'autre partie bc, c'est-à-dire b ou c, ce qui est impossible, puisque par hypothèse a est premier avec b ou c.

Les nombres $ab + bc + ca$ et abc n'ayant ainsi aucun facteur premier commun sont bien premiers entre eux.

(A. LECOUTOUR, école primaire supérieure de Saint-Lô.)

Remarque. — Plus généralement, si on a n nombres premiers entre eux deux à deux, le produit de ces nombres, et la somme des produits de ces nombres pris $n-1$ à $n-1$, sont premiers entre eux.

[Ont résolu la même question : MM. V. Barol ; R. Bazin ; C. Billionnet ; E. Bon ; E. Ghaineau ; F. Clabault ; J. Collin ; J. Cougnoux ; Croze ; H. Debenest ; O. Destouches ; Donnadieu ; Duvérgé ; Faga ; J. Fitou ; Foucry ; E. Fourmon ; Gillard ; P. Givry ; M. Gondran ; R. Henry ; Jacquet ; Janois ; H. Julien ; Lajouanine ; Lalescu ; J. Lamotte ; A. Larcher ; J. Lehmann ; D. Lwow ; B. Mathé ; J. Maury ; J. Ménéchal ; Mouzon ; A. Noyelle ; L. Ollié ; P. C., à Peumerit-les-Bains ; P. E., à Vielmur ; Pequignot ; A. Pichon ; P. Plisson ; L. Richard ; S. N., à Châlons ; Sainte-Laguë ; A. Tumerelle ; E. Vaunac.]

4671. — *Sur les côtés d'un angle* xAy *on prend deux longueurs variables,* AM, AN. *On trace* MP *perpendiculaire à* Ax *et* NP *perpendiculaire à* Ay. *Ces droites se rencontrent en* P. *En supposant* P *à l'intérieur de l'angle* xAy, *prouver que si la*

somme $AM + AN$ *demeure constante quand* M *et* N *se déplacent sur* Ax *et* Ay *respectivement, la somme* $PM + PN$ *demeure également constante. Examiner si la proposition est encore vraie quand* P *n'est pas à l'intérieur de l'angle, et comment il faut la modifier quand elle cesse d'être vraie. Enfin, quel est le lieu géométrique du point* P ?

Première solution. — Soit M', N', P' une seconde position des points M, N, P. Je dis que si l'on a

$$AM + AN = AM' + AN', \quad (1)$$

on a aussi

$$PM + PN = P'M' + P'N'.$$

En effet, si l'on mène les parallèles PI, $P'I'$ à Ay, Ax, on a

$$AM + AN = AM' - MM' + AN' + N'N,$$

ou, en tenant compte de la relation (1),

$$MM' = NN', \qquad \text{ou} \qquad P'I' = PI.$$

Donc les triangles rectangles $P'I'P$ et PIP' sont égaux comme ayant deux côtés égaux. Par suite

$$PI' = P'I,$$

ou
$$MP - M'P' = P'N' - PN,$$

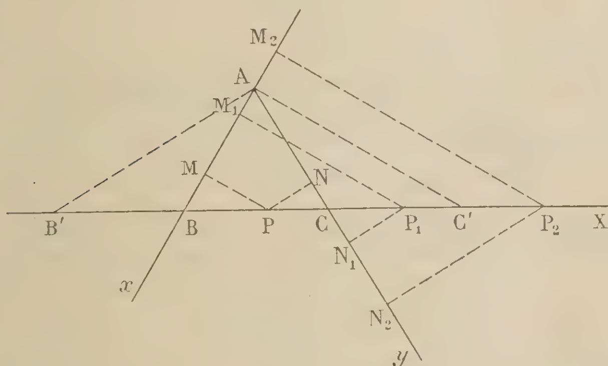
ou
$$MP + PN = M'P' + P'N'.$$

C. q. f. d.

Comme $\widehat{PP'I'} = \widehat{P'PI}$, le triangle POP' est isocèle, de sorte que la droite PP' est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle xAy dont les côtés sont parallèles à ceux de l'angle POP'. La droite PP' est alors déterminée par le point P' et constitue le lieu du point P.

La démonstration précédente n'est applicable qu'autant que le point P est intérieur à l'angle xAy et se projette sur les côtés Ax, Ay.

Par suite, lorsque l'angle xAy est aigu, le lieu de P est limité



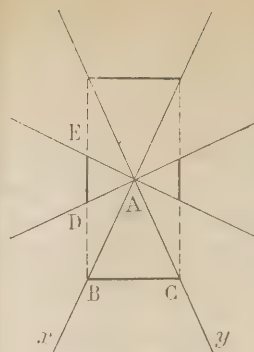
à la portion BC interceptée par cet angle ; quand l'angle xAy est obtus, la portion utile du lieu est comprise dans l'angle $B'AC$ formé par les perpendiculaires en A à Ax et Ay.

En se rappelant qu'un segment quelconque change de signe en passant par zéro, on en conclut que pour un point P_1 du segment CC', on a

$$AM_1 + AN_1 = AM + AN, \qquad P_1M_1 - PN_1 = PM + PN,$$

et pour un point P_2 du segment $C'X$,

$$AN_2 - AM_2 = AM + AN, \qquad P_2M_2 - PN_2 = PM + PN,$$



relations d'ailleurs faciles à vérifier directement.

En étendant ces résultats à chacun des trois autres angles déterminés par les prolongements de Ax et Ay, on reconnaît que les points P pris sur les segments BC, DE et leurs symétriques par rapport à A sont les seuls pour lesquels les sommes

$$AM + AN \qquad \text{et} \qquad PM + PN$$

sont constantes en même temps.

(J. COUGNOUX, école normale de Tulle.)

Seconde solution. — Pour figurer géométriquement les sommes $AM + AN$ et $PM + PN$, prolongeons AM d'une longueur $AN_1 = AN$ et MP d'une longueur $PN_2 = PN$.

En remarquant que les droites NN_1 et NN_2 forment une seule et même droite parallèle à la bissectrice de l'angle xAy, on voit que les deux sommes représentent les deux côtés de l'angle droit du triangle rectangle MN_1N_2. Comme ce triangle reste semblable à lui-même, le rapport $\frac{MN_1}{MN_2}$ est invariable, de sorte que si l'un des côtés est constant, il en est de même de l'autre, ce qui justifie la première partie.

Pour trouver le lieu de P, il suffit de remarquer que MN_2 étant constant, N_2 décrit une parallèle XY à Ax ; par suite, le lieu de P est la portion BC de la bissectrice de l'angle ABX.

En examinant le cas où P est extérieur à l'angle xAy, on retrouverait les résultats déjà obtenus.

(MAURICE PETITJEAN, collège Chaptal.)

Remarque. — Si on admet que les segments aient des valeurs algébriques dont les signes correspondent aux sens, lorsque $\overline{AM} + \overline{AN}$ est constant on a toujours $\overline{PM} + \overline{PN}$ constant. Le lieu des points tels que $\overline{PM} + \overline{PN}$ soit constant est une droite entière. On obtient les quatre droites dont on a trouvé des segments dans les solutions précédentes, en prenant toutes les combinaisons de sens possibles.

[Ont résolu la même question : MM. G. Armaingaud ; Billionnet ; E. Bon ; J. Bourrec ; R. Bouvaist ; F. Clabault ; Croze ; H. Debenest ; Duvergé ; A. Faga ; J. Fiton ; G. Foucry ; E. Fournon ; Gillard ; R. Henry ; Jacquet ; Janois ; H. Julien ; Lajouanine ; Lalescu ; Larcher ; Lecoutour ; J. Lehmann ; E. Le Maigre ; D. Lwow ; J. Ménéchal ; J. Nebbia ; R. Noguès ; A. Noyelle ; L. Ollié ; P. C., à Peumerit-les-Bains ; P. E., à Vielmur ; L. Patin ; Pequignot ; L. Richard ; H. Rimbaud ; S. N., à Châlons ; Sainte-Laguë ; Tumerelle ; E. Vaunac.]

ALGÈBRE

4676. — *Calculer les côtés d'un trapèze sachant :*

1° *que ces côtés forment une progression arithmétique ;*
2° *que le périmètre du trapèze est* $2p$ *;*
3° *que sa surface est* m^2.

Pour qu'on puisse former un trapèze dont les côtés consécutifs soient x, y, z, u, il faut et il suffit qu'on puisse construire le triangle ABE ayant pour côtés y, $z-x$ et u, ce qui nécessite qu'on ait

$$|y-u| < z-x < y+u.$$

La différence $z-x$ des deux bases devant ainsi être supérieure à la différence des deux autres côtés, ces bases représentent forcément les termes extrêmes de la progression arithmétique. On peut donc poser

$$y = x+r, \qquad u = x+2r, \qquad z = x+3r.$$

En égalant le périmètre du trapèze à $2p$, on a comme première équation

$$2x+3r = p. \tag{1}$$

En menant la hauteur AH du trapèze, on a d'autre part,

$$\frac{1}{2}(x+z)\text{AH} = m^2;$$

or, dans le triangle ABE, on a

$$\text{AH} = \frac{2\sqrt{p'(p'-y)(p'-z+x)(p'-u)}}{z-x},$$

p' désignant le demi-périmètre du triangle, qui est ici

$$p' = \frac{y+z-x+u}{2} = x+3r.$$

La seconde équation du problème est donc

$$\frac{x+z}{z-x}\sqrt{(x+3r)(x+3r-y)(2x+3r-z)(x+3r-u)} = m^2,$$

ou

$$(2x+3r)\sqrt{2x(x+3r)} = 3m^2. \tag{2}$$

De l'équation (1), on déduit

$$x = \frac{p-3r}{2},$$

et, en portant cette valeur dans (2),

$$p\sqrt{(p-3r)\frac{p+3r}{2}} = 3m^2,$$

ou

$$p^2 - 9r^2 = \frac{18m^2}{p^2},$$

d'où, en laissant de côté la valeur négative de r,

$$r = \frac{\sqrt{p^4-18m^4}}{3p}.$$

Cette valeur de r n'est réelle que si l'on a

$$p^4 \geqslant 18m^4, \qquad \text{ou} \qquad m^2 \leqslant \frac{p^2\sqrt{2}}{6},$$

ce qui fournit un maximum de la surface pour une valeur donnée du périmètre. Dans ce cas particulier, $r=0$ et le trapèze devient un losange.

En portant la valeur de r dans celle de x, on obtient

$$x = \frac{p-3r}{2} = \frac{p^2-\sqrt{p^4-18m^4}}{2p};$$

puis

$$y = x+r = \frac{3p^2-\sqrt{p^4-18m^4}}{6p},$$

$$u = x+2r = \frac{3p^2+\sqrt{p^4-18m^4}}{6p},$$

$$z = x+3r = \frac{p^2+\sqrt{p^4-18m^4}}{2p}.$$

Ces valeurs satisfont d'ailleurs aux conditions de possibilité d'un trapèze.

(A. DE SAINT-GABRIEL.)

Remarque. — L'équation (2) a été obtenue en supprimant un facteur r qui apparaissait au dénominateur et au numérateur dans le premier membre de l'équation précédente. Or si on suppose $r=0$, le trapèze considéré est un losange de périmètre $2p$ et de surface m^2, la hauteur h du losange est donnée par

$$h = \frac{2m^2}{p},$$

et le losange existe si $h \leqslant \frac{p}{2}$, c'est-à-dire si $m^2 \leqslant \frac{p^2}{4}$.

Donc si $m^2 < \frac{p^2\sqrt{2}}{6}$ on a deux solutions, dont l'une donnée par un losange; si $\frac{p^2\sqrt{2}}{6} \leqslant m^2 \leqslant \frac{p^2}{4}$, on a une solution seulement, donnée encore par un losange.

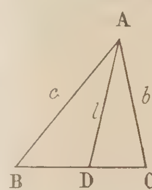
[Ont résolu la même question : MM. H. Belbenoit ; C. Billionnet ; Croze ; Haag ; J. Hébré ; R. Henry ; Hugonnier-Ginet ; H. Janois ; A. Jouffray ; H. Julien ; Lajouanine ; D. Lwow ; J. Ménéchal ; A. Sainte-Laguë ; C. Soulas ; C. Vanier.]

4699. — *On donne dans un triangle deux côtés b et c, et la bissectrice l de l'angle A. On demande :*

1° *La condition pour que le triangle existe ;*

2° *L'expression de la surface du triangle.*

1° Calculons le troisième côté a du triangle. Deux théorèmes sur la bissectrice donnent



$$\frac{\text{BD}}{c} = \frac{\text{DC}}{b} = \frac{a}{b+c}, \tag{1}$$

$$bc = l^2 + \text{BD}.\text{DC}. \tag{2}$$

Remplaçons dans (2), BD et DC par leurs valeurs tirées de (1); il vient

$$bc = l^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2},$$

d'où

$$a^2 = \frac{(b+c)^2(bc-l^2)}{bc}.$$

Pour que cette valeur de a^2 convienne au problème, il faut et il suffit que l'on ait

$$(b-c)^2 < a^2 < (b+c)^2,$$

ou

$$bc(b-c)^2 < (b+c)^2(bc-l^2) < bc(b+c)^2.$$

La seconde inégalité est évidente ; la première peut s'écrire

$$(b+c)^2l^2 < bc[(b+c)^2-(b-c)^2],$$

ou

$$l < \frac{2bc}{b+c}.$$

2° Ecrivons la formule connue

$$\text{S} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

en mettant en évidence les termes en a^2; il vient

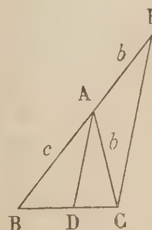
$$\text{S} = \frac{1}{4}\sqrt{[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]},$$

ou, en tenant compte de la valeur de a^2 trouvée plus haut,

$$\text{S} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{l^2(b+c)^2}{bc}\cdot\frac{4b^2c^2-l^2(b+c)^2}{bc}}$$
$$= \frac{l(b+c)}{4bc}\sqrt{4b^2c^2-l^2(b+c)^2}.$$

Si l'on écrit que cette valeur de S est réelle, on retrouve la condition de possibilité obtenue plus haut.

Remarque. — On peut encore déduire cette condition de la construction géométrique du triangle. Cette construction se ramène ici à celle du triangle isocèle ACE dont la base



$$\text{CE} = \frac{l(b+c)}{c}$$

doit être inférieure à $2b$.

(VICTOR BAROL, à Vallauris).

[Ont résolu la même question : MM. Arnaud ; L. Barberot ; R. Barthélemy ; C. Billionnet ; H. Blanc ; C. Bourvéau ; R. Bouvaist ; J. Chemineau ; M. Cry ;

G. Delahaye ; G. Foucry ; E. Fourmon ; J. Germa ; P. Givry ; M. Gondran ; Haag ; R. Henry ; Hugonnier-Ginet ; A. Jouffray ; H. Julien ; Lajouanine ; A. Lecouteur ; H. Lefèvre ; Le Moal ; D. Lwow ; M. B., à M. V. ; R. Manen ; L. Ollié ; Sinturel ; Sinoquet ; G. Soulas ; P. Thonet ; N. Vaslin ; L. Veyret ; Dauchy ; Lehmann ; G. Marcellin.]

4724. — *Couper une sphère de rayon* R *par un plan* AB *de telle sorte que le volume du secteur* AmBO *soit une fraction* $\frac{1}{n}$ *du volume du cylindre* ABB′A′.

(*Bacc. lettres-math., Besançon, juillet 1899.*)

Calculons la distance $OI = x$ du plan AB au centre O.

Le volume du secteur sphérique AmBO est

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2.mI,$$

et celui du cylindre ABB′A′

$$V' = \pi\overline{AI}^2.mI.$$

La condition $V = \frac{V'}{n}$ devient donc

$$\frac{2}{3}R^2 = \frac{\overline{AI}^2}{n},$$

ou, en remplaçant $\overline{AI}^2$ par $R^2 - x^2$,

$$\frac{2n}{3}R^2 = R^2 - x^2,$$

d'où l'on tire

$$x = \pm R\sqrt{1 - \frac{2n}{3}}.$$

Pour que x soit réel, il faut et il suffit que $n \leq \frac{3}{2}$. Dans ce cas, les deux valeurs de x, égales et de signes contraires, sont visiblement inférieures à R en valeur absolue. Elles déterminent deux plans AB symétriques par rapport à O et répondant tous deux à la question.

Lorsque $n = \frac{3}{2}$, $x = 0$; les deux plans précédents se confondent en un seul passant par le centre de la sphère O.

(Michel Brun, pensionnat des Frères maristes, Aubenas.)

N.-B. — La plupart des solutions reçues sont incomplètes, parce que leurs auteurs négligent ou rejettent la valeur négative de x.

[Ont résolu la même question : Mlle G. Oddos ; MM. d'Amphernet ; Armaingaud ; E. Bon ; Boyer ; Daure ; Douvillé ; Delaire ; Duvergé ; J. Hébré ; A. Jouffray ; J. Lehmann ; Le Moal ; Marot ; Meynier ; Nicod ; R. Paucot ; A. Sainte-Laguë ; A. de Saint-Gabriel ; L. Thiébert ; L. Ollié.]

GÉOMÉTRIE

4710. — *Dans un parallélépipède rectangle* ABCDA′B′C′D′, *les côtés* AD, AB, AA′ *sont respectivement les côtés de l'hexagone, du carré, du triangle équilatéral, inscrits dans un cercle de rayon* R :

1° *Calculer le volume* V *et la diagonale du parallélépipède ;*

2° *On fait tourner le rectangle* AA′C′C *passant par les arêtes opposées* AA′, CC′, *autour de la parallèle menée par* A′ *à la diagonale* AC′ ; *calculer le volume* V′ *et la surface* S′ *du solide ainsi engendré ;*

3° *Calculer* R *par logarithmes sachant que* $V = 0^{mc},034786$; *mettre tous les calculs.*

(*École des Beaux-Arts, section d'architecture, 1899.*)

1° Le parallélépipède considéré a pour côtés

$$AD = R, \qquad AB = R\sqrt{2}, \qquad AA' = R\sqrt{3} ;$$

par suite son volume est

$$V = R.R\sqrt{2}.R\sqrt{3} = R^3\sqrt{6},$$

et sa diagonale

$$d = \sqrt{R^2 + 2R^2 + 3R^2} = R\sqrt{6}.$$

2° Comme

$$AC = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{AB}^2} = R\sqrt{3} = AA',$$

le rectangle ACC′A′ est un carré.

Menons par le sommet A′ une parallèle XY à AC′ et soit D la projection de A sur XY. On a

$$V' = 2(\text{vol. } ACA'D - \text{vol. } AA'D),$$
$$S' = 2(\text{surf. } AC + \text{surf. } AA').$$

Or vol. ACA′D et surf. AC représentent le volume et la surface latérale d'un tronc de cône ayant pour rayons de base $AD = \frac{d}{2}$, $CA' = d$, pour hauteur $DA' = \frac{d}{2}$ et pour apothème $AC = R\sqrt{3}$; donc

$$\text{vol. } ACA'D = \frac{1}{3}\pi\frac{d}{2}\left(\frac{d^2}{4} + d^2 + \frac{d^2}{2}\right) = \frac{7\pi d^3}{24} = \frac{7}{4}\pi R^3\sqrt{6},$$

$$\text{surf. } AC = \pi R\sqrt{3}\left(\frac{d}{2} + d\right) = \frac{3}{2}\pi R\sqrt{3}.d = \frac{9}{2}\pi R^2\sqrt{2}.$$

De même, vol. AA′D et surf. AA′ représentant le volume et la surface latérale d'un cône dont le rayon de base, la hauteur et l'apothème sont respectivement $\frac{d}{2}$, $\frac{d}{2}$, $R\sqrt{3}$, on a

$$\text{vol. } AA'D = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\frac{d}{2} = \frac{1}{4}\pi R^3\sqrt{6},$$

$$\text{surf. } AA' = \pi R\sqrt{3}.\frac{d}{2} = \frac{3}{2}\pi R^2\sqrt{2}.$$

En remplaçant dans V′ et S′, il vient, toutes réductions faites,

$$V' = 3\pi R^3\sqrt{6}, \qquad S' = 12\pi R^2\sqrt{2}.$$

3° On a, en prenant le centimètre pour unité,

$$R^3\sqrt{6} = 34786,$$

d'où

$$R = \sqrt[3]{\frac{34786}{\sqrt{6}}},$$

et, en effectuant le calcul par logarithmes,

$$\log R = \frac{1}{3}\left(\log 34786 - \frac{1}{2}\log 6\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(4,54140 - \frac{1}{2}0,77815\right)$$
$$= \frac{3,15232}{3} = 1,38411,$$
$$R = 24^{cm},21.$$

Remarque. — On arrive plus rapidement aux expressions de V′ et S′ par l'application du théorème de Guldin. En effet, le centre du carré ACC′A′ décrivant une circonférence de rayon $\frac{d}{2}$, on a

$$V' = \overline{AC}^2.\pi d = 3\pi R^3\sqrt{6},$$
$$S' = 4AC.\pi d = 12\pi R^2\sqrt{2}.$$

(E. Baudouin, instituteur à Longué.)

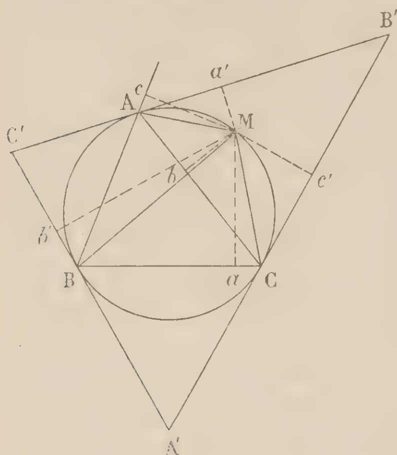
[Ont résolu complètement la question : MM. A. Arcizet ; L. Barberot ; P. Besseige ; C. Billionnet ; Bussière ; F. Clabault ; F. Collard ; Cougnoux ; J. Haag ; G. Hamot ; R. Henry ; A. Jouffray ; Lajouanine ; D. Lwow ; A. Meynier ; L. Ollié ; Pequignot ; Pille ; Roncaglia ; M. Royer ; A. de Saint-Gabriel ; E. Sinturel ; Taton ; Vachon ; N. Vaslin.

Ont résolu partiellement la question : MM. R. Bouvaist ; T. Briet ; J. Cabrol ;

G. Cleuziou ; H. Damoiseau ; P. Debernard ; O. Destouches ; Duvergé ; G. Foucry ; Julien ; G. Lallier ; Lecoutour ; M. B., à V. ; R. Mouzon ; M. Petit ; A. Sainte-Laguë.]

4717. — *Démontrer que le produit des distances d'un point d'un cercle aux côtés d'un triangle inscrit est égal au produit des distances de ce point aux tangentes qui ont pour point de contact les sommets de ce triangle.*

Soient ABC le triangle inscrit et A'B'C' le triangle circonscrit formé par les tangentes au cercle en A, B, C.



Projetons un point M du cercle en a, b, c, a', b', c' sur les côtés de chaque triangle. Il faut démontrer que

$$Ma.Mb.Mc = Ma'.Mb'.Mc'.$$

Joignons M aux points A, B, C. Les triangles rectangles MAa', MBc ayant les angles A, B égaux (même mesure) sont semblables ; donc

$$\frac{Ma'}{Mc} = \frac{MA}{MB}.$$

De même
$$\frac{Mb'}{Ma} = \frac{MB}{MC},$$

et
$$\frac{Mc'}{Mb} = \frac{MC}{MA}.$$

Multiplions ces trois égalités membre à membre ; il vient

$$\frac{Ma'.Mb'.Mc'}{Mc.Ma.Mb} = 1,$$

ou
$$Ma.Mb.Mc = Ma'.Mb'.Mc'.$$

C. q. f. d.

(D. TUISSUZIAN, lycée de Versailles.)

On peut aussi déduire la relation de celle bien connue qui existe entre les distances d'un point d'un cercle à deux tangentes et à la corde joignant les points de contact. On a en effet

$$\overline{Ma}^2 = Mb'.Mc', \qquad \overline{Mb}^2 = Mc'.Ma', \qquad \overline{Mc}^2 = Ma'.Mb'.$$

d'où, etc.

(HENRI PITRAT, à Givors.)

Remarque. — Le théorème précédent s'applique à un polygone de n côtés inscrit dans un cercle ; il peut se déduire d'ailleurs d'un théorème plus général : *si un polygone de $2n$ côtés est inscrit dans un cercle, le produit des distances d'un point de la circonférence aux côtés de rang pair est égal au produit des distances de ce point aux côtés de rang impair.*

[Ont résolu la même question : Mlle M. Degand ; MM. A. Amblard ; L. Artis ; L. Audoyer ; V. Barol ; R. Barthélemy ; E. Bon ; G. Bourvéau ; R. Bouvaist ; T. Briet ; J. Cabrol ; F. Clabault ; Coleil ; Coursan ; P. Debernard ; G. Delahaye ; A. Duclo ; Duvergé ; J. Germa ; J. Haag ; R. Henry ; A. Huet ; A. Jouart ; Lajouanine ; A. Legros ; Lwow ; Mateescu ; L. Ollié ; Pille ; C. Reboul ; A. de Saint-Gabriel ; E. Sinturel ; N. Vaslin ; Vial ; M. Brun ; Mengailhou.]

4728. — *Si* AC *est le plus grand des deux segments d'une droite* AB *divisée en moyenne et extrême raison, on a*

$$3\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2.$$

(*A démontrer géométriquement.*)

Première solution. — Par hypothèse

$$\overline{AC}^2 = AB.BC.$$

Si on trace le demi-cercle de diamètre AB, il coupe la perpendiculaire en C à AB en un point D tel que

$$AB.BC = \overline{BD}^2.$$

Donc AC = BD. On en déduit

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2,$$
$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{DC}^2,$$

et, en ajoutant membre à membre,

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{DC}^2 = 2\overline{AC}^2 + \overline{AC}^2 = 3\overline{AC}^2.$$

La propriété subsiste également pour le second point C' de la division de AB en moyenne et extrême raison. Ce point étant tel que

$$\overline{AC'}^2 = AB.BC',$$

on considère alors l'intersection D du demi-cercle BC' avec la perpendiculaire en A à AB, et l'on a

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC'}^2 = \overline{AC'}^2 - \overline{AD}^2 + \overline{AC'}^2 + \overline{DC'}^2 = 3\overline{AC'}^2.$$

(A. AMBLARD, à Saint-Flour.)

Seconde solution. — Sur AB et BC comme côtés, construisons deux carrés ABDE, BCFG, placés de part et d'autre de AB. Il s'agit de montrer que la surface formée par l'ensemble de ces deux carrés équivaut au triple de la surface du carré ACIH construit sur AC comme côté. Or en prolongeant HI jusqu'à sa rencontre en K avec BD, on obtient les deux rectangles HEDK et IFGK, équivalents tous deux au carré ACIH, comme nous allons le faire voir. En effet,

$$HE = CB = IK, \qquad ED = AB = IF ;$$

donc
$$HE.ED = CB.AB = IK.IF,$$

ou, comme par hypothèse $CB.AB = \overline{AC}^2$,

$$HE.ED = \overline{AC}^2 = IK.IF.$$

La surface considérée est ainsi décomposée en trois parties équivalentes à la surface du carré ACIH.

C. q. f. d.

(M. BÉGUÉ, école normale d'Auch.)

[Ont résolu la même question : Mlle G. Oddos ; MM. Armaingaud ; E. Bon ; Bourrec ; R. Bouvaist ; L. Boyer ; F. Clabault ; M. Cry ; G. Delahaye ; Delaire ; H. Duchesne ; Dumont ; C. Durand ; Duvergé ; E. Fourmon ; R. Gamard ; F. Grenier ; J. Haag ; E. Hélary ; R. Henry ; Janois ; H. Julien ; Lajouanine ; A. Lecoutour ; A. Le Moal ; T. Lemoyne ; H. Lévy ; B. Mathé ; L. Maubeck ; Ménielle ; P. Michon ; R. Mouzon ; Nicod ; J. Négrétzu ; Noël ; C. Passeron ; R. Paucot ; Pequignot ; Petitjean ; L. de Praneuf ; A. Sainte-Laguë ; A. de Saint-Gabriel ; Sautreau ; A. Sauvageon ; Sinoquet ; Soulas ; H. Tellier ; Thiébert ; P. Thonet ; Tuïssuzian ; Vial ; Vioix ; X., à Bruxelles ; V. Barol ; L. Ollié.]

MÉCANIQUE ET TRIGONOMÉTRIE

4693. — *On considère un triangle rectangle* ABC *dont le côté* AC *est vertical ; ce triangle est défini par son côté horizontal* AB $= c$ *et son angle* B $= \alpha$.

On considère toutes les droites telles que AD, *partant du sommet de l'angle droit* A *et se rendant aux différents points de l'hypoténuse* BC ; *on considère également des points pesants partant en même temps de* A *sans vitesse initiale et glissant sans frottement sur ces différentes droites en vertu de l'action de la pesanteur.*

On demande :

1° *De trouver celle des droites* AD *qui est parcourue par le point mobile dans le temps le plus court ;*

2° *De trouver ensuite l'angle* α, *par l'une de ses lignes trigonométriques, dans le cas où ce temps le plus court est égal à la moitié de celui qu'emploie le point mobile à parcourir le côté vertical* AC.

(*Bacc. lettres-sciences, Paris, octobre 1899.*)

1° En parcourant la droite AD, un point pesant est soumis à une force constante mesurée par la projection $p \cos x$ du poids p de ce point sur la droite ; par suite le point partant de A sans vitesse initiale parcourt AD en un temps t donné par la formule

$$AD = \frac{1}{2} g \cos x . t^2,$$

d'où $$t^2 = \frac{2AD}{g \cos x}.$$

Le triangle ABD donne d'ailleurs

$$\frac{AD}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin(\alpha + 90° - x)},$$

de sorte que $$AD = \frac{c \sin \alpha}{\cos(x - \alpha)}$$

et $$t^2 = \frac{2c \sin \alpha}{g \cos x \cos(x - \alpha)}.$$

Le minimum de t correspond au maximum du produit variable

$$\cos x \cos(x - \alpha) ;$$

or comme

$$2 \cos x \cos(x - \alpha) = \cos \alpha + \cos(2x - \alpha),$$

ce maximum est atteint lorsque

$\cos(2x - \alpha) = 1$, ou $2x - \alpha = 0$, d'où $x = \frac{\alpha}{2}$.

Dans ce cas, la valeur de t^2 est

$$t^2 = \frac{2c \sin \alpha}{g \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

L'angle BAD est alors $90° - \frac{\alpha}{2}$ et

$$\widehat{BDA} = 180° - \alpha - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Donc BAD est isocèle et BD = BA.

2° Le temps mis par le point mobile pour parcourir AC se déduit de la formule générale en y faisant $x = 0$, ce qui donne

$$t'^2 = \frac{2c \sin \alpha}{g \cos \alpha}.$$

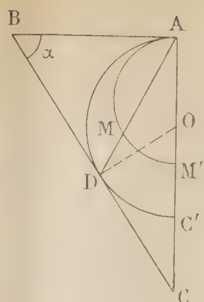
La condition $t' = 2t$, ou $t'^2 = 4t^2$ revient donc à

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 4 \cos \alpha, \quad \text{ou à} \quad \frac{1 + \cos \alpha}{2} = 4 \cos \alpha,$$

d'où $\cos \alpha = \frac{1}{7}$ et $\alpha = 81°47'15''$.

(G. MARCELLIN, école normale de Valence.)

Solution géométrique. — 1° L'accélération du mouvement suivant AD étant égale à la projection de l'accélération en chute libre, il en résulte qu'au même instant les divers mobiles M se trouvent sur une même circonférence de diamètre AM'. Lorsque cette circonférence touche BC en D, AD représente la droite parcourue par le point mobile dans le temps le plus court. On a alors



$$\widehat{DAC} = 90° - \widehat{DAB} = 90° - \frac{180° - \alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

et BD = BA, comme on l'a vu plus haut.

2° Les espaces parcourus étant proportionnels aux carrés des temps, le temps mis pour parcourir AD ou AC' sera la moitié de celui employé pour franchir AC si l'on a AC = 4AC', ou OC + OD = 4 × 2OD,

d'où $$\frac{OD}{OC} = \frac{1}{7}, \quad \text{ou} \quad \cos \alpha = \frac{1}{7}.$$

(E. MÉNISSIER, instituteur à Troyes.)

[Ont résolu la même question : MM. V. Barol ; R. Bellencourt ; C. Billionnet ; C. Bourvéau ; J. Hébre ; R. Henry ; Jacquet ; A. Lecoutour ; H. Lefèvre ; M. B., à V. ; P. Noël ; P. Thonet.]

PHYSIQUE

4729. — *Une éprouvette remplie de mercure repose sur la cuve à mercure à la température de* 0° ; *on y introduit* 1^{cc} *d'un certain gaz recueilli sur la cuve à eau à la température de* 15° *et à la pression de* 75^{cm} *de mercure.*

L'éprouvette est cylindrique à base plane de 1^{cm} *de diamètre intérieur ; la pression est normale ; la tension maximum de la vapeur d'eau à* 0° *et à* 15° *est* $4^{mm},6$ *et* $12^{mm},7$ *de mercure ; le coefficient de dilatation du gaz est* $\frac{1}{273}$.

On demande le volume occupé par le gaz dans l'éprouvette :

1° *Si la hauteur intérieure* h *de l'éprouvette au-dessus du niveau dans la cuvette est* 1^{cm} ;

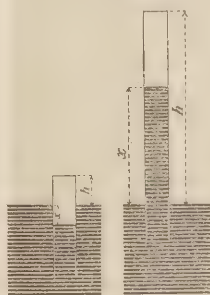
2° *Si elle est* 76^{cm}.

On négligera la variation de niveau du mercure dans la cuvette.

(*Bacc. lettres-math., Lille, juillet 1899.*)

La section de l'éprouvette est $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \pi = 0^{cq},7854$.

1° Appelons x la distance verticale entre les niveaux du mercure dans la cuve à mercure et dans l'éprouvette quand on a introduit le gaz. Le volume occupé par le gaz dans l'éprouvette est $0,7854(h + x)$; sa force élastique est $H' + x - f$, H' désignant la pression extérieure, f la tension maxima de la vapeur d'eau à 0°. En appliquant la formule qui réunit les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, il vient



$$\frac{1(H - F)}{1 + \alpha t} = 0,7854(h + x)(H' + x - f),$$

d'où, en remplaçant les lettres par leur valeur

$$\frac{75 - 1,27}{1 + \frac{15}{273}} = 0,7854(1 + x)(76 + x - 0,46).$$

On en tire $$x^2 + 76,54x - 13,46 = 0.$$

La racine positive étant seule acceptable, on a

$$x = 0^{cm},17$$

et le volume du gaz est, par suite, $0,7854(1 + 0,17) = 0^{cc},919$.

2° Dans le second cas, le volume occupé par le gaz dans

l'éprouvette est $0,7854(h-x)$, et sa force élastique est $H'-x-f$.

On a donc
$$\frac{75-1,27}{1+\frac{15}{273}} = 0,7854(h-x)(H'-x-f),$$
d'où
$$x^2 - 151,54x + 5652,04 = 0$$
et
$$x = 66^{cm},33.$$
Le volume du gaz est, par suite,
$$0,7854(76-66,33) = 7^{cc},595.$$

(F. LIMOUZI.)

[Ont résolu la même question : MM. M. Cry; J. Haag; A. de Saint-Gabriel; R. Mouzon; R. Paucot; G. Sinoquet; C. Soulas.]

4730. — *Une pile de force électromotrice* $E = 1^{volt},48$ *a une résistance intérieure* $r = 1^{ohm},3$ *et elle est fermée par un fil conjonctif de* 2^{ohms} *de résistance. Quelle est la différence de potentiel efficace* V *aux pôles ?*

(Bacc. lettres-sciences, Grenoble, juillet 1899.)

Soient I l'intensité du courant de la pile, E la force électromotrice de la pile en circuit ouvert, E' sa force électromotrice en circuit fermé (ou différence de potentiel efficace aux pôles), R sa résistance intérieure et r la résistance du fil conjonctif.

On a, d'après les lois d'Ohm,
$$I = \frac{E}{R+r} \quad \text{et} \quad I = \frac{E'}{r}.$$
Ces deux équations donnent
$$\frac{E}{R+r} = \frac{E'}{r},$$
d'où
$$E' = \frac{Er}{R+r}.$$
Remplaçant les lettres par leur valeur, il vient
$$E' = \frac{1,48\times 2}{1,3+2} = 0^{volt},89.$$

(M. GONDRAN, à Caen.)

[Ont résolu la même question : Mlles Campana; G. Oddos; MM. V. Barol; Bameulle; C. Billionnet; L. Bréliat; Cry; Daure; Delaire; A. de Saint-Gabriel; Gouirand; A. Guillard; J. Haag; R. Henry; Janois; H. Julien; Lajouanine; A. Lecoutour; Lehmann; M. B., à V.; B. Mathé; Malassiné; Marot; L. Maubeck; P. Le Moingt; B. Ménielle; R. Mouzon; Noël; R. Paucot; Raynaud; F. Rouget; A. Sauvageon; T. Trapinaud; L. Thirode; L. Thiébert.]

CONCOURS DE 1899 *(suite)*

INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

Mathématiques.

I. — **4740**. Déterminer toutes les valeurs de l'arc x qui vérifient l'équation
$$\cos x + \sqrt{3}\,\sin x + \sqrt{2} = 0.$$

II. — **4741**. Calculer les côtés d'un triangle rectangle, connaissant le rayon r du cercle inscrit dans ce triangle et la longueur d de la bissectrice intérieure de l'angle droit. — Discuter.

(12 juin. — Durée : 3 heures.)

Physique et Chimie.

I. — Exposer le principe et donner une description sommaire d'une machine dynamo-électrique à courant continu.

II. — **4742**. On prélève un demi-mètre cube dans de l'air, dont la température est 27°,3, l'état hygrométrique 1/3, la pression 75^{cm} de mercure. On fait passer cet air sur des substances desséchantes, et on l'introduit dans un corps de pompe cylindrique entouré de glace fondante, dont la section est 5 décimètres carrés. On demande quelle est, évaluée en kilogrammes, la force qu'il faut faire agir sur le piston, supposé de poids négligeable, pour que l'air occupe dans le corps de pompe une hauteur égale à 4 décimètres, la pression atmosphérique qui est restée invariable continuant d'ailleurs à agir sur le piston ?

La densité du mercure est 13,56, la force élastique maxima de la vapeur d'eau à 27°,3 est équilibrée par 27^{mm} de mercure; le coefficient de dilatation de l'air est $\frac{1}{273}$.

III. — Ammoniaque : origine des composés ammoniacaux.

(12 juin. — Durée : 3 heures.)

Sciences naturelles.

I. — Caractères généraux des cinq classes de Vertébrés.

II. — L'absorption des aliments chez les plantes; organes par lesquels elle s'effectue.

(13 juin. — Durée : 3 heures.)

Epure.

4743. — La ligne de terre est le petit axe de la feuille. Un cube dont l'arête est de 8^{cm} a l'un de ses sommets, A, dans le plan horizontal, sur le grand axe de la feuille et à 10^{cm} en avant du plan vertical. La diagonale de ce cube issue de A est verticale et dirigée vers le haut, l'une des arêtes issue de A est située dans un plan de profil et dirigée en arrière. Représenter ce cube par ses deux projections ainsi que sa section par le plan qui passe par son centre et la ligne de terre. Donner aussi le rabattement de cette section sur le plan horizontal. On fera la distinction des parties vues et des parties cachées.

(14 juin. — Durée : 3 heures.)

QUESTIONS PROPOSÉES

4744. — Si un nombre entier N de la forme $\frac{a(a+1)}{2}$ est aussi de la forme $3b^2 - 3b + 1$, ce nombre ne peut être carré parfait.

4745. — 1° Construire un triangle ABC connaissant le côté $BC = a$, l'angle B et le point D où la bissectrice de l'angle A rencontre BC;

2° Trouver et rendre calculables par logarithmes les valeurs des côtés inconnus;

3° Le point D peut-il occuper une position quelconque sur BC, les autres données ne variant pas ?

(Bacc. lettres-math., Rennes, juillet 1899.)

4746. — Sur les côtés d'un triangle ABC on construit, extérieurement, les triangles équilatéraux BCA', CAB', ABC'. Les côtés BC', CB' prolongés se coupent en A''; de même les côtés CA', AC' se coupent en B'', et les côtés AB', BA' en C''. Démontrer que les droites A'A'', B'B'', C'C'' sont parallèles.

4747. — On donne quatre points fixes A, B, C, D sur un cercle de centre O; par A et B on fait passer un cercle quelconque de centre ω, puis par C et D un second cercle de centre ω' et tangent au cercle ω.

On demande de déterminer :

1° Le lieu du point de contact des cercles ω et ω';

2° Le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de O sur $\omega\omega'$. Ce dernier lieu n'est pas une conique.

(H. PITRAT, à Givors.)

4748. — On dispose de N éléments Bunsen dont la force électromotrice est E, la résistance intérieure r. Comment doit-on les associer pour qu'en fermant la pile par un conducteur de résistance R, le courant ait une intensité I ?

Application. — $N = 10$, $E = 1^{volt},8$, $r = 0^{ohm},1$, $I = 4^{amp.}$, $R = 2^{ohms}$.

(Bacc. lettres-sciences, Alger, juillet 1899.)

CORRESPONDANCE

P. M., à Aulnay. — Les méthodes de résolution des équations du 3e et du 4e degré sont exposées dans les traités d'Algèbre à l'usage des candidats à l'Ecole polytechnique. Mais les formules qu'on peut obtenir pour exprimer les racines d'une équation du 3e degré ne sont pas d'un usage pratique, pour diverses raisons qu'il serait trop long d'exposer ici; et lorsque les équations ont des coefficients numériques, on les traite par des méthodes applicables à des équations de degré quelconque; méthodes qui sont enseignées dans les cours préparatoires à l'Ecole polytechnique ou à l'Ecole centrale.

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

24e Année. — No 10. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 15 Février 1900.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.

Abonnements.. Librairie Nony et Cie, Boulᵈ St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

ÉCOLE NORMALE PRIMAIRE SUPÉRIEURE
DE SAINT-CLOUD (1899)

4666. — *Sachant que la somme des carrés des n premiers nombres entiers est* $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, *trouver la condition nécessaire et suffisante que doit remplir le nombre entier p, pour que la somme des carrés de p nombres entiers consécutifs quelconques soit divisible par p.*

La somme des carrés de p nombres entiers consécutifs a pour expression

$$S=(a+1)^2+(a+2)^2+\ldots+(a+p)^2,$$

ou, en développant,

$$S=pa^2+2a(1+2+\ldots+p)+1^2+2^2+\ldots+p^2.$$

Or
$$1+2+\ldots+p=\frac{p(p+1)}{2}$$

et
$$1^2+2^2+\ldots+p^2=\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.$$

Donc
$$S=p(a^2+ap+a)+\frac{p(p+1)(2p+1)}{6},$$

ou
$$\frac{S}{p}=a^2+ap+a+\frac{(p+1)(2p+1)}{6}.$$

Ce dernier résultat montre que le quotient $\frac{S}{p}$ prend une valeur entière lorsque le produit $(p+1)(2p+1)$ est divisible par 6, ou séparément par 2 et par 3. Comme $2p+1$ est impair, la divisibilité par 2 exige qu'on ait

$$p+1=2k, \qquad \text{ou} \qquad p=2k-1;$$

le produit $(p+1)(2p+1)$ est alors de la forme

$$2k[2(2k-1)+1]=2k(4k-1).$$

Pour que ce dernier produit soit divisible par 3, il faut et il suffit qu'on ait

soit $$k=3k',$$
soit $$4k-1=3k', \qquad \text{ou bien} \qquad k-1=3k'.$$

Dès lors on a

$$p=2k-1=\begin{cases}6k'-1,\\ 2(3k'+1)-1,\end{cases}$$

c'est-à-dire

$$p=6k'\pm 1.$$

Remarque. — On parvient plus rapidement à la condition précédente en observant que

$$\frac{(p+1)(2p+1)}{6}=\frac{(p+1)(3p-p+1)}{6}=\frac{p(p+1)}{2}-\frac{p^2-1}{6}.$$

Comme $\frac{p(p+1)}{2}$ est un nombre entier, il faut et il suffit que $\frac{p^2-1}{6}$ soit égal à un nombre entier H, ce qui donne

$$p^2-1=6H.$$

Donc $p+1$ et $p-1$ ne pouvant être impairs, sont pairs tous deux et comme l'un des deux est multiple de 3, il est multiple de 6 ; donc

$$p\pm 1=6k.$$

(BAYOR, instituteur à Auterive.)

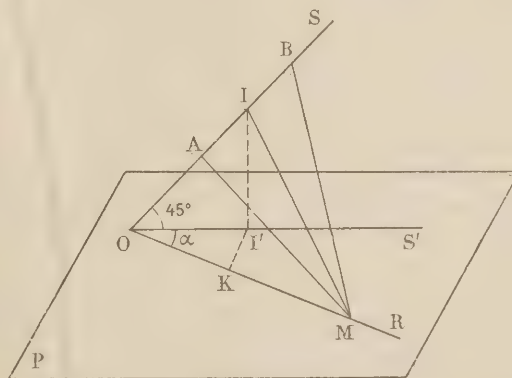
[Ont résolu la même question : MM. Bégué ; C. Billiounet ; E. Bou ; Y. Collin ; H. Debenest ; O. Destouches ; J. Filon ; E. Fourmon ; J. Gauthier ; E. Gernez ; Gillard ; R. Henry ; Lajouanine ; A. Laudet ; J. Lehmann ; E. Le Maigre ; H. Lévy ; D. Lwow ; G. Marcellin ; G. Marie ; R. Mouzon ; J. Nebbia ; A. Sainte-Laguë ; E. Sinturel ; C. Titre.]

4667. — *On donne un plan P, une demi-droite OS perçant le plan P au point O et faisant avec sa projection OS′ sur le plan P un angle de 45°, et deux points A et B sur la demi-droite OS ; soit OR une droite du plan P faisant avec OS′ l'angle α ; on demande de déterminer géométriquement sur OR un point M tel que l'on ait* $\overline{MA}^2+\overline{MB}^2=k^2$, *k étant une longueur donnée ; discuter ; limites de l'angle α.*

Joignons M au milieu I de AB, et posons $OI=d$, $IA=a$. Dans le triangle MAB, la médiane MI donne

$$2\overline{MI}^2+2\overline{AI}^2=\overline{MA}^2+\overline{MB}^2,$$

d'où
$$MI=\sqrt{\frac{k^2-2a^2}{2}}.$$



Le lieu des points M est donc une sphère ayant son centre au milieu I de AB ; cette sphère coupe le plan P suivant un petit cercle dont le centre I′ est la projection de I sur ce plan ou sur OS′, et dont le rayon est égal à

$$MI'=\sqrt{\overline{MI}^2-\overline{II'}^2},$$

ou, comme

$$\overline{MI}^2=\frac{k^2-2a^2}{2} \qquad \text{et} \qquad \overline{II'}^2=\frac{d^2}{2},$$

$$MI'=\sqrt{\frac{k^2-2a^2-d^2}{2}}.$$

Discussion. — Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que le cercle I′ existe et qu'il coupe la droite OR.

Cette double condition revient à exprimer que le rayon du cercle I′ a une valeur réelle au moins égale à la distance I′K de son centre à la droite OR ; on doit donc avoir

$$k^2 \geqslant 2a^2 + d^2$$

et $$\sqrt{\frac{k^2 - 2a^2 - d^2}{2}} \geqslant \text{I}'\text{K} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{\sqrt{2}} \sin \alpha.$$

Pour obtenir les limites de l'angle α, remarquons que, d'après la seconde inégalité, on a

$$\sin \alpha \leqslant \frac{\sqrt{k^2 - 2a^2 - d^2}}{d}. \qquad (1)$$

Comme un sinus est toujours inférieur ou égal à 1, $\sin \alpha$ peut prendre toutes les valeurs positives possibles lorsque

$$\sqrt{k^2 - 2a^2 - d^2} \geqslant d, \qquad \text{ou} \qquad k^2 \geqslant 2(a^2 + d^2);$$

dans ce cas, le problème est toujours possible quelle que soit la position de la droite OR, — résultat facile à expliquer en observant qu'on a alors $\text{MI}' \geqslant \frac{d}{\sqrt{2}}$ ou OI′, de sorte que le point O est à l'intérieur du cercle I′.

Supposons maintenant que l'on ait

$$2a^2 + d^2 \leqslant k^2 \leqslant 2(a^2 + d^2).$$

On peut alors poser

$$\frac{\sqrt{k^2 - 2a^2 - d^2}}{d} = \sin \varphi,$$

et l'inégalité (1) devient

$$\sin \alpha \leqslant \sin \varphi,$$

ce qui exige que l'angle α soit compris entre 0 et φ, ou entre $180° - \varphi$ et 180°. On peut remarquer que deux valeurs supplémentaires de α correspondent à deux droites OR symétriques par rapport à OS′.

Lorsque α est égal à φ ou $180° - \varphi$, on a

$$\text{I}'\text{K} = \frac{d}{\sqrt{2}} \sin \alpha = \text{MI}';$$

la droite OR est alors tangente au cercle I′, de sorte que les deux points M qu'elle fournit généralement se confondent en un seul.

Si $k^2 = 2a^2 + d^2$, on a $\sin \varphi = 0$; alors α ne peut prendre que les valeurs 0 ou 180°, et $\text{MI}' = 0$; la droite OR coïncide avec OS′ et I′ est le seul point répondant à la question.

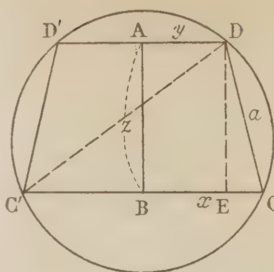
Dans le cas particulier où $k^2 = 2(a^2 + d^2)$, $\sin \varphi = 1$ et $\varphi = 90°$; l'angle α prend alors toutes les valeurs possibles de 0 à 180° ; comme $\text{MI}' = \text{OI}'$, le cercle I′ rencontre OR au point O et en un autre point qui se confond avec O lorsque $\alpha = 90°$.

(E. BON, à Lons-le-Saunier.)

[Ont résolu la même question : MM. C. Billionnet ; R. Bouvaist ; F. Clabault ; Croze ; L. Curt ; H. Debenest ; J. Filon ; G. Foucry ; E. Gernez ; Gillard ; Jacquet ; H. Janois ; Lajouanine ; D. Lwow ; G. Marcellin ; B. Mathé ; L. Ollié ; A. Pequignot ; A. Sainte-Laguë ; E. Sinturel.]

4668. — *On considère le tronc de cône engendré par le trapèze rectangle* ABCD *en tournant autour de sa hauteur* AB ; *on donne la longueur a de l'arête latérale* CD, *la surface k^2 du trapèze* ABCD, *et on sait que le carré de la hauteur est égal à la somme des carrés des rayons des deux bases : 1° Calculer la hauteur et les rayons des bases ; discuter ; 2° Donner, en fonction des données, l'équation qui donne le rayon* R *de la sphère contenant les deux cercles de bases ; conditions de possibilité.*

1° Soient x, y et z les rayons des bases et la hauteur du tronc de cône. Les trois équations du problème sont



$$a^2 = (x - y)^2 + z^2, \qquad (1)$$

$$k^2 = \frac{(x + y)z}{2}, \qquad (2)$$

$$z^2 = x^2 + y^2. \qquad (3)$$

L'équation (1), développée, s'écrit

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy + z^2,$$

ou, en tenant compte de (3),

$$xy = \frac{2z^2 - a^2}{2}.$$

Par suite

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 3z^2 - a^2,$$

ou, en remplaçant $x + y$ par sa valeur tirée de (2),

$$\frac{4k^4}{z^2} = 3z^2 - a^2,$$

d'où $$3z^4 - a^2 z^2 - 4k^4 = 0. \qquad (4)$$

Cette équation bicarrée permet de déterminer z ; x et y sont alors les racines de l'équation

$$\text{X}^2 - \sqrt{3z^2 - a^2}\,.\,\text{X} + \frac{2z^2 - a^2}{2} = 0. \qquad (5)$$

Discussion. — L'équation (4) fournit pour z^2 deux valeurs réelles et de signes contraires. Pour que la valeur positive donne une solution, il faut qu'elle rende réelles et positives les valeurs de x et y données par l'équation (5). Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes, puisqu'un tronc de cône est toujours déterminé par sa hauteur et ses rayons de bases.

Les racines de l'équation (5) sont réelles lorsque

$$3z^2 - a^2 - 2(2z^2 - a^2) > 0, \qquad \text{ou} \qquad a^2 > z^2$$

et positives si, en outre, $$2z^2 - a^2 > 0,$$

ce qui revient à prendre z^2 compris entre $\frac{a^2}{2}$ et a^2.

En exprimant que la racine positive de l'équation (4), du second degré en z^2, est comprise entre $\frac{a^2}{2}$ et a^2, on a

$$f\left(\frac{a^2}{2}\right) = \frac{a^4}{4} - 4k^4 < 0,$$

$$f(a^2) = 2a^4 - 4k^4 > 0,$$

d'où, en résolvant ces inégalités par rapport à k^2,

$$\frac{a^2}{4} < k^2 < \frac{a^2\sqrt{2}}{2}.$$

Si $k^2 = \frac{a^2}{4}$, on a $z^2 = \frac{a^2}{2}$; l'équation (5) devient

$$\text{X}^2 - \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \text{X} = 0,$$

d'où $$x = \frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad y = 0 ;$$

le tronc de cône se réduit alors à un cône dont la hauteur est égale au rayon de base.

Si $k^2 = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$, $z^2 = a^2$; l'équation (5) devient

$$\text{X}^2 - a\sqrt{2}\,.\text{X} + \frac{a^2}{2} = 0,$$

d'où $$x = y = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

le tronc de cône se réduit à un cylindre.

2° Le rayon R de la sphère circonscrite au tronc de cône est

égal à celui du cercle circonscrit au triangle CDC' ; on a donc, d'après un théorème connu,

$$a.\mathrm{DC'} = 2\mathrm{R}z,$$

ou, comme $\mathrm{DC'} = \sqrt{(x+y)^2 + z^2} = \sqrt{4z^2 - a^2}$,

$$a\sqrt{4z^2 - a^2} = 2\mathrm{R}z,$$

d'où l'on tire, après avoir élevé au carré,

$$z^2 = \frac{a^4}{4(a^2 - \mathrm{R}^2)}.$$

En portant cette valeur de z^2 dans l'équation (4), on a

$$\frac{a^4}{4(a^2 - \mathrm{R}^2)}\left(\frac{3a^4}{4(a^2 - \mathrm{R}^2)} - a^2\right) - 4k^4 = 0,$$

ou, tous calculs faits,

$$64k^4\mathrm{R}^4 - 4a^2(32k^4 + a^4)\mathrm{R}^2 + a^4(64k^4 + a^4) = 0.$$

Discussion. — Toute valeur acceptable de R doit être réelle et positive. En outre, il faut que la valeur correspondante de z^2 soit comprise entre $\frac{a^2}{2}$ et a^2 (voir plus haut) ; de là la double inégalité

$$\frac{a^2}{2} < \frac{a^4}{4(a^2 - \mathrm{R}^2)} < a^2,$$

qui se ramène à $\quad \frac{a^2}{2} < \mathrm{R}^2 < \frac{3}{4}a^2.$

La condition de réalité est

$$4a^4(32k^4 + a^4)^2 - 64a^4k^4(64k^4 + a^4) \geqslant 0,$$

ou $\quad 48k^4a^4 + a^8 \geqslant 0$;

cette condition étant toujours remplie, il existe deux valeurs réelles et positives pour R^2 ou R.

Pour comparer ces deux valeurs de R^2 à $\frac{a^2}{2}$ et $\frac{3}{4}a^2$, remarquons que

$$\mathrm{F}\left(\frac{a^2}{2}\right) = 16k^4 - a^4, \qquad \mathrm{F}\left(\frac{3}{4}a^2\right) = 4k^4 - 2a^2.$$

La demi-somme des valeurs de R^2 étant égale à

$$\frac{2a^2(32k^4 + a^4)}{64k^4} = a^2 + \frac{a^6}{32k^4},$$

surpasse toujours $\frac{a^2}{2}$ et $\frac{3}{4}a^2$; une seule des deux valeurs de R^2 peut donc être comprise entre $\frac{a^2}{2}$ et $\frac{3a^2}{4}$, ce qui suppose les deux résultats précédents de signes contraires.

On doit donc avoir

$$\frac{a^2}{4} < k^2 < \frac{a^2\sqrt{2}}{2} ;$$

comme $\frac{3}{4}a^2$ sépare alors les deux valeurs de R^2, la plus petite est celle qui convient au problème.

Remarque. — Le tronc de cône n'intervenant en rien dans la question, on pourrait le remplacer par un trapèze isocèle.

(L. MESSENT.)

[Ont résolu complètement la première partie seulement : MM. C. Billionnet ; C. Bourvéau ; L. Curt ; H. Debenest ; E. Fourmon ; E. Gernez ; Gillard ; Jacquet ; Lajouanine ; A. Pequignot ; S. N., à Châlons ; E. Sinturel ; E. Vaunac.]

4669. — *Un miroir plan reçoit les rayons solaires et les renvoie vers une lentille convergente dont la distance focale est de 60 mètres. Il est orienté de telle façon qu'un rayon parti du centre du soleil est réfléchi parallèlement à l'axe principal de la lentille. On demande la nature, la position et la grandeur de l'image du soleil fournie par la lentille. Le diamètre apparent du soleil est de 32 minutes. On admettra que pour de petits angles l'arc se confond avec sa tangente.*

Le miroir a pour effet de rejeter les rayons solaires comme s'ils étaient émis par le soleil placé à l'infini sur l'axe principal de la lentille. L'image du soleil est donc réelle et elle se forme dans le plan focal de la lentille. Les deux bords opposés du soleil envoient à la lentille des rayons qui passent par le centre optique, et le diamètre apparent de l'image par rapport au centre optique est égal au diamètre apparent du soleil.

On peut supposer, sans erreur sensible, que l'axe optique de la lentille passe par le centre du soleil ; alors si r est le rayon en centimètres de l'image du soleil, on a

$$r = 6\,000 \text{ tg } 16',$$

$$\log r = \log 6\,000 + \log \text{tg } 16',$$

$$\log r = 3{,}77815 + \bar{3}{,}66785 = 1{,}44600,$$

$$r = 27^{\mathrm{cm}}{,}925.$$

(LAJOUANINE, lycée de Clermont.)

[Ont résolu la question : MM. F. Clabault ; R. Henry ; David Lwow ; E. Le Maigre ; A. Pequignot.]

ARITHMÉTIQUE

4713. — *Démontrer que si les fractions $\frac{1}{\mathrm{D}}$, $\frac{1}{\mathrm{D'}}$, dont les dénominateurs sont premiers entre eux, donnent naissance à des fractions périodiques simples ayant chacune p chiffres à la période :*

1° La fraction $\frac{1}{\mathrm{DD'}}$ donne aussi une fraction périodique simple ayant p chiffres à la période ;

2° $\mathrm{D} + \mathrm{D'}$ divise $\mathrm{P} + \mathrm{P'}$, P et P' étant les nombres représentés par l'ensemble des chiffres de chaque période.

1° et 2° On sait que toute fraction périodique simple dont la période P se compose de p chiffres est de la forme

$$\frac{\mathrm{P}}{10^p - 1}.$$

On a donc par définition

$$\frac{1}{\mathrm{D}} = \frac{\mathrm{P}}{10^p - 1}, \qquad \frac{1}{\mathrm{D'}} = \frac{\mathrm{P'}}{10^p - 1}, \qquad (1)$$

P et P' désignant les périodes des deux fractions.

On en déduit par division

$$\frac{\mathrm{D'}}{\mathrm{D}} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P'}},$$

et, comme les nombres D' et D sont supposés premiers entre eux, cette égalité entraine

$$\mathrm{P} = m\mathrm{D'}, \qquad \mathrm{P'} = m\mathrm{D},$$

m étant un nombre entier. Par suite on a

$$\mathrm{P} + \mathrm{P'} = m(\mathrm{D'} + \mathrm{D}),$$

ce qui justifie la seconde partie.

En ajoutant les égalités (1), on a ensuite

$$\frac{\mathrm{D'} + \mathrm{D}}{\mathrm{DD'}} = \frac{\mathrm{P} + \mathrm{P'}}{10^p - 1},$$

ou, en tenant compte du résultat précédent,

$$\frac{1}{\mathrm{DD'}} = \frac{m}{10^p - 1},$$

fraction périodique ayant p chiffres à la période m ; m est le plus grand commun diviseur de P et P'.

(G. SINOQUET.)

[Ont résolu la même question : Mlle E. Lazar ; MM. A. Amblard ; Arcizet ; C. Billionnet ; F. Clabault ; M. Coleil ; Coursan ; M. Cry ; Damoiseau ; Debenest ; G. Foucry ; J. Hébré ; R. Henry ; Hugonnier-Ginet ; H. Janois ; Lalescu ; A. Lecoutour ; Lefebvre ; J. Lehmann ; H. Lévy ; D. Lwow ; M. B., à V. ; A. Meynier ; R. Mouzon ; Noël ; M. Petit ; R. Rives ; Sainte-Laguë ; E. Sinturel ; P. Thonet ; J. Trouillé ; Vialaret ; Gillard ; G. Minault ; L. Mouren.]

ALGÈBRE

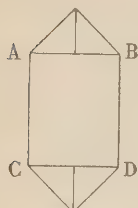
4607. — *On veut construire un aréomètre qui, sous une surface donnée, présente le plus grand volume.*

Sa forme est celle d'un cylindre terminé par deux cônes égaux dont les demi-angles au sommet sont de 45°.

On demande les dimensions de l'instrument pour un volume total d'un demi-litre.

(*Bacc. lettres-sciences, Alger, mars 1899.*)

Soient x le rayon de base et y la hauteur du cylindre ABCD.



En désignant par $2\pi m^2$ la surface totale donnée de l'aréomètre, on a

$$2\pi xy + 2\pi x^2\sqrt{2} = 2\pi m^2,$$

ou

$$xy + x^2\sqrt{2} = m^2. \qquad (1)$$

Le volume de l'instrument est

$$V = \pi x^2 y + \frac{2}{3}\pi x^3, \qquad (2)$$

ou, en remplaçant y par sa valeur tirée de (1),

$$V = \frac{\pi x}{3}[3m^2 - (3\sqrt{3} - 2)x^2],$$

ou, en divisant haut et bas par $3\sqrt{3} - 2$,

$$V = \frac{\pi(3\sqrt{2} - 2)}{3} \cdot x\left(\frac{3m^2}{3\sqrt{3} - 2} - x^2\right).$$

Le maximum de V a lieu en même temps que celui du produit

$$x\left(\frac{3m^2}{3\sqrt{3} - 2} - x^2\right),$$

ou celui de son carré :

$$x^2\left(\frac{3m^2}{3\sqrt{3} - 2} - x^2\right)^2.$$

Dans ce dernier produit, les facteurs x^2 et $\frac{3m^2}{3\sqrt{3} - 2} - x^2$ ayant une somme constante, le maximum est atteint lorsque ces facteurs sont proportionnels à leurs exposants 1 et 2, ce qui donne l'équation

$$2x^2 = \frac{3m^2}{3\sqrt{3} - 2} - x^2,$$

d'où

$$m^2 = (3\sqrt{3} - 2)x^2.$$

Portant cette valeur dans V, il vient

$$V = \frac{2\pi x}{3}(3\sqrt{3} - 2)x^2,$$

d'où

$$x = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi(3\sqrt{3} - 2)}}.$$

En faisant $V = 500^{cc}$ et calculant par logarithmes, on obtient

$$x = 4^{cm},74$$

et

$$y = x(3\sqrt{3} - 2 - \sqrt{2}) = 3^{cm},92.$$

(Victor Barol, école primaire supérieure de Lorgues.)

Autre solution. — On peut aussi déterminer le maximum de V au moyen des dérivées. La dérivée de V est

$$V' = \pi m^2 - \pi(3\sqrt{3} - 2)x^2 ;$$

elle s'annule pour

$$m^2 = (3\sqrt{3} - 2)x^2,$$

équation qui détermine la valeur de x correspondant au maximum de V.

(G. Foucry, école normale de Châlons-sur-Marne.)

[M. P. Sandon, instituteur-adjoint à Oyé, a résolu la même question.]

4711. — *Réduire à la forme la plus simple possible l'expression*

$$\frac{2x^2 - x}{2x^2 - 5x + 2} - \frac{63x^2 - 84x + 28}{(21x - 14)(2x - 3)} + \frac{mx}{4x - 5} + \frac{12 - 6x}{3x^2 - 12x + 12} ;$$

ceci fait, former et résoudre l'équation obtenue en égalant à $\frac{3m + 9}{2}$ *l'expression trouvée ; mettre tous les calculs.*

(*École des Beaux-Arts, section d'architecture, 1899.*)

On sait que lorsqu'un trinome de la forme $ax^2 + bx + c$ s'annule pour deux valeurs réelles x' et x'' de x, il peut s'écrire sous la forme $a(x - x')(x - x'')$. Par suite

$$\frac{2x^2 - x}{2x^2 - 5x + 2} = \frac{2x\left(x - \frac{1}{2}\right)}{2(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \frac{x}{x - 2},$$

$$\frac{63x^2 - 84x + 28}{(21x - 14)(2x - 3)} = \frac{9\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{3\left(x - \frac{2}{3}\right)(2x - 3)} = \frac{3x - 2}{2x - 3},$$

$$\frac{12 - 6x}{3x^2 - 12x + 12} = \frac{6(2 - x)}{3(x - 2)^2} = -\frac{2}{x - 2}.$$

L'expression proposée devient donc

$$\frac{x}{x - 2} - \frac{3x - 2}{2x - 3} + \frac{mx}{4x - 5} - \frac{2}{x - 2} = 1 - \frac{3x - 2}{2x - 3} + \frac{mx}{4x - 5}$$
$$= \frac{mx}{4x - 5} - \frac{x + 1}{2x - 3}.$$

Egalons cette dernière expression à $\frac{3m + 9}{2}$; nous aurons

$$\frac{mx}{4x - 5} - \frac{x + 1}{2x - 3} = \frac{3m + 9}{2},$$

ou, tous calculs faits,

$$4(m + 4)x^2 - 4(3m + 10)x + 9m + 25 = 0.$$

Discussion. — Cette équation admet deux racines réelles lorsque

$$4(3m + 10)^2 - 4(m + 4)(9m + 25) \geqslant 0,$$

ou

$$-4m \geqslant 0,$$

ce qui n'a lieu que pour les valeurs négatives de m.

Cherchons le signe des deux valeurs de x suivant la valeur de m. L'équation a ses deux racines de signes contraires si ses termes extrêmes sont de signes différents, ce qui suppose

$$(m + 4)(9m + 25) < 0,$$

ou

$$-4 < m < -\frac{25}{9}.$$

Pour $m < -4$ ou $-\frac{25}{9} < m < 0$, les deux racines sont réelles et de même signe, ce signe étant celui de leur somme,

$$\frac{3m + 10}{m + 4},$$

quantité toujours positive, puisque ses deux termes ont le même signe pour $m < -4$, ou $m > -\frac{25}{9}$.

La discussion précédente peut se résumer ainsi :

$m < -4$, deux racines positives ;

$m = -4$, une racine infinie et l'autre égale à $\frac{11}{8}$;

$-4 < m < -\frac{25}{9}$, deux racines de signes contraires ;

$m = -\frac{25}{9}$, une racine nulle et l'autre égale à $\frac{15}{11}$;

$-\frac{25}{9} < m < 0$, deux racines positives ;

$m = 0$, deux racines égales à $\frac{5}{4}$;

$m > 0$, deux racines imaginaires.

Les deux racines ont pour expression

$$x = \frac{3m + 10 \pm \sqrt{-m}}{2(m + 4)}.$$

(A. Legros, lycée de Rouen.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Arcizet ; E. Baudouin ; C. Billionnet ; M. Coleil ; F. Collard ; Cougnoux ; Duvergé ; G. Foucry ; A. Jouffroy ; H. Julien ; Lajouanine ; D. Lwow ; R. Mouzon ; Noël ; L. Ollié ; Pequignot ; M. Petit ; C. Reboul ; E. Roncaglia ; A. Sainte-Laguë ; A. de Saint-Gabriel ; A. Sauvageon.]

4704. — *Etant donnés deux trinomes du 2e degré*

$$ax^2 + bx + c, \qquad a'x^2 + b'x + c',$$

montrer qu'il y a deux valeurs de λ *pour lesquelles l'équation*

$$ax^2 + bx + c + \lambda(a'x^2 + b'x + c') = 0$$

a ses racines égales. Discuter l'équation qui donne les valeurs de λ.

L'équation proposée s'écrit

$$(a + \lambda a')x^2 + (b + \lambda b')x + c + \lambda c' = 0.$$

Pour qu'elle admette deux racines égales, il faut et il suffit que l'on ait l'équation

$$(b + \lambda b')^2 - 4(a + \lambda a')(c + \lambda c') = 0,$$

ou, en ordonnant par rapport à λ,

$$(b'^2 - 4a'c')\lambda^2 - 2(2ac' + 2a'c - bb')\lambda + b^2 - 4ac = 0.$$

Cette équation détermine deux valeurs de λ réelles ou imaginaires. Si $b'^2 - 4a'c' = 0$, l'une des valeurs de λ devient infinie.

Ces valeurs sont réelles et inégales lorsque

$$(2ac' + 2ca' - bb')^2 - (b'^2 - 4a'c')(b^2 - 4ac) > 0,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(ac' - ca')^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) > 0.$$

Les deux valeurs de λ deviennent égales lorsque

$$(ac' - ca')^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) = 0.$$

Cette équation de condition est précisément celle qui exprime que les deux équations

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

ont une racine commune x_0. Dans ce cas, l'équation

$$ax^2 + bx + c + \lambda(a'x^2 + b'x + c') = 0$$

admet toujours cette racine, quel que soit λ; de sorte que l'équation ne peut avoir une racine double que si la seconde racine est égale à x_0.

On a alors

$$\lambda = \frac{2ac' + 2a'c - bb'}{b'^2 - 4a'c'},$$

et la racine double de l'équation en x est

$$x = x_0 = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}.$$

Remarque. — L'équation

$$ax^2 + bx + c + \lambda(a'x^2 + b'x + c') = 0, \qquad (1)$$

a ses racines x', x'' liées par une relation involutive; on obtient cette relation en éliminant λ entre les équations

$$x' + x'' = -\frac{b + \lambda b'}{a + \lambda a'}, \qquad x'x'' = \frac{c + \lambda c'}{a + \lambda a'}.$$

On a ainsi

$$(ab' - ba')x'x'' + (ac' - ca')(x' + x'') + (bc' - cb') = 0.$$

L'équation (1) est donc celle qui donne tous les couples de points d'une involution dont deux sont donnés par les équations

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

La condition de réalité des racines de l'équation en λ du problème précédent est celle de la réalité des points doubles de l'involution déterminée par deux couples de points.

On peut remarquer aussi que la question précédente revient à la détermination des maxima et minima de la fraction.

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}.$$

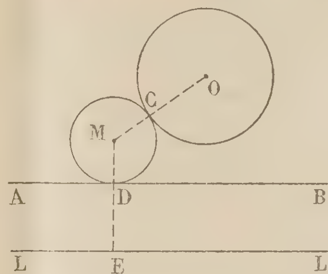
[Ont résolu cette question : MM. R. Badia; R. Bouvaist; F. Clabault; O. Destouches; H. Duchesne; Duvergé; G. Foucry; M. Gondran; J. Haag; J. Lamotte; M. Leblanc; D. Lwow; R. Mouzon; P. Noël; E. Refusin; d'Amphernet; Belbenoit; Bon; Henry; A. Jouffray; A. Larue; A. Lecoutour; Lehmann; E. Le Maigre; J. Maury; Miconnet; Pequignol; Petitjean; Reboul; Sinturel; Thérézien.]

GÉOMÉTRIE

4706. — *Lieu des centres des cercles tangents à un cercle et à un diamètre fixe de ce cercle.*

Ce problème n'est qu'un cas très particulier du suivant, que nous allons traiter : *Lieu des centres des cercles tangents à un cercle* O *et à une droite fixe* AB.

Soit M le centre d'un cercle touchant en C le cercle O et en D la droite AB. Si l'on prolonge MD d'une longueur DE = CO, le point E décrit une parallèle fixe LL' à AB, et l'on a ME = MO, ce qui montre que le lieu de M est une parabole de foyer O et de directrice LL'.



Cette parabole fournit, dans le cas de figure où AB ne coupe pas le cercle O, le lieu des centres des cercles tangents *extérieurement* au cercle O. En considérant les cercles tangents *intérieurement* au cercle O et à AB, on obtient une seconde parabole de même foyer O et dont la directrice est la droite symétrique de LL' par rapport à AB.

Lorsque AB coupe le cercle O, les deux points d'intersection font partie de chacune des paraboles. Dans ce cas de figure, les arcs AB des deux courbes compris dans le cercle O s'appliquent exclusivement aux centres des cercles tangents intérieurement au cercle O.

Lorsque AB touche le cercle O, le point de contact est le sommet d'une des paraboles; l'autre parabole ayant son foyer sur la directrice se confond avec l'axe de la courbe, qui répond alors au lieu, comme on peut s'en assurer.

Dans le cas de l'énoncé, AB étant un diamètre du cercle O, les deux paraboles sont symétriques par rapport à AB. Elles ont pour foyer commun O, et pour directrices respectivement les tangentes parallèles à AB.

(Narcisse VASLIN, école normale de Blois.)

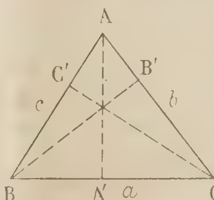
Remarque. — Dans le cas donné, c'est-à-dire lorsque AB est un diamètre, les deux paraboles se coupent à angle droit, car les tangentes en A et B passent par les extrémités du diamètre du cercle perpendiculaire à AB.

Ont résolu cette question ; MM. J. Arnaud ; V. Barol ; C. Billionnet ; R. Bouvaist ; J. Cabrol ; F. Clabault ; E. Cognel ; O. Destouches ; Estang ; G. Foucry ; A. Gérardin ; M. Gondran ; F. Grenier ; J. Haag ; R. Henry ; J. Erbæ ; Jacquet ; H. Jaffré ; A. Jouffray ; H. Julien ; T. Lalescu ; M. Leblanc ; H. Lévy ; C. Marie ; Marot ; M. B., à V. ; L. Ollié ; C. des Pallières ; J. Pendariès ; A. Pequignot ; M. Petit ; H. Pitrat ; F. Pouget ; Raynaud ; C. Reboul ; E. Refusin ; R. Rives ; A. de Saint-Gabriel ; Sinoquet ; H. Tellier ; P. Thonet ;, D. Tuïssuzian ; C. Vanier ; F. Vérot ; Vial ; Armaingaud ; Aubry ; E. Bon ; A. Hardy ; Sinturel.]

4725. — *Démontrer que si* A', B', C' *sont les pieds des hauteurs d'un triangle* ABC, *on a*

$$AB.AC' + BC.BA' + CA.CB' = AB.BC' + BC.CA' + CA.AB' = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Première démonstration. — Les angles B' et C' étant droits, le quadrilatère BCB'C' est inscriptible et donne $AB.AC' = AC.AB'$;
de même $BC.BA' = BA.BC'$
et $CA.CB' = CB.CA'$.



Ajoutons membre à membre ces trois égalités ; nous aurons

$$AB.AC' + BC.BA' + CA.CB' = CA.AB' + AB.BC' + BC.CA'.$$

Ayant ainsi établi la première relation énoncée, on en déduit

la seconde en considérant chacun des deux membres comme la moitié de leur somme, ce qui fournit la nouvelle expression

$$\frac{AB(AC' + BC') + BC(BA' + CA') + CA(CB' + AB')}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Seconde démonstration. — On a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2AB.AC' = b^2 + c^2 - 2AC.AB',$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2BC.BA' = c^2 + a^2 - 2BA.BC',$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2CA.CB' = a^2 + b^2 - 2CB.CA',$$

d'où l'on tire facilement par addition les relations

$$AB.AC' + BC.BA' + CA.CB' = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

et

$$AC.AB' + BA.BC' + CB.CA' = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

(DUVERGÉ, lycée de Bordeaux.)

[Ont résolu la même question : Mlle M. D. P. ; MM. A. Amblard ; d'Amphernet ; Anzemberger ; Armaingaud ; L. Artis ; L. Barberot ; R. Barthélemy ; E. Baudouin ; M. Bégué ; Bertagna ; Billionnet ; E. Bon ; R. Bouvaist ; L. Boyer ; J. Chemineau ; Clabault ; E. Cognet ; M. Cry ; Daure ; Delaire ; O. Destouches ; Dumont ; A. Dupouy ; C. Durand ; Eysséric ; G. Foucry ; E. Fournon ; R. Gamard ; F. Grenier ; J. Haag ; J. Hébré ; Henry ; Janois ; H. Julien ; Lajouanine ; A. Lecoutour ; H. Lévy ; A. Le Moal ; T. Lemoyne ; P. Marion ; L. Maubeck ; A. Meynier ; Mongin ; R. Mouzon ; P. Noël ; L. Patin ; A. Pequignot ; M. Petitjean ; P. Pille ; H. Pitrat ; L. de Praneuf ; E. Raüber ; E. Rieux ; A. Sainte-Laguë ; A. de Saint-Gabriel ; Sautreau ; A. Sauvageon ; G. Sinoquet ; C. Soulas ; H. Tellier ; L. Thiébert ; P. Thonet ; Trapinaud ; D. Tuïssuzian ; Vannier ; P. Valentin ; A. Vary ; Vial ; Vialarel ; A. Vioix ; X., à Bruxelles ; V. Barol ; A. Legros ; L. Ollié].

4727. — *Étant donné un triangle* ABC *rectangle en* A, *on considère un point* P *variable sur l'hypoténuse. On trace le cercle passant par* P *et* B *dont le centre est en* ω *sur* AB, *puis le cercle passant par* P *et* C *dont le centre est en* ω′ *sur* AC. *Ces deux cercles se coupent en* P *et* P′.

1° *Démontrer que* P, P′, ω, ω′, A *sont sur un cercle ;*

2° *Démontrer que ce cercle passe par un point fixe autre que* A *quand* P *varie ;*

3° *Trouver le lieu de* P′ ;

4° *Trouver l'enveloppe de la droite* ωω′.

1° L'angle ωAω′ étant droit, il suffit de démontrer que P appartient à un cercle de diamètre ωω′. Or

$$\widehat{\omega P \omega'} = 180° - (\widehat{\omega PB} + \widehat{\omega' PC}),$$

ou, comme $\widehat{\omega PB} = \widehat{B}$ et $\widehat{\omega' PC} = \widehat{C}$,

$$\widehat{\omega P \omega'} = 180° - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 90°.$$

Les cercles ω, ω′ sont donc orthogonaux et se coupent en P, P′ sur le cercle de diamètre ωω′.

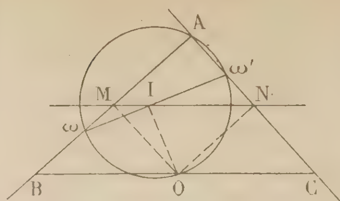
2° Joignons A au milieu O de BC. Les triangles isocèles OAB, ωBP donnent

$$\widehat{\omega AO} = \widehat{B} = \widehat{\omega PB},$$

de sorte que le quadrilatère AOPω a les angles opposés A et P supplémentaires ; il est donc inscriptible dans le cercle AωP déjà considéré, lequel passe ainsi par les deux points fixes O et A.

3° Joignons P′ aux points B et C. L'angle inscrit PBP′ est égal au demi-angle au centre correspondant Pωω′ ; de même $\widehat{PCP'} = \widehat{P\omega'\omega}$. Les triangles P′BC et Pωω′ sont donc semblables ; et comme le second est rectangle en P, le premier est rectangle en P′, d'où il résulte que le lieu de P′ est le cercle de diamètre BC circonscrit au triangle ABC.

4° On peut regarder les points ω et ω′ comme situés à l'intersection d'un cercle variable passant par O et A avec les droites fixes AB, AC.



Pour obtenir l'enveloppe de ωω′, remarquons que le point O du cercle circonscrit au triangle Aωω′ se projette sur les côtés en trois points M, I, N en ligne droite (théorème de Simson). Par suite la projection I du point O sur ωω′ décrit la droite fixe MN, ce qui montre que l'enveloppe de ωω′ est une parabole de foyer O admettant MN comme tangente au sommet. Comme AB et AC sont des positions particulières de ωω′, cette parabole est inscrite dans l'angle BAC. (L. OLLIÉ, à Auch.)

N. B. — Dans plusieurs copies, la 4e partie de la question a été ou omise ou mal comprise. Par enveloppe d'une droite variable on entend la courbe fixe à laquelle cette droite reste tangente dans toutes ses positions.

[Ont résolu complètement la question : MM. A. Amblard ; G. Armaingaud ; O. Destouches ; H. Dumont ; G. Foucry ; F. Grenier ; J. Haag ; T. Millet ; H. Pitrat ; A. de Saint-Gabriel ; A. Cauvin ; J. Chapron.

Ont résolu partiellement la question : MM. d'Amphernet ; E. Bon ; R. Bouvaist ; L. Brélivet ; J. Brun ; G. Capgras ; J. Chemineau ; F. Clabault ; M. Cry ; Delaire ; Hébré ; H. Julien ; Lajouanine ; A. Lecoutour ; Marot ; A. Meynier ; Mongin ; R. Mouzon ; P. Noël ; A. Sainte-Laguë ; Sautreau ; C. Soulas.]

4736 (*). — F *et* F′ *étant les foyers d'une ellipse donnée et* M *désignant un point de cette ellipse, on considère les deux cercles tangents aux trois côtés du triangle* MFF′ *et dont les centres* O_1, O_2 *sont situés sur la tangente en* M *à l'ellipse. Démontrer que, lorsque le point* M *se déplace sur l'ellipse considérée, les deux points* O_1, O_2 *décrivent respectivement deux droites dont on indiquera la position par rapport à l'ellipse.*

(*Bacc. lettres-sciences, Toulouse, juillet 1899.*)

Les cercles exinscrits O_1 et O_2 du triangle MFF′ touchent, comme on sait, le côté FF′ en deux points A, A′ tels que

$$F'A = FA' = p,$$

$2p$ désignant le périmètre du triangle.

Or M appartenant par hypothèse à une ellipse donnée dont le grand axe est $2a$ et la distance focale $2c$, on a

$$2p = F'F + FM + MF' = 2c + 2a ;$$

donc p est constant et par suite les points A, A′ sont fixes. Ces points sont d'ailleurs sur l'ellipse, puisque

$$AF' + AF = p + p - 2c = 2p - 2c = 2a.$$

Ainsi les droites décrites par les points O_1 et O_2 sont les tangentes à l'ellipse menées aux sommets du grand axe.

(HENRI PITRAT, à Givors.)

[Ont résolu la même question : MM. R. Barthélemy ; Billionnet ; C. Bourvéau ; R. Bouvaist ; M. Cry ; Duvergé ; Gondran ; Hébré ; Henry ; Jouffray ; T. Lalescu ; L. Lassence ; D. Lwow ; Marot ; L. Patin ; Pendariès ; A. Portalier ; Rivière ; Sainte-Laguë ; G. Sinoquet ; H. Tellier ; P. Thonet ; P. Valentin ; F. Vérot ; H. Janois ; L. Ollié ; A. de Saint-Gabriel.]

TRIGONOMÉTRIE

4624. — *On donne un cercle de rayon* R *et de centre* O ; *trouver sur la circonférence un point* P *tel que l'angle* OPC *soit maximum. En supposant* $OC = \frac{R}{24}$, *calculer en degrés et minutes la valeur de l'angle maximum.*

(*Bacc. lettres-math., Poitiers, novembre 1898.*)

(*) Au sujet de ce lieu, le lecteur peut se reporter à une question plus étendue résolue dans la 7e année (p. 117, n° 100).

Si l'on pose $\widehat{OCP} = \alpha$, le triangle OCP permet d'écrire

$$\frac{\sin P}{OC} = \frac{\sin \alpha}{R},$$

d'où

$$\sin P = \frac{OC}{R} \sin \alpha.$$

Dans le cas de $OC < R$ (cas de la figure), l'angle P étant toujours aigu devient maximum en même temps que sin P, c'est-à-dire lorsque $\sin \alpha = 1$, ou $\alpha = 90^o$. Le point cherché P est donc à la rencontre du cercle O avec la perpendiculaire en C à OC.

Application numérique. — Pour $OC = \frac{R}{24}$, on a

$$\sin P = \frac{1}{24},$$

et les tables donnent

$$P = 2^o 23'.$$

Lorsque $OC > R$, la valeur de sin P ne pouvant surpasser 1, on doit avoir

$$\frac{OC}{R} \sin \alpha \leq 1, \quad \text{ou} \quad \sin \alpha \leq \frac{R}{OC};$$

l'angle α est alors inférieur ou égal à un certain angle α_1 ayant pour sinus $\frac{R}{OC}$. L'angle α_1 est celui que la tangente menée de C fait avec OC. Mais il n'y a plus de maximum ou de minimum de l'angle OPC, cet angle pouvant prendre toutes les valeurs depuis 0 (si P est à l'extrémité du diamètre OC extérieure au segment CO) jusqu'à 180° (si P est à l'extrémité entre C et P).

Solution géométrique. — Le lieu des points P pour lesquels l'angle OPC a une valeur donnée est un segment capable de corde OC et de grandeur inversement proportionnelle à la valeur de l'angle. Par suite le maximum de l'angle OPC répond au plus petit segment tangent en P au cercle O ; comme OP est alors un diamètre du segment, l'angle OCP est droit.

(G. FOUCRY, école normale de Châlons-sur-Marne.)

Remarque. — On peut encore déduire le maximum de l'angle P du minimum de son cosinus en discutant l'équation

$$\overline{PC}^2 - 2R \cos P . PC + R^2 - \overline{OC}^2 = 0.$$

[Ont résolu la même question : MM. Bouzy ; V. Chosson ; L. Curt ; H. Dodier ; J. Filon ; E. Foucart ; H. Guillaud ; R. Henry ; T. Lalescu ; A. Larue ; E. Le Maigre ; C. Marie ; J. Ménéchal ; S.-N. Mirea ; M. Oger ; A. Pichon ; H. Varennes.]

PHYSIQUE

4738. — *Un baromètre a* 1^m *de longueur au-dessus du mercure de la cuvette et* 1^{cq} *de section intérieure. Il renferme une colonne de mercure de* $0^m,760$ *de hauteur et la température est 0°. On introduit dans la chambre de ce baromètre* 1^{cc} *d'air mesuré dans les conditions normales de température et de pression, et on demande :*

1° *Quelle sera la densité de l'atmosphère qui surmontera la colonne de mercure ;*

2° *Quelle sera la hauteur barométrique observée ;*

3° *De combien il faudra enfoncer le tube barométrique dans la cuvette pour que la densité de l'air qu'il contient soit égale à celle de l'air extérieur.*

(*Bacc. lettres-sciences, Caen, juillet 1899.*)

1° Soit x la hauteur dont baissera le mercure par suite de l'introduction de l'air. Le volume occupé par l'air sera alors $100 - 76 + x$ et comme sa force élastique est représentée par x, on a, d'après la loi de Mariotte,

$$(100 - 76 + x)x = 76 \times 1,$$

d'où

$$x^2 + 24x - 76 = 0.$$

La racine positive convient seule ; on a donc

$$x = 2^{cm},832.$$

Les densités d'un gaz étant proportionnelles aux pressions, la densité de l'atmosphère qui surmonte la colonne de mercure a pour valeur, en prenant le centimètre cube comme unité de volume,

$$\frac{0,001293 \times 2,832}{76} = 0^{gr},00004818.$$

2° La hauteur barométrique observée sera de

$$76 - 2,832 = 73^{cm},168.$$

3° Enfonçons le tube jusqu'à ce que le niveau du mercure soit le même à l'intérieur qu'à l'extérieur. L'air intérieur occupe alors un volume de 1^{cc}. A ce moment, l'air extérieur et l'air intérieur ayant même température et même force élastique, ont la même densité. Il faudra donc enfoncer le tube de 99^{cm}.

(L. MAUBECK.)

[Ont résolu la même question : Mlle J. Gravet ; MM. L. Audoyer ; E. Baudouin ; M. Bégué ; C. Billionnet ; H. Blanc ; E. Cognet ; J. Crétinon ; L. Curt ; Duvergé et Sainte-Laguë ; J. Germa ; M. Gondran ; J. Haag ; J. Hébré ; R. Henry ; A. Lecoutour ; Lemasurier ; T. Lemoyne ; E. Léger ; F. Limouzi ; David Lwow ; Marot ; B. Mathé ; Mengailhou ; Noël ; R. Paucot ; L. Patin ; M. Petit ; P. Pille ; A. Pichon ; R., à A. ; R. Simon ; G. Sinoquet ; L. Thiébert ; H. Tellier ; Raüber ; M. Royer ; A. Vary ; Valentin ; Rivière.]

4739. — *Un vase cylindrique A de* 1^m *de hauteur et de* 10^{cq} *de section porte à sa partie inférieure un tube latéral B de section négligeable qui s'ouvre dans l'atmosphère au niveau même de la base supérieure. Ce vase contient de l'air sec et du mercure qui remplit le fond du vase et tout le tube B. A 0° la hauteur occupée par l'air est de* 50^{cm} *et sa pression de* 125^{cm} *de mercure. On porte tout le système à la température de 200° et l'on demande :*

1° *Quelle sera la hauteur occupée par l'air ;*

2° *Quel poids de mercure se sera écoulé par le tube B.*

Densité du mercure à 0°, 13,6 ;

Coefficient de dilatation absolue du mercure, $\frac{1}{5550}$;

Coefficient de dilatation de l'air, $\frac{1}{273}$.

On négligera la dilatation du vase.

(*Bacc. lettres-math., Poitiers, juillet 1899.*)

1° Soit H la pression atmosphérique. Comme la distance des niveaux dans les deux tubes est de 50^{cm}, on a

$$H + 50 = 125,$$

d'où

$$H = 75^{cm}.$$

Appelons x la hauteur occupée par l'air à 200°. La pression H' de cet air sera égale à $H + x$ ou $75 + x$. En appliquant la formule qui réunit les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, il vient

$$500 \times 125 = \frac{10x(75 + x)}{1 + \frac{200}{273}},$$

d'où l'on tire l'équation

$$x^2 + 75x - 6250 \times \frac{473}{273} = 0.$$

La racine positive convenant seule, on a $x = 73^{cm},11$.

2° Le mercure, à 200°, occupe dans le vase un volume de $(100 - 73,11) 10 = 268^{cc},9$ auquel correspond, à 0°, un volume de $\frac{268,9}{1 + \frac{200}{5550}} = \frac{268,9 \times 5550}{5750}$. Le volume de mercure écoulé est donc, à 0°, de

$$\left(500 - \frac{268,9 \times 5550}{5750}\right) = \frac{1\,382\,605}{5750}$$

et le poids de ce mercure est de $\frac{1\,382\,605 \times 13,6}{5750} = 3\,270^{gr},1.$

(R. HENRY.)

[Ont résolu la même question : MM. M. Cry ; M. Gaillot ; M. Gondran ; Haag ; J. Hébré ; David Lwow ; F. Limouzi ; M. B. ; R. Paucot ; A. Vary.]

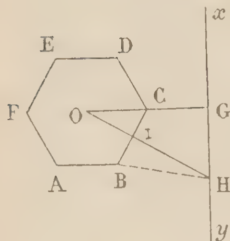
CONCOURS DE 1899 *(suite)*

ÉCOLE NATIONALE ET SPÉCIALE DES BEAUX-ARTS

SECTION D'ARCHITECTURE

Mathématiques.

I. — **4749**. Étant donné un hexagone régulier ABCDEF de côté a, de centre O, sur le prolongement du rayon OC on prend une longueur $CG = a$ et par le point G on mène la perpendiculaire xy à OG :



1° Trouver l'expression V du volume engendré par l'hexagone en tournant autour de xy, et calculer par logarithmes le côté a sachant que $V = 0^{mc},547238$;

2° Du centre O on abaisse la perpendiculaire sur le côté BC jusqu'à son intersection H avec xy, et on joint le point H au sommet B ; calculer en fonction de a la longueur BH; mettre tous les calculs.

II. — **4750**. Trouver le quotient et le reste de la division par $2x^2 - 5x + m$ du polynome

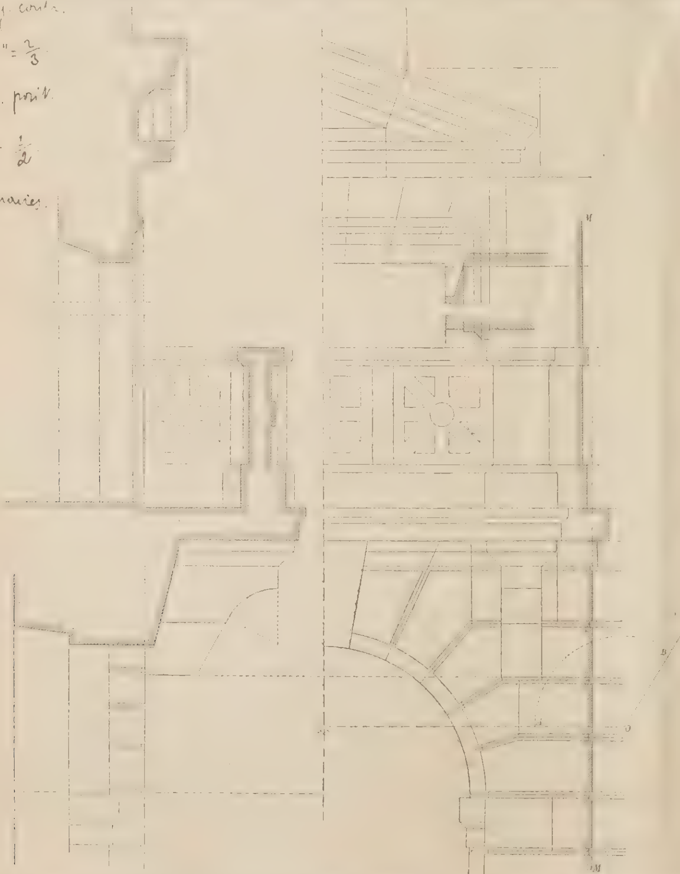
$$6mx^4 - (27m - 8)x^3 + (3m^2 + 36m - 26)x^2 - 11mx - 3m,$$

puis résoudre et discuter l'équation obtenue en égalant à zéro le quotient; mettre tous les calculs.

(*2e session. 24 octobre. — Durée : 2 heures.*)

Géométrie descriptive.

Deux façades semblables d'une maison font entre elles un angle AOB.



Sur chaque façade, la travée la plus voisine de cet angle a son axe à la distance OX. L'architecture de ces deux travées est identique.

Au rez-de-chaussée existe une baie en arcade avec refends; clef saillante.

Au-dessus de l'arcade est un balcon porté par deux consoles en épannelage. La balustrade du balcon, évidée en croisillons, se termine à chacune de ses deux extrémités par un piédestal carré. Le profil de la face latérale est le même que celui de la face principale.

Le premier étage, légèrement en retraite sur le rez-de-chaussée, ouvre sur le balcon par une porte rectangulaire couronnée d'un fronton.

Le tracé MM indique le profil du bâtiment en dehors des balcons.

L'épure consiste à représenter la projection verticale des deux façades, la façade OA étant vue de face, la façade OB étant par suite dans le plan vertical faisant avec le plan vertical de projection l'angle AOB, y compris la projection de l'appareil.

Les rayons lumineux étant supposés à 45°, on cherchera ensuite si la façade OB est complètement dans l'ombre, et on déterminera, s'il y a lieu, la partie éclairée ; on ne demande pas les ombres de l'élévation normale.

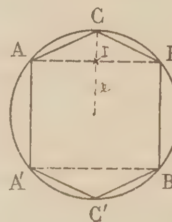
NOTA. — Les candidats sont priés de mettre au crayon ou à l'encre rouge *toutes* les lignes de construction.

(*2e session. — Durée : 8 heures.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4751. — Trouver toutes les valeurs de n pour lesquelles $13^n - 1$ est divisible par 103.

(TANASESCU, école militaire de Jassy.)



4752. — Étant donnée une sphère, on mène deux plans parallèles AB, A'B' également distants du centre. Soient C et C' les pôles des cercles déterminés par ces plans.

Trouver le maximum du volume formé par le cylindre ABA'B' et les deux cônes CAB, C'A'B'.

4753. — Par un point quelconque O du plan d'un triangle ABC on mène des parallèles aux côtés AB, BC, CA limitées respectivement en A', B', C' aux côtés BC, CA, AB. Démontrer que

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{CB'}}{\overline{CA}} + \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB}} = 1.$$

(Les segments sont regardés comme positifs ou négatifs, suivant qu'ils sont dirigés dans le sens ABCA ou en sens inverse.)

(FAUCHER, collège d'Issoire.)

4754. — Un quadrilatère fixe inscrit dans un cercle O a ses diagonales AC, BD rectangulaires. Par le point de concours des diagonales on mène deux droites rectangulaires variables Δ et Δ' :

1° Soient A'C' la projection de AC sur Δ, B'D' la projection de BD sur Δ'. Prouver que le quadrilatère A'B'C'D' est inscriptible dans un cercle O'.

2° Trouver le lieu du centre du cercle O'.

3° Si A''C'' est la projection de A'C' sur AC et B''D'' la projection de B'C' sur BC, le quadrilatère A''B''C''D'' est inscriptible dans un cercle O'' dont on demande le lieu du centre.

4° Trouver une relation entre les rayons des trois cercles O, O', O''.

(L. OLLIÉ, à Auch.)

4755. — Dans un réservoir contenant $5^{lit},6$ d'air sec à 0° et sous la pression de 830^{mm} de mercure, on veut introduire avec une pompe de compression dépourvue d'espace nuisible 23^{gr} d'air sec pris à 0° et sous la pression normale. Le volume du corps de pompe étant de 560^{cc}, on demande le nombre de coups de piston à donner et la pression finale dans le réservoir.

Poids du litre d'air dans les conditions normales, $1^{gr},3$.

(*Bacc. lettres-math., Rennes, juillet 1899.*)

4756. — Un très petit cercle lumineux, dont le plan est perpendiculaire à l'axe principal d'une lentille convergente, a son centre en un point de cet axe. Sur un écran situé à 3^m du cercle donné et perpendiculaire à l'axe principal, se forme une image réelle dont la surface est quadruple de celle du cercle donné. Calculer la distance focale principale de la lentille.

(*Bacc. lettres-math., Caen, juillet 1899.*)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

24e Année. — N° 11. **JOURNAL** Paris, le 1er Mars 1900

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.

Abonnements.. Librairie **Nony** et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES (1899)

Section des Sciences mathématiques.

4663. — *On donne les trinomes du second degré*

$$u = x^2 - 6x + 5, \qquad v = x^2 - 5x + 6,$$

et on considère les fractions

$$y = \frac{u}{v}, \qquad z = \frac{mu + nv}{u + pv},$$

m, n et p désignant des nombres donnés quelconques :

1° *Étudier la variation de la fraction* $y = \frac{u}{v}$;

2° *Comparer la variation de z à celle de y, et montrer que ces deux fonctions de x varient toujours dans le même sens, ou toujours en sens contraires selon que* $mp - n$ *est positif ou négatif.*

3° *Déterminer n et p en fonction de m, de manière que le maximum et le minimum de z soient respectivement égaux au maximum et au minimum, ou au minimum et au maximum de y. Distinguer les valeurs de m pour lesquelles on se trouve dans l'un ou dans l'autre de ces deux cas.*

1° La fonction

$$y = \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 5x + 6}$$

est continue pour toutes les valeurs de x qui n'annulent pas le dénominateur $x^2 - 5x + 6$. Or ce trinome a pour racines 2 et 3 ; donc la fonction y sera continue dans les intervalles $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$ et $(3, +\infty)$.

La dérivée de cette fonction est

$$y' = \frac{x^2 + 2x - 11}{(x^2 - 5x + 6)^2}.$$

Le numérateur a deux racines réelles et de signes contraires, $-1 - 2\sqrt{3}$ et $-1 + 2\sqrt{3}$; la première est dans l'intervalle $(-\infty, 2)$, et la seconde dans l'intervalle $(2, 3)$. La dérivée y' sera positive pour toutes les valeurs de x extérieures aux racines $-1 - 2\sqrt{3}$ et $-1 + 2\sqrt{3}$, et négative pour toutes les valeurs de x comprises entre les racines.

Nous pouvons donc dresser le tableau de variations suivant :

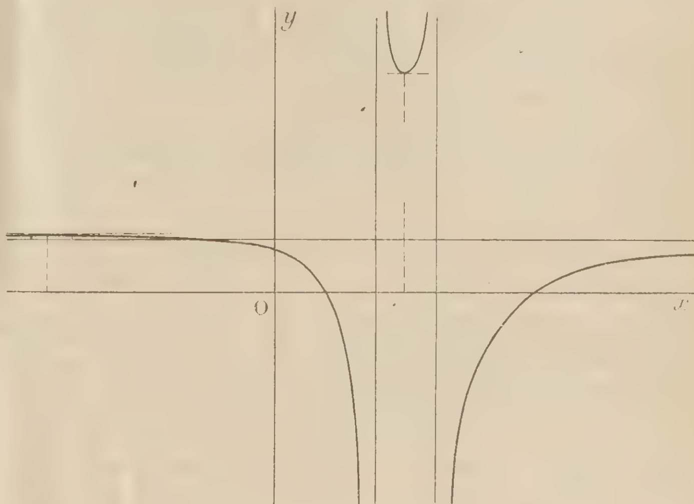
x	$-\infty$		$-1-2\sqrt{3}$		$2-\varepsilon$	$2+\varepsilon$		$-1+2\sqrt{3}$		$3-\varepsilon$	$3+\varepsilon$		$+\infty$
y'		+		−			−		+			+	
y	1	croît	$8-4\sqrt{3}$ Max.	décroît	$-\infty$	$+\infty$	décroît	$8+4\sqrt{3}$ Min.	croît	$+\infty$	$-\infty$	croît	1

En mettant y sous la forme

$$\frac{1 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}},$$

on voit aisément que quand x augmente indéfiniment, y a pour limite 1.

Les variations de y sont alors représentées par la courbe suivante :



On peut observer que y s'annule pour $x = 1$ et $x = 5$; par conséquent la courbe rencontre l'axe des x aux points qui ont pour abscisses 1 et 5.

2° On peut écrire

$$z = \frac{m\frac{u}{v} + n}{\frac{u}{v} + p},$$

ou

$$z = \frac{my + n}{y + p},$$

et en prenant les dérivées des deux membres par rapport à x,

$$z' = \frac{(y + p)my' - (my + n)y'}{(y + p)^2},$$

ou

$$z' = \frac{(mp - n)y'}{(y + p)^2}.$$

Si $mp - n$ est positif, z' et y' sont de même signe ; par conséquent y et z varient dans le même sens.

Si $mp - n$ est négatif, z' et y' sont de signes contraires ; donc y et z varient en sens contraires.

3° Nous distinguerons deux cas, selon que les valeurs maxima ou minima de y et de z qui doivent être égales, correspondent aux mêmes valeurs de x ou à des valeurs de x différentes.

Premier cas. — *Les valeurs maxima ou minima de y et de z qui doivent être égales correspondent aux mêmes valeurs de x.*

Soit y_1 le maximum de y, y_2 son minimum ; nous avons

$$y_1 = 8 + 4\sqrt{3}, \qquad y_2 = 8 - 4\sqrt{3}.$$

On doit avoir

$$y_1 = \frac{my_1 + n}{y_1 + p}, \qquad y_2 = \frac{my_2 + n}{y_2 + p},$$

ou $\quad y_1^2 - (m - p)y_1 - n = 0, \qquad y_2^2 - (m - p)y_2 - n = 0$;

par suite y_1 et y_2 sont racines de l'équation $y^2 - (m - p)y - n = 0$, et l'on a

$$m - p = y_1 + y_2 = 16, \qquad - n = y_1 y_2 = 16 ;$$

on en déduit

$$p = m - 16, \qquad n = -16$$

et le problème est résolu.

D'ailleurs $mp - n = m(m - 16) - 16 = m^2 - 16m - 16$; le signe de ce trinome dépend de la position de m par rapport aux racines, qui sont égales à $8 - 4\sqrt{3}$ et $8 + 4\sqrt{3}$.

Donc si m est extérieur à l'intervalle $(8 - 4\sqrt{3},\ 8 + 4\sqrt{3})$, le maximum et le minimum de z sont respectivement égaux au maximum et au minimum de y.

Si m est compris entre $8 - 4\sqrt{3}$ et $8 + 4\sqrt{3}$, le maximum et le minimum de z sont respectivement égaux au minimum et au maximum de y.

Deuxième cas. — *Les valeurs maxima ou minima de y et de z qui doivent être égales correspondent à des valeurs différentes de x.*

On doit alors avoir

$$y_1 = \frac{my_2 + n}{y_2 + p}, \qquad y_2 = \frac{my_1 + n}{y_1 + p},$$

ou $\quad y_1 y_2 + py_1 - my_2 - n = 0, \qquad y_1 y_2 + py_2 - my_1 - n = 0.$

En retranchant ces deux égalités, on a $(m + p)(y_1 - y_2) = 0$, d'où $m + p = 0$. Il vient alors

$$y_1 y_2 - m(y_1 + y_2) - n = 0,$$

ou

$$16 - 16m - n = 0.$$

On en déduit

$$n = 16(1 - m), \qquad p = -m.$$

En outre $mp - n = -m^2 + 16m - 16$; nous obtenons le même trinome que précédemment.

Par suite, si m est extérieur à l'intervalle $(8 - 4\sqrt{3},\ 8 + 4\sqrt{3})$, $mp - n$ est négatif, z et y varient en sens contraires, donc $\dfrac{my_2 + n}{y_2 + p}$ est un maximum pour z, et $\dfrac{my_1 + n}{y_1 + p}$ est un minimum ; il en résulte que le maximum et le minimum de z sont respectivement égaux au maximum et au minimum de y.

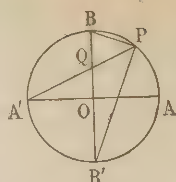
Si m est compris entre $8 - 4\sqrt{3}$ et $8 + 4\sqrt{3}$, le maximum et le minimum de z sont respectivement égaux au minimum et au maximum de y.

On est ainsi conduit aux mêmes conclusions que dans le premier cas ; seulement les valeurs de n et p en fonction de m ne sont pas les mêmes.

(V. H.)

[Ont résolu la même question : MM. Boyer, instituteur à Auterive ; Bourvéau, à Quimperlé ; Debenest ; G. Foucry, école normale de Chalons-sur-Marne ; M. Gondran, à Caen ; R. Henry, instituteur à Troyes ; Jacquet, lycée de Mâcon ; A. Legros, lycée de Rouen ; H. Lévy ; D. Lwow, à Piatra (Roumanie) ; G. Marcellin, école normale de Valence ; S. N., à Châlons ; L. Ollié, à Auch ; A. Sainte-Laguë, lycée de Bordeaux ; A. Tamerelle, lycée Saint-Louis.]

4664. — *On donne une circonférence de centre O et deux diamètres rectangulaires AA′, BB′. Soit P un point mobile sur cette circonférence ; on trace la droite PA′ qui coupe le diamètre BB′, ou son prolongement, au point Q.*



1° Trouver le lieu du point C, centre du cercle circonscrit au triangle BPQ, et le lieu du point C′, centre du cercle circonscrit au triangle B′PQ.

Distinguer les parties de ces lieux qui correspondent aux différentes positions du point P sur la circonférence donnée.

2° Démontrer que la somme ou la différence des rayons des cercles circonscrits aux triangles BPQ et B′PQ est constante.

3° Démontrer que le triangle OCC′ est rectangle et isocèle, et trouver le lieu du point I, milieu de la droite CC′.

4° Trouver le lieu du point d'intersection M des droites OP et CC′ et chercher la tangente à ce lieu au point M.

1° Supposons d'abord que le point P soit situé sur l'arc BAB′ (*fig.* 1). Comme l'angle BPQ est aigu et égal à 45° puisqu'il a même mesure que la moitié de l'arc A′B, le point C est par rapport à BQ du même côté que le point P, et l'angle au centre BCQ, double de l'angle inscrit BPQ, est droit. Le triangle BCQ est donc rectangle et isocèle, l'angle CBQ est égal à 45° et par suite le point C est sur la droite AB.

Fig. 1

Un raisonnement tout à fait semblable montre que le point C′ est sur la droite AB′.

Les points C et C′ sont donc les projections du point Q sur les droites AB et AB′. Par suite quand le point P décrit l'arc BAB′ dans le sens BAB′, le point C décrit la droite AB dans le sens BA, et le point C′ décrit la droite AB′ dans le sens AB′.

Si le point P est sur l'arc BA′ (*fig.* 2), le point C est par rapport à BQ du même côté que le point P, puisque l'angle BPQ est égal à 45°. Donc l'angle QCB est droit et le point C est encore la projection de Q sur Bβ, prolongement de AB. D'autre part, l'angle QPB′ étant obtus (et égal à 135°) les points C′ et P sont de côtés différents par rapport à QB′ ; l'angle QC′B′ est égal au double du supplément de l'angle QPB′, il est encore droit, par conséquent le point C′ est la projection de Q sur le prolongement Aα′ de AB′.

Fig. 2

Quand le point P décrit l'arc BA′ dans le sens BA′, le point C décrit la droite Bβ dans le sens Bβ, et quand P se rapproche indéfiniment de A′, le point C s'éloigne indéfiniment. Le point C′ décrit alors Aα′ dans le sens Aα′, et s'éloigne indéfiniment quand P se rapproche de A′.

Enfin, en raisonnant d'une manière analogue, on verra que si le point P décrit l'arc B′A′ (*fig.* 3) dans le sens B′A′, le point C

décrit la droite $A\alpha$ dans le sens $A\alpha$, et le point C' la droite $B'\beta'$ dans le sens $B'\beta'$.

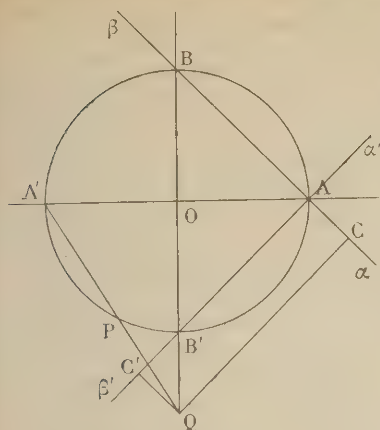


Fig. 3

Il résulte de cette discussion que le lieu du point C est la droite AB tout entière et que le lieu du point C' est la droite AB' tout entière. De plus les points C et C' étant les projections du point Q sur AB et AB', on suivra facilement le déplacement de ces points, lorsque le point P décrit la circonférence donnée.

2° a) *Le point* P *est sur l'arc* BAB' (*fig.* 1).

Désignons par ρ et ρ' les rayons des deux cercles. Nous avons $\rho = QC$, $\rho' = QC'$. Comme la figure $ACQC'$ est un rectangle, AC est égal à QC', et par suite

$$\rho + \rho' = AB.$$

b) *Le point* P *est sur l'arc* BA' (*fig.* 2).

$$\rho = QC, \qquad \rho' = QC' = AC,$$
$$\rho' - \rho = AB.$$

c) *Le point* P *est sur l'arc* $A'B'$ (*fig.* 3).

$$\rho = QC, \qquad \rho' = QC' = AC,$$
$$\rho - \rho' = AB.$$

Dans ce qui va suivre nous nous bornerons au cas où le point P est situé sur l'arc BAB', car le raisonnement est identique dans les autres hypothèses.

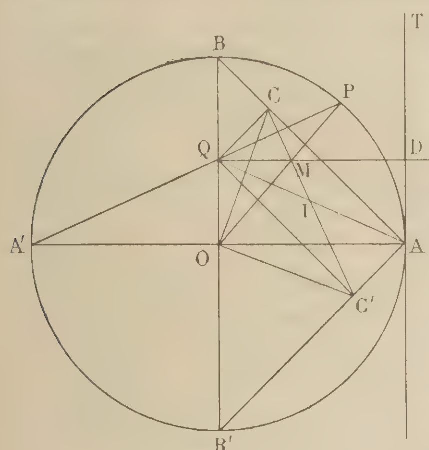


Fig. 4

Les triangles OBC, OAC' sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux :

$$\widehat{OBC} = \widehat{OAC'} = 45°,$$
$$OA = OB, \quad BC = AC'.$$

Donc $OC = OC'$ et $\widehat{BOC} = \widehat{AOC'}$. Il en résulte que l'angle COC' est droit.

De plus, comme la figure $ACQC'$ est un rectangle, le milieu I de CC' est au milieu de AQ, et par suite le lieu du point I est la perpendiculaire élevée à OA en son milieu.

4° Soit M le point de rencontre de CC' et de OP. La droite PQ étant la corde commune aux deux cercles de centres C et C', CC' est perpendiculaire à PQ en son milieu. Donc le triangle PMQ est isocèle, on a $\widehat{PQM} = \widehat{MPQ}$; mais comme

$$\widehat{MPQ} = \widehat{OPA'} = \widehat{OA'P},$$

nous avons $\widehat{PQM} = \widehat{OA'P}$, par suite QM est parallèle à AA'. Soit AT la tangente en A au cercle O ; prolongeons QM jusqu'à sa rencontre D avec AT. Comme $MQ = MP$ et $OP = QD$, on en déduit $OM = MD$; par suite, le lieu du point M est la parabole qui a pour foyer le point O et pour directrice la droite AT.

Comme CC' est bissectrice de l'angle $\widehat{PMQ}$, cette droite est précisément la tangente en M à cette parabole.

Observons enfin que cette parabole passe par les points B et B', y admet comme tangentes BA et $B'A$, et que la tangente au sommet de cette parabole est la droite lieu du point I.

(G. FOUCRY, école normale de Châlons-sur-Marne.)

(Ont résolu cette question : MM. A. Amblard, à Saint-Flour ; Bayor, instituteur à Auterive ; C. Billionnet ; G. Boissonnet ; E. Bon, à Lons-le-Saunier ; C. Bourvéau, à Quimperlé ; R. Bouvaist ; H. Debenest, instituteur-adjoint à Mirebeau (Vienne) ; Duvergé, lycée de Bordeaux ; V. H. ; Jacquet, lycée de Mâcon ; Lajouanine, lycée de Clermont ; Laly ; Ch. Lefebvre, lycée Saint-Louis ; David Lwow, à Piatra (Roumanie) ; R. Manen, petit séminaire de Massals ; S. N., à Châlons ; L. Ollié, à Auch ; Henri Pitrat, à Givors ; Paul Thonet, athénée royal d'Anvers ; P. Tribier.)

Nous avons reçu également un certain nombre de copies dont nous n'avons pu déchiffrer les signatures.

Section des Sciences physiques et naturelles.

4665. — *On suppose qu'on connaisse, pour un corps solide déterminé, sa chaleur spécifique* $K = 0{,}03$; *sa chaleur de fusion* $\lambda = 5{,}34$; *son coefficient de dilatation cubique* $\delta = \frac{1}{12\,500}$; *sa température de fusion* $T = 320°$; *toutes ces quantités étant rapportées aux unités* C. G. S. *et à l'échelle centigrade.* — *On demande de déterminer les valeurs numériques de ces mêmes quantités en substituant à l'échelle centigrade, dans toutes les définitions : 1° l'échelle de Réaumur ; 2° l'échelle de Fahrenheit.* (*On représentera les quantités à déterminer par les mêmes lettres, affectées de l'indice* R *ou de l'indice* F.)

L'échelle Réaumur comprend 80°, du point de fusion de la glace au point d'ébullition de l'eau.

On a donc

$$1°_R = 1°_C \times \frac{100}{80} = 1°_C \times \frac{5}{4}.$$

Dans l'échelle Fahrenheit, les points fixes sont caractérisés par 32 (glace fondante) et 212 (vapeur d'eau bouillante). Par suite

$$(212 - 32)F = 100C,$$

d'où
$$1°_F = 1°_C \frac{100}{180} = 1°_C \times \frac{5}{9}.$$

On a aussi
$$T_F = T_C \times \frac{9}{5} + 32.$$

On appelle chaleur spécifique d'un corps la quantité de chaleur, évaluée en calories, qu'il faut céder à 1^{gr} de ce corps pour élever sa température de 1°.

Si $K_C = 0{,}03$, on a évidemment $K_R = 0{,}03 \times \frac{5}{4} = 0{,}0375$,

et $K_F = 0{,}03 \times \frac{5}{9} = 0{,}0166$.

La chaleur de fusion d'un corps solide est la quantité de chaleur qu'il faut céder à 1^{gr} de ce corps pour le faire passer à l'état liquide sans changer sa température. Elle est évidemment indépendante des échelles thermométriques et on a toujours pour le corps considéré, $\lambda = 5{,}34$.

Le coefficient de dilatation cubique d'un corps est l'augmentation de volume de 1^{cc} de ce corps quand on élève sa température de 1°. Si l'on a
$$\delta_C = \frac{1}{12\,500},$$
$$\delta_R = \frac{1}{12\,500} \times \frac{5}{4} = \frac{1}{10\,000}$$
et
$$\delta_F = \frac{1}{12\,500} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{22\,500}.$$

Enfin si l'on a $T_C = 320°$,

$$T_R = 320 \times \frac{4}{5} = 256°$$

et $$T_F = 320 \times \frac{9}{5} + 32 = 608°.$$

(J. MÉNÉCHAL.)

[Ont résolu la même question : MM. C. Billionnet ; M. Boesch ; R. Henry.]

ARITHMÉTIQUE

4722. — *Trouver un nombre X de trois chiffres qui divise le nombre des chiffres obtenus en écrivant la suite naturelle des nombres entiers de 1 à X.*

Généraliser.

La suite naturelle des nombres de 1 à X inclusivement comprend :

$10 - 1$ nombres de 1 chiffre, soit 9 chiffres ;
$100 - 10$ — 2 chiffres, soit 90×2 chiffres ;
$X + 1 - 100$ — 3 — , soit $(X - 99)3$ chiffres.

Le nombre total des chiffres est donc

$$3(X - 99) + 2 \times 90 + 9 = 3X - 108.$$

Ce nombre n'est divisible par X qu'autant que X est un diviseur de 108 d'au moins 3 chiffres, d'où la solution unique $X = 108$.

Généralisation. — En supposant que le nombre X a n chiffres, la suite naturelle des nombres de 1 à X inclusivement comprend :

$10 - 1$ nombres de 1 chiffre ;
$10^2 - 10$ — 2 chiffres ;
$10^3 - 10^2$ — 3 — ;
. . . .
$10^{n-1} - 10^{n-2}$ nombres de $n - 1$ chiffres ;
$X + 1 - 10^{n-1}$ — n — .

Le nombre total des chiffres est alors

$$1(10 - 1) + 2(10^2 - 10) + 3(10^3 - 10^2) \ldots + (n-1)(10^{n-1} - 10^{n-2}) + n(X + 1 - 10^{n-1})$$
$$= -1 - 10 - 10^2 - 1 \ldots - 10^{n-2} + (n-1)10^{n-1} + n(X + 1 - 10^{n-1})$$
$$= -(1 + 10 + 10^2 + \ldots 10^{n-1}) + n(X + 1)$$
$$= nX + n - \frac{10^n - 1}{10 - 1}.$$

Pour que ce dernier nombre soit divisible par X, il faut et il suffit que X divise le nombre

$$\frac{10^n - 1}{10 - 1} - n ;$$

or ce nombre étant égal au nombre $11\ldots1$ (formé de n chiffres 1) diminué de n, n'admet d'autre diviseur de n chiffres que lui-même.

Donc $$X = \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n = \overbrace{11\ldots1}^{n} - n,$$

et le quotient du nombre des chiffres considéré par X est $n - 1$.

(G. FOUCRY, école normale de Châlons.)

[Ont résolu la même question : Mlle M. D. P. ; MM. A. Amblard ; Baudouin ; C. Billionnet ; Gamard ; J. Haag ; R. Henry ; A. Jouffray ; H. Julien ; Lajouanine ; A. Lecoutour ; Lehmann ; M. B., à V. ; R. Manen ; P. Marion ; Mongin ; P. Noël ; C. Passeron ; Pequignot ; P. Pille ; G. Sinoquet ; C. Soulas ; P. Thonet ; Tuïssuzian ; Tumerelle ; Vial ; X., à Bruxelles ; M. Royer ; P. Tribier.]

ALGÈBRE

4715. — ABC *est un triangle rectangle en* A ; *on construit les carrés* BCDE, ACFG, ABKH *et l'on mène les droites* DF, GH, KE : *connaissant le périmètre* $2p$ *du triangle* ABC *et la surface* $2S^2$ *du polygone* EDFGHKE, *trouver les côtés* a, b, c *du triangle. Discussion : le périmètre étant fixe, quelles sont les valeurs de* a, b, c, *correspondant au maximum et au minimum de* S^2 ?

(*On pourra prendre pour inconnues auxiliaires la somme et la différence des côtés de l'angle droit.*)

(*Bacc. lettres-math., Poitiers, juillet 1899.*)

On sait que deux triangles ayant deux angles égaux ou supplémentaires compris entre deux côtés égaux sont égaux ou bien équivalents. Par suite le triangle ABC est égal au triangle AHG et équivalent à chacun des triangles BEK et CDF ; la surface du polygone EDFGHKE s'exprime donc par

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4 \times \frac{bc}{2} = 2(b^2 + c^2 + bc).$$

Les trois équations du problème sont dès lors

$$b^2 + c^2 = a^2, \qquad (1)$$
$$a + b + c = 2p, \qquad (2)$$
$$b^2 + c^2 + bc = S^2. \qquad (3)$$

Éliminons a entre (1) et (2) ; il vient

$$b^2 + c^2 = (2p - b - c)^2,$$

ou $$2p(b + c) - bc = 2p^2. \qquad (4)$$

En posant $b + c = x$, $b - c = y$, on en déduit

$$b = \frac{x + y}{2}, \qquad c = \frac{x - y}{2},$$

et les équations (3) et (4) deviennent, toutes réductions faites,

$$3x^2 + y^2 = 4S^2, \qquad (3')$$
$$8px - x^2 + y^2 = 8p^2. \qquad (4')$$

Si l'on retranche (4′) de (3′), y disparaît, et l'on a l'équation

$$x^2 - 2px + 2p^2 - S^2 = 0.$$

x devant être supérieur à p, la seule racine acceptable est

$$x = p + \sqrt{S^2 - p^2}.$$

Cette valeur portée dans (3′) donne

$$y = \sqrt{4S^2 - 3(p + \sqrt{S^2 - p^2})^2}$$
$$= \sqrt{S^2 - 6p\sqrt{S^2 - p^2}}.$$

Les côtés a, b, c ont donc pour expression

$$a = 2p - x = p - \sqrt{S^2 - p^2},$$
$$b = \frac{x + y}{2} = \frac{1}{2}\left(p + \sqrt{S^2 - p^2} + \sqrt{S^2 - 6p\sqrt{S^2 - p^2}}\right),$$
$$c = \frac{x - y}{2} = \frac{1}{2}\left(p + \sqrt{S^2 - p^2} - \sqrt{S^2 - 6p\sqrt{S^2 - p^2}}\right).$$

Discussion. — La valeur de a est réelle et positive lorsque

$$p^2 \leqslant S^2 < 2p^2 ; \qquad (5)$$

les valeurs de b et c sont réelles si l'on a en même temps

$$S^2 \geqslant 6p\sqrt{S^2 - p^2},$$

ou, en élevant au carré les deux membres positifs de cette inégalité et transposant,

$$S^4 - 36p^2S^2 + 36p^4 \geqslant 0.$$

Cette inégalité est vérifiée pour toute valeur de S^2 non com-

prise entre celles qui annulent son premier membre ; on doit donc avoir

soit $S^2 \leqslant 6p^2(3 - 2\sqrt{2})$,

soit $S^2 \geqslant 6p^2(3 + 2\sqrt{2})$.

La seconde condition se rapportant à des valeurs de S^2 supérieures à $2p^2$ est à écarter. Ainsi lorsque

$$p^2 \leqslant S^2 \leqslant 6p^2(3 - 2\sqrt{2}),$$

les valeurs de a, b, c sont réelles et positives [on reconnaît que c est positif en observant que l'équation (4') entraîne $x > y$, puisque $x > p$].

Il résulte de l'équation (1) que les conditions de possibilité $b - c < a < b + c$ sont forcément remplies, et nous n'avons pas à nous en occuper.

Valeurs de a, b, c correspondant au maximum et au minimum de S^2. — Pour $S^2 = p^2$ (minimum), les formules donnent

$$a = b = p, \qquad c = \frac{1}{2}(p - p) = 0 ;$$

les côtés AC, BC sont alors confondus et la figure devient un rectangle de surface $2p \times p = 2S^2$.

Pour $S^2 = 6p^2(3 - 2\sqrt{2})$ (maximum), on a

$$a = 2p(\sqrt{2} - 1), \qquad b = c = p(2 - \sqrt{2}) ;$$

le triangle ABC est rectangle isocèle.

(R. HENRY, instituteur à Troyes.)

[Ont résolu la même question : MM. Billionnet ; Clabault ; Germa ; J. Lehmann ; D. Lwow ; G. Marcellin ; P. Noël ; Pequignot ; M. Petit ; Reboul ; Gillard ; J. Hébré ; Hugonnier-Ginet ; A. Thorin.]

4723. — *Décomposer en facteurs l'expression*

$$(x + y + z)^5 - (y + z - x)^5 - (z + x - y)^5 - (x + y - z)^5.$$

Première solution. — En posant

$$y + z = u, \qquad z - y = v,$$

l'expression s'écrit

$$E = (x + u)^5 + (x - u)^5 - (x + v)^5 - (x - v)^5.$$

Or $(x + u)^5 = x^5 + 5x^4u + 10x^3u^2 + 10x^2u^3 + 5xu^4 + u^5$,

$(x - u)^5 = x^5 - 5x^4u + 10x^3u^2 - 10x^2u^3 + 5xu^4 - u^5$,

d'où, en ajoutant,

$$(x + u)^5 + (x - u)^5 = 2(x^5 + 10x^3u^2 + 5xu^4) ;$$

de même, en remplaçant u par v,

$$(x + v)^5 + (x - v)^5 = 2(x^5 + 10x^3v^2 + 5xv^4).$$

L'expression devient alors, après réductions,

$$\begin{aligned} E &= 20x^3(u^2 - v^2) + 10x(u^4 - v^4) \\ &= 10x(u^2 - v^2)(2x^2 + u^2 + v^2) \\ &= 10x[(y + z)^2 - (z - y)^2][2x^2 + (y + z)^2 + (z - y)^2] \\ &= 80xyz(x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned}$$

Seconde solution. — L'expression s'annulant successivement pour $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, est divisible par xyz ; comme l'expression est un polynome entier homogène et symétrique du 5e degré en x, y, z, le quotient ne peut être qu'un polynome entier du second degré homogène et symétrique en x, y, z. On peut donc mettre l'expression sous la forme

$$xyz(\alpha x^2 + \alpha y^2 + \alpha z^2 + \beta xy + \beta xz + \beta yz).$$

Pour déterminer les coefficients numériques α et β, il suffit de considérer deux valeurs particulières de x, y, z et d'égaler les valeurs qui en résultent pour le polynome précédent et le polynome donné.

En faisant par exemple $x = y = z = 1$, on obtient

$$3(\alpha + \beta) = 3^5 - 3, \qquad \text{ou} \qquad \alpha + \beta = 80,$$

et pour $x = -1$, $y = z = 1$,

$$-(3\alpha - \beta) = 3 - 3^5 \qquad \text{ou} \qquad \alpha - \frac{\beta}{3} = 80.$$

On déduit de là

$$\alpha = 80 \qquad \text{et} \qquad \beta = 0.$$

(A. SAINTE-LAGUË, lycée de Bordeaux.)

[Ont résolu la même question : MM. F. Clabault ; M. Cry ; O. Destouches ; Dumont ; A. Legros ; A. Le Moal ; R. Mouzon ; P. Noël ; L. Patin ; J. Reynaud G. Sinoquet ; P. Thonet ; Tumerelle.]

4732. — *Discuter le système d'équations*

$$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = m^4,$$
$$x^2 + y^2 = \lambda xy.$$

Première solution. — La première équation peut s'écrire

$$(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 + xy(x^2 + y^2) = m^4,$$

ou, en tenant compte de la seconde équation,

$$(\lambda^2 - 1 + \lambda)\, x^2y^2 = m^4.$$

On tire de là

$$xy = \pm \frac{m^2}{\sqrt{\lambda^2 + \lambda - 1}},$$

et par suite

$$x^2 + y^2 = \pm \frac{\lambda m^2}{\sqrt{\lambda^2 + \lambda - 1}},$$

en prenant l'un des signes + ou — suivant que λ est positif ou négatif.

Connaissant $x^2 + y^2$ et x^2y^2, x^2 et y^2 sont racines de l'équation

$$X^2 - \frac{\pm \lambda m^2}{\sqrt{\lambda^2 + \lambda - 1}} \cdot X + \frac{m^4}{\lambda^2 + \lambda - 1} = 0.$$

Discussion. — Tout système de valeurs réelles de x et y ne peut provenir que d'un système de valeurs réelles et positives de x^2 et y^2.

Pour que l'équation précédente ait ses deux racines réelles, on doit avoir

$$\frac{(\lambda^2 - 4)m^4}{\lambda^2 + \lambda - 1} \geqslant 0 ; \qquad (1)$$

comme d'ailleurs ces racines ont une somme positive, elles seront toutes deux positives en même temps que leur produit, ce qui entraîne

$$\lambda^2 + \lambda - 1 > 0. \qquad (2)$$

D'après l'inégalité (2), l'inégalité (1) revient à

$$\lambda^2 - 4 > 0$$

et est vérifiée pour toutes les valeurs de λ non comprises entre -2 et $+2$. Ces valeurs de λ satisfont d'ailleurs à l'inégalité (2), puisque -2 et 2 comprennent les deux valeurs de λ qui annulent le premier membre de cette inégalité.

En désignant par α^2 et β^2 les deux racines positives de l'équation, les valeurs correspondantes de x et y, qui doivent vérifier l'équation $x^2 + y^2 = \lambda xy$, sont

$\lambda < -2$: $x = \pm\alpha$, $y = \mp\beta$ ou $x = \pm\beta$, $y = \mp\beta$

$\lambda > 2$: $x = \pm\alpha$, $y = \pm\beta$ ou $x = \pm\beta$, $y = \pm\beta$

(A. HARDY, lycée Janson-de-Sailly).

Seconde solution. — Si on pose $y = zx$, les équations proposées donnent

$$z^2 - \lambda z + 1 = 0, \qquad (1)$$
$$x^4(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = m^4,$$

et cette dernière peut s'écrire

$$x^4 = m^4 \frac{z - 1}{z^5 - 1}. \qquad (2)$$

L'équation (1) a ses racines réelles si $\lambda^2 \geqslant 4$, c'est-à-dire si λ n'est pas compris entre -2 et $+2$. Les deux racines sont du signe de λ et inverses l'une de l'autre; soit α l'une d'elles, l'autre sera $\frac{1}{\alpha}$; l'équation (2) donne pour x^4 une valeur positive car $z-1$ et z^5-1 sont de même signe. On aura donc les solutions :

$$x_1 = m\sqrt[4]{\frac{\alpha-1}{\alpha^5-1}}, \qquad y_1 = m\alpha\sqrt[4]{\frac{\alpha-1}{\alpha^5-1}};$$

$$x_2 = -m\sqrt[4]{\frac{\alpha-1}{\alpha^5-1}}, \qquad y_2 = -m\alpha\sqrt[4]{\frac{\alpha-1}{\alpha^5-1}},$$

et les solutions qu'on obtient en remplaçant α par $\frac{1}{\alpha}$; ces dernières ne sont d'ailleurs que les précédentes après échange de x et y, ces inconnues entrant symétriquement dans les équations données.

[Ont résolu la même question : MM. L. Barberot ; C. Billionnet ; R. Bouvaist ; C. Durand ; J. Haag ; G. Lallier ; H. Lefèvre ; J. Lehmann ; D. Lwow ; M. B., à V. ; G. Marcellin ; R. Paucot ; J. Pendariès ; M. Petit ; G. Sinoquet ; P. Thonet.]

GÉOMÉTRIE

2454. — *Établir, par le premier livre seul, qu'un triangle dont deux des médianes sont égales est isocèle.*

Quatrième solution (*). — Cette solution n'exige pas, comme les précédentes, la connaissance de la théorie des parallèles.

Traçons la droite DE et prolongeons cette droite, dans les deux sens, des longueurs DN, EM égales à elle-même ; menons les droites AM et AN. Les triangles AEM et BED ayant un angle égal compris entre des côtés égaux chacun à chacun, on a $AM = BD$. De même, et par suite de l'égalité des triangles ADN et CDE, on a $AN = CE$. Comme $BD = CE$, il s'ensuit que $AM = AN$. Donc les angles M et N du triangle MAN sont égaux ; et ainsi, les triangles AME et AND ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun. Conséquemment, on a $AE = AD$; d'où $AB = AC$.

(J. MONSALLUT, professeur au lycée de Limoges.)

4682. — *Sur une droite indéfinie xy on donne deux segments* AB *et* CD *extérieurs l'un à l'autre. D'un côté de xy on décrit sur* AB *le segment de cercle capable d'un angle donné* α, *et de l'autre côté, on décrit sur* CD *le segment capable du même angle* α. *Soient* E *et* F *les centres respectifs des cercles auxquels appartiennent ces segments ; la droite* EF *coupe la droite xy en un point* K.

1° *Montrer que ce point* K *est le même, quel que soit l'angle* α.

2° *Trouver le lieu du point de concours des tangentes communes extérieures aux deux cercles, quand* α *varie.*

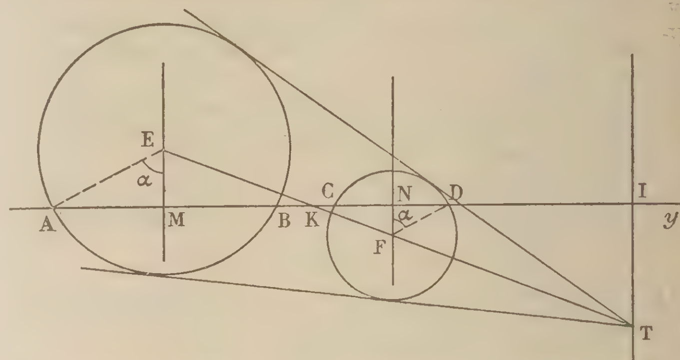
(*Certificat d'aptitude au professorat des écoles normales, Aspirantes, 1899.*)

1° Comme l'angle inscrit est égal au demi-angle au centre, le centre E est situé sur la perpendiculaire élevée au milieu M de AB en un point tel que $\widehat{AEM} = \alpha$; le centre F est de même situé sur la perpendiculaire au milieu N de CD et tel que $\widehat{DFN} = \alpha$.

Les triangles KME, KNF d'une part, AME, FND de l'autre, étant semblables, on peut écrire successivement

$$\frac{KM}{KN} = \frac{ME}{NF} = \frac{AM}{DN} = \text{const.}$$

Donc le point K, qui divise le segment fixe MN dans un rap-



port constant, est fixe quel que soit l'angle α. De plus, à cause du parallélisme des rayons EA, FD, on voit que K est le centre de similitude interne des cercles E et F.

2° On sait que les tangentes communes extérieures des cercles E et F se coupent en un point T, qui est le centre de similitude externe des deux cercles. On a donc

$$\frac{TE}{TF} = \frac{EA}{FD} = \frac{AM}{DN} = \text{const.},$$

et en projetant T en I sur xy,

$$\frac{IM}{IN} = \frac{TE}{TF} = \text{const.}$$

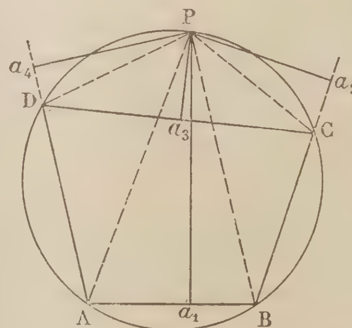
Le point I est donc fixe, et le lieu du point T est la perpendiculaire en I à xy.

(DUVERGÉ, lycée de Bordeaux.)

[Ont résolu la même question : MM. V. Barol; R. Barthélemy; C Billionnet ; H. Blanc ; J. Bourrec ; T. Brandhof ; F. Clabault ; C. Croze ; Destouches ; J. Fiton ; G. Foucry ; Gillard ; L. Grillet ; E. Gueudin ; J. Haag ; J. Hébré ; R. Henry ; Jacquet ; T. Lalescu ; A. Larue ; L. Lassence ; C. Lefebvre ; H. Lefèvre ; J. Lehmann ; P. Le Verrier ; D. Lwow ; M. B., à V. ; J. Maury ; E. Malleret ; B. Mathé ; J. Ménéchal ; E. Ménissier ; H. Miconnet ; L. Ollié ; P. E., à Vielmur ; A. Pequignot ; P. Plisson ; L. Richard ; Rigaudière ; E. Sinturel ; H. Tellier ; C. Thérézien ; P. Thonet ; A. Tumerelle ; Vial ; Anicet Vial.]

4735. — *Généralisation de la question 4717 : si un polygone de 2n côtés est inscrit dans un cercle, le produit des distances d'un point de la circonférence aux côtés de rang pair est égal au produit des distances de ce point aux côtés de rang impair.*

Considérons le quadrilatère inscrit ABCD et soient a_1, a_2, a_3, a_4 les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point P du cercle circonscrit sur les côtés AB, BC, CD, DA.



Si R est le rayon du cercle circonscrit, on a, en vertu d'un théorème bien connu,

$$2R.Pa_1 = PA.PB,$$
$$2R.Pa_2 = PB.PC,$$
$$2R.Pa_3 = PC.PD,$$
$$2R.Pa_4 = PD.PA.$$

On en déduit

$$Pa_1.Pa_3 = \frac{PA.PB.PC.PD}{4R^2} = Pa_2.Pa_4.$$

(*) Voir les trois autres solutions dans la 14e année du Journal, p. 76.

La démonstration est évidemment générale et s'applique à tout polygone d'un nombre pair de côtés.

En considérant un triangle comme la limite d'un hexagone inscrit dont trois côtés non consécutifs tendent vers zéro, on retrouve comme cas particulier la question 4717 (p. 70).

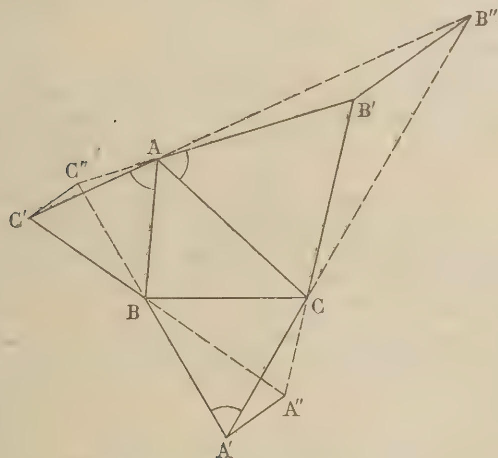
(H. PITRAT, à Givors.)

Remarque. — On peut considérer un polygone d'un nombre quelconque de côtés, complété par des tangentes. En particulier on voit que le produit des distances d'un point d'un cercle aux n côtés d'un polygone inscrit est égal au produit des distances de ce point aux n tangentes dont les points de contact sont les sommets du polygone.

[Ont résolu la même question : MM. A. Amblard ; L. Audoyer ; C. Blanc ; R. Bouvaist ; M. Brun ; J. Crétinon ; Duvergé ; A. de Saint-Gabriel ; J. Haag ; T. Lalescu ; D. Lwow ; Mengailhou ; M. Petitjean ; P. Pille ; E. Raüber ; P. Zlatco ; A. Hardy ; L. Ollié.]

4746. — *Sur les côtés d'un triangle* ABC *on construit, extérieurement, les triangles équilatéraux* BCA′, CAB′, ABC′. *Les côtés* BC′, CB′ *prolongés se coupent en* A″ ; *de même, les côtés* CA′, AC′ *se coupent en* B″, *et les côtés* AB′, BA′, *en* C″. *Démontrer que les droites* A′A″, B′B″, C′C″ sont parallèles.

Le quadrilatère ABA′B″, ayant les angles BA′B″ et BAB″ supplémentaires, est inscriptible; donc $\widehat{ABC''} = \widehat{AB''C}$. Le quadri-



latère inscriptible ACA′C″ donne de même $\widehat{AC''A'} = \widehat{ACB''}$. Par suite les triangles ABC″, AB″C, ayant deux angles égaux, sont semblables, et l'on a

$$\frac{AB}{AC''} = \frac{AB''}{AC},$$

ou, puisque par construction AB = AC′ et AC = AB′,

$$\frac{AC'}{AC''} = \frac{AB''}{AB'}.$$

Les segments B′B″ et C′C″ sont dès lors parallèles comme homothétiques par rapport à A.

On verrait de même que le segment A′A″ est parallèle à chacun des segments B′B″ et C′C″.

Remarque. — On reconnaît aisément que les angles des triangles semblables ABC″, AB″C, A″BC sont respectivement égaux à

$$120^\circ - A, \qquad 120^\circ - B, \qquad 120^\circ - C.$$

On en déduit que si par exemple $A = 120^\circ$, le point correspondant A″ est rejeté à l'infini.

(D. TUISSUZIAN, lycée Hoche, Versailles.)

Généralisation. — On peut, sans que la démonstration précédente cesse d'être applicable, remplacer les trois triangles équilatéraux BCA′, CAB′, ABC′ par des triangles semblables tels que les sommets homologues correspondent à la même lettre. Dans ces conditions, on a en effet

$$\widehat{BA'C} = \widehat{BAC} = \widehat{CAB'};$$

les deux quadrilatères ABA′B″, ACA′C″ sont donc encore inscriptibles et entraînent la similitude des triangles ABC″, AB″C. On a alors

$$\frac{AB}{AC''} = \frac{AB''}{AC},$$

ou, comme $AB = k.AC'$ et $AB' = k.AC$,

$$\frac{AC'}{AC''} = \frac{AB''}{AB'}.$$

Le reste s'achève comme plus haut.

[DAVID LWOW, à Piatra (Roumanie.)]

[Ont résolu la même question : MM. G. Audet ; R. Barthélemy ; J. Cabrol ; G. Cagé ; R. Desguin ; Duvergé et Sainte-Laguë ; J. Haag ; Jacquet ; G. Marcellin ; P. Pille ; E. Szivessy ; P. Thonet ; Touton ; P. Zlatco ; A. Collard ; G. Fourcry ; J. Hebré ; R. Henry ; H. Janois ; A Legros ; H. Lévy ; E. Licope ; L. Ollié.]

TRIGONOMÉTRIE

4691. — *Calculer les rayons de base d'un tronc de cône, connaissant l'apothème a et sachant :*

1° Que la surface totale est égale à la surface d'un cercle de rayon a ;

2° Que l'apothème fait avec la grande base un angle donné A. *Discussion.*

(*Bacc. lettres-math., Paris, octobre 1899.*)

1° Soient x et y $(x > y)$ les rayons des bases du tronc de cône ABCD dans lequel on connaît l'angle aigu BAO formé par l'apothème $AB = a$ avec la grande base AD. On doit avoir

B y O′ C
a
A x I O D

$$\pi x^2 + \pi y^2 + \pi a(x+y) = \pi a^2, \quad (1)$$

$$x - y = AI = a \cos A. \quad (2)$$

L'équation (1) peut s'écrire

$$x^2 + y^2 + a(x+y) = a^2,$$

ou

$$\frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{2} + a(x+y) = a^2,$$

ou encore, en remplaçant $x - y$ par sa valeur (2),

$$(x+y)^2 + 2a(x+y) - a^2(2 - \cos^2 A) = 0. \quad (3)$$

Cette équation du second degré fournit pour $x + y$ une certaine valeur α; on a alors

$$x + y = \alpha,$$
$$x - y = a \cos A,$$

d'où, par addition et soustraction,

$$x = \frac{1}{2}(\alpha + a \cos A), \qquad y = \frac{1}{2}(\alpha - a \cos A).$$

Discussion. — Ces valeurs de x et y conviendront au problème si elles sont réelles et positives, c'est-à-dire si la valeur de α est réelle et supérieure à $a \cos A$.

Comme $\cos^2 A < 1 < 2$, l'équation (3) a ses deux termes extrêmes de signes différents et admet par suite deux racines réelles et de signes contraires. Pour que la racine positive surpasse $a \cos A$, il faut et il suffit que cette dernière quantité sépare les deux racines, condition exprimée par l'inégalité

$$a^2 \cos^2 A + 2a^2 \cos A - a^2(2 - \cos^2 A) < 0,$$

ou $$\cos^2 A + \cos A - 1 < 0.$$

Cette inégalité est vérifiée pour toute valeur de cos A comprise entre celles qui annulent le premier membre ; en observant que cos A est toujours positif par hypothèse, on doit donc avoir

$$\cos A < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Dans le cas limite où

$$\cos A = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

les tables donnent pour valeur minimum de l'angle A

$$A = 51°49'45'' ;$$

on a alors $y = 0$, et le tronc de cône devient un cône.

Les valeurs acceptables de x et y ont pour expression

$$x = \frac{a}{2}(\sqrt{3-\cos^2 A} - 1 + \cos A),$$

$$y = \frac{a}{2}(\sqrt{3-\cos^2 A} - 1 - \cos A).$$

On peut interpréter les valeurs négatives de y en les appliquant à un tronc de cône de *seconde espèce*.

(David Lwow, à Piatra, Roumanie.)

[Ont résolu la même question : MM. V. Barol ; R. Barthélemy ; R. Bellencourt ; C. Billionnet ; M. Brun ; J. Crétinon ; Croze ; H. Debenest ; Donnadieu ; G. Foucry ; J. Haag ; R. Henry ; Jacquet ; H. Jaffré ; H. Julien ; H. Lefèvre ; G. Marie ; Marot ; B. Mathé ; Mengailhon ; L. Millot ; L. Ollié ; Pequignot ; M. Petit ; Rives ; A. de St-Gabriel ; F. Collard ; J. Lehmann.]

PHYSIQUE

4748. — *On dispose de* N *éléments Bunsen dont la force électromotrice est* E, *la résistance intérieure* r. *Comment doit-on les associer pour qu'en fermant la pile par un conducteur de résistance* R, *le courant ait une intensité* I ?

Application :

$$N = 10, \quad E = 1^{volt},8, \quad r = 0^{ohm},1, \quad I = 4^{amp}, \quad R = 2^{ohms}.$$

(*Bacc. lettres-sciences, Alger, juillet 1899.*)

Soient x le nombre des éléments associés en série et y le nombre des éléments associés en batterie. On a

$$xy = N.$$

La force électromotrice de la pile est égale à la force électromotrice d'un élément multipliée par le nombre d'éléments en série ; elle a donc pour valeur xE. D'un autre côté, la résistance de la pile a pour valeur $\frac{xr}{y}$. On a donc, en appliquant la formule d'Ohm,

$$I = \frac{xE}{\frac{xr}{y} + R} = \frac{xyE}{xr + Ry} = \frac{NE}{xr + Ry}.$$

Remplaçant dans cette équation x par sa valeur $\frac{N}{y}$, il vient

$$IRy^2 - NEy + INr = 0,$$

d'où $$y^2 - \frac{NEy}{IR} + \frac{INr}{IR} = 0$$

et $$y = \frac{NE \pm \sqrt{N^2E^2 - 4I^2NrR}}{2IR}.$$

Application :

$$y = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 128}}{16} = \frac{18 \pm 14}{16}.$$

La racine positive seule convient ; on a par suite

$$y = 2.$$

Il en résulte

$$x = 5.$$

(M. Bégué, à Auch.)

[Ont résolu la même question : Mlles J. Gravet ; C. Manea, à Bucarest ; MM. M. B., à V. ; Bameulle ; Billionnet ; G. Cagé ; M. Cry ; H. Damoiseau ; Duvergé et Sainte-Lague ; H. Duchesne ; G. Foucry, A. de Saint-Gabriel ; M. Gondran ; J. Haag ; Henry ; Jacquet ; H. Lefèvre ; H. Ménielle ; P. Le Moingt ; R. Mouzon ; P. Noël ; R. Paucot ; R. Péquignot ; M. Petit ; Petitjean ; Pichon ; M. Royer ; Szivessy ; L. Thirode ; M. Verdieri ; A. Mabon ; R., à A.]

QUESTIONS PROPOSÉES

4757. — Démontrer que le produit de trois nombres entiers consécutifs n'est jamais le double d'un carré.

4758. — Résoudre le système d'équations

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = a^4,$$
$$x^2 + xy + y^2 = 1.$$

Condition de possibilité et nombre de solutions.

4759. — Un tronc de prisme droit a pour base un hexagone régulier ABCDEF inscrit dans un cercle de rayon R. On donne les arêtes

$$AA' = h, \qquad CC' = 2h, \qquad EE' = 3h ;$$

on demande :

1° de déterminer les longueurs BB', DD', FF' que le plan A'C'E' détermine sur les arêtes qui partent de B, D, F ;

2° de calculer le volume du tronc de prisme.

4760. — Construire un triangle ABC connaissant la hauteur h_c issue du sommet C, la médiane m_b issue du sommet B et la différence $a^2 - b^2$, a et b étant les côtés opposés aux angles A et B.

(P. Le Verrier, lycée Janson.)

4761. — Un cône de révolution est circonscrit à deux sphères tangentes extérieurement. Démontrer que le volume compris entre le cône et les deux sphères est la moitié du volume commun au cône et à la sphère qui passe par les deux cercles de contact du cône et des sphères considérées.

4762. — Par le sommet A d'un triangle et le centre I du cercle inscrit, on fait passer un cercle tangent à AB. Démontrer que, lorsque ce cercle coupe BC en deux points D, E, la droite IC est bissectrice de l'angle DIE.

4763. — Une droite mobile AB, de longueur constante, s'appuie par ses deux extrémités sur deux droites fixes OX et OY. Lieux du centre du cercle circonscrit au triangle OAB et du point de concours des hauteurs. Démontrer que la droite joignant les pieds des deux hauteurs issues de A et B a une longueur constante.

(M. Rebeix, lycée du Puy.)

4764. — On donne un siphon constitué par un tube deux fois recourbé à angle droit. Le siphon est complètement rempli d'huile. L'extrémité de la grande branche plonge dans un vase rempli d'huile et l'extrémité de la petite branche dans un vase rempli de mercure. L'appareil étant abandonné à lui-même, que va-t-il se passer ? On appellera L la longueur de la grande branche, l la longueur de la petite branche, D la densité du mercure, d la densité de l'huile, et on traitera le problème pour les valeurs suivantes :

1° $L = 4^m$ et $l = 0^m,50$;
2° $L = 9^m$ et $l = 0^m,50$;
3° $L = 13^m$ et $l = 1^m$.

On donne $D = 13,6$, $d = 0,9$. La pression atmosphérique est $H = 0^m,75$ de mercure. On suppose que le niveau du mercure et le niveau de l'huile sont maintenus constants dans les deux vases.

(H. Blanc, lycée de Clermont.)

Le Rédacteur-Gérant : Henry Vuibert.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

24e Année. — No 12. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 15 Mars 1900

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.

Abonnements.. Librairie Nony et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES POLYNOMES ENTIERS

par M. **A. Goulard**, professeur au lycée de Marseille.

D'après les programmes actuellement en vigueur, le cours d'Algèbre élémentaire doit commencer par la théorie des nombres positifs et négatifs. L'introduction de cette théorie au début de l'Algèbre offre un grand inconvénient, c'est sa difficulté ; et elle ne présente des avantages que si l'on sait en tirer parti. C'est ce que j'ai essayé de faire dans ce qu'on va lire : les propositions qui suivent peuvent être exposées avant toute opération algébrique.

Lemme. — *En désignant par* M *un nombre supérieur ou au moins égal à la somme des valeurs absolues des coefficients du polynome*

$$\varphi(x) = bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots.. + hx + k,$$

on a, pour $|x| > 1$,

$$|\varphi(x)| < M\,|x|^{m-1}.$$

Désignons par B, C, ..., H, K les valeurs absolues de $b, c, \ldots, h, k$, et par X la valeur absolue de x. On sait que la valeur absolue d'un polynome est inférieure ou au plus égale à la somme des valeurs absolues de ses termes. On a donc

$$|\varphi(x)| \leqslant BX^{m-1} + CX^{m-2} + \ldots.. + HX + K.$$

Mais pour $X > 1$, on a

$$X^{m-1} > X^{m-2} > \ldots.. > X > 1.$$

On peut donc écrire

$$|\varphi(x)| < (B + C + \ldots.. + H + K)X^{m-1},$$

c'est-à-dire $$|\varphi(x)| < MX^{m-1}.$$

Théorème I. — *Pour des valeurs de* x *suffisamment grandes en valeur absolue, un polynome entier en* x *a le signe de son terme de degré le plus élevé.*

Soit un polynome entier en x

$$f(x) = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots.. + hx + k.$$

Adoptant les notations du lemme précédent, nous poserons

$$f(x) = ax^m + \varphi(x),$$

et nous désignerons par A la valeur absolue de a.

On sait qu'un binome a toujours le signe de celui de ses termes qui a la plus grande valeur absolue. Donc, pour que $f(x)$ ait le signe de son premier terme, il suffit que l'on ait

$$AX^m > |\varphi(x)|.$$

Cette inégalité sera vérifiée *a fortiori*, en supposant $X > 1$, si l'on a

$$AX^m > MX^{m-1},$$

ou $$X > \frac{M}{A}.$$

(Comme M peut être aussi grand qu'on le veut, on pourra toujours déterminer M de façon que $\frac{M}{A}$ soit supérieur à 1.)

Théorème II. — *Lorsque* x *augmente indéfiniment en valeur absolue, un polynome entier en* x *augmente aussi indéfiniment en valeur absolue.*

Remarquons, en effet, que la valeur absolue d'un binome $y + z$ est supérieure ou égale à $|y| - |z|$, en supposant $|y| > |z|$. Reprenant les notations précédentes, nous aurons donc, pour $X > \frac{M}{A} > 1$,

$$|f(x)| \geqslant AX^m - |\varphi(x)|,$$

et *a fortiori*, $$|f(x)| > AX^m - MX^{m-1},$$

ou $$|f(x)| > X^{m-1}(AX - M).$$

Or, lorsque X augmente indéfiniment, X^{m-1} et $AX - M$ augmentent indéfiniment. Il en est de même, à plus forte raison, de $|f(x)|$.

Théorème III. — *Deux polynomes entiers en* x *ne peuvent être égaux pour toutes les valeurs de* x *que s'ils sont composés des mêmes termes (principe d'identité).*

En effet, considérons deux polynomes *distincts*. Leur différence, calculée d'après la règle générale de la soustraction et après réduction des termes semblables, sera un polynome, ou un monome, ou un nombre différent de zéro. Si cette différence est un nombre différent de zéro, les deux polynomes ne sont égaux pour aucune valeur de x. Si cette différence est un monome, les deux polynomes ne sont égaux que pour $x = 0$. Si cette différence est un polynome, sa valeur absolue augmente indéfiniment quand x augmente indéfiniment en valeur absolue (Théor. II).

Remarque. — Le même raisonnement prouve que, pour que deux polynomes entiers en x soient égaux pour toutes les valeurs de x, il suffit qu'ils soient égaux pour toutes les valeurs positives de x supérieures à un nombre donné ou pour toutes les valeurs négatives de x supérieures en valeur absolue à un nombre donné.

Note. — Puisque je parle des polynomes entiers, je me permets de donner mon avis sur une difficulté qui alourdit l'enseignement et dont je voudrais bien qu'il fût débarrassé. Certains auteurs prétendent que la division algébrique n'a aucun sens pour les valeurs de x qui annulent le diviseur : c'est là une erreur, qui provient de je ne sais quelle vague confusion entre la division arithmétique de deux nombres quelconques et la division algébrique de deux polynomes entiers en x. Diviser un polynome entier $f(x)$ par un polynome entier $\varphi(x)$, c'est trouver deux polynomes entiers $Q(x)$ et $R(x)$ tels que l'on ait

$$f(x) = \varphi(x).Q(x) + R(x),$$

R(x) étant assujetti à être d'un degré inférieur à celui de $\varphi(x)$. Le signe $=$ signifie ici (il faut bien l'expliquer) que, si l'on effectue les opérations indiquées dans le second membre, on doit trouver, après réduction des termes semblables, un polynome *composé des mêmes termes que* $f(x)$. La théorie de l'opération ne laisse aucun doute à ce sujet ; elle ne fait exception pour aucune valeur de x, et ceux-là même qui soutiennent que l'opération n'a aucun sens pour les valeurs de x qui annulent le diviseur, se gardent bien de mettre ces valeurs à part, soit dans la définition, soit dans la théorie.

Il va sans dire que, si l'on a déjà énoncé et démontré le principe d'identité, il est inutile d'expliquer, comme je l'ai fait plus haut, la signification du signe $=$ dans la définition de la division algébrique.

INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE (1899)

4740. — *Déterminer toutes les valeurs de l'arc x qui vérifient l'équation*

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x + \sqrt{2} = 0 .$$

En remarquant que $\sqrt{3}$ peut se représenter par tg 60°, l'équation s'écrit

$$\cos x + \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} \cdot \sin x + \sqrt{2} = 0,$$

ou $$\cos x . \cos 60^\circ + \sin 60^\circ . \sin x = -\sqrt{2} . \cos 60^\circ,$$

ou $$\cos(x - 60^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 135^\circ.$$

Tous les arcs ayant pour cosinus celui de 135° étant compris dans la formule $k \times 360^\circ \pm 135^\circ$, on doit avoir

$$x - 60^\circ = k \times 360^\circ \pm 135^\circ,$$

d'où, en prenant séparément les signes $\pm$,

$$x = (2k+1)180^\circ + 15^\circ,$$
$$x = k \times 360^\circ - 75^\circ.$$

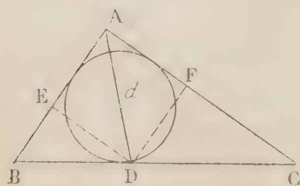
(ABEL PICHON, école spéciale de Travaux publics, Paris.)

Remarque. — Dans beaucoup de copies, on a donné pour x des expressions écrites de cette façon : $2k\pi \pm 135^\circ$; il faut écrire, soit $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$, soit $k \times 360^\circ \pm 135^\circ$, en employant la même unité pour tous les arcs.

[Ont résolu la même question : MM. J. Arnaud ; L. Audoyer ; L. Barberot ; P. Besseige ; A. Besson ; M. Brun ; J. Cabrol ; J. Crétinon ; L. Curt ; H. Damoiseau ; A. Drocourt ; Duvergé et Sainte-Laguë ; G. Foucry ; J. Haag ; Jacquet ; G. Lallier ; A. Legros ; J. Lehmann ; P. Le Verrier ; D. Lwow ; J. Maury ; Mengailhou ; R. Mouzon ; Noël ; L. Ollié ; R. Paucot ; Pendariès ; H. Pitrat ; R., à A. ; Sinoquet ; H. Taton ; A. Tétaire ; Vial ; P. Zlatco.]

4741 (*). — *Calculer les côtés d'un triangle rectangle, connaissant le rayon r du cercle inscrit dans ce triangle et la longueur d de la bissectrice intérieure de l'angle droit. — Discuter.*

Posons $AB = x$, $AC = y$ et $BC = z$. Le triangle étant rectangle, on a d'abord



$$x^2 + y^2 = z^2, \quad (1)$$
$$x + y - 2r = z. \quad (2)$$

En remarquant ensuite que les triangles ABD et ACD ont les hauteurs $DE = DF = \frac{d}{\sqrt{2}}$, on peut écrire

$$xy = (x+y)\frac{d}{\sqrt{2}}. \quad (3)$$

De l'équation (2), on déduit

$$x + y = 2r + z,$$

et en portant dans (3),

$$xy = \frac{d}{\sqrt{2}}(2r+z) ;$$

par suite, l'équation (1), mise au préalable sous la forme

$$(x+y)^2 - 2xy = z^2,$$

devient $$(2r+z)^2 - d\sqrt{2}\,(2r+z) = z^2,$$

d'où l'on tire $$z = \frac{2r(d - r\sqrt{2})}{2r\sqrt{2} - d},$$

puis successivement

$$x + y = 2r + z = \frac{2r^2\sqrt{2}}{2r\sqrt{2} - d},$$

$$xy = (x+y)\frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{2dr^2}{2r\sqrt{2} - d}.$$

Connaissant $x+y$ et xy, x et y sont racines de l'équation

$$X^2 - \frac{2r^2\sqrt{2}}{2r\sqrt{2} - d} . X + \frac{2dr^2}{2r\sqrt{2} - d} = 0.$$

Discussion. — Un triangle rectangle étant parfaitement déterminé par ses deux côtés de l'angle droit, il suffit d'exprimer que les valeurs de x et y sont réelles et positives, et que la valeur de z est positive.

La condition de réalité est

$$\frac{2r^4}{(2r\sqrt{2} - d)^2} - \frac{2dr^2}{2r\sqrt{2} - d} \geqslant 0,$$

ou $$2r^2(r^2 - 2d\sqrt{2} . r + d^2) \geqslant 0,$$

inégalité vérifiée en prenant

soit $$d \leqslant r(\sqrt{2} - 1), \quad (1)$$

soit $$d \geqslant r(\sqrt{2} + 1). \quad (2)$$

Les valeurs de x et y seront positives en même temps que leur somme et leur produit, c'est-à-dire lorsque

$$d < 2r\sqrt{2} . \quad (3)$$

En tenant compte de (3), la valeur de z est positive quand

$$d > r\sqrt{2} . \quad (4)$$

Mais l'inégalité (4), qui est indispensable, exclut l'inégalité (1) et se trouve elle-même comprise dans l'inégalité (2), de sorte qu'en définitive, on doit avoir

$$r(\sqrt{2} + 1) \leqslant d < 2r\sqrt{2} .$$

Si $d = r(\sqrt{2} + 1)$, $x = y = \frac{r\sqrt{2}}{2r\sqrt{2} - d} = r(2 + \sqrt{2})$; le triangle devient isocèle.

Si $d = 2r\sqrt{2}$, z devient infini, ainsi qu'une des racines x ou y de l'équation en X ; le problème n'admet dans ce cas aucune solution.

(JEAN GERMA, collège de Narbonne.)

[Ont résolu la même question : MM. G. Armaingaud ; L. Barberot ; R. Barthélemy ; A. Besson ; C. Billionnet ; H. Blanc ; J. Cabrol ; L. Curt ; H. Damoiseau ; Duvergé et Sainte-Laguë ; G. Foucry ; J. Haag ; J. Hébré ; R. Henry ; H. Jaffré ; H. Julien ; A. Lecoutour ; H. Lefèvre ; A. Legros ; J. Lehmann ; G. Luquet ; D. Lwow ; M. B., à V. ; R. Mouzon ; L. Ollié ; R. Paucot ; J. Pendariès ; A. Pequignot ; M. Petit ; P. Pille ; R., à A. ; E. Sautreau ; G. Sinoquet ; H. Taton ; P. Thonet.]

4742. — *On prélève un demi-mètre cube dans de l'air dont la température est 27°,3, l'état hygrométrique 1/3, la pression 75cm de mercure. On fait passer cet air sur des substances desséchantes, et on l'introduit dans un corps de pompe cylindrique entouré de glace fondante, dont la section est de 5 décimètres carrés. On*

(*) Voir la solution géométrique publiée dans *L'Éducation Mathématique*, p. 74 (2e année).

demandé quelle est, évaluée en kilogrammes, la force qu'il faut faire agir sur le piston, supposé de poids négligeable, pour que l'air occupe dans le corps de pompe une hauteur égale à 4 décimètres, la pression atmosphérique qui est restée invariable continuant d'ailleurs à agir sur le piston ?

La densité du mercure est 13,56, *la force élastique maxima de la vapeur d'eau à* 27°,3 *est équilibrée par* 27^{mm} *de mercure ; le coefficient de dilatation de l'air est* $\frac{1}{273}$.

Soit f la force élastique de la vapeur d'eau contenue dans l'air à 27°,3. On a

$$\frac{1}{3}=\frac{f}{2^{cm},7},$$

d'où

$$f = 0^{cm},9.$$

Les substances desséchantes absorbant la vapeur d'eau, c'est de l'air sec qui arrive dans le corps de pompe. Cet air y occupe un volume de $5\times 4 = 20^{dc}$.

En appliquant la formule qui réunit les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, il vient

$$\frac{500(75-0,9)}{1+\frac{27,3}{273}}=20\text{H},$$

H désignant la pression de l'air dans le corps de pompe.

On en tire $\quad \text{H}=\frac{37\,050\times 273}{300,3\times 20}=1684^{cm},1.$

La force qu'il faut exercer sur le piston doit être telle, qu'augmentée de la pression atmosphérique elle fasse équilibre à la pression intérieure H. Cette force x, évaluée en kilogrammes, est représentée par le poids d'une colonne de mercure de $168^{dm},41 - 7^{dm},5$ de hauteur et de 5^{dq} de section. On a donc

$$x = (168,41 - 7,5)\,5 \times 13,56 = 10\,909^{kg},7.$$

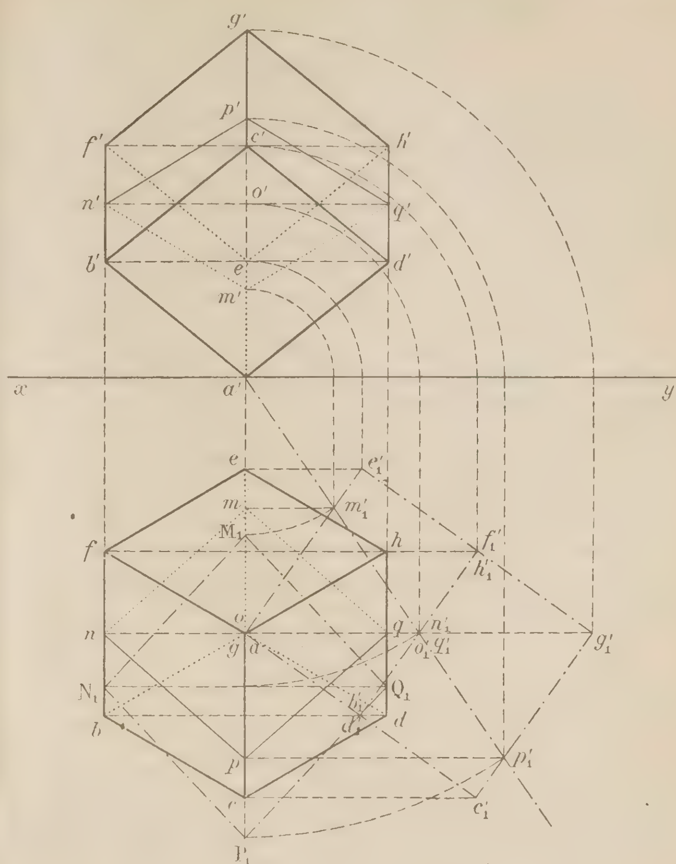
(M. GONDRAN, à Caen.)

[Ont résolu la même question : MM. L. Audoyer ; M. B., à V. ; A. Besson ; Billionnet ; J. Crétinon ; M. Cry ; G. Foucry ; J. Hébré ; R. Henry ; J. Lamotte ; A. Lecoutour ; A. Legros ; J. Lehmann ; H. Lefèvre ; H. Lévy ; David Lwow ; H. Ménielle ; Mengailhou ; Noël ; R. Paucot ; A. Pequignot ; P. Pille ; R., à A. ; M. Royer ; P. Valentin ; Vial ; Vialaret ; H. Lévy.]

4743. — *La ligne de terre est le petit axe de la feuille. Un cube dont l'arête est de* 8^{cm} *a l'un de ses sommets,* A, *dans le plan horizontal, sur le grand axe de la feuille et à* 10^{cm} *en avant du plan vertical. La diagonale de ce cube issue de* A *est verticale et dirigée vers le haut, l'une des arêtes issue de* A *est située dans un plan de profil et dirigée en arrière. Représenter ce cube par ses deux projections ainsi que sa section par le plan qui passe par son centre et la ligne de terre. Donner aussi le rabattement de cette section sur le plan horizontal. On fera la distinction des parties vues et des parties cachées.*

La diagonale et l'arête issues de A forment avec la diagonale d'une face un triangle rectangle facile à construire, puisque ses deux côtés sont égaux à 8 et $8\sqrt{2}$. En prenant le plan de profil qui contient cette diagonale et cette arête comme nouveau plan vertical, le triangle en question se rabat en vraie grandeur suivant le triangle $ae'_1g'_1$; on en déduit immédiatement la nouvelle projection verticale du cube $ab'_1c'_1d'_1e'_1f'_1g'_1h'_1$. On passe facilement de là aux deux projections ($abcdefgh$, $a'b'c'd'e'f'g'h'$) du cube, en observant que les diagonales BD et FH étant parallèles à xy se projettent horizontalement ou verticalement suivant une longueur égale à $e'_1g'_1$.

Le plan sécant passant par xy et le centre (o, o') du cube étant perpendiculaire au plan de profil, la section se projette sur ce dernier plan suivant la portion $m'_1p'_1$ de la droite $a'o'_1$ comprise dans le cube. On déduit aisément de là, comme le montre



l'épure, les projections ($mnpq$, $m'n'p'q'$) de la section, puis sa vraie grandeur $M_1N_1P_1Q_1$ lorsque le plan sécant est rabattu horizontalement autour de xy.

(ABEL PICHON, école spéciale de Travaux publics.)

[Ont envoyé de bonnes épures : MM. E. Anzemberger ; A. Besson ; L. Curt ; G. Foucry ; J. Haag ; H. Lefèvre ; D. Lwow ; J. Pendariès ; A. Pichon ; E. de Rycker et W. Heybroeck ; Vialaret.]

ARITHMÉTIQUE

4731. — A *désignant un nombre entier quelconque,* D *et* D' *désignant les différences de ce nombre avec les carrés qui le comprennent, montrer que* A — DD' *est un carré.*

On a par hypothèse

$$\text{D} = \text{A} - a^2,$$
$$\text{D}' = (a+1)^2 - \text{A}.$$

Par suite

$$\left.\begin{aligned}\text{A} &= a^2 + \text{D},\\ \text{D}' &= (a+1)^2 - a^2 - \text{D} = 2a + 1 - \text{D}\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

et

$$\begin{aligned}\text{A} - \text{DD}' &= \text{D} + a^2 - \text{D}(2a + 1 - \text{D})\\ &= a^2 - 2a\text{D} + \text{D}^2 = (a - \text{D})^2.\end{aligned}$$

C. q. f. d.

Pour $a = \text{D}$ ou $\text{A} = a(a+1)$, la quantité A — DD' devient nulle.

Remarque. — On peut éliminer D ou a au moyen de l'une des égalités (1). On obtient ainsi

$$A - DD' = [a(a+1) - A]^2,$$

ou
$$A - DD' = \left(\frac{D' + D - 1}{2} - D\right)^2 = \left(\frac{D' - D - 1}{2}\right)^2.$$

(T. LALESCU, lycée Internat de Jassy.)

[Ont résolu la question : Mlle Laurent-Bourget; MM. A. Amblard ; Arcizet ; L. Barberot ; R. Bazin ; M. Bégué ; C. Billionnet ; C. Bourvéau ; R. Bouvaist ; Cagé ; E. Chaineau ; F. Clabault ; M. Cry ; L. Curt ; Delaire ; C. Durand ; Duvergé et Sainte-Laguë ; H. Foucher ; M. Gaillot ; J. Germa ; M. Gondran ; J. Haag ; J. Hébré ; R. Henry ; A. Jouffray ; G. Lallier ; J. Lamotte ; A. Lecoutour ; J. Lehmann ; J. Limasset ; D. Lwow ; M. B., à V. ; R. Mouzon ; P. Noël ; L. Patin ; R. Paucot ; J. Pendariès ; M. Petit ; M. Petitjean ; A. Pichon ; H. Pitrat ; C. Platrier ; R., à A. ; E. Roncaglia ; A. de Saint-Gabriel ; G. Sinoquet ; H. Tellier ; L. Thiébert ; P. Thonet ; C. Vallot ; A. Vary ; N. Vaslin ; F. Vérot ; A. Vioix ; G. Foucry ; A. Hardy ; H. Janois.]

4751. — *Trouver toutes les valeurs de n pour lesquelles $13^n - 1$ est divisible par 103.*

D'après le théorème de Fermat, on sait que pour

$$n = 103 - 1 = 102,$$

le nombre $13^n - 1$ est divisible par 103.

Démontrons d'abord que toutes les valeurs de n répondant à la question sont des multiples de la plus petite. En effet, si r est cette plus petite valeur, on a

$$13^r = \text{mult. } 103 + 1,$$

et par suite
$$13^{qr} = \text{mult. } 103 + 1.$$

Réciproquement, si

$$13^n = \text{mult. } 103 + 1,$$

en posant $n = qr + \alpha$, on en déduit

$$13^{qr} . 13^\alpha = \text{mult. } 103 + 1,$$

ou, comme $13^{qr} = \text{mult. } 103 + 1$, en retranchant aux deux membres un multiple de 103,

$$13^\alpha = \text{mult. } 103 + 1,$$

ce qui entraîne $\alpha = 0$, puisque $\alpha < r$. Donc

$$n = qr.$$

Par suite, r doit être égal à l'un des diviseurs de 102.

Or
$$\overline{13}^2 = m . 103 + 66,$$
$$\overline{13}^3 = m . 103 + 13 \times 66 = m . 103 + 34,$$
$$\overline{13}^4 = m . 103 + \overline{66}^2 \qquad = m . 103 + 30,$$
$$\overline{13}^8 = m . 103 + \overline{30}^2 \qquad = m . 103 + 76,$$
$$\overline{13}^{16} = m . 103 + \overline{76}^2 \qquad = m . 103 + 8,$$
$$\overline{13}^{17} = m . 103 + 13 \times 8 = m . 103 + 1.$$

Ces calculs montrent que $r = 17$, de sorte que

$$n = q \times 17.$$

(DUVERGÉ et A. SAINTE-LAGUE, lycée de Bordeaux.)

[Ont résolu la même question : Mlle Leininger ; MM. Barberot ; Baroux ; Foucry ; Lalescu ; M. B., à V. ; Meynier ; Vérot.]

ALGÈBRE

4701. — *On donne deux droites parallèles AP, BQ, et un cercle O tangent à ces droites aux points A et B. Soit M un point quelconque du cercle O ; on mène les droites MA et MB qui coupent BQ et AP en B' et A', on trace la droite A'B', et on mène la perpendiculaire MD à AB.*

1° Soit M' le point d'intersection de MD et de A'B' ; démontrer que l'on a MD = MM', et trouver le lieu du point M', quand le point M décrit le cercle O ;

2° Ce lieu est une ellipse E ; on la fait tourner d'un angle u autour de AB, et on l'amène ainsi dans une certaine position E' : déterminer l'angle u de manière que le cercle O soit la projection orthogonale de l'ellipse E' ;

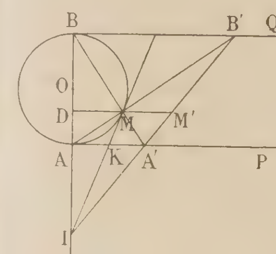
3° Soit I le point d'intersection des droites AB, A'B' ; démontrer que la droite IM est tangente au cercle O et la droite IM' à l'ellipse E ;

4° Calculer la longueur MD, de manière que la surface totale du tronc de cône engendré par le trapèze ABB'A' tournant autour de AB soit équivalente à m fois la surface du cercle O (m désignant un nombre donné).

(*Certificat d'aptitude à l'enseignement secondaire des jeunes filles, 1899.*)

1° DM étant parallèle à BB', on a

$$\frac{DM}{BB'} = \frac{AM}{AB'};$$



de même

$$\frac{MM'}{BB'} = \frac{A'M}{A'B}.$$

Ces égalités ayant leurs seconds membres égaux à cause du parallélisme de AA' et BB', on en déduit

$$\frac{DM}{BB'} = \frac{MM'}{BB'}, \quad \text{ou} \quad DM = MM'.$$

Le point M' s'obtient ainsi en prolongeant l'ordonnée DM du cercle O d'une longueur égale ; donc, d'après une propriété connue, le point M' décrit une ellipse admettant AB comme petit axe, le grand axe étant égal à 2AB.

2° Pour que l'ellipse E' se projette orthogonalement suivant le cercle O, il faut et il suffit qu'après la rotation l'ordonnée DM' ait pour projection l'ordonnée DM :

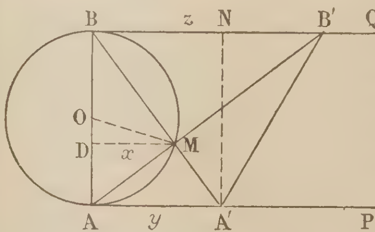
$$DM = DM' \cos u,$$

d'où

$$\cos u = \frac{DM}{DM'} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad u = 60°.$$

3° La droite IM joignant I au milieu M de DM' passe par le milieu K de la parallèle AA' à DM'. Dans le triangle rectangle AMA', la médiane MK est égale à la moitié AK de l'hypoténuse ; le triangle AMK est donc isocèle, et l'angle AMI, égal à l'angle MAA', a même mesure que la moitié de l'arc intercepté, AM, ce qui montre que la droite IM est tangente en M au cercle O. La tangente IM étant d'ailleurs la projection de la tangente en M à l'ellipse E', lorsque l'ellipse a pour projection le cercle, cette dernière tangente passe par I, de sorte que IM' est bien tangente à l'ellipse E.

4° Posons pour abréger $AA' = y$, $BB' = z$. En écrivant que la surface totale du tronc de cône engendré par ABB'A' en tournant autour de AB équivaut à m fois la surface πR^2 du cercle O, on obtient, après suppression de π,



$$y^2 + z^2 + A'B'(y + z) = mR^2.$$

Or
$$y^2 + z^2 = \frac{(y+z)^2 + (z-y)^2}{2},$$

et, en menant A'N parallèle à AB,

$$A'B' = \sqrt{\overline{A'N}^2 + \overline{NB'}^2} = \sqrt{4R^2 + (z-y)^2}.$$

Il suffit donc d'évaluer $y + z$ et $z - y$ en fonction de R

et x. On a visiblement

$$\frac{y}{x} = \frac{2R}{BD}, \qquad \frac{z}{x} = \frac{2R}{AD};$$

on deduit de là

$$y + z = 2Rx\left(\frac{1}{BD} + \frac{1}{AD}\right) = \frac{2Rx AB}{\overline{MD}^2} = \frac{4R^2}{x},$$

$$z - y = 2Rx\left(\frac{1}{AD} - \frac{1}{BD}\right) = \frac{4Rx.OD}{\overline{MD}^2} = \frac{4R\sqrt{R^2 - x^2}}{x},$$

et, par suite,

$$y^2 + z^2 = \frac{8R^4 + 8R^2(R^2 - x^2)}{x^2} = \frac{8R^2(2R^2 - x^2)}{x^2},$$

$$A'B' = \sqrt{4R^2 + \frac{16R^2(R^2 - x^2)}{x^2}} = \frac{2R\sqrt{4R^2 - 3x^2}}{x}.$$

L'équation du problème devient donc

$$\frac{8R^2(2R^2 - x^2)}{x^2} + \frac{8R^3\sqrt{4R^2 - 3x^2}}{x^2} = mR^2,$$

ou $$8R\sqrt{4R^2 - 3x^2} = (m + 8)x^2 - 16R^2. \qquad (1)$$

Élevons chaque membre au carré et réduisons; il vient, après suppression du facteur commun x^2,

$$32R^2(m + 2) = (m + 8)^2 x^2,$$

d'où $$x = \frac{4R\sqrt{2(m + 2)}}{m + 8}.$$

m étant positif, cette valeur de x est réelle et positive. Pour qu'elle convienne au problème, il faut qu'elle soit inférieure ou égale à R et rende positif le second membre de (1); on doit donc avoir

$$\frac{4R}{\sqrt{m + 8}} < \frac{4R\sqrt{2(m + 2)}}{m + 8} \leqslant R.$$

La première inégalité se ramène à

$$m - 4 > 0,$$

et la seconde à

$$m^2 - 16m \geqslant 0.$$

La seule condition de possibilité est par suite $m \geqslant 16$.

Pour $m = 16$, on a $x = R$, $y = z = 2R$; le tronc de cône devient un cylindre dont le rayon de base est égal à la hauteur.

(H. PITRAT, à Givors.)

[Ont résolu complètement cette question : MM. J. Cabrol ; Y. Collin ; A. De Saint-Gabriel ; G. Foucry ; J. Hébré ; R. Henry ; H. Julien ; J. Lehmann ; D. Lwow ; G. Marcellin ; L. Ollié ; M. Petit ; E. Raüber.]

[Ont résolu incomplètement cette question : MM. R. Bouvaist ; F. Clabault ; Duvergé ; H. Janois ; A. Larue ; Marot ; P. Valentin ; Vial.]

4750. — *Trouver le quotient et le reste de la division par* $2x^2 - 5x + m$ *du polynome*

$$6mx^4 - (27m - 8)x^3 + (3m^2 + 36m - 26)x^2 - 11mx - 3m,$$

puis résoudre et discuter l'équation obtenue en égalant à zéro le quotient ; mettre tous les calculs.

(*École des Beaux-Arts, section d'Architecture, 1899.*)

En effectuant la division par la règle ordinaire, on trouve pour quotient

$$3mx^2 - 2(3m - 2)x + 3(m - 1),$$

et pour reste

$$(6m^2 - 15)x - 3m^2.$$

Le quotient égalé à zéro donne l'équation

$$3mx^2 - 2(3m - 2)x + 3(m - 1) = 0,$$

d'où l'on tire, en résolvant,

$$x = \frac{3m - 2 \pm \sqrt{4 - 3m}}{3m}.$$

Ces deux valeurs de x sont réelles lorsque

$$4 - 3m \geqslant 0, \qquad \text{ou} \qquad m \leqslant \frac{4}{3}.$$

Pour connaître le signe des deux valeurs de x suivant la valeur attribuée à m, remarquons que ces valeurs sont de même signe quand leur produit

$$\frac{m - 1}{m}$$

est positif, ce qui suppose $m < 0$ ou $m > 1$; d'ailleurs, dans ce cas les racines prennent le signe de leur somme

$$\frac{2(3m - 2)}{3m},$$

c'est-à-dire sont toujours positives.

La discussion peut donc se résumer ainsi :

$m < 0$, deux racines positives;

$m = 0$, une racine infinie et l'autre égale à $\frac{3}{4}$;

$0 < m < 1$, deux racines de signes contraires, la plus grande en valeur absolue est négative ou positive suivant que $m <$ ou $> \frac{2}{3}$;

$m = 1$, une racine est nulle et l'autre égale à $\frac{2}{3}$;

$1 < m < \frac{4}{3}$, deux racines positives ;

$m = \frac{4}{3}$, deux racines égales à $\frac{1}{2}$;

$m > \frac{4}{3}$, deux racines imaginaires.

(L. CURT, à Thoissey.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Anzemberger ; A. Arcizet ; G. Billionnet ; H. Blanc ; F. Clabault ; F. Collard ; H. Damoiseau ; Delaire ; L. Demogue ; A. Drocourt ; Duvergé et Sainte-Laguë ; G. Foucry ; J. Hébré ; R. Henry ; H. Janois ; H. Julien ; A. Legros ; J. Lehmann ; A. Le Moal ; M. B., à V. ; B. Mathé ; A. Meynier ; R. Mouzon ; Noël ; G. Oprescu ; R. Paucot ; M. Petit ; J. Reynaud ; E. Roncaglia ; M. Royer ; A. Sauvageon ; Sinoquet ; L. Thiébert ; P. Thonet ; A. Wiart.]

GÉOMÉTRIE

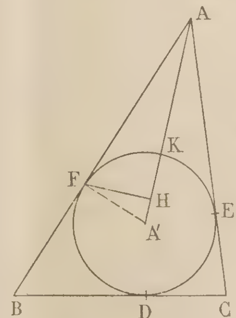
4206. — *On considère un triangle* ABC, *le cercle inscrit* DEF *et les trois triangles curvilignes* EAF, FBD, DCE, *ayant chacun pour côté un arc de ce cercle.*

Calculer le volume qu'engendre chacun de ces trois triangles lorsqu'il tourne autour de la bissectrice de son angle rectiligne, par exemple EAF *tournant autour de la bissectrice* AA'. *Comparer les trois volumes ainsi obtenus.*

Les données sont les angles A, B, C *du triangle proposé et le rayon* r *du cercle inscrit. On supposera* $A \leqslant B \leqslant C$.

(*Bacc. lettres-math., Nancy, juillet 1897.*)

Appelons K l'intersection de AA' et du cercle inscrit, H la projection de F sur AA'.



On a

$$\text{Vol.AFK} = \frac{1}{3}\pi\overline{FH}^2.AH - \frac{1}{3}\pi\overline{KH}^2(3r - KH).$$

Or $FH = r\cos\frac{A}{2}$,

$$AH = AF\cos\frac{A}{2} = r\cot\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2},$$

$$KH = r - HA' = r - r\sin\frac{A}{2}.$$

La substitution donnera, après transformation,

$$\text{Vol. AFK} = V_A = \frac{1}{3}\pi r^3 \cdot \frac{\left(1 - \sin\frac{A}{2}\right)^2}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Par analogie
$$V_B = \frac{1}{3}\pi r^3 \cdot \frac{\left(1 - \sin\frac{B}{2}\right)^2}{\sin\frac{B}{2}},$$

$$V_C = \frac{1}{3}\pi r^3 \cdot \frac{\left(1 - \sin\frac{C}{2}\right)^2}{\sin\frac{C}{2}}.$$

Comparons V_A et V_B :

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{\left(1 - \sin\frac{A}{2}\right)^2 \sin\frac{B}{2}}{\left(1 - \sin\frac{B}{2}\right)^2 \sin\frac{A}{2}}.$$

Or, si $A < B$, $\quad \sin\frac{A}{2} < \sin\frac{B}{2}$,

$$\left(1 - \sin\frac{B}{2}\right)^2 < \left(1 - \sin\frac{A}{2}\right)^2;$$

donc $\quad \left(1 - \sin\frac{A}{2}\right)^2 \sin\frac{B}{2} > \left(1 - \sin\frac{B}{2}\right)^2 \sin\frac{A}{2},$

c'est-à-dire $\quad V_A > V_B.$

Par suite, la condition $A \leqslant B \leqslant C$ entraîne

$$V_A \geqslant V_B \geqslant V_C.$$

(C. COUTURIER.)

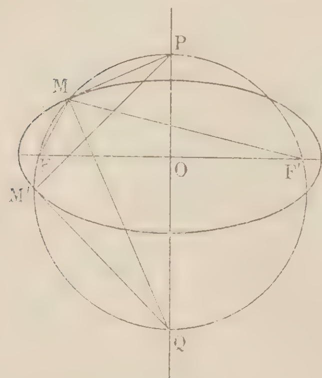
[Ont résolu la même question : MM. A. Bertrand ; Crozemarie ; M. Georgi ; G. Hiernaux ; A. Maître ; Morin-Letessier ; F. Pégorier ; H. Perdrix ; A. Smantanesco ; P. Vincent.]

4288. — *En un point quelconque M d'une ellipse on mène la tangente et la normale à la courbe ; ces deux droites rencontrent le petit axe aux points P et Q. Par le point Q où la normale rencontre le petit axe, on mène une nouvelle tangente à l'ellipse qui touche la courbe au point M' :*

1° *Démontrer que la normale au point M' passe par le point P ;*

2° *Déduire de cette propriété la solution du problème suivant : Par un point du petit axe de l'ellipse, mener les normales à cette courbe.*

1° La tangente et la normale en M étant les bissectrices de l'angle FMF' des rayons vecteurs, ces droites rencontrent le petit axe aux mêmes points P, Q que le cercle circonscrit au triangle MFF'. Ce cercle peut couper l'ellipse en un autre point M' (distinct du point symétrique de M par rapport au petit axe). Les droites M'Q et M'P sont bissectrices de l'angle FM'F' comme passant par les milieux des arcs de cercle FF' ; ce sont donc la tangente et la normale en M' à l'ellipse, ce qui justifie la première partie.



2° D'après cette propriété, une normale à l'ellipse issue d'un point P du petit axe, et autre que le petit axe, a son pied M' sur le cercle PFF', M' et P étant séparés par le grand axe. Lorsque ce cercle coupe la demi-ellipse située à l'opposé du point P par rapport à FF', les deux points d'intersection sont les pieds de deux normales passant par P.

Remarque. — La propriété et la construction précédentes subsistent pour l'hyperbole, en prenant P sur l'axe non transverse.

(FRÉDÉRIC RIESZ, école polytechnique de Zurich.)

M. E. SINTUREL et F. MOREL, du collège de Cusset, énoncent diverses propriétés qui résultent de la figure considérée. Nous nous bornerons à citer les suivantes :

Dans un système d'ellipses homofocales, les tangentes issues d'un point du petit axe commun ont leurs points de contact sur un cercle fixe, et les normales correspondant à ces points passent par un point fixe.

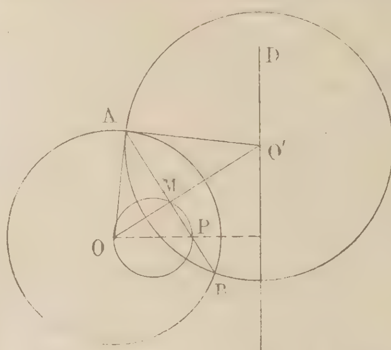
[Ont résolu la même question : MM. L. Cussenot ; Feintuch ; Geltzenlichter ; E. Kornis.]

4719. — *Étant données une circonférence O et une droite D, on décrit une circonférence ayant son centre O' sur D et coupant orthogonalement le cercle O. Trouver le lieu du milieu M de la corde commune aux circonférences O et O' lorsque O' décrit D.*

Soit AB la corde commune aux cercles O, O'. Les cercles étant orthogonaux, le triangle OAO' est rectangle en A et admet AM comme hauteur ; donc

$$OM.OO' = \overline{OA}^2 = c^{te},$$

ce qui montre que le point M est l'inverse du point O' par rapport au pôle O et à la puissance $\overline{OA}^2$ d'inversion. Par suite, lorsque O' décrit la droite D, le point M décrit une circonférence inverse passant par le pôle O et dont le diamètre OP est perpendiculaire à la droite D.



Comme M ne peut être extérieur au cercle O, le lieu se trouve limité aux points de la circonférence OP situés dans le cercle O. Par suite quand la droite D rencontre le cercle O en deux points, les points appartenant visiblement au lieu limitent la portion utile de la circonférence OP.

Dans le cas particulier où la droite D est un diamètre du cercle O, le point P s'en va à l'infini, et la circonférence OP devient la droite D elle-même : tous les points de cette droite intérieurs au cercle O répondent alors au lieu.

(G. CAPGRAS, lycée de Toulouse.)

Remarque. — Si le point O', au lieu de décrire une droite D décrivait une ligne quelconque L, le lieu de M serait la ligne inverse de L par rapport au point O pris comme pôle, la puissance d'inversion étant R^2. Comme dans le problème précédent, les points intérieurs à O font seuls partie du lieu.

[Ont résolu la même question : MM. Amblard ; d'Amphernet ; J. Arnaud ; Barol ; R. Barthélemy ; E. Baticle ; Billionnet ; Bon ; Bouvaist ; Briet ; Cabrol ; Clabault ; Coursan ; Debenest ; G. Delahaye ; Destouches ; Donvillé ; Duclo ; Duvergé ; Foucry ; J. Germa ; F. Grenier ; Haag ; Henry ; A. Jouart ; Julien ; Lajouanine ; L. Lassence ; C. Lefebvre ; Legros ; Lehmann ; Le Verrier ; Lévy ; Lwow ; M. B., à V. ; Marot ; L. Ollié ; C. E., à Vielmur ; Pequignot ; Pille ; H. Pitrat ; F. Pouget ; Reboul ; A. Sainte-Laguë ; Sinoquet ; Sinturel ; Thonet ; Tuissuzian ; Valentin ; Vallot ; Vérot.]

4753. — *Par un point quelconque* O *du plan d'un triangle* ABC *on mène des parallèles aux côtés* AB, BC, CA *limitées respectivement en* A′, B′, C′ *aux côtés* BC, CA, AB. *Démontrer que*

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{CB'}}{\overline{CA}}+\frac{\overline{AC'}}{\overline{AB}}=1.$$

(*Les segments sont regardés comme positifs ou négatifs, suivant qu'ils sont dirigés dans le sens* ABCA *ou en sens inverse.*)

Prolongeons C′O jusqu'à sa rencontre en C_1 avec BC. Les triangles $OA'C_1$, ABC ayant les côtés parallèles sont semblables ; donc

$$\frac{\overline{OC_1}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{A'C_1}}{\overline{BC}},$$

ou, comme $\overline{OC_1}=-\overline{CB'}$,

$$\frac{\overline{CB'}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{A'C_1}}{\overline{BC}}.$$

D'autre part, le parallélisme des droites $C'C_1$ et AC permet d'écrire

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CC_1}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{C_1C}}{\overline{BC}}.$$

Le premier membre de la relation à démontrer devient donc

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{A'C_1}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{C_1C}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BC}}=1.$$

Comme on a tenu compte du signe des segments, cette démonstration est indépendante de la position relative des quatre points B, A′, C_1, C, de sorte que la relation finale s'étend à toutes les positions du point O dans le plan ABC. On peut d'ailleurs s'en assurer directement en examinant successivement les deux cas où le point O est extérieur au triangle et situé soit dans l'angle A, soit dans son opposé par le sommet.

(FAUCHER, collège d'Issoire.)

Autre solution — Joignons le point O aux sommets A, B, C et tirons AA′.

Les triangles ABA′, ABC ayant même hauteur sont entre eux comme leurs bases BA′, BC ; donc

$$\frac{BA'}{BC}=\frac{ABA'}{ABC}.$$

Mais le triangle ABA′ est équivalent au triangle ABO (base commune et hauteur égale) ; l'égalité précédente s'écrit alors

$$\frac{BA'}{BC}=\frac{OAB}{ABC}.$$

On aurait de même

$$\frac{CB'}{CA}=\frac{OBC}{ABC},$$

$$\frac{AC'}{AB}=\frac{OCA}{ABC}.$$

En ajoutant ces trois valeurs, on voit immédiatement que leur somme est égale à 1.

Dans cette seconde démonstration, nous n'avons tenu compte que de la valeur absolue des segments; pour avoir égard à leur signe, il suffit de regarder par exemple l'aire OAB comme étant positive lorsque le sommet O tombe du même côté que C par rapport à AB. Moyennant cette convention, la démonstration précédente devient absolument générale.

(FÉLIX LIMOUZI.)

[Ont résolu la même question : MM. d'Amphernet ; Baroux ; C. Billionnet ; H. Blanc ; R. Bouvaist ; G. Cagé ; F. Clabault ; Cougnoux ; A. Drocourt ; C. Durand ; Duvergé et Sainte-Laguë ; G. Foucry ; M. Gondran ; J. Haag ; J. Hébre ; R. Henry ; Hugonnier-Ginet ; H. Janois ; de Jarny ; T. Lalescu ; A. Lecoutour ; A. Legros ; A. Le Moal ; T. Lemoyne ; D. Lwow ; G. Marcellin ; R. Mouzon ; Noël ; G. de Parseval ; M. Petitjean ; Portalier ; E. Raüber ; P. Sandon ; Sinoquet ; Taton ; L. Troin ; Valentin ; Vérot ; X., à Liège ; G. Delahaye ; H. Rimbaud.]

TRIGONOMÉTRIE

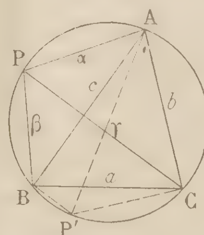
4484. — P *étant un point quelconque de la circonférence circonscrite au triangle* ABC, *on tire les droites* PA, PB, PC, *que l'on désigne respectivement par* α, β, γ ; *en représentant comme d'ordinaire par* a, b, c, A, B, C, S *et* R *les côtés, les angles, l'aire et le rayon du cercle circonscrit, démontrer la relation*

$$4S=\alpha^2\sin 2A+\beta^2\sin 2B+\gamma^2\sin 2C.$$

Que devient cette relation quand on place le point P *aux différents sommets* A, B, C *et enfin à l'extrémité du diamètre passant par* A ?

Considérons le triangle ABC inscrit dans le cercle O de rayon R. Appelons p_1, p_2, p_3 les perpendiculaires abaissées d'un point P du cercle circonscrit sur les côtés ; α, β, γ les distances de ce point P aux trois sommets.

Nous supposerons que ces longueurs sont des nombres algébriques dont le signe est + si le point P est situé du même côté que le sommet correspondant par rapport au côté du triangle, et — dans le cas contraire.



On démontre facilement les relations suivantes :

1° $\beta\gamma=2Rp_1$, $\gamma\alpha=2Rp_2$, $\alpha\beta=2Rp_3$.

2° Le théorème de Ptolémée donne la relation

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=0.$$

3° En remplaçant dans cette relation a, b, c par les quantités proportionnelles sin A, sin B, sin C, on a

$$\alpha\sin A+\beta\sin B+\gamma\sin C=0.$$

4° En exprimant que le triangle donné est la somme algébrique de triangles partiels, on a, en grandeur et en signe,

$$2S=-(\beta\gamma\sin A+\gamma\alpha\sin B+\alpha\beta\sin C).$$

5° D'ailleurs, on a identiquement

$$(\alpha^2\sin 2A+\beta^2\sin 2B+\gamma^2\sin 2C)$$
$$+2(\beta\gamma\sin A+\gamma\alpha\sin B+\alpha\beta\sin C)=0.$$

En effet le premier membre est égal au produit

$$(\alpha\sin A+\beta\sin B+\gamma\sin C)(\alpha\cos A+\beta\cos B+\gamma\cos C),$$

dont le premier facteur est nul.

6° La formule

$$4S=\alpha^2\sin 2A+\beta^2\sin 2B+\gamma^2\sin 2C$$

devient évidente en vertu de 4° et 5°.

En particulier, lorsque le point P occupe le sommet A, $\alpha=0$, $\beta=c$, $\gamma=b$ et on a la formule connue

$$4S=b^2\sin 2C+c^2\sin 2B.$$

Lorsque P est à l'extrémité du diamètre AO,

$$\alpha=2R,\qquad \beta=\sqrt{4R^2-c^2},\qquad \gamma=\sqrt{4R^2-b^2},$$

et on obtient

$$4S=8R^2\sin A\sin B\sin C.$$

On peut déduire de ce qui précède un grand nombre d'autres

relations. Nous citerons seulement les suivantes :

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\beta\gamma\frac{\sin^2 A}{\sin B\sin C}+\gamma\alpha\frac{\sin^2 B}{\sin A\sin C}+\alpha\beta\frac{\sin^2 C}{\sin A\sin B},$$

$$(\alpha^2-4R^2)\sin 2A+(\beta^2-4R^2)\sin 2B+(\gamma^2-4R^2)\sin 2C=0.$$

(C. COUTURIER.)

[Ont résolu la même question : MM. G. Delahaye, à Roye ; R. Dickson, à Angoulême ; H. Janois, à Nogent-le-Bernard ; Lehmann, à Alger-Bouzaréah ; M. Oger ; E. Vaunac, instituteur à Rouffignac.]

PHYSIQUE

4755. — *Dans un réservoir contenant* $5^{lit},6$ *d'air sec à* 0° *et sous la pression de* 830^{mm} *de mercure, on veut introduire avec une pompe de compression dépourvue d'espace nuisible* 23^{gr} *d'air sec pris à* 0° *et sous la pression normale. Le volume du corps de pompe étant de* 560^{cc}, *on demande le nombre de coups de piston à donner et la pression finale dans le réservoir.*

Poids du litre d'air dans les conditions normales, $1^{gr},3$.

(*Bacc. lettres-math., Rennes, juillet 1899.*)

Désignons par n le nombre de coups de piston à donner, par H_n la pression finale dans le réservoir. On a

$$H_n=830+n\times 760\times\frac{0,56}{5,6}\cdot \qquad (1)$$

Cette pression est la somme des pressions de l'air qui se trouvait d'abord dans le récipient et de l'air qu'on y a introduit :

$$H_n=830+H.$$

La pression de l'air introduit est donnée par la relation

$$\frac{23}{1,3}\times 760=5,6\times H,$$

d'où $\qquad H=2401^{mm},09$

et $\qquad H_n=830+2401,09=3231^{mm},09.$

Portant cette valeur dans l'équation (1), il vient

$$3231,09=830+n\times 760\times\frac{0,56}{5,6},$$

d'où l'on tire $\qquad n=32.$

Il faudra donc donner 32 coups de piston, et la pression finale dans le réservoir sera $3231^{mm},09$.

(MENGAILHOU.)

[Ont résolu la même question : Mlle Lazare ; MM. A. Agéron ; L. Audoyer ; M. B.. à V. ; C. Billionnet ; H. Blanc ; M. Brun ; Cloudon ; E. Cognet ; L. Corbin ; J. Crétinon ; L. Curt ; H. Damoiseau ; A. Delaire ; H. Duchesne ; Duvergé et Sainte-Laguë ; G. Foucry ; Foucher ; M. Gaillot ; A. de Saint-Gabriel ; A. Gorce ; J. Haag ; J. Hébre , H. Janois ; de Jarny ; G. Lallier ; A. Lecoutour ; G. Lemasurier ; T. Lemoyne ; E. Liger ; F. Limouzi ; G. Luquet ; David Lwow ; J. Maire ; Malassiné ; B. Mathé ; A. Meynier ; A. Le Moal ; Noël ; Portalier ; P. Pille ; A. Pichon ; R., à A. ; Rivière ; M. Royer ; P. Sandon ; R. Simon ; G. Sinoquet ; G. Taton ; Thiébert ; Touton ; P. Valentin ; A. Vannier ; R. Henry ; A. Joyer ; H. Ménielle ; A. Pequignot ; A. Sauvageon ; D. Tuïssuzian ; Vialaret ; Mlles J. Gravet ; Leininger.]

4756. — *Un très petit cercle lumineux, dont le plan est perpendiculaire à l'axe principal d'une lentille convergente, a son centre en un point de cet axe. Sur un écran situé à* 3^m *du cercle donné et perpendiculaire à l'axe principal, se forme une image réelle dont la surface est quadruple de celle du cercle donné. Calculer la distance focale principale de la lentille.*

(*Bacc. lettres-math., Caen, juillet 1899.*)

Les surfaces de deux cercles étant entre elles comme les carrés de leurs rayons, on a, en désignant par R et r les rayons de l'image et de l'objet,

$$\frac{R^2}{r^2}=4,$$

d'où $$\frac{R}{r}=2.$$

Mais $$\frac{R}{r}=\frac{p'}{p}=2,$$

d'où $\qquad p'=2p.$

D'après l'énoncé, $p+p'=3^m$; on a donc $3p=3^m$. Par suite, $p=1^m$ et $p'=2^m$.

En appliquant la formule des lentilles, il vient

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{f},$$

d'où $$f=\frac{2}{3}=0^m,666.$$

(E. LE MAIGRE.)

[Ont résolu la question : Mlle Leininger ; MM. M. B.. à V. ; H. Blanc ; C. Billionnet ; M. Boiset ; L. Corbin ; Curt ; H. Damoiseau ; Delaire ; T. Deslandes ; A. Drocourt ; H. Duchesne ; A. de Saint-Gabriel ; G. Foucry ; J. Haag ; J. Hébré ; G. Hugonnier ; H. Janois ; J. Jarrier ; H. Julien ; G. Lallier ; T. Lavardant ; E. Liger ; F. Limouzi ; David Lwow ; B. Mathé ; M. Malassiné ; A. Meynier ; A. Le Moal ; A. Nabon ; R. Paucot ; A. Pichon ; Pellissier ; P. Pille ; Cougnoux ; M. Royer ; G. Sinoquet ; L. Thiébert ; P. Thonet ; Touton ; Vannier ; A. Vioix ; F. Clabault ; M. Cry ; R. Henry ; J. Lehmann ; A. Pequignot ; A. Sauvageon.]

QUESTIONS PROPOSÉES

4765. — On considère les nombres $N=2^n+1$. Trouver pour quelles valeurs de n un nombre N est premier avec 15 ou non premier avec 15.

4766. — Résoudre le système d'équations

$$y\log x=x\log y,$$
$$x^2=y^3.$$

4767. — Calculer les bases d'un trapèze isocèle inscrit dans un cercle de rayon R, connaissant la longueur commune a des côtés non parallèles et la surface m^2.

4768. — Par l'un des sommets A d'un quadrilatère mener une droite AE qui divise ce quadrilatère en deux parties équivalentes.

(H. BAROUX, à Lorgues.)

4769. — On donne un cercle O. Sur une corde MN de ce cercle on construit, dans un plan perpendiculaire au plan du cercle O, un segment S capable d'un angle constant α. En supposant que la corde variable MN se déplace parallèlement à elle-même, on demande les lieux géométriques :

1° Du centre du cercle S ;

2° Des points de contact des tangentes au cercle S parallèles à MN ;

3° Des points de contact des tangentes au cercle S perpendiculaires à MN.

(L. OLLIÉ, à Auch.)

4770. — On donne deux cercles O et C, et un point S. Déterminer le cercle qui coupe orthogonalement le cercle C et qui admet avec le cercle O le point S pour centre d'homothétie.

(X, lycée de Marseille.)

4771. — Dans un calorimètre en cuivre pesant 30^{gr} et contenant 500^{gr} d'eau à 10°, on immerge un ballon en cuivre pesant 100^{gr}, de 250^{cc} de capacité, contenant de l'air à 10 atmosphères de pression. Ce ballon et son contenu ont été chauffés à 100°. On demande quelle est la chaleur spécifique de l'air, sachant que la chaleur spécifique du cuivre est $c=0,09$ et que le poids du litre d'air à la pression atmosphérique et à la température à laquelle a été rempli le ballon est de $1^{gr},3$.

On effectuera les calculs pour les deux cas suivants :

1° Température finale $\theta=11°,68$;

2° — — $\theta'=11°,73$.

De la comparaison des résultats obtenus déduire l'erreur que l'on peut commettre sur la chaleur spécifique de l'air, si on peut se tromper de $\frac{1}{20}$ de degré sur la température finale. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

(*Bacc. lettres-math., Aix, juillet 1899.*)

4772. — On dirige vers le soleil, que l'on regardera comme infiniment éloigné, l'*oculaire* d'une lunette de Galilée ; on place l'œil derrière l'*objectif* ; on demande de tracer la marche des rayons lumineux dans la lunette mise au point.

(*Bacc. lettres-math., Bordeaux, juillet 1899.*)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Directeur.

24e Année. — N° 13. JOURNAL Paris, le 1er Avril 1900.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL..............	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.
Abonnements.. Librairie **Nony** et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

ÉTUDE DE LA FRACTION RATIONNELLE DU SECOND DEGRÉ $\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$,

par M. **Veyssière**, professeur au lycée de Poitiers.

Je poserai pour abréger : $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$; $g(x) \equiv a'x^2 + b'x + c'$.

Je supposerai que l'un au moins des polynomes $f(x)$, $g(x)$ est du second degré : dans le cas contraire la fraction serait du premier degré ; je supposerai également que $g(x)$ est au moins du 1er degré : car si on avait $a' = b' = 0$, la fraction se réduirait à $\dfrac{f(x)}{c}$, c'est-à-dire à un trinome du second degré ; enfin si $a' = 0$, nous supposerons $ab' - ba' = 0$, car les deux conditions $a' = 0$, $ab' - ba' = 0$ entraîneraient les suivantes : $a' = 0$ avec $a = 0$, ou $a' = 0$ avec $b' = 0$ et nous retomberions sur l'un des cas que nous avons écartés.

Je vais sommairement établir les propriétés du résultant de $f(x)$ et $g(x)$, dont j'aurai constamment à faire usage.

1. Définition et formes diverses du résultant de $f(x)$ **et** $g(x)$. — Je représenterai par α et β les racines de $f(x)$, par α' et β' celles de $g(x)$; et je ne parlerai que des racines réelles ; quand l'un des polynomes n'aura qu'une racine, je la représenterai par β' ou par β.

En supposant que $g(x)$ ait des racines α', β', calculons le produit $f(\alpha').f(\beta')$:

$$f(\alpha').f(\beta') = (a\alpha'^2 + b\alpha' + c)(a\beta'^2 + b\beta' + c) = a^2(\alpha'\beta')^2 + ab\alpha'\beta'(\alpha' + \beta') + b^2\alpha'\beta' + ac(\alpha'^2 + \beta'^2) + bc(\alpha' + \beta') + c^2$$

$$= a^2 \cdot \frac{c'^2}{a'^2} + ab \cdot \frac{c'}{a'}\left(-\frac{b'}{a'}\right) + b^2 \cdot \frac{c'}{a'} + ac\left(\frac{b'^2}{a'^2} - \frac{2c'}{a'}\right) + bc\left(-\frac{b'}{a'}\right) + c^2 = \frac{a^2c'^2 - abb'c' + b^2c'a' + acb'^2 - 2aca'c' - bca'b' + c^2a'^2}{a'^2};$$

d'où

$$a'^2 f(\alpha').f(\beta') = a^2c'^2 - 2aca'c' + c^2a'^2 - ab'(bc' - cb') + ba'(bc' - cb') = (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb').$$

De même, si $f(x)$ a deux racines α, β, on trouvera $a^2g(\alpha)g(\beta) = (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb')$.

Supposons maintenant que l'un des polynomes, $g(x)$ par exemple, soit du premier degré ; il aura une seule racine $\beta' = -\dfrac{c'}{b'}$, et nous pourrons écrire

$$f(\beta') = a\frac{c'^2}{b'^2} - b \cdot \frac{c'}{b'} + c = \frac{ac'^2 - bb'c' + cb'^2}{b'^2}; \qquad \text{d'où} \qquad ab'^2f(\beta') = a(ac'^2 - bb'c' + cb'^2) ;$$

si $f(x)$ a deux racines α et β, on obtiendra de même

$$g(\alpha)g(\beta) = (b'\alpha + c')(b'\beta + c') = b'^2.\alpha\beta + b'c'(\alpha + \beta) + c'^2 = b'^2 \cdot \frac{c}{a} - b'c' \cdot \frac{b}{a} + c'^2 = \frac{ac'^2 - bb'c' + cb'^2}{a},$$

d'où

$$a^2g(\alpha)g(\beta) = a(ac'^2 - bb'c' + cb'^2).$$

Remarquons maintenant que si dans $(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb')$ on suppose $a' = 0$, on obtient précisément $a(ac'^2 - bb'c' + cb'^2) = a^2g(\alpha)g(\beta) = ab'^2f(\beta')$.

Nous poserons dans tous les cas, un seul des coefficients a ou a' pouvant être nul, $R = (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb')$.

Si $f(x)$ et $g(x)$ sont tous deux du second degré et s'ils ont des racines, on aura $R = a'^2f(\alpha').f(\beta') = a^2g(\alpha).g(\beta)$; si $g(x)$ seul avait des racines on écrirait seulement $R = a'^2f(\alpha').f(\beta')$; si $g(x)$ était du premier degré, on aurait

$$R = ab'^2f(\beta') ; \qquad R = a^2g(\alpha)g(\beta) ;$$

on n'écrirait la dernière relation que si $f(x)$ avait des racines. Nous dirons que R est le *résultant* de $f(x)$ et de $g(x)$, que ces polynomes aient ou n'aient pas de racines. On peut écrire R sous différentes formes qu'il est utile de connaître : on a d'abord

$$R = (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') = a^2c'^2 - 2aca'c' + c^2a'^2 - abb'c' + b^2c'a' + acb'^2 - bca'b' ;$$

d'où

$$4R = 4a^2c'^2 - 8aca'c' + 4c^2a'^2 - 4abb'c' + 4b^2c'a' + 4acb'^2 - 4bca'b'$$

$$= 4a^2c'^2 + 8aca'c' + 4c^2a'^2 + b^2b'^2 - 4bb'ac' - 4bb'ca' - 16aca'c' - b^2b'^2 + 4b^2c'a' + 4b'^2ca$$

$$= (2ac' + 2ca' - bb')^2 - 4ac(4a'c' - b'^2) + b^2(4a'c' - b'^2) = (2ac' + 2ca' - bb')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c').$$

Enfin, en multipliant R par $4a'c'$ et ordonnant par rapport à b :

$$\begin{aligned}4Ra'c' &= 4a'^2c'^2b^2 - 4a'c'(ac' + ca')bb' + 4b'^2aca'c' + 4a'c'(ac' - ca')^2 \\ &= 4a'^2c'^2b^2 - 4a'c'(ac' + ca')bb' + (ac' + ca')^2b'^2 - (ac' + ca')^2b'^2 + 4b'^2aca'c' + 4a'c'(ac' - ca')^2 \\ &= [2ba'c' - b'(ac' + ca')]^2 - b'^2(ac' - ca')^2 + 4a'c'(ac' - ca')^2 \\ &= [2ba'c' - b'(ac' + ca')]^2 + (4a'c' - b'^2)(ac' - ca')^2.\end{aligned}$$

On aurait de même

$$4Rac = [2b'ac - b(ac' + ca')]^2 + (4ac - b^2)(ac' - ca')^2.$$

Nous avons ainsi obtenu pour R les formes

$$\left\{\begin{aligned} R &= (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb'), \\ 4R &= (2ac' + 2ca' - bb')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c'), \\ 4Ra'c' &= [2ba'c' - b'(ac' + ca')]^2 + (4a'c' - b'^2)(ac' - ca')^2, \\ 4Rac &= [2b'ac - b(ac' + ca')]^2 + (4ac - b^2)(ac' - ca')^2. \end{aligned}\right.$$

2. Propriétés du résultant. — Théorème. — *Si* $R \leqslant 0$, *les polynomes* $f(x)$ *et* $g(x)$ *ont tous deux des racines*, car en supposant $g(x)$ par exemple du second degré, on aurait, si $g(x)$ n'avait pas de racine, $b'^2 - 4a'c' < 0$, d'où $4a'c' - b'^2 > 0$; $4a'c' > 0$, et $4Ra'c' \leqslant 0$, ou

$$[2ba'c' - b'(ac' + ca')]^2 + (4a'c' - b'^2)(ac' - ca')^2 \leqslant 0,$$

ce qui est impossible, cette expression ne pouvant être négative, puisque $4a'c' - b'^2 > 0$; elle ne peut non plus être nulle, à moins de supposer $ac' - ca' = 0$, $2ba'c' - b'(ac' + ca') = 0$, c'est-à-dire a, b, c proportionnels à a', b', c', mais alors $f(x)$ et $g(x)$ ne seraient pas deux polynomes distincts.

3. Théorème. — *Si* $R = 0$, *les deux polynomes* $f(x)$ *et* $g(x)$ *ont une racine commune, et réciproquement.*

En effet, si $R = 0$, $f(x)$ et $g(x)$ ont des racines d'après le théorème précédent.

En supposant $f(x)$ et $g(x)$ du second degré, on a (n° 1)

$$0 = R = a^2g(\alpha)g(\beta) = a'^2f(\alpha').f(\beta'),$$

ce qui exige que $f(\alpha') = 0$, ou $f(\beta') = 0$; l'une des racines α' ou β' de $g(x)$ est donc racine de $f(x)$.

En supposant $g(x)$ par exemple du premier degré, $g(x)$ admet une racine β', et on a (n° 1)

$$0 = R = ab'^2f(\beta'),$$

ce qui exige que $f(\beta') = 0$; β' est donc racine de $f(x)$.

Réciproquement, si $f(x)$ et $g(x)$ ont une racine commune β', on a $f(\beta') = 0$, ce qui entraîne $R = 0$.

4. Théorème. — *Si* $R < 0$, $f(x)$ *et* $g(x)$ *ont des racines, et entre deux racines de l'un des polynomes il y a une* seule *racine de l'autre.*

1° Si a et a' sont différents de 0, R étant négatif, $g(x)$ et $f(x)$ ont des racines (n° 2), et $R = a'^2f(\alpha')f(\beta')$; la condition $R < 0$ peut donc s'écrire $a'^2f(\alpha').f(\beta') < 0$, ce qui entraîne $f(\alpha').f(\beta') < 0$; cette dernière inégalité exprime précisément qu'entre α' et β', racines de $g(x)$, il y a une seule racine de $f(x)$.

Si $a' = 0$, $g(x)$ a une seule racine β', et $R = ab'^2f(\beta')$; la condition $R < 0$ peut donc s'écrire $ab'^2f(\beta') < 0$, ou $af(\beta') < 0$, ce qui exprime que $f(x)$ a des racines entre lesquelles est comprise β'.

2° Réciproquement, si $f(x)$ et $g(x)$ ont des racines et si une seule racine β' de $g(x)$ est comprise entre celles de $f(x)$, on a

$$af(\alpha') > 0, \qquad af(\beta') < 0, \qquad \text{d'où} \qquad f(\alpha').f(\beta') < 0, \qquad a'^2f(\alpha').f(\beta') < 0, \qquad \text{ou} \qquad R < 0.$$

On peut énoncer la proposition précédente sous la forme suivante : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'entre les racines de l'un des polynomes il y ait une seule racine de l'autre, est que* R *soit négatif.*

Je vais appliquer les propriétés des résultants à l'étude de la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{g(x)}$; je supposerai a et a' non nuls à la fois ; s'ils étaient nuls tous deux, la fraction se réduirait à $\frac{bx + c}{b'x + c'}$, que l'on sait étudier directement ; je supposerai en outre $R \neq 0$, car si R était nul, $f(x)$ et $g(x)$ auraient une racine commune et la fraction $\frac{f(x)}{g(x)}$ se réduirait encore à la fraction rationnelle du premier degré.

Remarquons que $\frac{f(x)}{g(x)}$ n'est définie que dans les intervalles ne renfermant aucune racine de $g(x)$; je ne ferai croître x que dans de tels intervalles, ce qui revient à ne donner à x aucune valeur égale à une racine de $g(x)$. Si $g(x)$ n'a pas de racine, à toute valeur de x correspond pour $\frac{f(x)}{g(x)}$ une valeur bien déterminée.

5. Théorème. — *Les valeurs de* x *qui correspondent à une valeur déterminée* y *de* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *sont les racines de l'équation* $F(x) = 0$ *ou*

$$F(x) = f(x) - yg(x) = (a - a'y)x^2 + (b - b'y)x + c - c'y = 0.$$

Soit en effet x_1 une valeur de x telle que $\frac{f(x_1)}{g(x_1)} = y$; on aura $f(x_1) = yg(x_1)$, ou $f(x_1) - yg(x_1) = 0$, $F(x_1) = 0$.

Réciproquement, soit x_1 une racine de $F(x) = 0$, on aura $F(x_1) = f(x_1) - yg(x_1) = 0$.

On ne peut supposer $g(x_1) = 0$, car on aurait $f(x_1) = 0$ et les polynomes $f(x)$ et $g(x)$ auraient une racine commune, contrairement à ce que nous avons admis ; donc $g(x_1) \neq 0$ et on peut écrire

$$f(x_1) = yg(x_1), \qquad y = \frac{f(x_1)}{g(x_1)}.$$

A une valeur y attribuée à la fonction $\frac{f(x)}{g(x)}$ correspondent les valeurs de x racines de $F(x) = 0$. Pour abréger, nous écrirons $F(x) \equiv Ax^2 + Bx + C$; $A = a - a'y$; $B = b - b'y$; $C = c - c'y$.

$F(x)$ est du second degré au plus en x ; donc *à une valeur* y *de la fraction* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *correspondent au plus deux valeurs de* x. Si on suppose $y = \frac{a}{a'}$, $F(x)$ se réduit à $F(x) \equiv (b - b'y)x + c - c'y = \frac{(ba' - ab')x + ca' - ac'}{a'}$, et $F(x) = 0$ admet la seule racine $\frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}$, en supposant $ab' - ba' \neq 0$. Si on avait $ab' - ba' = 0$ et si on supposait $y = \frac{a}{a'}$, on aurait pour $F(x)$ $F(x) \equiv \frac{ca' - ac'}{a'}$, et $F(x)$ n'aurait aucune racine, car on ne peut avoir à la fois $ab' - ba' = 0$, $ca' - ac' = 0$, puisque $R \neq 0$.

6. Déterminer les valeurs que peut prendre la fraction $\frac{f(x)}{g(x)}$. — La fraction $\frac{f(x)}{g(x)}$ ne peut prendre une valeur y que si pour cette valeur y l'équation $F(x) = 0$ a au moins une racine, c'est-à-dire si à cette valeur y correspond au moins une valeur de x. Les valeurs y que l'on peut attribuer à la fonction sont donc celles *pour lesquelles l'équation* $F(x) = 0$ *admet au moins une racine*, c'est-à-dire celles qui satisfont à l'inéquation

$$B^2 - 4AC \geqslant 0, \qquad \text{ou} \qquad (b - b'y)^2 - 4(a - a'y)(c - c'y) \geqslant 0,$$

ou, en développant,

$$\varphi(y) \equiv (b'^2 - 4a'c')y^2 + 2(2ca' + 2ac' - bb')^2 + b^2 - 4ac \geqslant 0.$$

Nous devrons donc *toujours supposer* $\varphi(y) \geqslant 0$.

$\varphi(y)$ aura deux racines y', y'' si $(2ca' + 2ac' - bb')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c') > 0$, ou $4R > 0$, $R > 0$; $\varphi(y)$ aurait une racine double si $R = 0$; mais comme $R \neq 0$, $\varphi(y)$ aura 0 ou deux racines en supposant $b'^2 - 4a'c' \neq 0$; quand $\varphi(y)$ aura deux racines y' et y'', je désignerai la plus petite par y'. Si $b'^2 - 4a'c' = 0$, $\varphi(y)$ est du 1er degré et a une seule racine y' ; le coefficient de y ne peut alors être nul, puisque $R \neq 0$.

Quand $\varphi(y)$ est nul, l'équation $F(x) = 0$ admet une racine double. Soient x' et x'' les racines de $F(x)$ qui correspondent à y' et à y'', on aura

$$x' = -\frac{b - b'y'}{2(a - a'y')} = -\frac{2(c - c'y')}{b - b'y'} \qquad \text{puisque} \qquad (b - b'y')^2 - 4(a - a'y')(c - c'y') = 0,$$

d'où

$$\begin{cases} 2x'(a - a'y') = b'y' - b, \\ x'(b'y' - b) = 2(c - c'y'), \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} 2ax' + b = y'(2a'x' + b'), \\ bx' + 2c = y'(b'x' + 2c'). \end{cases}$$

En éliminant y', on obtient $(2ax' + b)(b'x' + 2c') - (2ax' + b)(bx' + 2c) = 0$;
x' est donc racine de l'équation

$$(2ax + b)(b'x + 2c') - (2ax + b)(bx + 2c) = 0, \qquad \text{ou} \qquad (ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + bc' - cb' = 0.$$

On voit de même que x'' est racine de cette équation. x' et x'' sont donc les racines de $\Phi(x) = 0$ en posant
$\Phi(x) \equiv (ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + bc' - cb' \equiv A'x^2 + B'x + C'$ avec $A' = ab' - ba'$; $B' = 2(ac' - ca')$; $C' = bc' - cb'$.

$\Phi(x)$ est du 1er degré si $ab' - ba' = 0$; $\Phi(x)$ est au moins du 1er degré, car on ne peut avoir $ab' - ba' = 0$ en même temps que $ac' - ca' = 0$, puisque $R \neq 0$.

L'équation $\Phi(x) = 0$ a des racines si $(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') > 0$ ou si $R > 0$; le trinome $\varphi(y)$ et le trinome $\Phi(x)$ ont donc le même nombre de racines quand ils sont tous deux du second degré, ce qui était facile à prévoir.

7. Calcul des résultants de $F(x)$, $g(x)$, $\Phi(x)$. — Soit R_1 le résultant de $F(x)$ et $g(x)$; on a

$$R_1 \equiv (Ac' - Ca')^2 - (Ab' - Ba')(Bc' - Cb') \equiv [(a - a'y)c' - (c - c'y(a']^2 - [(a - a'y)b' - (b - b'y)a'][(b - b'y)c' - (c - c'y)b']$$
$$\equiv (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') \equiv R.$$

R_1 est donc identique à R et par suite indépendant de y.

R_2 étant le résultant de $F(x)$ et $\Phi(x)$, on a de même

$$4R_2 \equiv (2AC' + 2CA' - BB')^2 - (B^2 - 4AC)(B'^2 - 4A'C')$$
$$\equiv [2(a - a'y)(bc' - cb') + 2(c - c'y)(ab' - ba') - 2(b - b'y)(ac' - ca')]^2 - \varphi(y)(B'^2 - 4A'C')$$
$$4R_2 = [0]^2 - \varphi(y)4R = -4R\varphi(y) ; \qquad \text{d'où} \qquad R_2 = -R\varphi(y).$$

Enfin, en désignant par R_3 le résultant de $g(x)$ et de $\Phi(x)$, on a

$$4R_3 = (2A'c' + 2C'a' - B'b')^2 - (B'^2 - 4A'C')(b'^2 - 4a'c')$$
$$= [2(ab' - ba')c' + 2(bc' - cb')a' - 2(ac' - ca')b']^2 - 4R(b'^2 - 4a'c') = [0]^2 - 4R(b'^2 - 4a'c') = -4R(b'^2 - 4a'c')$$

d'où

$$R_3 = -R(b'^2 - 4a'c').$$

En résumé on a $R_1 = R$; $R_2 = -R\varphi(y)$; $R_3 = -R(b'^2 - 4a'c')$.

8. Théorème. — *Entre les deux racines de* $F(x)$ *qui correspondent à une valeur donnée* y *de* $\frac{f(x)}{g(x)}$, *il y a* une seule *racine de* $g(x)$ *ou* une seule *racine de* $\Phi(x)$.

En effet, $\varphi(y)$ est positif, d'après ce que nous avons dit ; donc R_1 et R_2 sont de signes différents.

Si $R > 0$, $R_1 > 0$ et $R_2 < 0$; R_1 étant > 0, entre les racines de $F(x)$ il y a 0 ou 2 racines de $g(x)$; R_2 étant négatif, il y a *une seule* racine de $\Phi(x)$ entre celles de $F(x)$. Si $R < 0$, on a $R_1 < 0$ et $R_2 > 0$; entre les racines de $F(x)$ il y a *une seule* racine de $g(x)$ puisque $R_1 < 0$; entre les racines de $F(x)$ il y a 0 ou 2 racines de $\Phi(x)$.

9. Théorème. — *Si $g(x)$ et $\Phi(x)$ ont des racines, entre deux racines de l'un de ces polynomes il y une seule racine de l'autre, ou bien ils ont une racine commune.*

L'un au moins des deux polynomes $g(x)$, $\Phi(x)$ est du second degré, puisque l'on ne peut avoir à la fois $a' = 0$ et $ab' - ba' = 0$. On suppose aussi $R \neq 0$.

1° Si $g(x)$ et $\Phi(x)$ ont chacun deux racines, on a $R > 0$, $b'^2 - 4a'c' > 0$ et par conséquent $R_3 < 0$, ce qui exprime qu'entre les deux racines de l'un des polynomes il y a une seule racine de l'autre.

2° Si $g(x)$ étant du second degré a deux racines égales $\alpha' = \beta' = -\dfrac{b'}{2a'}$, $b'^2 - 4a'c' = 0$; $R_3 = 0$ et $\Phi(x)$ et $g(x)$ ont la racine commune β', ce qu'on vérifie directement sans difficulté.

3° Si $a' = 0$, $ab' - ba'$ n'est pas nul ; $R_3 = -Rb'^2$; $\Phi(x)$ n'a de racines que si $R > 0$, mais alors $R_3 < 0$ et par conséquent la racine $\beta' = -\dfrac{c'}{b'}$ de $g(x)$ est entre les racines de $\Phi(x)$.

4° Si $ab' - ba' = 0$, a' n'est pas nul ; $R > 0$; $g(x)$ n'a de racines que si $b'^2 - 4a'c' > 0$; mais alors $R_3 < 0$, ce qui exprime que la racine $\gamma' = \dfrac{bc' - cb'}{2(ca' - ac')}$ de $\Phi(x)$ est comprise entre celles de $g(x)$.

Si $g(x)$ n'a pas de racine, $b'^2 - 4a'c' < 0$, et par suite $R > 0$; donc $\Phi(x)$ admet alors 2 racines inégales. $\Phi(x)$ ne peut d'ailleurs avoir 2 racines égales, puisque nous supposons $R \neq 0$.

10. Théorème. — *Si on range par ordre de grandeur croissante les racines de $g(x)$ et celles de $f(x)$, la fraction* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *ne prend jamais deux fois la même valeur dans l'un des intervalles obtenus*, car si $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ prenait deux fois une valeur donnée y dans l'un de ces intervalles, l'équation $F(x)$ aurait deux racines dans l'intervalle considéré, et entre ces deux racines de $F(x)$ il n'y aurait pas (contrairement au Th. 8) une racine de $g(x)$ ou de $\Phi(x)$.

11. Théorème. — *x_1 et x_3 étant compris dans un intervalle ne renfermant aucune racine de $g(x)$ ou de $\Phi(x)$, y_1 et y_3 désignant les valeurs correspondantes de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, à toute valeur y_2 comprise entre y_1 et y_3 correspond une seule valeur de x comprise entre x_1 et x_3.*

Je considère le trinome $F(x) = f(x) - y_2 g(x)$. J'ai par hypothèse

$$y_1 = \frac{f(x_1)}{g(x_1)} \quad \text{ou} \quad f(x_1) = y_1 g(x_1) \qquad \text{et} \qquad y_3 = \frac{f(x_3)}{g(x_3)} \quad \text{ou} \quad f(x_3) = y_3 g(x_3) \,;$$

de plus $g(x_1)$ et $g(x_3)$ ont par hypothèse le même signe puisqu'il n'y a pas de racine de $g(x)$ entre x_1 et x_3. J'aurai ensuite

$$F(x_1) = f(x_1) - y_2 g(x_1) = y_1 g(x_1) - y_2 g(x_1) = (y_1 - y_2) g(x_1) \,; \qquad F(x_3) = f(x_3) - y_2 g(x_3) = y_3 g(x_3) - y_2 g(x_3) = (y_3 - y_2) g(x_3).$$

$y_1 - y_2$ et $y_3 - y_2$ sont de signes différents par hypothèse, tandis que $g(x_1)$ et $g(x_3)$ ont le même signe ; donc $F(x_1)$ et $F(x_3)$ ont des signes différents, ce qui prouve que $F(x)$ a une *seule* racine x_2 entre x_1 et x_3 :

$$0 = F(x_2) = f(x_2) - y_2 g(x_2), \qquad \text{d'où} \qquad \frac{f(x_2)}{g(x_2)} = y_2.$$

A y_2 correspond donc une seule valeur de x comprise entre x_1 et x_3.

Réciproquement : *x_1, x_2, x_3 étant compris dans un intervalle ne renfermant aucune racine de $g(x)$ ou de $\Phi(x)$, les valeurs correspondantes de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ étant y_1, y_2, y_3, si on suppose x_2 compris entre x_1 et x_3, y_2 sera compris entre y_1 et y_3.*

Je suppose pour préciser $x_1 < x_2 < x_3$; je dis que y_2 sera compris entre y_1 et y_3, car si y_2 n'était pas compris entre y_1 et y_3, on aurait $y_2 < y_1 < y_3$ ou $y_1 < y_3 < y_2$, ou $y_2 < y_3 < y_1$ ou $y_3 < y_1 < y_2$; dans le premier cas par exemple, puisque la fonction ne peut dans l'intervalle considéré prendre qu'une fois la valeur y_1, x_1 serait compris entre x_2 et x_3, ce qui est contre l'hypothèse ; de même, si $y_1 < y_3 < y_2$, x_3 serait compris entre x_1 et x_2, etc.

Donc y_2 est compris entre y_1 et y_3.

Corollaire. — *La fonction $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est continue dans tout intervalle ne renfermant aucune racine de $g(x)$ ou de $\Phi(x)$.*

12. Théorème. — *La fonction $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est constamment croissante ou constamment décroissante dans tout intervalle ne renfermant aucune racine de $g(x)$ ou de $\Phi(x)$.*

Car si x_1, x_2, x_3, x_4, ... appartiennent à un tel intervalle et si $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \ldots$, on aura $y_1 < y_2 < y_3 < y_4 \ldots$ ou $y_1 > y_2 > y_3 > y_4 \ldots$; dans le premier cas $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est croissante ; dans le second elle est décroissante.

Ce théorème ramène l'étude de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ à celle des racines de $g(x)$ et de $\Phi(x)$.

(La fin au prochain numéro.)

(La fin au prochain numéro.)

CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (1899)

Physique (Paris)

Solution de M. **F. Pouget**, élève du lycée Louis-le-Grand, lauréat du concours (1er prix).

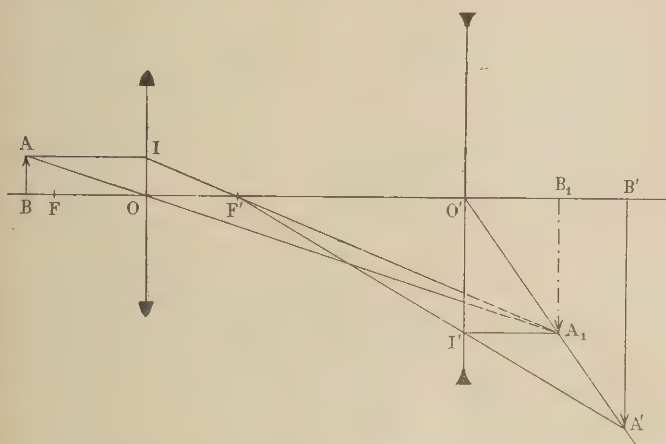
4680. — *Deux lentilles, l'une convergente de foyer $f = 10^{mm}$, l'autre divergente de foyer $f' = 25^{mm}$, sont montées aux extrémités d'un même tube, de manière que leurs axes coïncident et que leurs centres soient à une distance fixe de 35^{mm}.*

On voudrait, au moyen de ce système, projeter sur un écran l'image réelle d'un petit objet, de manière que le grossissement linéaire fût de 100.

A quelle distance faut-il placer l'objet, à quelle distance l'écran? On expliquera sur une figure la marche des rayons.

On voit facilement que le seul cas possible, étant donné l'énoncé, est le cas représenté par la figure.

Représentons l'objet par une petite droite AB. Son image par rapport à la lentille O serait B_1A_1 sans l'interposition de la lentille divergente O'.



B_1A_1 joue le rôle d'objet virtuel par rapport à la lentille O' et la construction ordinaire donne l'image B'A' réelle, renversée.

Désignons OB par p, OB_1 par p', $O'B_1$ par π, $O'B'$ par π'.

Les triangles semblables IOF' et A_1B_1F', $F'O'I'$ et $F'B'A'$ donnent

$$\frac{OI}{A_1B_1} \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{10}{25+\pi},$$

$$\frac{O'I'}{A'B'} \quad \text{ou} \quad \frac{A_1B_1}{A'B'} = \frac{25}{25+\pi'},$$

d'où
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{250}{(25+\pi)(25+\pi')}.$$

Or il faut que $A'B' = 100\,AB$. On a donc

$$25\,000 = (25+\pi)(25+\pi'). \qquad (1)$$

Appliquons la formule des lentilles à la lentille divergente O', nous aurons

$$\frac{1}{\pi'} - \frac{1}{\pi} = -\frac{1}{25},$$

d'où
$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{25} + \frac{1}{\pi'}, \qquad \text{et} \qquad \pi = \frac{25\pi'}{25+\pi'}.$$

En remplaçant dans (1), nous aurons

$$25\,000 = \left(25 + \frac{25\pi'}{25+\pi'}\right)(25+\pi') = 25 \times 25 + 50\pi',$$

d'où
$$1\,000 = 25 + 2\pi',$$

ce qui donne
$$\pi' = \frac{1000-25}{2} = 487^{mm},5.$$

Pour calculer p, remarquons que les triangles semblables donnent

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{p}{p'} = \frac{p}{35+\pi}, \qquad \frac{A_1B_1}{A'B'} = \frac{\pi}{\pi'},$$

d'où
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{\pi p}{(35+\pi)\pi'}.$$

Or
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{100};$$

on a donc
$$100\pi p = (35+\pi)\pi',$$

d'où

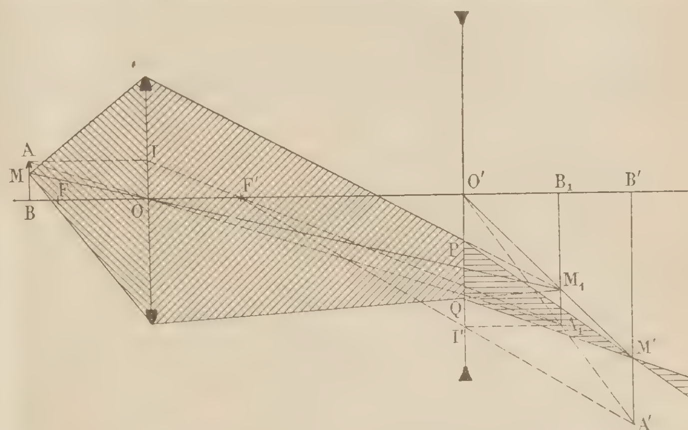
$$p = \frac{(35+\pi)\pi'}{100\pi} = \frac{\left(35 + \frac{25\pi'}{25+\pi'}\right)\pi'}{100 \times \frac{25\pi'}{25+\pi'}} = \frac{25 \times 35 + 60\pi'}{25 \times 100}$$

$$= \frac{5 \times 35 + 12\pi'}{500},$$

ou, en remplaçant π' par sa valeur 487,5,

$$p = \frac{175 + 12 \times 487,5}{500} = 12^{mm},05.$$

Marche des rayons. — Considérons un point M pris sur AB. Les rayons partant de M et frappant la lentille forment un cône ayant pour sommet M et pour base la surface de O. Ces rayons se réfractent et forment un cône de rayons réfractés de même



base que le précédent et ayant pour sommet le conjugué M_1 de M par rapport à O. Ce cône découpe sur O' une surface PQ. Enfin les rayons qui se réfractent à travers O' forment un cône de sommet M' conjugué de M_1 par rapport à O', et de base PQ.

De même que l'ensemble de points tels que M forme AB, de même un ensemble de points tels que M' forme A'B'.

[Ont résolu la même question : Mlle R. Campana ; MM. A. Croze ; Duvergé ; H. Lefèvre ; G. Luquet ; A. Pequignot.]

ARITHMÉTIQUE

4757. — *Démontrer que le produit de trois nombres entiers consécutifs n'est jamais le double d'un carré.*

Si l'on a
$$a(a+1)(a+2) = 2k^2,$$
on a aussi
$$2a(a+1)(a+2) = (2k)^2, \qquad (1)$$
et *vice versa*.

Or, tout facteur premier p contenu dans a et autre que 2 ne peut se trouver ni dans $a+1$, ni dans $a+2$, car un tel facteur diviserait l'une des différences

$$(a+1) - a = 1 \qquad \text{et} \qquad (a+2) - a = 2,$$

ce qui est impossible, puisque $p > 2$. Le même raisonnement s'applique aussi bien à $a+1$ et $a+2$.

Pour que l'égalité (1) soit possible, il faut donc que chacun des nombres a, $a+1$, $a+2$ renferme au carré tout facteur premier p autre que 2.

Si a est impair, cette condition exige que les nombres impairs a et $a+2$ soient des carrés parfaits, ce qui est impossible, deux carrés parfaits ayant une différence au moins égale à 3.

Si a est pair, le nombre $a+1$ est impair et le nombre $a+2$ pair. Par suite $a+1$ devrait être carré parfait, ainsi que celui des nombres a et $a+2$ où 2 figure avec un exposant pair (ce nombre existe toujours, puisque le facteur 2 figure dans $a+2$ une fois seulement de plus que dans a). Cette dernière hypothèse est également impossible, deux nombres consécutifs ne pouvant être à la fois carrés parfaits.

[Ont résolu la même question : MM. F. Vérot ; J. Maire ; Mougin.]

ALGÈBRE

4758. — *Résoudre le système d'équations*

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = a^4, \qquad (1)$$

$$x^2 + xy + y^2 = 1. \qquad (2)$$

Condition de possibilité et nombre de solutions.

L'équation (1) peut s'écrire

$$(x^2+y^2)^2 - x^2y^2 = a^4,$$

ou

$$(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy) = a^4,$$

ou, en tenant compte de (2),

$$x^2+y^2-xy = a^4. \qquad (3)$$

Des équations (2) et (3), on déduit, par addition et soustraction,

$$x^2+y^2 = \frac{1+a^4}{2}, \qquad 2xy = 1-a^4;$$

puis en répétant les mêmes opérations,

$$(x+y)^2 = \frac{3-a^4}{2}, \qquad (x-y)^2 = \frac{3a^4-1}{2};$$

d'où

$$x+y = \pm\sqrt{\frac{3-a^4}{2}}, \qquad x-y = \pm\sqrt{\frac{3a^4-1}{2}}.$$

Ces valeurs devant être réelles, on doit avoir

$$\frac{1}{3} < a^4 < 3.$$

En désignant alors par α et β les valeurs arithmétiques des deux radicaux, on est ramené à l'un des quatre systèmes du premier degré :

$$\left.\begin{matrix} x+y=\alpha \\ x-y=\beta \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x+y=\alpha \\ x-y=-\beta \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x+y=-\alpha \\ x-y=\beta \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x+y=-\alpha \\ x-y=-\beta \end{matrix}\right\}$$

Ces systèmes fournissent quatre solutions du système proposé ; deux de ces solutions se déduisent des deux autres en permutant x et y, ce qui tient à ce que le système donné est symétrique par rapport à x et y.

(P. THONET, athénée royal d'Anvers.)

[Ont résolu la même question : Mlle E. Lazare ; MM. J. Arnaud ; R. Barthélemy ; C. Billionnet ; Cognet ; Y. Collin ; H. Damoiseau ; H. Duchesne ; M. Gondran ; A. Gouiraud ; J. Haag , E. Horeau ; A. Huet ; Hugonnier-Ginet ; H. Lefèvre ; D. Lwow ; C. Mayer ; A. Meynier ; A. Neef ; H. Pitrat ; Portalier ; P. Rivière ; A. de Saint-Gabriel ; Sinoquel ; D. Tuïssuzian ; Vannier ; M. Vigier ; Lalescu.]

GÉOMÉTRIE

4747. — *On donne quatre points fixes* A, B, C, D *sur un cercle de centre* O ; *par* A *et* B *on fait passer un cercle quelconque de centre* ω, *puis par* C *et* D *un second cercle de centre* ω' *et tangent au cercle* ω.

On demande de déterminer :

1° *le lieu du point de contact des cercles* ω *et* ω' ;

2° *le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de* O *sur* ωω'. *Ce dernier lieu n'est pas une conique.*

1° Soit M le point de contact des cercles ω et ω', tangents intérieurement ou extérieurement en M.

Si l'on prolonge les cordes AB, DC jusqu'à leur rencontre en P, on a

$$PA.PB = PC.PD ;$$

donc le point P est d'égale puissance par rapport aux cercles ω, ω' et par suite appartient à l'axe radical de ces cercles, représenté ici par la tangente commune en M. On a alors

$$\overline{PM}^2 = PA.PB,$$

d'où l'on conclut que le lieu de M est un cercle de centre P et de rayon $\sqrt{PA.PB}$, si AB et CD se coupent hors du cercle O. Tout point de ce cercle fait visiblement partie du lieu.

2° La ligne des centres ωω' étant perpendiculaire à PM ou tangente au cercle P, on est ramené à chercher le lieu du pied H de la perpendiculaire abaissée de O sur une tangente quelconque au cercle P (Podaire d'un cercle).

Nous allons montrer que cette podaire d'un cercle se confond avec la courbe bien connue appelée *limaçon* de Pascal. En effet, en menant par P une parallèle à MH qui coupe OH en I, on obtient le rectangle MHIP dans lequel HI = MP et $\widehat{HIP}$ = 1 dr. Donc, lorsque I décrit le cercle de diamètre OP, le point H de la corde OI étant à une distance constante de I engendre un limaçon de Pascal tangent en A et B au cercle P et admettant O comme point double lorsque ce point est extérieur au cercle P.

(AUGUSTE TÉTAIRE, collège Chaptal.)

Remarque. — On peut distinguer sur le lieu de M les points qui correspondent à deux cercles extérieurs de ceux qui correspondent à des cercles dont l'un est intérieur à l'autre. En effet, pour que les cercles soient extérieurs, il faut et il suffit que PM passe entre les segments AB et CD, c'est-à-dire que M soit dans l'angle BPC ou l'angle opposé par le sommet.

[Ont résolu complètement la question : MM. P. Besseige ; J. Cabrol ; J. Chapron ; Duvergé et Sainte-Laguë ; Jacquet ; D. Lwow ; H. Pitrat ; A. Amblard ; G. Armaingaud ; H. Baroux ; G. Foucry ; H. Lefèvre ; A. Legros ; E. Ménissier ; F. Michaux ; L. Ollié ; E. Rauber ; Sautreau.]

MM. F. Clabault et L. Marot ont résolu partiellement la question.

4754. — *Un quadrilatère fixe inscrit dans un cercle* O *a ses diagonales* AC, BD *rectangulaires. Par le point de concours des diagonales on mène deux droites rectangulaires variables* Δ *et* Δ' :

1° *Soient* A'C' *la projection de* AC *sur* Δ, B'D' *la projection de* BD *sur* Δ'. *Prouver que le quadrilatère* A'B'C'D' *est inscriptible dans un cercle* O'.

2° *Trouver le lieu du centre du cercle* O′.

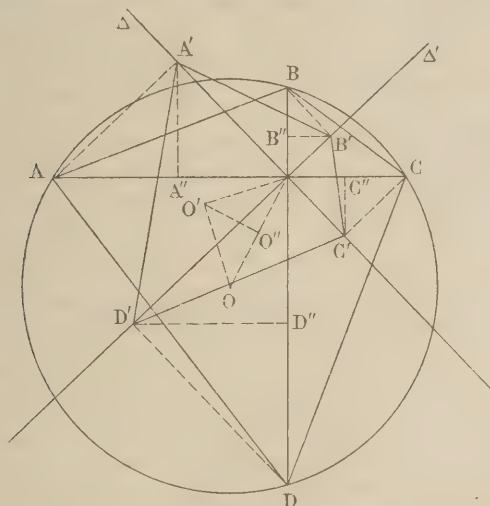
3° *Si* A″C″ *est la projection de* A′C′ *sur* AC *et* B″D″ *la projection de* B′C′ *sur* BC, *le quadrilatère* A″B″C″D″ *est inscriptible dans un cercle* O″ *dont on demande le lieu du centre.*

4° *Trouver une relation entre les rayons des trois cercles* O, O′, O″.

1° Les angles aigus APA′, BPB′ ayant les côtés perpendiculaires sont égaux ; par suite, les triangles rectangles APA′, BPB′ sont semblables et donnent

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{PB}{PB'},$$

ce qui établit la similitude des triangles rectangles PAB, PA′B′. Par analogie, les triangles PBC et PB′C′, PCD et PC′D′, PDA



et PD′A′ sont également semblables. Les deux quadrilatères ABCD, A′B′C′D′ sont donc semblables comme composés de triangles semblables et semblablement placés ; comme le premier quadrilatère est inscriptible, il en est de même du second.

2° Les triangles homologues POA, PO′A′ étant semblables, on en conclut la similitude des triangles POO′ et PAA′, d'où il résulte que l'angle PO′O est égal à l'angle droit PA′A. Le lieu du point O′ est donc un cercle de diamètre OP ; la droite PO′ pouvant occuper une position quelconque autour de P, tous les points du cercle font partie du lieu.

3° Le quadrilatère A″B″C″D″ joue par rapport au quadrilatère A′B′C′D′ le même rôle que le quadrilatère A′B′C′D′ relativement au quadrilatère ABCD; il est donc semblable au quadrilatère A′B′C′D′, c'est-à-dire inscriptible comme lui dans un cercle O″. D'ailleurs les quadrilatères semblables A″B″C″D″ et ABCD ayant leurs sommets homologues sur des droites concourant en P, sont homothétiques par rapport à P, de sorte que la droite OO″ passe par P. En outre, l'angle PO″O′ étant droit comme son analogue PO′O, le lieu du centre O″ se trouve limité au segment de droite OP.

4° Les rayons R, R′, R″ étant respectivement proportionnels aux droites homologues PO, PO′, PO″, on a

$$\frac{R}{PO} = \frac{R'}{PO'} = \frac{R''}{PO''}.$$

Or dans le triangle rectangle POO′, la hauteur O′O″ donne

$$\overline{OP'}^2 = OP.OP'' ;$$

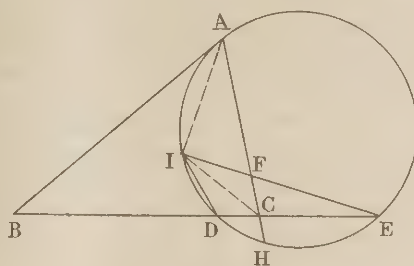
la relation demandée est donc $R'^2 = RR''$.

(Paul THONET, athénée royal d'Anvers.)

[Ont résolu complètement la même question ; MM. Baroux ; Bouvaist ; Clabault ; C. Durand ; Duvergé ; Foucry ; Haag ; A. Larue ; Lehmann ; Lwow ; G. Marcellin; Pendariès ; Pequignot ; Rauber; H. Rimbaud ; Sainte-Laguë ; Troin.
Ont résolu partiellement la question ; MM. d'Amphernet; Hebré; Noël ; Oprescu ; Petit ; Sinoquet.]

4762. — *Par le sommet* A *d'un triangle et le centre* I *du cercle inscrit, on fait passer un cercle tangent à* AB. *Démontrer que, lorsque ce cercle coupe* BC *en deux points* D, E, *la droite* IC *est bissectrice de l'angle* DIE.

Soit F le point de rencontre de AC et IE. On a



$$\widehat{DIC} = \widehat{BDI} - \frac{\widehat{ACB}}{2},$$

$$\widehat{CIE} = \widehat{IFA} - \frac{\widehat{ACB}}{2}.$$

Tout revient donc à établir l'égalité des angles BDI et IFA, ou, en remplaçant ces angles par leurs mesures,

$$\frac{\widehat{IDE}}{2} = \frac{\widehat{AI} + \widehat{HE}}{2}.$$

Or la droite AI étant bissectrice de l'angle inscrit BAH, on a

$$\widehat{AI} = \widehat{IH} \quad \text{ou} \quad \widehat{IDE} - \widehat{HE},$$

égalité qui se ramène à la précédente.

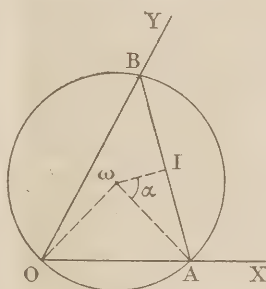
(J. HAAG, collège de Pont-à-Mousson.)

Remarque. — La propriété subsiste lorsque I est le centre d'un des cercles exinscrits du triangle ABC.

[Ont résolu la même question : Mlle M. D. P. : MM. G. Amouroux ; d'Amphernet ; J. Arnaud : H. Baroux ; R. Barthélemy : H. Blanc ; R. Bouvaist : E. Chaineau ; F. Clabault : G. Foucry : G. A., lycée de Nîmes ; M. Gondran ; R. Henry ; E. Horeau ; H. Janois : A. Lecoutour ; H. Lefèvre : A. Le Moal ; D. Lwow ; G. Marcellin ; P. Marion ; B. Mathé : C. Mayer ; A. Meynier ; A. Neef : Noël ; R. Orry ; P. E., à Bonneval : G. de Parseval ; L. Patin : R. Pancot : C. Passeron : P. Petit ; P. Pille ; H. Pitrat : Portalier : E. Rauber : P. Ribaroff : P. Rivière : M. Royer ; Sinoquet ; Touton : E. Trégner : D. Tuïssuzian ; P. Valentin : P. Zlatco ; Lalescu ; L. Ollié ; J. Germa : A. Renault.]

4763. — *Une droite mobile* AB, *de longueur constante, s'appuie par ses deux extrémités sur deux droites fixes* OX *et* OY. *Lieux du centre du cercle circonscrit au triangle* OAB *et du point de concours des hauteurs. Démontrer que la droite joignant les pieds des deux hauteurs issues de* A *et* B *a une longueur constante.*

Soit ω le centre du cercle circonscrit au triangle OAB. Le demi-angle au centre AωI est égal à l'angle inscrit $AOB = \alpha$; donc



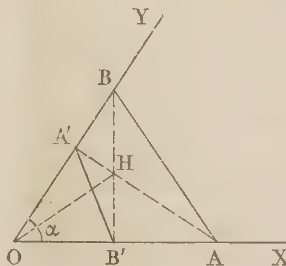
$$AB = 2\omega A \sin\alpha,$$

d'où $\omega O = \dfrac{AB}{2\sin\alpha} = \text{const.}$

Le lieu de ω est donc un cercle de centre O.

Traçons les deux hauteurs AA′, BB′, qui se coupent au point de concours H des hauteurs.

Le quadrilatère ABA′B′ étant inscriptible, le triangle OA′B′ est semblable au triangle OAB ; donc



$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = \cos\alpha,$$

ou $A'B' = AB\cos\alpha = \text{const.}$

D'ailleurs le cercle circonscrit à OA′B′ ayant pour diamètre OH, on a

$$OH = \frac{A'B'}{\sin\alpha} = AB \operatorname{cotg}\alpha,$$

ce qui montre que le lieu de H est un cercle de centre O.

Les cercles lieux de ω et H ne sont entièrement décrits que

si l'on considère les droites OX, OY comme indéfinies ; dans le cas contraire, les arcs utiles sont compris dans l'angle XOY.

(M. REBEIX, lycée du Puy.)

[Ont résolu la même question : Mlle E. Lazare ; MM. A. Aubert ; H. Baroux ; R. Barthélemy ; H. Blanc ; R. Bouvaist ; F. Clabaut ; Y. Collin ; G. Foucry ; G. A., lycée de Nîmes ; M. Gondran ; J. Haag ; R. Henry ; H. Janois ; Lalescu ; A. Larue ; A. Lecoutour ; H. Lefèvre ; P. Le Verrier ; D. Lwow ; Mongin ; A. Neef ; Noël ; L. Ollié ; Ch. des Pallières ; P. Petit ; H. Pitrat ; Portalier ; E. Rauber ; H. Rimbaud ; G. Sinoquet ; D. Tuïssuzian ; Valentin ; P. Valentin ; Vannier.]

PHYSIQUE

4764. — *On donne un siphon constitué par un tube deux fois recourbé à angle droit. Le siphon est complètement rempli d'huile. L'extrémité de la grande branche plonge dans un vase rempli d'huile et l'extrémité de la petite branche dans un vase rempli de mercure. L'appareil étant abandonné à lui-même, que va-t-il se passer ? On appellera* L *la longueur de la grande branche,* l *la longueur de la petite branche,* D *la densité du mercure,* d *la densité de l'huile, et on traitera le problème pour les valeurs suivantes :*

1° $\quad L = 4^m \quad$ *et* $\quad l = 0^m,50$;

2° $\quad L = 9^m \quad$ *et* $\quad l = 0^m,50$;

3° $\quad L = 13^m \quad$ *et* $\quad l = 1^m$.

On donne $D = 13,6$, $d = 0,9$. *La pression atmosphérique est* $H = 0^m,75$ *de mercure. On suppose que le niveau du mercure et le niveau de l'huile sont maintenus constants dans les deux vases.*

Admettons pour un instant qu'il existe dans la partie horizontale du siphon, en C, une petite cloison solide. Chaque unité de surface de cette cloison est soumise à deux pressions, f et f', dirigées en sens contraires. La pression f a pour valeur $H - \frac{ld}{D}$; et la pression f', $H - \frac{Ld}{D}$. Mais $\frac{ld}{D} < \frac{Ld}{D}$. La pression f est donc plus grande que la pression f', et si nous supprimons la cloison C, l'huile s'écoulera dans le sens de la pression f.

Le vide tend à se produire et le mercure accompagne l'huile, c'est-à-dire que le mercure s'élève peu à peu dans la petite branche du siphon. La pression f diminue et finit par devenir égale à f'.

Appelons x la distance du niveau du mercure dans la petite branche au niveau du mercure dans la cuvette où elle plonge. La pression f est devenue

$$f = H - \left[(l - x)\frac{d}{D} + x\right].$$

Écrivons que $f = f'$; il vient

$$H - \left[(l - x)\frac{d}{D} + x\right] = H - L\frac{d}{D},$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{(L - l)d}{D - d}.$$

Pour qu'il y ait équilibre, il faut que l'on ait

$$x < l, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad l > \frac{Ld}{D}.$$

1° Dans le premier système de valeurs attribuées à L et l, la condition est satisfaite. Le mercure s'élèvera à une hauteur de

$$x = \frac{3,5 \times 0,9}{12,7} = 24^{cm},8$$

et il y aura équilibre.

2° Dans le second système de valeurs, la condition imposée à l n'est pas satisfaite et la valeur obtenue pour x est $60^{cm},2$. Le mercure s'écoule.

3° Enfin, pour $L = 13^m$ et $l = 1^m$, on trouve pour x une valeur supérieure à 75^{cm}, ce qui est impossible.

La hauteur L est d'ailleurs, dans ce cas, plus grande que la hauteur de la colonne d'huile qui mesure la pression atmosphérique :

$$75 \times \frac{D}{d} = 1133^{cm}.$$

Dans la grande branche, l'huile s'élèvera à $11^m,33$. D'un autre côté, $l > 75^{cm}$. Le mercure s'élèvera à une hauteur y telle que l'on ait

$$13,6\,y + (1 - y)0,9 = 0,75 \times 13,6,$$

d'où

$$y = 73^{cm},2.$$

Le reste de la petite branche sera occupé par de l'huile, et dans la grande branche il y aura le vide au-dessus de l'huile ainsi que dans le coude du siphon.

(H. BLANC, lycée de Clermont.)

[Ont résolu la même question : Mlle A. Bertagna ; MM. A. Ageron ; M. B.. à V. ; C. Billionnet ; J. Chemineau ; L. Curt ; H. Damoiseau ; P. E.. à Bonneval ; A. de Saint-Gabriel ; M. Gondran ; A. Gouirand ; J. Haag ; J. Hébré ; H. Janois ; de Jarry ; A. Lecoutour ; H. Lefèvre ; E. Liger ; David Lwow ; G. Louys ; B. Mathé ; M. Marx ; A. Meynier ; R. Paucot ; P. Pille ; M. Royer ; R. Simon ; P. Valentin ; L. Vige ; J. Fiorellino ; R. Henry ; J. Jarrier ; Mongin ; A. Pequignot.]

QUESTIONS PROPOSÉES

4773. — n étant un nombre quelconque, l'expression

$$7^{2n+1} + 6^{n+2}$$

est divisible par 43.

Généraliser cette question en montrant que l'expression

$$(k+1)^{2n+1} + k^{n+2}$$

est toujours, n étant entier, divisible par $k^2 + k + 1$.

(H. Pitrat, à Givors.)

4774. — Former l'équation générale du 4° degré dont les racines sont en progression arithmétique de raison r.

4775. — Soient α et β deux arcs, d'extrémités différentes, vérifiant l'équation

$$a\cos x + b\sin x = c.$$

Calculer $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha + \beta)$ et $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

4776. — Trouver dans le plan d'un triangle le point tel que la somme de ses distances aux trois sommets du triangle soit minimum (solution géométrique).

(J. Moisson.)

4777. — Étant donnés trois segments AA', BB', CC' dans un plan, construire un cercle qui les divise harmoniquement tous les trois.

4778. — Trouver les plans équidistants des quatre sommets d'un tétraèdre donné ABCD.

4779. — Soit ABC un triangle, soit A'B'C' le triangle formé par les points de contact des côtés avec le cercle inscrit ; si on appelle α, β, γ les côtés de A'B'C', a, b, c ceux de ABC, $2p$ le périmètre de ce dernier triangle, on a

$$\frac{\alpha^2}{a(p-a)} = \frac{\beta^2}{b(p-b)} = \frac{\gamma^2}{c(p-c)}.$$

(C. Blanc, à Lyon.)

4780. — Dans une cloche en verre graduée à 0°, pleine de mercure et reposant sur la cuve à mercure, on introduit $0^{gr},75$ d'éther liquide. La température de la cloche étant portée à 80°, tout le liquide se vaporise et le volume occupé par la vapeur est de $366^{cc},48$; le mercure s'élève dans la cloche à une hauteur de $152^{mm},16$. La pression extérieure ramenée à 0° est 750mm. Quelle est à cette température la densité de la vapeur d'éther, par rapport à l'air ?

On prendra 0,0000276 pour le coefficient de dilatation cubique du verre, 0,00018 pour celui du mercure, et 0,00367 pour celui des gaz.

(*Bacc. lettres-math., Lille, Juillet 1899.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Directeur.

24e Année. — N° 14. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 15 Avril 1900.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.

Abonnements.. Librairie Nony et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

ÉTUDE DE LA FRACTION RATIONNELLE DU SECOND DEGRÉ $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$,

par M. **Veyssière**, professeur au lycée de Poitiers *(Fin)*.

Étude des variations de $\frac{f(x)}{g(x)}$.

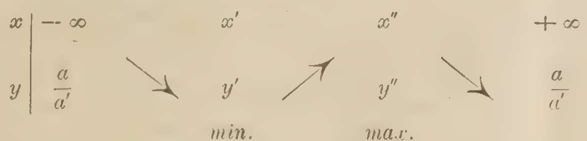
I. — Supposons d'abord $g(x)$ du second degré, $a' \neq 0$.

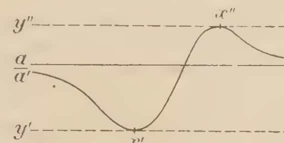
Nous allons distinguer trois cas, selon le nombre des racines de $g(x)$.

1er **Cas** : $b^2 - 4a'c' < 0$. $g(x)$ n'a pas de racine ; la fonction $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ est définie pour toute valeur de x.

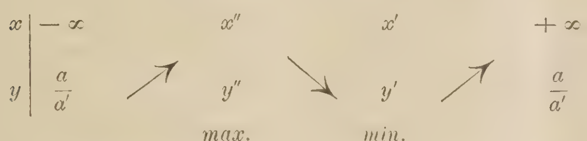
$b'^2 - 4a'c' < 0$ a pour conséquence $R > 0$ (n° 2) ; $\varphi(y)$ a deux racines y' et y'', et on doit avoir pour que $\varphi(y) > 0$ $y' \leqslant y \leqslant y''$. Ce cas se subdivise en deux autres.

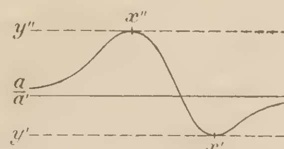
1° $ab' - ba' \neq 0$; $\Phi(x)$ est du second degré, et puisque $R > 0$, $\Phi(x)$ a deux racines x' et x'' correspondant respectivement à y' et y''. En outre $\varphi\left(\frac{a}{a'}\right) = \left(b - \frac{ab'}{a'}\right)^2 = \left(\frac{ab' - ba'}{a'}\right)^2 > 0$; $\varphi\left(\frac{a}{a'}\right)$ est de signe contraire au premier terme de $\varphi(y)$, et $\frac{a}{a'}$ est compris entre y' et y''. Remarquons enfin que pour x très grand en valeur absolue, y est très voisin de $\frac{a}{a'}$. Nous aurons donc l'une des dispositions suivantes :





ou

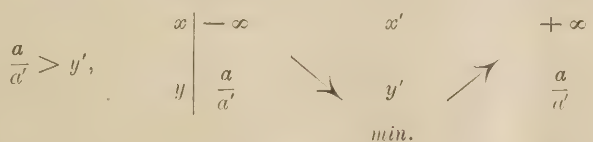


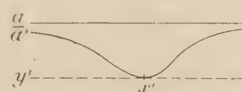


On voit que y' est un minimum et y'' un maximum de la fonction. Les courbes représentatives se déduisent immédiatement des tableaux de variation.

2° $ab' - ba' = 0$; $\varphi(y)$ admet la racine $\frac{a}{a'}$, et $\Phi(x)$ se réduit au premier degré et admet une seule racine x' correspondant à la racine y' de $\varphi(y)$ autre que $\frac{a}{a'}$. Nous aurons l'un des tableaux de variation, suivant que $\frac{a}{a'}$ est supérieur ou inférieur à y' :

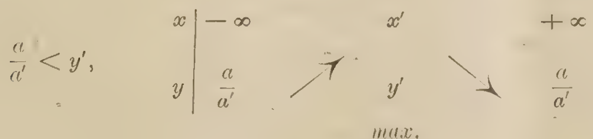
$\frac{a}{a'} > y'$,

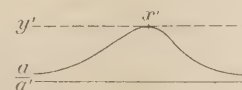




ou

$\frac{a}{a'} < y'$,



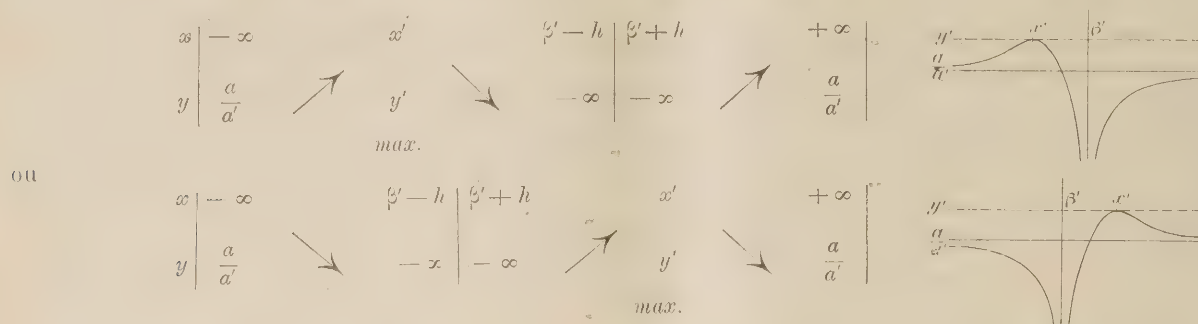


La fonction $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ est comprise entre $\frac{a}{a'}$ et y', qui est un maximum si $y' > \frac{a}{a'}$, un minimum si $y' < \frac{a}{a'}$.

2e Cas : $b'^2 - 4a'c' = 0$. $g(x)$ admet la racine double $\alpha' = \beta' = -\dfrac{b'}{2a'}$; $\Phi(x)$ admet aussi cette racine : $\Phi(x)$ est du second degré et admet une autre racine si $ab' - ba' \neq 0$.

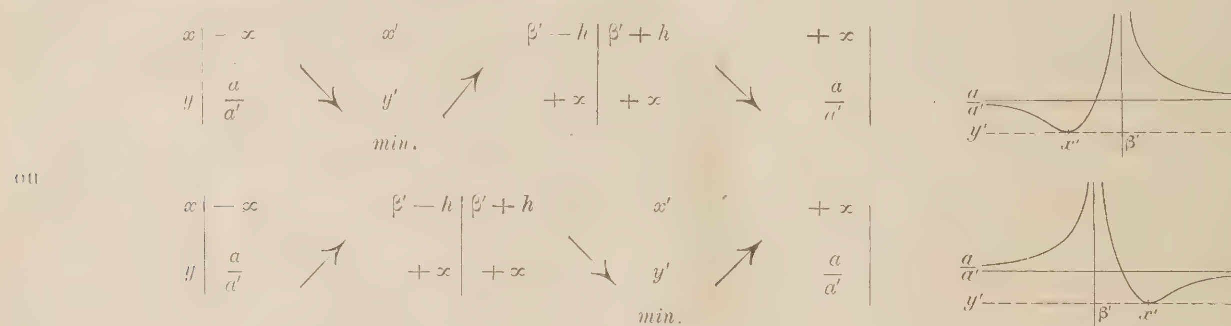
$\varphi(y)$ est du premier degré et admet la seule racine y' ; on aura $y \geqslant y'$ si le coefficient de y est > 0 ; $y \leqslant y'$ dans le cas contraire. Nous avons à distinguer suivant que $ab' - ba'$ est nul ou non.

1° $ab' - ba' \neq 0$. $\Phi(x)$ admet la racine β' et une autre racine x'. $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est définie dans les intervalles $(-\infty,\ \beta' - h)$, $(\beta' + h,\ \infty)$, h étant aussi petit que l'on voudra ; et on a l'une des dispositions suivantes en supposant $y \leqslant y'$:

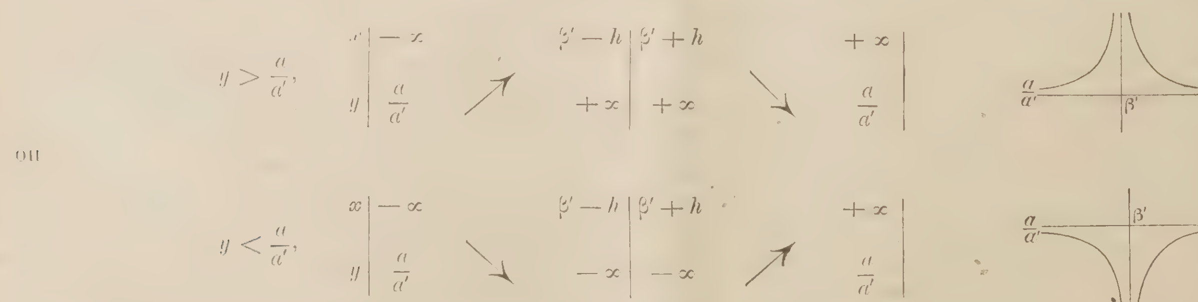


Pour obtenir ces tableaux, il suffit de remarquer que : 1° $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ prend une fois la valeur $\dfrac{a}{a'}$ pour une valeur bien déterminée de x, et que par suite $\dfrac{a}{a'} < y'$; 2° que $g(x) = 0$, si $x = \beta'$, et que pour $x = \beta' \pm h$, $g(x)$ a une valeur très petite ; par suite $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ a pour $x = \beta' \pm h$ des valeurs absolues très grandes ; $\dfrac{f(\beta' - h)}{g(\beta' - h)}$ et $\dfrac{f(\beta' + h)}{g(\beta' + h)}$ ont le même signe, puisque $g(\beta' - h) = g(\beta' + h)$, $f(\beta' - h)$ et $f(\beta' + h)$ ayant le même signe et des valeurs sensiblement égales. On a donc $\dfrac{f(\beta' \pm h)}{g(\beta' \pm h)} = +\infty$, ou $\dfrac{f(\beta' \pm h)}{g(\beta' \pm h)} = -\infty$; on ne peut avoir $\dfrac{f(\beta' \pm h)}{g(\beta' \pm h)} = +\infty$, car $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ pourrait dans ce cas prendre des valeurs supérieures à y' ; on doit dès lors écrire $y = -\infty$ pour $x = \beta' \pm h$.

En supposant ensuite $y \leqslant y'$, on a de même les tableaux :



2° $ab' - ba' = 0$. $\Phi(x)$ est du premier degré et admet la seule racine $\beta' = -\dfrac{b'}{2a'}$; $\varphi(y)$ admet la seule racine $\dfrac{a}{a'}$ à laquelle ne correspond aucune valeur de x. On aura donc $y > \dfrac{a}{a'}$ si le coefficient de y dans φ est > 0, $y < \dfrac{a}{a'}$ si ce coefficient est < 0.



3e Cas : $b'^2 - 4a'c' > 0$. $g(x)$ a deux racines inégales α' et β'. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est définie dans les intervalles $(-\infty,\ \alpha' - h)$, $(\alpha' + h,\ \beta' - h)$, $(\beta' + h,\ \infty)$. Quand x tend vers α' ou vers β', $g(x)$ tend vers 0 et $f(x)$ tend vers $f(\alpha')$ ou $f(\beta')$, valeurs non nulles puisque α' ou β' n'est pas racine de $f(x)$; par conséquent $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ croît indéfiniment en valeur absolue ; de plus $g(\alpha' - h)$ et

$g(\alpha'+h)$ sont de signes différents, tandis que $f(\alpha'-h)$ et $f(\alpha'+h)$ ont le même signe : il en résulte que $\frac{f(\alpha'-h)}{g(\alpha'-h)}$ et $\frac{f(\alpha'+h)}{g(\alpha'+h)}$ sont de signes différents ; nous représenterons ces valeurs par $-\infty$ ou par $+\infty$.

Ce cas se subdivise en deux autres suivant le signe de R.

1° $R < 0$; on a alors $ab'-ba' \neq 0$, $\varphi(y)$ et $\Phi(x)$ n'ont aucune racine ; $\varphi(y)$ a toujours le signe de son premier terme $b'^2-4a'c' > 0$; y peut prendre une valeur quelconque ; nous aurons

x	$-\infty$		$\alpha'-h$	$\alpha'+h$		$\beta'-h$	$\beta'+h$		$+\infty$
y	$\frac{a}{a'}$	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	$\frac{a}{a'}$

$f(\alpha'+h)$ et $f(\beta'+h)$ ont des signes différents, car un seul des nombres α' ou β' est compris entre les racines de $f(x)$ puisque $R < 0$; au contraire $g(\alpha'+h)$ et $g(\beta'-h)$ ont le même signe, donc $\frac{f(\alpha'+h)}{g(\alpha'+h)}$ et $\frac{f(\beta'-h)}{g(\beta'+h)}$ sont infiniment grands, l'un positif et l'autre négatif. On peut encore avoir le tableau :

x	$-\infty$		$\alpha'-h$	$\alpha'+h$		$\beta'-h$	$\beta'+h$		$+\infty$
y	$\frac{a}{a'}$	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	$\frac{a}{a'}$

2° $R > 0$. $\varphi(y)$ a deux racines inégales $y' < y''$; $\varphi(y)$ devant être positif, c'est-à-dire avoir le signe de son premier terme, on aura $y \leqslant y'$ ou $y \geqslant y''$; y ne peut prendre aucune valeur entre y' et y''. Si $ab'-ba' \neq 0$, $\Phi(x)$ a deux racines x', x'' correspondant à y' et y'', et entre les racines de $g(x)$ il y a une seule racine de $\Phi(x)$. Remarquons que $\varphi\left(\frac{a}{a'}\right) = \left(b - b'\frac{a}{a'}\right)^2 > 0$, ce qui prouve que $\frac{a}{a'}$ n'est pas compris entre y' et y''. Nous pouvons avoir l'une des dispositions suivantes en supposant $x' < x''$:

$$x' < \alpha' < x'' < \beta', \qquad \text{ou} \qquad \alpha' < x' < \beta' < x'',$$

à chacune desquelles correspondra un tableau. $R > 0$ exprime qu'entre α' et β' il y a 0 ou 2 racines de $f(x)$; donc la fonction a le même signe pour $x = \alpha'+h$ et pour $x = \beta'+h$. Il est dès lors facile de dresser les tableaux suivants :

$x' < \alpha' < x'' < \beta'$

x	$-\infty$		x'		$\alpha'-h$	$\alpha'+h$		x''		$\beta'-h$	$\beta'+h$		$+\infty$
y	$\frac{a}{a'}$	↗	y'	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	y''	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	$\frac{a}{a'}$
			max.					*min.*					

$\alpha' < x' < \beta' < x''$

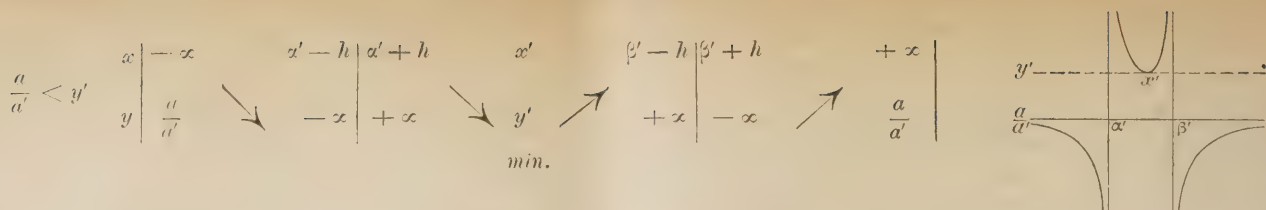
x	$-\infty$		$\alpha'-h$	$\alpha'+h$		x'		$\beta'-h$	$\beta'+h$		x''		$+\infty$
y	$\frac{a}{a'}$	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	y'	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	y''	↗	$\frac{a}{a'}$
						max.					*min.*		

En supposant $x'' < x'$, on aurait des variations inverses des précédentes. Il convient de remarquer que le maximum est inférieur au minimum.

Examinons maintenant le cas particulier où $ab'-ba' = 0$. L'une des racines de $\varphi(y)$ est $\frac{a}{a'}$; l'autre, y', est différente de $\frac{a}{a'}$; à $\frac{a}{a'}$ ne correspond aucune valeur de x ; $\Phi(x)$ est du premier degré et admet la racine $x' = -\frac{b'}{2a'}$ qui correspond à y'. On aura l'un des tableaux suivants :

$\frac{a}{a'} > y'$

x	$-\infty$		$\alpha'-h$	$\alpha'+h$		x'		$\beta'-h$	$\beta'+h$		$+\infty$
y	$\frac{a}{a'}$	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	y'	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	$\frac{a}{a'}$
						max.					



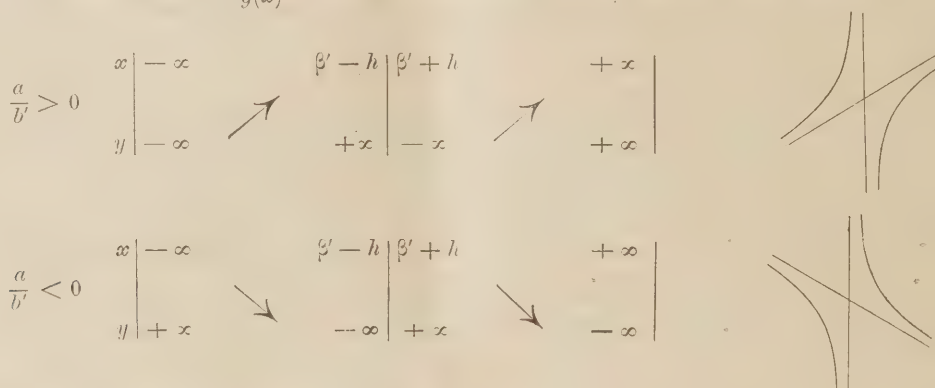
II. — $g(x)$ est du premier degré, $a' = 0$; $ab' - ba' \neq 0$ d'après ce qui a été dit au début. $g(x)$ admet une seule racine $\beta' = -\dfrac{c'}{b'}$. $\Phi(x)$ est du second degré. Nous pouvons écrire

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{ax^2 + bx + c}{b'(x - \beta')} = \frac{(ax + a\beta' + b)(x - \beta') + a\beta'^2 + b\beta' + c}{b'(x - \beta')} = \frac{ax + a\beta' + b}{b'} + \frac{f(\beta')}{b'(x - \beta')} = \frac{ax + a\beta' + b}{b'} + \frac{\mathrm{R}}{ab'^3(x - \beta')}.$$

On voit que x croissant indéfiniment en valeur absolue, la différence $y - \dfrac{ax + a\beta' + b}{b'}$ tend vers zéro et qu'elle a pour expression $\dfrac{\mathrm{R}}{ab'^3(x - \beta')}$; la valeur absolue de y croît indéfiniment en même temps que celle de x et elle a le signe de $\dfrac{ax}{b'}$. La fonction est définie dans les intervalles $(-\infty,\ \beta' - h)$, $(\beta' + h,\ \infty)$ qui ne renferment pas β'.

Nous aurons deux cas à distinguer :

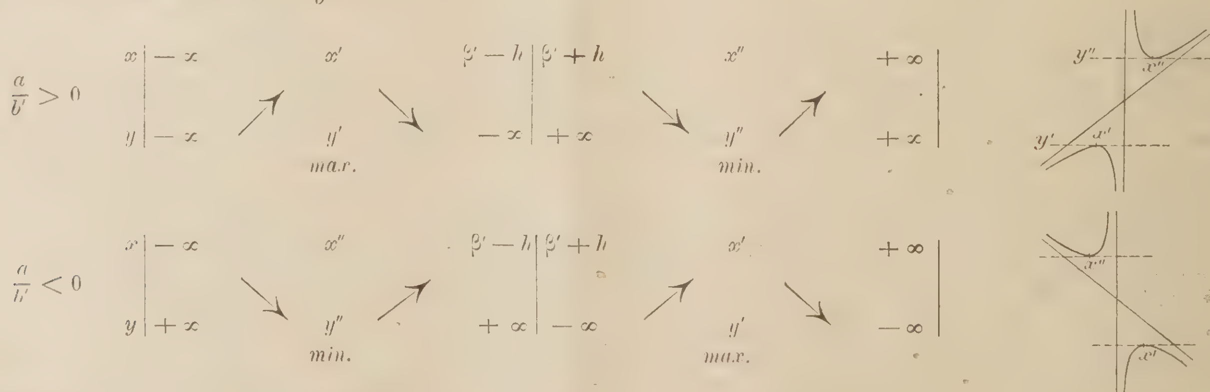
1er Cas : $\mathrm{R} < 0$. $\varphi(y)$ et $\Phi(x)$ n'ont aucune racine ; le coefficient de y^2 dans $\varphi(y)$ est b'^2. $\varphi(y)$ est donc toujours positif et y peut prendre une valeur quelconque. On aura l'une des dispositions suivantes, en remarquant que R étant négatif, β' est compris entre les racines de $f(x)$, et que par suite $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ change de signe dans chacun des intervalles considérés :



Les asymptotes de la courbe représentative ont pour équations

$$x = \beta' \qquad \text{et} \qquad y = \frac{ax + a\beta' + b}{b'}.$$

2e Cas : $\mathrm{R} > 0$. $\varphi(y)$ et $\Phi(x)$ ont chacun deux racines, les racines x', x'' de $\Phi(x)$ correspondant aux racines ', yy'' de $\varphi(y)$; le coefficient b'^2 de y^2 dans $\varphi(y)$ étant positif, puisque $\varphi(y)$ doit être positif ou nul, y ne peut prendre aucune valeur comprise entre y' et y''. La racine β' de $g(x)$ est comprise entre les racines x', x'' de $\Phi(x)$ (n° 9, 3°) ; nous aurons l'une des dispositions suivantes, en remarquant que $af(\beta') = \dfrac{\mathrm{R}}{b'^2}$ est > 0 :



Les asymptotes ont encore pour équations

$$x = \beta' \ ; \qquad y = \frac{ax + a\beta' + b}{b'}.$$

La méthode suivie ici est la méthode classique dite *indirecte* ; son emploi a été justifié (n° 12).

La méthode indirecte, telle que je l'ai exposée, s'applique, avec des simplifications évidentes, à l'étude des fonctions $\dfrac{ax + b}{a'x + b'}$, $ax^2 + bx + c$.

ARITHMÉTIQUE

4765. — *On considère les nombres* $N = 2^n + 1$. *Trouver pour quelles valeurs de* n *un nombre* N *est premier avec* 15 *ou non premier avec* 15.

Cherchons dans quels cas N peut être divisible par 3 ou 5, ou n'est pas divisible par un de ces nombres.

1° On a

$$N = (3 - 1)^n + 1 = \text{mult. } 3 + (-1)^n + 1\,;$$

donc la condition nécessaire et suffisante pour que N soit divisible par 3 est que n soit impair.

2° Si n est impair, posons $n = 2p + 1$;

$$N = 2 \times (5 - 1)^p + 1 = \text{mult. } 5 + 2(-1)^p + 1.$$

On voit que dans ce cas N n'est jamais multiple de 5.

Si n est pair, posons $n = 2p$;

$$N = 2^{2p} + 1 = 4^p + 1 = (5 - 1)^p + 1 = \text{mult. } 5 + (-1)^p + 1.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que N soit divisible par 5 est que p soit impair, ou n multiple impair de 2.

En résumé, on voit que $2^n + 1$ n'est jamais divisible par 15; il est premier avec 15 si n est un multiple pair de 2, ou autrement dit un multiple de 4 ; il n'est pas premier avec 15 dans les autres cas.

[Ont résolu la même question : MM. A. Ageron ; L. Barberot ; V. Barol ; Bourrec ; L. Corbin ; Delaire ; H. Dobryzniak ; J. Haag ; H. Lefèvre ; A. Le Moal ; G. Luquet ; D. Lwow ; J. Maire ; A. Meynier ; A. Pequignot ; M. Petit ; H. Pitrat ; Portalier ; A. de Saint-Gabriel ; P. Valentin ; A. Vannier ; A. Vioix ; P. Zlatco ; Arcizet ; L. Artis ; Bertagna ; Clabault ; Cougnoux ; Foucry ; Hébré ; Henry ; Janois ; Lecoutour ; P. E. ; Pendariès ; Royer ; Sinturel ; Vérot ; Vialaret.]

ALGÈBRE

4766. — *Résoudre le système d'équations*

$$y \log x = x \log y,$$
$$x^2 = y^3.$$

Prenons les logarithmes des deux membres de la seconde équation ; il vient

$$2 \log x = 3 \log y,$$

d'où

$$\log y = \frac{2}{3} \log x,$$

et, en remplaçant dans la première équation, $\log y$ par sa valeur,

$$\left(y - \frac{2}{3}x\right) \log x = 0.$$

Cette dernière équation est satisfaite :

1° pour $\log x = 0$, d'où $x = 1$ et $y = 1$;

2° pour

$$y = \frac{2}{3}x,$$

et en portant cette valeur dans $x^2 = y^3$,

$$x^2 = \frac{8}{27}x^3,$$

d'où l'on tire

$$x = 0 \qquad \text{et} \qquad x = \frac{27}{8}\,;$$

les valeurs correspondantes de y sont

$$y = 0 \qquad \text{et} \qquad y = \frac{2}{3} \times \frac{27}{8} = \frac{9}{4}.$$

Généralisation. — On résout d'une manière analogue le système plus général

$$y \log x = x \log y,$$
$$x^m = y^n.$$

On obtient ainsi les deux solutions évidentes

$$x = y = 1 \qquad \text{et} \qquad x = y = 0,$$

plus la solution

$$x = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m-n}}, \qquad y = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{m-n}}, \qquad \text{si} \qquad m > n,$$

ou

$$x = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{n-m}}, \qquad y = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{n-m}}, \qquad \text{si} \qquad m < n.$$

Lorsque $m = n$, le système devient indéterminé comme on s'en rend facilement compte.

(J. HAAG, collège de Pont-à-Mousson.)

[Ont résolu complètement la question : MM. L. Barberot ; G. Foucry ; Hugonnier-Ginet ; D. Tuïssuzian ; P. Zlatco.

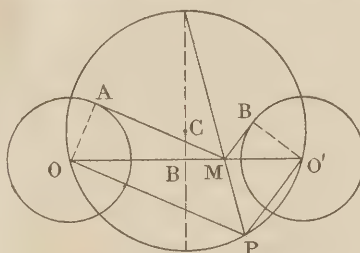
N'ont mentionné que deux des trois solutions de l'équation proposée : MM. L. Audoyer ; R. Bouvaist ; L. Corbin ; H. Duchesne ; M. Gondran ; A. Mabon ; J. Mengailhou ; A. Pequignot ; M. Petit ; H. Pitrat ; H. Taton ; M. Royer ; A. Vannier ; d'Amphernet ; Bertagna ; Cagé ; Henry ; Jarrier ; Maxim ; Pellissier ; Pendariès ; Roui ; Sinturel ; Vérot.

N'ont mentionné qu'une solution : MM. Ageron ; Aubert ; V. Barol ; H. Blanc ; C. Bourvéau ; M. Brun ; C. Chessin ; E. Cognet ; Delaire ; Dobryzniak ; Dervergé et Sainte-Laguë ; H. Foucher ; J. Germa ; A. Gorce ; A. Huet ; G. Lallier E. Lebarbier ; H. Lefèvre ; A. Le Moal ; G. Louys ; G. Luquet ; Maire ; Marx ; Mauheck ; R. Paucot ; Portalier ; L. de Praneuf ; Reighenstreich ; A. de Saint-Gabriel ; P. Valentin ; Anzemberger ; Arcizet ; Baudouin ; Clabault ; Daure ; Jeantet ; Joyer ; Hébré ; Lecoutour ; Meyer ; Mouzon ; Noël ; Tourneux.]

GÉOMÉTRIE

3622. — *On donne deux cercles de même rayon. Déterminer un point de la ligne des centres par lequel on puisse mener à ces cercles deux tangentes formant entre elles un angle donné.*

Supposons le problème résolu, et soient MA, MB les tangentes menées aux cercles O, O′ d'un point M de la ligne des centres,



et telles que $\widehat{AMB} = 2\alpha$, angle donné. Par O et par O′, menons les parallèles OP, O′P aux deux tangentes ; $\widehat{OPO'} = 2\alpha$, et de plus PM est bissectrice de l'angle OPO′, car les cercles étant de même rayon, M est également distant des deux côtés de l'angle.

P se trouve donc sur le segment capable de l'angle 2α, décrit sur OO′ comme base et PM, bissectrice de $\widehat{OPO'}$, passe par un point connu de ce cercle, point milieu de l'arc OO′, opposé à P.

Enfin $\text{MP} = \dfrac{R}{\sin \alpha}$ est constant.

M se trouve donc aussi sur un limaçon de Pascal, dont l'axe de symétrie est perpendiculaire à la ligne des centres OO′, et le problème revient à chercher les intersections de cette courbe et de la droite OO′.

Ce nouveau problème peut se résoudre au moyen de la règle et du compas, d'après une solution indiquée précédemment (*Journal*, 19e année, p. 84).

Quant à la discussion, remarquons que, ici, le problème s'applique toujours au premier cas de figure considéré dans la solution citée.

Rapportons la condition de réalité trouvée, aux données : $OO' = 2d$, R rayon des cercles, 2α l'angle.

On trouve que :

si $\dfrac{R}{\sin \alpha} < d \operatorname{tg} \alpha$, il y aura 4 solutions ;

si $\dfrac{R}{\sin \alpha} > d \operatorname{tg} \alpha$, il y aura 2 solutions.

Il faudra encore exprimer que

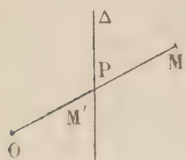
$$DM < d - R, \qquad \text{ou} \qquad DM > d + R,$$

pour que M ne puisse se trouver à l'intérieur des cercles O, O'.

(Pierre VENDEUREN, institut Dupuich, Bruxelles.)

[Ont résolu la même question : MM. L. Bernheim, collège Chaptal ; Georgescu, à Craïova.]

4737. — *Etant donnés un point O et une droite Δ, on joint un point M du plan au point O par une droite qui coupe Δ en P, et on prend M', conjugué de M par rapport à OP.*

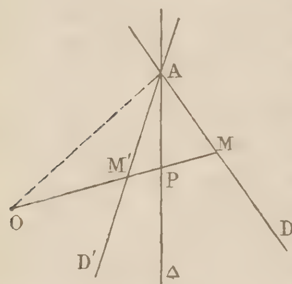


1° Démontrer que si M décrit une droite D, M' décrit une droite D'. Montrer que les droites D perpendiculaires aux droites D' correspondantes sont tangentes à une parabole qui a pour foyer O et pour directrice Δ.

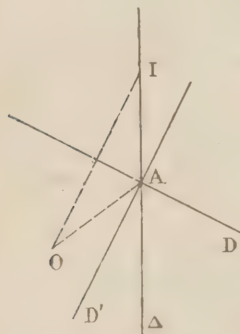
2° Démontrer que si M décrit un cercle C, M' décrit une courbe du 2e degré ; reconnaître la nature de cette courbe d'après la position de C dans le plan.

3° Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que, M décrivant un cercle C, M' décrive le même cercle.

1° Le point de rencontre A de la droite D avec Δ se confondant avec son conjugué harmonique, la droite D' passe par ce point. La division OM'PM étant harmonique, le faisceau A(OM'PM) l'est aussi, et la droite D' est fixe.

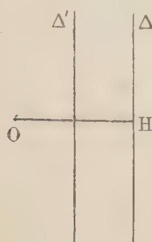


Lorsque les rayons conjugués AD et AD' sont perpendiculaires entre eux, ces rayons sont, comme on sait, les bissectrices de l'angle OAΔ formé par les deux autres. Par suite, le symétrique I de O par rapport à D se trouve sur Δ, d'où il résulte que la droite D enveloppe une parabole de foyer O et de directrice Δ. La droite analogue D' jouit évidemment de la même propriété.



2° La figure formée par les points M et la figure formée par les points M' sont homologiques, le pôle d'homologie étant O et l'axe d'homologie Δ. Donc si l'un des points décrit un lieu, l'autre décrit un lieu de même ordre. En particulier, si M décrit un cercle, M' décrit une conique.

La nature de cette conique se distingue d'après le nombre des points réels à l'infini. Or, pour que M' soit rejeté à l'infini, il faut et il suffit que M vienne au milieu du segment OP, c'est-à-dire soit sur la droite Δ' parallèle à Δ, menée par le milieu de la distance OH.



Donc si le cercle C coupe Δ', le lieu de M' est une hyperbole dont les directions asymptotiques sont parallèles aux droites qui joignent le point O aux points d'intersection de C et de Δ'.

Si C ne coupe pas Δ', le lieu de M' est une ellipse.

Si C touche Δ, le lieu de M' est une parabole.

3° Pour que, M décrivant un cercle C, M' décrive le même cercle, il faut et il suffit que les deux points d'intersection de C avec une sécante passant par O soient conjugués par rapport au segment OP correspondant. Donc il faut et il suffit que Δ soit la polaire de O par rapport à C.

Les cercles en question doivent avoir leurs centres sur la perpendiculaire OH menée à Δ. Les points O et H étant conjugués par rapport aux diamètres dirigés suivant OH, les cercles constituent le système des cercles orthogonaux au système des cercles passant par les points O et H.

Remarque. — Si la droite Δ était rejetée à l'infini, la correspondance entre M et M' serait la symétrie par rapport à O.

Si la droite Δ restait à distance finie, O étant rejeté à l'infini dans la direction perpendiculaire à Δ, les points M et M' seraient symétriques par rapport à Δ.

[Ont complètement résolu la question : MM. A. Amblard ; F. Clabault ; Duvergé et Sainte-Laguë ; H. Lefèvre ; D. Lwow ; G. Marcellin.
Ont résolu partiellement la question : MM. R. Bouvaist ; J. Haag.]

4768. — *Par l'un des sommets A d'un quadrilatère mener une droite AE qui divise ce quadrilatère en deux parties équivalentes.*

Par le sommet D menons la parallèle DD' à AC jusqu'à sa rencontre en D' avec BC : on transforme ainsi le quadrilatère ABCD en un triangle ABD' de surface équivalente, puisque les deux figures ont une partie commune ABC et deux parties formées par les triangles équivalents ADC et AD'C (même base et hauteurs égales). Or la droite issue de A qui divise le triangle ABD' en deux parties équivalentes n'est autre que la médiane AE de ce triangle ; cette droite partage aussi le quadrilatère en deux parties équivalentes pourvu que E tombe sur BC, ce qui suppose BC > CD', c'est-à-dire AC plus près de D que de B ; dans le cas contraire, il suffirait d'échanger D et B.

(P. THONET, athénée d'Anvers.)

Remarque. — On pourrait, par une marche analogue, mais moins simple, traiter le cas général de n droites issues de A et divisant le quadrilatère ou un polygone quelconque en $n+1$ parties équivalentes.

(J. HAAG, collège de Pont-à-Mousson.)

[Ont résolu la même question : Mlle E. Lazare ; MM. V. Barol ; H. Baroux ; A. Berthon ; H. Blanc ; M. Cochepin ; L. Corbin ; Delaire ; Dobryzniak ; Duvergé et Sainte-Laguë ; A. Huet ; T. Lalescu ; G. Luquet ; D. Lwow ; G. Martin ; Marx ; A. Pequignot ; H. Pitrat ; P. Plisson ; Portalier ; E. Roncaglia ; M. Royer ; A. de Saint-Gabriel ; H. Taton ; L. Trapinaud ; D. Tuïssuzian ; Arcizet ; d'Amphernet ; Baudouin ; Clabault ; Cougnoux ; Daure ; Fouery ; Hugonnier-Ginet ; Janois ; Jeantet ; C. Marie ; Mouzon ; Noël ; P. E. ; Pellissier ; Sinturel ; Tourneux ; Vérot ; Vial ; Vialaret.]

MÉCANIQUE

4511. — *On donne un triangle rectangle ABC dont les côtés ont pour mesure a, b, c et l'on construit sur ces trois côtés, extérieurement au triangle et dans son plan, des carrés. Calculer les distances du centre de gravité de la surface de la figure ainsi formée aux deux côtés de l'angle droit, de façon à déterminer la position de ce centre de gravité. Appliquer les résultats obtenus au cas où c, le plus petit côté du triangle, vaut la moitié de a, l'hypoténuse.*

(*Bacc. lettres-sciences, Paris, octobre 1898.*)

Le centre de gravité cherché G' est le point d'application de la résultante de quatre forces parallèles appliquées respectivement aux centres de gravité G, G_a, G_b, G_c du triangle et des trois carrés et proportionnelles à leurs surfaces :

$$\frac{bc}{2}, \quad a^2, \; b^2, \; c^2.$$

Prenons les moments de ces cinq forces par rapport à un plan perpendiculaire à la figure et ayant pour trace AB. En appelant d, d_a, d_b, d_c, x les distances des points G, G_a, G_b, G_c, G' à AB, on a l'équation

$$x\left(\frac{bc}{2} + a^2 + b^2 + c^2\right) = \frac{bc}{2}\,d + a^2 d_a + b^2 d_b - c^2 d_c.$$

Or $\qquad d = \frac{2}{3}\,\text{AM} = \frac{b}{3}, \quad d_b = \frac{b}{2}, \quad d_c = \frac{c}{2};$ d'ailleurs la perpendiculaire à AB issue de G_a étant parallèle aux bases $AC = b$ et $DE = AB = c$ du trapèze ACDE et équidistante de ces bases, on a

$$d_a = \frac{b+c}{2}.$$

En remplaçant, il vient

$$x = \frac{\dfrac{b^2c}{6} + \dfrac{a^2(b+c)}{2} + \dfrac{b^3}{2} - \dfrac{c^3}{2}}{\dfrac{bc}{2} + a^2 + b^2 + c^3},$$

ou, en simplifiant et observant que $a^2 = b^2 + c^2$,

$$x = \frac{b(3a^2 + 3b^2 + 4bc)}{3(4a^2 + bc)}.$$

La distance y du point G' à AC s'obtient de même en prenant les moments des cinq forces par rapport au plan de trace AC ; mais on peut se dispenser de faire un nouveau calcul en permutant simplement dans la formule précédente les lettres b et c ce qui donne

$$y = \frac{c(3a^2 + 3c^2 + 3bc)}{3(4a^2 + bc)}.$$

Dans le cas particulier où $c = \frac{a}{2}$, on a $b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, et les formules précédentes deviennent

$$x = \frac{a(4 + 7\sqrt{3})}{2(16 + \sqrt{3})}$$

$$y = \frac{a(15 + 4\sqrt{3})}{6(16 + \sqrt{3})}.$$

(JACQUET, lycée de Mâcon.)

[MM. M. Jousset et J. Sallaud ont résolu la même question.]

PHYSIQUE

4771. — *Dans un calorimètre en cuivre pesant* 30gr *et contenant* 500gr *d'eau à* 10°, *on immerge un ballon en cuivre pesant* 100gr, *de* 250cc *de capacité, contenant de l'air à* 10 *atmosphères de pression. Ce ballon et son contenu ont été chauffés à* 100°. *On demande quelle est la chaleur spécifique de l'air, sachant que la chaleur spécifique du cuivre est* $c = 0{,}09$ *et que le poids du litre d'air à la pression atmosphérique et à la température à laquelle a été rempli le ballon est de* 1gr,3.

On effectuera les calculs pour les deux cas suivants :

1° *Température finale* $\theta = 11°{,}68$;

2° $\quad$ — $\quad$ — $\quad \theta' = 11°{,}73$.

De la comparaison des résultats obtenus déduire l'erreur que l'on peut commettre sur la chaleur spécifique de l'air, si on peut se tromper de $\frac{1}{20}$ *de degré sur la température finale. Pouvait-on prévoir ce résultat ?*

(*Bacc. lettres-math., Aix, juillet 1899.*)

La densité variant proportionnellement à la pression, le poids de l'air est de

$$0{,}250 \times 1{,}3 \times 10 = 3^{gr}{,}25.$$

Appelons θ la température finale, x la chaleur spécifique de l'air. Ecrivons que la chaleur perdue par le ballon et par l'air est égale à la chaleur gagnée par l'eau et par le calorimètre :

$$(100 - \theta)(0{,}09 \times 100 + 3{,}25 \times x) = (\theta - 10)(0{,}09 \times 30 + 500),$$

d'où $\qquad x = \dfrac{(\theta - 10)(2{,}7 + 500) - (100 - \theta)9}{(100 - \theta)3{,}25}.$

En faisant successivement $\theta = 11°{,}68$ et $\theta = 11°{,}73$, on a

$$x = 0{,}173 \qquad \text{et} \qquad x = 0{,}262.$$

Ainsi, pour une différence de $\frac{1}{20}$ de degré, on arrive à un écart considérable de $0{,}262 - 0{,}173 = 0{,}089$, ce qui représente à peu près la moitié du résultat exact, la chaleur spécifique de l'air sous volume constant étant égale à 0,169.

L'erreur que l'on peut commettre résulte du faible poids de l'air en regard de celui du cuivre et de l'eau. Cherchons quelle serait la température finale s'il n'y avait pas d'air dans le ballon. On a

$$(100 - \theta)(0{,}09 \times 100) = (\theta - 10)(0{,}09 \times 30 + 500),$$

d'où $\qquad \theta = 11°{,}58,$

ce qui montre que la masse d'air a pour effet, dans les conditions de l'expérience, d'élever la température de 11°,58 à 11°,68, c'est-à-dire d'un dixième de degré seulement. Par suite, si l'on fait une erreur de $\frac{1}{20}$ de degré sur la température finale, on pourra commettre sur le résultat une erreur égale à la moitié du résultat exact.

(A. AUBERT, à Clermont-Ferrand.)

[Ont résolu la même question : MM. Ageron ; Bertagna ; H. Blanc ; Duchesne ; Duvergé et Sainte-Laguë ; Foucry ; J. Haag ; Jarrier ; Lallier ; Lecoutour ; G. Louys ; D. Lwow ; A. Meynier ; A. Pequignot ; M. Petit ; M. Royer ; A. de Saint-Gabriel ; H. Taton ; L. Patin.]

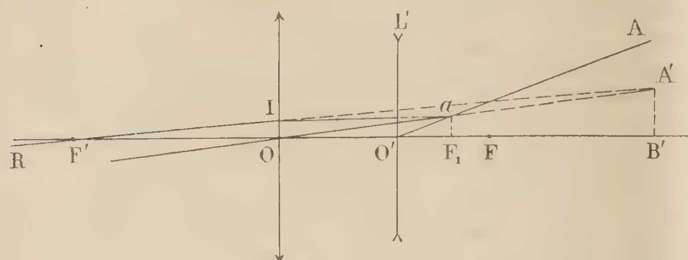
4772. — *On dirige vers le soleil, que l'on regardera comme infiniment éloigné, l'oculaire d'une lunette de Galilée ; on place l'œil derrière l'objectif ; on demande de tracer la marche des rayons lumineux dans la lunette mise au point.*

(*Bacc. lettres-math., Bordeaux, juillet 1899.*)

Supposons la lunette dirigée de manière que l'axe principal OO′ et l'axe secondaire AO′, indéfiniment prolongés, aillent passer par les extrémités du soleil. La lentille divergente L′ donne du soleil une image virtuelle aF_1 qui se forme dans son

premier plan focal, le soleil étant regardé comme infiniment éloigné.

La distance OF du centre optique de la lentille L à son premier foyer F étant supérieure à OF_1, l'image virtuelle aF_1 est



située entre le foyer F et le centre optique O de la lentille L ; par suite cette lentille fonctionne comme loupe par rapport à aF_1.

Parmi les rayons dont les prolongements concourent à la formation du point a et qui rencontrent la lentille L, considérons le rayon aI parallèle à OO' ; il se réfracte suivant IR en passant par le second foyer F' de la lentille L. Le rayon aO qui passe par le centre optique de L n'est pas dévié.

Or $OF_1 < OF'$; donc les prolongements des rayons réfractés se coupent du côté de L' en un point A', et on a en A'B' l'image finale virtuelle droite du soleil. Cette image se forme à la distance OB' égale à la distance minima de la vision distincte. L'œil est supposé confondu avec le centre optique O de la lentille L.

(L. THIRODE.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Baudoin ; Bertagna ; L. Corbin ; J. Crétinon ; A. Delaire ; Duvergé et Sainte-Laguë ; J. Haag ; Jarrier ; Lecoutour ; E. Liger ; A. Meynier ; Noël ; A. Pequignot ; C. Tourneux ; A. Vannier ; Daure ; Hébré ; Henry.]

BACCALAURÉATS

SESSION DE MARS-AVRIL 1900

PARIS

Lettres-Mathématiques.

Mathématiques.

I. — **4781**. Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse a et la somme p des côtés de l'angle droit et de la hauteur issue du sommet de l'angle droit. — Discussion.

II. — *1er sujet.* — Calculer $\sin \frac{a}{2}$ et $\cos \frac{a}{2}$ connaissant $\cos a$.

II. — *2e sujet.* — Calculer $\sin \frac{a}{2}$ et $\cos \frac{a}{2}$ connaissant $\sin a$.

II. — *3e sujet.* — Calculer $\sin \frac{a}{2}$ et $\cos \frac{a}{2}$ connaissant $\operatorname{tg} a$.

Physique.

I. — **4782**. Un vase fermé, dont on négligera la dilatation, a une capacité de 1mc. Il contient 900gr d'eau et 1600gr d'oxygène, et sa température est de 500°. On demande quelle est en kilogrammes, par centimètre carré, la pression à l'intérieur de ce vase, sachant qu'à cette température l'eau est entièrement réduite en vapeur.

La vapeur d'eau et l'oxygène ont pour densités, par rapport à l'hydrogène, respectivement 9 et 16. La masse du litre d'hydrogène à la température de 0° et sous la pression de 76cm de mercure est de 8 centigrammes. Coefficient de dilatation des gaz, $\frac{1}{273}$.

Densité du mercure, 13,6.

II. — *1er sujet.* — Lunette de Galilée. — Construction de l'image ; grossissement.

II. — *2e sujet.* — Télescope de Newton. — Construction de l'image ; grossissement ;

II. — *3e sujet.* — Discussion de la formule des foyers conjugués des miroirs sphériques, concaves et convexes.

Lettres-Sciences.

Mathématiques.

I. — **4783**. Trouver la relation qui doit exister entre m et m' pour que le maximum et le minimum de la fraction

$$\frac{x^2 + 2mx + 1}{x^2 + 2m'x + 1}$$

soient égaux et de signes contraires. Quels sont-ils pour $m = 5$?

II. — *1er sujet.* — Expliquer l'inégalité des jours et des nuits.

II. — *2e sujet.* — Projection stéréographique : projection sur un méridien de l'un des deux hémisphères qu'il détermine.

II. — *3e sujet.* — Lois de Képler. — Du calendrier et de ses principales réformes : julienne et grégorienne.

Physique.

I. — **4784**. Un morceau de platine pesant 20gr est placé dans un four jusqu'à ce qu'il en ait pris la température. On le retire et on le plonge dans une masse d'eau dont le poids est de 42gr et la température de 12° ; on constate que la température devient 22°. Quelle était la température du four ?

On sait que la chaleur spécifique du platine est 0,03243.

II. — *1er sujet.* — Télégraphe ; téléphone.

II. — *2e sujet.* — Machine de compression ; siphon.

II. — *3e sujet.* — Machines magnéto-électriques et dynamo-électriques.

QUESTIONS PROPOSÉES

4785. — Prouver que tout nombre premier supérieur à 5 a un multiple de la forme 11...11, le nombre de 1 étant inférieur au nombre lui-même.

(A. GOUIRAND, lycée de Nîmes.)

4786. — Par l'orthocentre H d'un triangle ABC inscrit dans le cercle O, on mène des parallèles aux droites OA, OB, OC ; ces parallèles rencontrent respectivement en α, β, γ les côtés opposés BC, CA, AB. Démontrer que les trois droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sont concourantes.

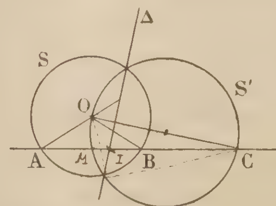
4787. — On considère un triangle isocèle ABC de sommet A et le cercle circonscrit de centre O.

1° Par le sommet A on mène une droite quelconque rencontrant le cercle O en D et la base BC en E. Démontrer que les cercles, de centres O_1 et O_2, circonscrits aux triangles BDE et CDE sont respectivement tangents en B et C aux côtés AB et AC.

2° Trouver l'enveloppe de la ligne des centres O_1O_2 des cercles précédents et les tangentes communes à cette enveloppe et au cercle O.

(A. VACQUANT.)

4788. — Sur une droite on marque trois points A, B, C. Par A et B on fait passer une circonférence S de centre O, et sur CO comme diamètre on décrit une circonférence (S'). On demande les lieux :



1° Des points communs aux circonférences S et S' ; cercle de centre C et de R =

2° Des points de rencontre de CO et de l'axe radical Δ des deux circonférences S et S' ;

3° Des points de rencontre de Δ avec les droites AO et BO.

(V. H.)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Directeur.

24e Année. — N° 15. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 1er Mai 1900

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.

Abonnements.. Librairie Nony et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

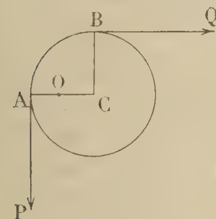
NOTE SUR L'ÉQUILIBRE D'UNE POULIE

1. Dans la plupart des Traités de mécanique, on établit l'équation d'équilibre d'une poulie par un raisonnement bien sujet à critique. Je reproduis ce raisonnement tel qu'il se trouve dans la Statique de Poinsot.

« La poulie est une roue circulaire mobile autour d'un axe C. Une partie AB de sa circonférence est enveloppée par une corde PABQ dont les extrémités sont tirées par deux forces P et Q. Si on mène les deux rayons CA et CB aux points extrêmes de contact on peut regarder les forces P et Q comme appliquées aux extrémités d'un levier coudé ACB dont les deux bras sont parfaitement égaux, et par conséquent il faut, pour l'équilibre, que les forces P et Q soient parfaitement égales. »

La condition trouvée est bien exacte, mais l'équation qui l'exprime est celle à laquelle se réduit un système de *deux* équations exprimant, l'une que la corde est en équilibre, l'autre que la poulie est en équilibre.

2. Pour montrer le défaut du raisonnement, il suffit de faire remarquer qu'il ne s'appliquerait pas au cas où la poulie ne serait pas circulaire, ni au cas où celle-ci serait excentrique, c'est-à-dire aurait un axe ne passant pas par son centre.



Pour fixer les idées, considérons une poulie circulaire de centre C dont l'axe serait en O. Supposons par exemple CO horizontal, la force P étant verticale et la force Q horizontale. On serait conduit par le raisonnement reproduit plus haut à écrire :

$$P \times AO = Q \times CB$$

et dans le cas de la figure on aurait $P > Q$. Or si on supposait fixe le centre C, les deux forces appliquées aux extrémités de la corde étant inégales, et leur rapport pouvant être d'ailleurs quelconque, il est clair que la corde glisserait, la force P l'emportant sur la force Q.

3. Voici comment je traite la question. Après avoir fait observer que si une corde est tendue de façon à être rectiligne, les forces appliquées aux extrémités sont égales, j'ajoute que si la corde est déviée par un obstacle, sur lequel elle peut glisser sans frottement, les forces appliquées aux extrémités doivent être encore égales.

Cela posé, pour qu'une poulie circulaire tournant autour de son centre soit en équilibre, il faut :

1° que la corde soit en équilibre, c'est-à-dire que

$$P = Q; \qquad (1)$$

2° que les moments de ces forces par rapport à C soient égaux, c'est-à-dire que

$$P \times AC = Q \times CB. \qquad (2)$$

Comme $AC = CB$, les deux équations se réduisent à l'équation unique

$$P = Q.$$

Sinon on a deux équations,

$$P = Q, \qquad AC = CB,$$

la seconde exprimant que le point fixe doit être sur la bissectrice de l'angle formé par les tangentes en A et B ; ce qui donne une position d'équilibre pour la poulie si celle-ci n'est pas une poulie circulaire tournant autour de son centre.

Ch. BIOCHE.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (1899)

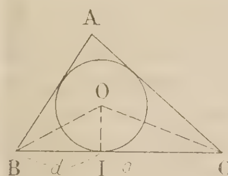
4589. — *Dans un triangle* BAC, *on donne* $BC = a$, *l'angle* A *et, entre* B *et* C, *un point* I $(BI = d)$.

1° *Le point* I *étant le point de contact du cercle inscrit au triangle avec le côté* BC, *calculer le rayon de ce cercle inscrit.*

2° *Le point* I *étant le point de contact avec* BC *d'un cercle exinscrit, calculer de même le rayon de ce cercle exinscrit.*

3° *Construire géométriquement le triangle dans ces deux cas et montrer que les triangles obtenus sont égaux.*

1° Soit x le rayon du cercle inscrit O tangent en I à BC. On a



$$x = d \operatorname{tg} \frac{B}{2} = (a - d) \operatorname{tg} \frac{C}{2} \qquad (1)$$

et

$$A + B + C = 180°. \qquad (2)$$

De (2), on déduit

$$\frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90° - \frac{A}{2}.$$

Si l'on prend les tangentes de chaque membre, il vient

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}},$$

ou, en remplaçant $\operatorname{tg} \frac{B}{2}$ et $\operatorname{tg} \frac{C}{2}$ par leurs valeurs tirées de (1),

$$x\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{a-d}\right)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1-\frac{x^2}{d(a-d)},$$

ou
$$x^2+a\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot x-d(a-d)=0.$$

La racine positive de x, seule acceptable, donne

$$x=\frac{1}{2}\left(-a\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\sqrt{a^2\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+4d(a-d)}\right).$$

On peut rendre cette formule logarithmique en posant

$$\frac{4d(a-d)}{a^2\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}=\operatorname{tg}^2\varphi, \qquad (3)$$

ce qui donne

$$x=\frac{a\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}.$$

2° Dans le cas du cercle exinscrit O′ tangent en I à BC, on a

$$x'=\frac{d}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}=\frac{a-d}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}},$$

$$A+B+C=180°.$$

On déduit de là, comme plus haut, l'équation

$$x'^2-a\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot x'-d(a-d)=0,$$

qui ne diffère de celle déjà obtenue que par le changement du signe de x.

En prenant seulement la racine positive, on obtient

$$x'=\frac{1}{2}\left(a\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\sqrt{a^2\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+4d(a-d)}\right).$$

et sous forme logarithmique,

$$x'=\frac{a\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi},$$

l'angle auxiliaire φ étant encore défini par l'équation (3).

3° Un premier lieu du point O est la perpendiculaire à BC élevée en I. Comme d'ailleurs

$$\widehat{BOC}=180°-\frac{B}{2}-\frac{C}{2}=90°+\frac{A}{2},$$

un second lieu est un segment capable de base BC, et dont le centre est au milieu M de l'arc BC du cercle circonscrit ABC. En menant ensuite la droite MO, sa rencontre avec le segment BAC, capable de l'angle donné A, fournit le sommet A.

En se rappelant que les angles BO′C et BOC sont supplémentaires comme angles opposés d'un quadrilatère inscriptible, on en déduit que O′ est le second point d'intersection du cercle M avec la droite OI ; en prolongeant ensuite O′M jusqu'à sa rencontre avec le cercle BAC, on a le second triangle BA′C.

Le triangle MOO′ étant isocèle, les deux triangles inscrits BAC, BA′C sont égaux comme symétriques par rapport au diamètre perpendiculaire à BC.

(Antonin Besson, à Sardon.)

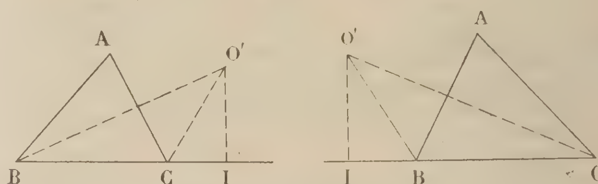
Remarques. — I. La deuxième question de l'énoncé est relative à un cercle exinscrit ; comme le point I doit être entre B et C, ce cercle est celui qui est dans l'angle A.

On peut établir facilement les équations pour les cas où on considérerait les autres cercles. Si c'est le cercle situé dans l'angle B (alors $d>a$), on a

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{x}{d},\qquad \operatorname{tg}\left(90°-\frac{C}{2}\right)=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}=\frac{x}{d-a}$$

et l'équation du problème est

$$x^2-a\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\cdot x+d(d-a)=0.$$



Si c'est le cercle situé dans l'angle C, on a

$$\operatorname{cotg}\frac{B}{2}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}=\frac{x}{d},\qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{x}{d+a}$$

et l'équation du problème est

$$x^2-a\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\cdot x+d(a+d)=0.$$

II. Si on appelle I le point de contact de BC avec le cercle inscrit, I′ le point de contact avec le cercle exinscrit, situé dans l'angle A, on sait que BI = CI′ ; cela permet de conclure l'égalité indiquée dans la 3e partie de l'énoncé.

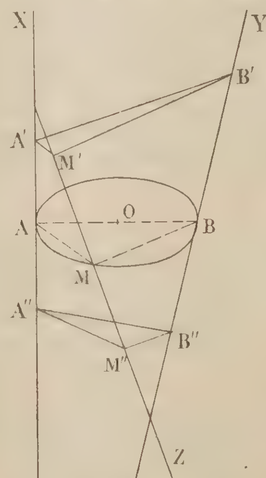
[Ont résolu la même question : MM. L. Barberot ; V. Barol ; L. Bois ; C. Bourvéau ; P. Delolme ; R. Dickson ; H. Dodier ; A. Doué ; H. Fajon ; G. Fouery ; H. Janois ; A. Larue ; H. Lefèvre ; B. Mathé ; M. Oger ; A. Pichon ; S. N., à Châlons ; L. Troin.]

4590. — *On donne dans l'espace un cercle O et deux droites AX et BY rencontrant la circonférence O en deux points A et B diamétralement opposés et dont l'une AX est perpendiculaire au plan du cercle. Par un point quelconque M de la circonférence on mène une droite MZ rencontrant à la fois AX et BY. Démontrer :*

1° Que les deux plans MAX, MBY sont rectangulaires ;

2° Que si l'on coupe ces trois droites par un plan quelconque perpendiculaire soit à AX, soit à BY, le triangle qui a pour sommets les trois points de rencontre est rectangle.

1° L'angle AMB étant inscrit dans un demi-cercle est droit ; donc BM est perpendiculaire à MA. Mais BM étant située dans le plan du cercle perpendiculaire à AX est aussi perpendiculaire à AX, et par suite perpendiculaire au plan MAX des deux droites.



Dès lors, tout plan mené par MB, le plan MBY en particulier, est perpendiculaire au plan MAX.

2° Soit A′B′M′ le triangle déterminé par la rencontre des droites AX, B, MZ avec un plan perpendiculaire à AX. Les deux angles AMB, A′M′B′ ayant leurs côtés parallèles comme intersections de plans parallèles par un troisième, sont égaux ou supplémentaires ; or l'angle AMB est droit, donc l'angle A′M′B′ l'est aussi. On peut aussi arriver à ce résultat en observant que M′B′ est perpendiculaire au plan MAX comme intersection des plans A′M′B′ et MBY perpendiculaires au plan MAX.

Soit A″B″M″ le triangle analogue à A′B′M′ déterminé par un plan perpendiculaire à BY.

Le plan A″M″B″ étant perpendiculaire à BY est perpendiculaire au plan MBY ; il en est de même du plan MAX (1°) ; donc l'intersection A″M″ des plans A″M″B″ et MAX est perpendiculaire au plan MBY, c'est-à-dire en particulier à la droite M″B″ située dans ce plan.

(H. PITRAT, institution Ste-Marie, Saint-Chamond.)

[Ont résolu la même question : MM. N-G. Alesandrescu ; V. Barol ; A. Besson ; E. Briqueler ; C. Broutin ; R. Dickson ; A. Doué ; H. Fajon ; E. Foucart ; H. Lefèvre ; E. Léotard ; P. Noël ; M. Oger ; L. Patin ; A. Pichon.]

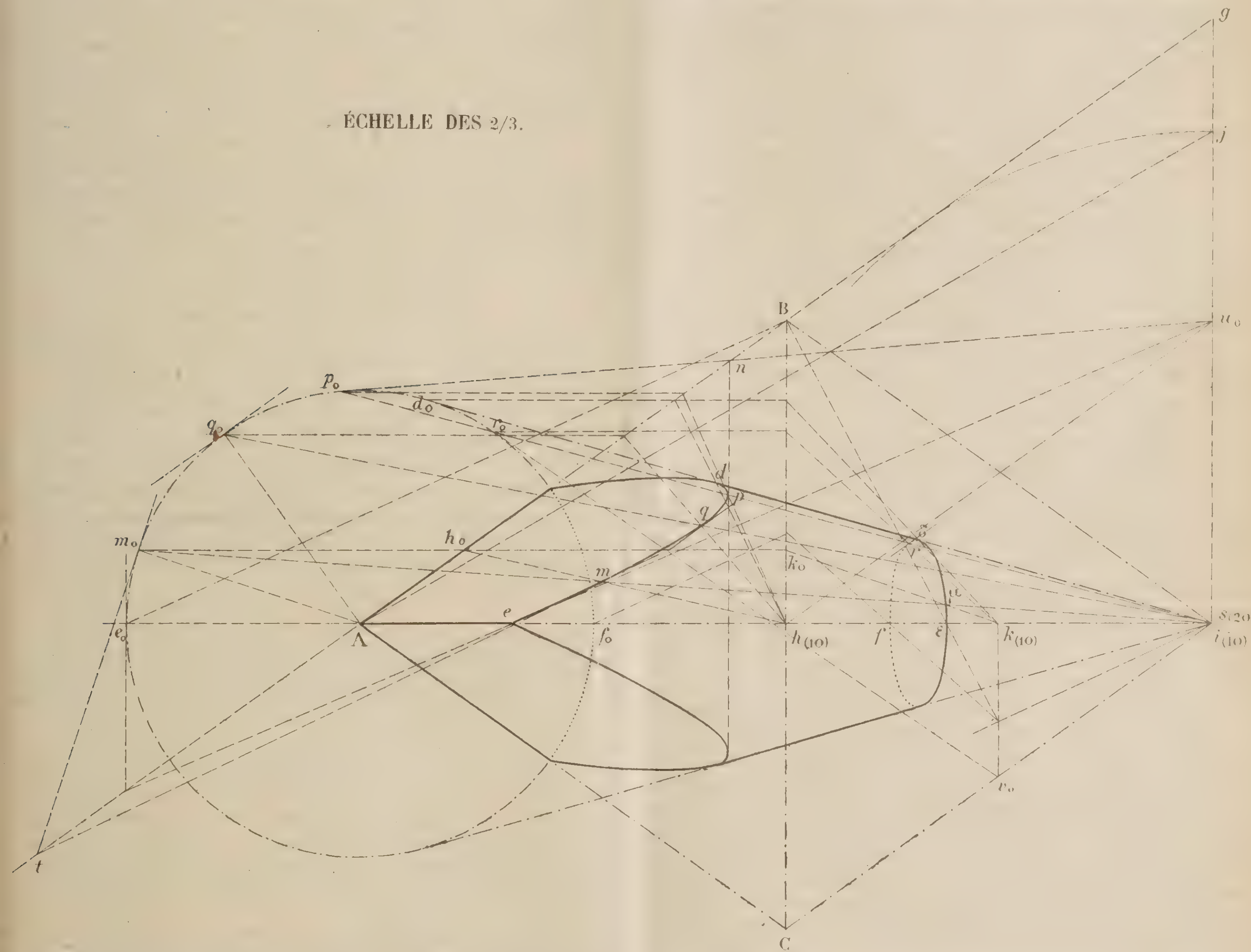
4591. — *Tracer une droite parallèle au bord inférieur de la feuille, à* 10cm *de ce bord ; sur cette droite marquer un point s, à* 2cm *du bord de droite, et prendre sA égale à* 20cm. *Le point s est la projection horizontale d'un point S de cote* 20cm, *et la droite sA est celle d'une droite SA de l'espace.*

On mène par SA les deux plans de pente $\frac{\sqrt{3}}{1}$ *et par S le plan perpendiculaire au plan SsA, de pente* $\frac{2}{1}$, *et coupant sA entre s et A. Ces trois plans et le plan horizontal déterminent un tétraèdre SABC.*

Un cône, dont la directrice est une circonférence située dans le plan horizontal, de centre A et d'un diamètre égal à 11cm, *a pour sommet un point I, de cote* 10cm *et se projetant horizontalement en s.*

Représenter le corps solide opaque commun à ce cône et au tétraèdre SABC.

Construire les tangentes aux projections horizontales des courbes d'intersection de ces deux solides : 1° aux points de ces intersections situés sur SA ; 2° aux points où ces tangentes aux projections sont perpendiculaires à sA ; 3° aux points où elles sont parallèles à AB et à AC.



Les arêtes AB et AC, traces horizontales des deux plans de pente $\frac{\sqrt{3}}{1}$ menés par SA, sont tangentes à un cercle de centre s et de rayon $\frac{Ss}{\sqrt{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}}$ (ce rayon est représenté sur l'épure par le côté ij opposé à un angle de 30° dans le triangle Aij, rectangle en i) ; de même l'arête BC, trace horizontale du plan de pente $\frac{2}{1}$ mené par S perpendiculairement au plan SsA est tangente au cercle s de rayon $\frac{Ss}{2} = 10$, et par suite, est perpendiculaire au milieu h de As. Le tétraèdre se trouve ainsi déterminé par sa projection horizontale sABC et la cote 20 du sommet S.

En traçant ensuite de A comme centre un cercle de 11cm de diamètre et en menant de i les deux tangentes à ce cercle, on a la projection horizontale du cône qui, avec la cote 10 du sommet I, suffit à le déterminer.

Le tétraèdre et le cône admettant le plan SsA comme plan de symétrie, nous pouvons nous borner à déterminer l'intersection située d'un seul côté de ce plan.

Point courant de l'intersection et tangente en ce point. — Pour obtenir le point de rencontre d'une génératrice quelconque $m_0 i(10)$ avec la face SAB, on mène par m_0 et $i(10)$ les horizontales d'un plan passant par cette génératrice; si on les prend parallèles à As, la face SAB est coupée suivant la droite $h_0 h$ (10); l'intersection de $h_0 h$ et $m_0 i$ fournit le point m, et, en joignant ce point au point t où la tangente en m_0 au cercle de base du cône coupe la trace horizontale AB du plan sécant, on a la tangente en m à l'intersection.

Le plan auxiliaire mené par la génératrice $m_0 i$ (10) coupe de même la face SBC suivant la droite $k_0 k$ (10) (k étant le milieu de hi) qui fournit un autre point μ de l'intersection.

En appliquant la construction précédente à la génératrice de contour apparent d_0I, on obtient les points de contact d et δ de cette génératrice avec l'intersection.

Pour les génératrices e_0I et f_0I situées dans le plan principal du cône, les deux horizontales du plan auxiliaire se confondent dans ce cas, et la construction précédente tombe en défaut; on mène alors les horizontales d'un autre plan auxiliaire quelconque passant par l'une de ces génératrices; on obtient ainsi les points e, ε et f, et leurs tangentes (Dans l'épure, e a été obtenu par un plan auxiliaire perpendiculaire au plan AsS et ε, f par un plan passant par B).

Tangentes aux projections horizontales perpendiculaires à sA. — Ces tangentes sont les projections des tangentes à l'intersection parallèles à un plan perpendiculaire à sA. Le plan perpendiculaire à sA mené par s coupe la face SAB suivant la droite $g_0 s(20)$; en menant parallèlement à cette droite un plan tangent au cône, ce plan coupe le plan SAB suivant l'une des tangentes cherchées. Or le plan tangent est déterminé par la droite $u_0 i$ (10) parallèle à $g_0 s$ (20) (u étant le milieu de gi) et la tangente $u_0 p_0$ au cercle de base; on en déduit facilement ensuite la tangente up.

Pour la face SBC, le plan perpendiculaire en s à sA coupe cette face suivant une parallèle à BC, et l'on est conduit à mener les plans tangents au cône parallèles à BC, ce qui fournit les points ε et f, déjà obtenus plus haut.

Tangentes aux projections horizontales parallèles à AB. — Ces tangentes sont les projections des tangentes à l'intersection parallèles à un plan vertical parallèle à AB. En menant ce plan vertical par le sommet S, il coupe la face SAB suivant l'horizontale sC (20) et la face SBC suivant l'arête SC. Le plan tangent au cône parallèle à l'horizontale sC a sa trace horizontale parallèle à sC et la génératrice de contact q_0I donne le point de contact q d'une tangente parallèle à AB; de même, le plan tangent au cône parallèle à SC a pour trace horizontale la tangente $v_0 r_0$ issue du milieu v de Cs, d'où l'on déduit la génératrice de contact r_0I et le point de contact r d'une seconde tangente parallèle à AB.

REMARQUE. — Au lieu de se servir uniquement des horizontales de cotes 0 et 10 des divers plans considérés, on pouvait aussi déduire la projection horizontale du solide commun au moyen d'une projection verticale des deux solides faite sur le plan ASs.

(L. MESSENT.)

[Ont envoyé des épures exactes : MM. A. Doué, lycée de Toulon ; P. Letourneur, lycée du Mans.]

ARITHMÉTIQUE

4773. — *n étant un nombre quelconque, l'expression*

$$7^{2n+1} + 6^{n+2}$$

est divisible par 43.

Généraliser cette question en montrant que l'expression

$$(k+1)^{2n+1} + k^{n+2}$$

est toujours, n étant entier, divisible par $k^2 + k + 1$.

Première solution. — On a

$$7^{2n+1} = 7(7^2)^n = 7(43+6)^n = m.43 + 7.6^n.$$

Par suite

$$7^{2n+1} + 6^{n+2} = m.43 + 7.6^n + 6^{n+2}$$
$$= m.43 + (7+36)6^n = m.43.$$

Plus généralement

$$(k+1)^{2n+1} = (k+1)[(k+1)^2]^n = (k+1)(k^2+k+1+k)^n$$
$$= m.(k^2+k+1) + (k+1)k^n.$$

Par conséquent

$$(k+1)^{2n+1} + k^{n+2} = m.(k^2+k+1) + (k+1)k^n + k^2.k^n$$
$$= m.(k^2+k+1).$$

Seconde solution. — Il suffit de montrer que si la divisibilité est vraie pour une certaine valeur de n, elle l'est encore pour la valeur suivante $n+1$. Formons en effet la différence des deux expressions ; on a

$$(k+1)^{2(n+1)+1} + k^{n+3} - [(k+1)^{2n+1} + k^{n+2}]$$
$$= (k+1)^{2n+1}[(k+1)^2 - 1] + k^{n+2}(k-1)$$
$$= (k+1)^{2n+1}(k^2+k+1+k-1) + k^{n+2}(k-1)$$
$$= m.(k^2+k+1) + (k-1)[(k+1)^{2n+1} + k^{n+2}]$$

La quantité entre crochets étant par hypothèse multiple de k^2+k+1, on en conclut que deux valeurs entières consécutives de cette quantité diffèrent toujours d'un multiple de k^2+k+1. La divisibilité étant évidente pour $n = 0$, s'étend, d'après cela, de proche en proche, à $n = 1, 2, \ldots, n$.

Remarque. — La divisibilité généralisée peut elle-même être regardée comme un cas particulier de la suivante

$$(k+p)^{2n+1} + p^{n-1}k^{n+2} = m.(k^2+kp+p^2),$$

en observant que pour $p > 1$, la divisibilité n'existe que si l'on a $n \geqslant 1$.

(DAVID LWOW, à Piatra.)

[Ont résolu cette question ; Mlle M. D. P. ; MM. H. Blanc ; A. Delaire ; G. Foucry ; M. Gondran ; A. Gouirand ; J. Haag ; J. Maire ; A. Meynier ; M. Petit ; H. Pitrat ; P. Plisson ; Sinoquet ; P. Valentin ; L. Artis ; E. Baudouin ; J. Bourrec ; Duvergé et Sainte-Laguë ; Germa ; Heury ; Lalescu ; Lecoutour ; Legros ; Luquet ; Marx ; Passeron ; Pequignot ; Petitjean.]

ALGÈBRE

4752. — *Étant donnée une sphère, on mène deux plans parallèles AB, A'B' également distants du centre. Soient C et C' les pôles des cercles déterminés par ces plans.*

Trouver le maximum du volume formé par le cylindre ABA'B' *et les deux cônes* CAB, C'A'B'.

Désignons par x la distance commune des deux plans AB, A'B' au centre O.

Le volume considéré a pour expression

$$V = \pi\overline{AI}^2.2x + \frac{2}{3}\pi\overline{AI}^2.CI,$$

ou, comme

$$\overline{AI}^2 = R^2 - x^2 \quad \text{et} \quad CI = R - x,$$

$$V = 2\pi(R^2 - x^2)\left(x + \frac{R-x}{3}\right)$$
$$= \frac{2}{3}\pi(R^2 - x^2)(2x + R).$$

Le maximum de V correspond à celui du produit variable

$$(R^2 - x^2)(2x + R).$$

Ce produit sera évidemment maximum en même temps que le produit

$$\frac{R-x}{\alpha} \cdot \frac{R+x}{\beta} \cdot \frac{2x+R}{\gamma},$$

α, β, γ étant des coefficients numériques indéterminés.

Or on peut fixer ces coefficients de façon que la somme des trois facteurs soit constante quel que soit x, ce qui revient à écrire

$$-\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{2}{\gamma} = 0. \qquad (1)$$

Cette condition remplie, le produit devient maximum lorsque ses trois facteurs sont égaux, ce qui donne

$$\frac{R-x}{\alpha} = \frac{R+x}{\beta} = \frac{x+2R}{\gamma}.$$

La relation (1) étant homogène par rapport à α, β, γ, on peut y remplacer α, β, γ par les quantités proportionnelles $R-x$, $R+x$, $x+2R$; on a ainsi l'équation

$$-\frac{1}{R-x} + \frac{1}{R+x} + \frac{2}{x+2R} = 0,$$

ou

$$3x^2 + Rx - R^2 = 0,$$

d'où l'on tire, en négligeant la valeur négative de x,

$$x = \frac{R(\sqrt{13}-1)}{6}.$$

Cette valeur de x portée dans V donne comme expression du maximum du volume considéré

$$V_m = \frac{\pi R^3}{81}(35 + 13\sqrt{13}).$$

Remarque.— On peut encore obtenir la valeur de x qui correspond au maximum de V en se rappelant que cette valeur annule la dérivée de la fonction

$$y = (R^2 - x^2)(2x + R).$$

Cette fonction, développée, s'écrit

$$y = -2x^3 - Rx^2 + 2R^2x + R^3,$$

et sa dérivée est visiblement

$$y' = -6x^2 - 2Rx + 2R^2.$$

On voit que l'équation $y' = 0$ est la même que celle considérée plus haut.

(J. LIMASSET, lycée de Laon.)

[Ont résolu la même question : MM. d'Amphernet ; Arnaud ; Barberot ; Billionnet ; Bouvaist ; Claudon ; Damoiseau ; Delaire ; Durand ; Duvergé ; Henry; Hugonnier-Ginet; J.-M. Jarrier; Lecoutour; Legros; Lehmann; Le Maigre; Limouzi ; M. B.. à M. V. ; C. Marie ; Mathé ; Mongin ; de Parseval; Paucot ; Petit ; Pitrat ; Portalier ; Raüber ; Sainte-Laguë ; de Saint-Gabriel ; Sandon ; Troin ; Vannier.]

4774. — *Former l'équation générale du 4e degré dont les racines sont en progression arithmétique de raison r.*

Soient a, $a+r$, $a+2r$, $a+3r$ les quatre racines en progression arithmétique de l'équation. Cette équation est de la forme

$$(x-a)(x-a-r)(x-a-2r)(x-a-3r) = 0,$$

ou, en posant pour abréger $x - a = y$,

$$y(y-r)(y-2r)(y-3r) = 0.$$

En développant convenablement cette dernière équation, il vient successivement

$$(y^2 - 3ry)(y^2 - 3ry + 2r^2) = 0,$$

ou

$$(y^2 - 3ry)^2 + 2r^2(y^2 - 3ry) = 0,$$

ou

$$y^4 - 6ry^3 + 11r^2y^2 - 6r^3y = 0.$$

Remplaçons maintenant les diverses puissances de y par leurs valeurs développées en fonction de x; nous aurons

$$\left.\begin{aligned} x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4 \\ - 6rx^3 + 18arx^2 - 18a^2rx + 6a^3r \\ + 11r^2x^2 - 22ar^2x + 11a^2r^2 \\ - 6r^3x + 6ar^3 \end{aligned}\right\} = 0.$$

ou, en simplifiant,

$$x^4 - 2(2a + 3r)x^3 + (6a^2 + 18ar + 11r^2)x^2$$
$$- 2(2a^3 + 9a^2r + 11ar^2 + 3r^3)x + a^4 + 6a^3r + 11a^2r^2 + 6ar^3 = 0.$$

(Louis DEMOGUE.)

Remarque. — On pouvait observer qu'en diminuant chacune des racines de leur moyenne arithmétique on obtenait une équation bicarrée de racines $\pm\frac{3r}{2}$, $\pm\frac{r}{2}$ et que réciproquement l'équation la plus générale se déduisait de cette équation bicarrée en y remplaçant x par $x-m$, m étant arbitraire.

[Ont résolu cette question : MM. J. Haag, collège de Pont-à-Mousson ; P. Plisson, instituteur aux Brûleries (Yonne) ; Cagé ; Corbin ; Duvergé et Sainte-Laguë ; Louys ; Paucot.]

GÉOMÉTRIE

4567. — *Par un point M de la circonférence circonscrite à un triangle équilatéral, on mène des parallèles aux côtés.*

1° Ces parallèles rencontrent les côtés en six points qui sont trois à trois sur deux droites.

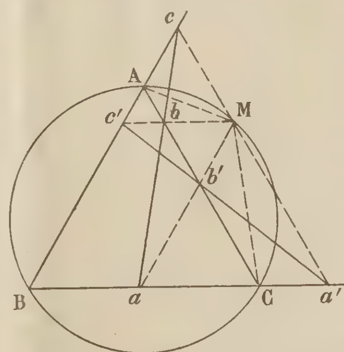
2° L'angle de ces deux droites est de 60°.

3° La droite MP qui joint M au point de concours P des droites ainsi tracées est perpendiculaire à la droite de Simson relative à M.

4° Si MP rencontre en R la circonférence circonscrite à ABC, on a

$$MR = 3MP.$$

1° Soient a, a'; b, b'; c, c' les points de rencontre des côtés du triangle ABC avec les parallèles à ces côtés, issues de M.



Pour établir que les trois points a, b, c par exemple, sont en ligne droite, il suffit de prouver que les angles Mbc et abc' sont égaux. Or les trapèzes isocèles $MbAc$ et $MbaC$ donnent

$$\widehat{Mbc} = \widehat{MAc}, \qquad \widehat{abc'} = \widehat{MCa};$$

comme les angles inscrits MAc et MCa ont tous deux même mesure que la moitié de l'arc MAB, ils sont égaux, et par suite $\widehat{Mbc} = \widehat{abc'}$.

On verrait de même que les trois points analogues a', b', c' sont en ligne droite (*).

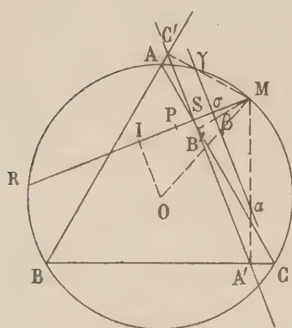
2° Les triangles Maa' et Mcc' étant visiblement équilatéraux, les deux triangles Mac, $Ma'c'$, qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, sont égaux. Par suite les côtés homologues ac, $a'c'$ se coupent sous le même angle que les côtés homologues Ma, Ma', c'est-à-dire sous un angle de 60°.

3° De ce qui précède, on conclut facilement que le point de

(*) Si on faisait tourner d'un angle quelconque le système des droites Ma, Mb, Mc, les points où ces droites rencontrent les côtés du triangle seraient encore sur une droite (Théorème de Simson généralisé).

rencontre P des droites *abc*, *a'b'c'* appartient aux cercles circonscrits aux triangles M*aa'*, M*bb'*, M*cc'*. La corde commune MP est donc perpendiculaire à la ligne des centres de ces cercles, et tout revient à montrer que cette ligne des centres est parallèle à la droite de Simson du point M.

Soit A'B'C' la droite de Simson du point M (figure ci-contre).



Le centre α du cercle circonscrit au triangle équilatéral M*aa'* se trouve au point de concours des hauteurs et des médianes, c'est-à-dire aux $\frac{2}{3}$ de MA' à partir de M; de même les centres des cercles M*bb'*, M*cc'* sont les points β, γ respectivement situés aux $\frac{2}{3}$ de MB', MC', à partir de M. La ligne des centres αβγ est donc bien parallèle à la droite de Simson A'B'C'.

4° Le point P est le symétrique de M par rapport à la ligne des centres αβγ; prolongeons la droite MP jusqu'à sa rencontre en R avec le cercle O. Il faut prouver que MR = 3MP.

D'après une propriété connue, la droite de Simson A'B'C' coupe en son milieu la droite MO qui joint M à l'orthocentre du triangle; si l'on projette O en I sur MR, on voit qu'elle passe aussi par le milieu S de IM. On peut donc écrire

$$MR = 4MS;$$

or
$$MS = \frac{3}{2}M\sigma = \frac{3}{4}MP;$$

donc
$$MR = 3MP.$$

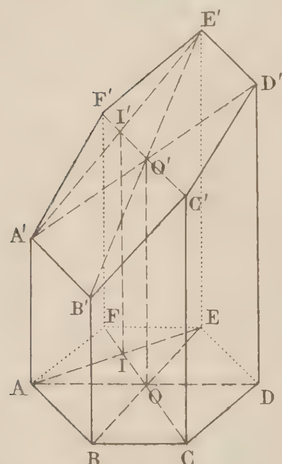
(Ernest FOUCART, à Issy.)

(Ont résolu la même question : MM. Aycat; R. Bazin; C. Billionnet; Cassan; R. Cordier; H. Debenest; G. Foucry; H. Janois; J. Lecaplain; E. Le Maigre; M. Oger; G. Tastet; F. Vérot.)

4759. — *Un tronc de prisme droit a pour base un hexagone régulier* ABCDEF *inscrit dans un cercle de rayon* R. *On donne les arêtes* AA' = *h*, CC' = 2*h*, EE' = 3*h*; *on demande* :

1° *de déterminer les longueurs* BB', DD', FF' *que le plan* A'C'E' *détermine sur les arêtes qui partent de* B, D, F;

2° *de calculer le volume du tronc de prisme.*



1° Soient I et I' les points de rencontre des diagonales AE et CF, A'E' et C'F'. La droite II' étant perpendiculaire au plan de base du prisme comme intersection de deux plans perpendiculaires à cette base, est parallèle à CC' ou FF'; d'ailleurs, dans le trapèze AA'E'E, on a, en observant que I est le milieu de AE,

$$II' = \frac{AA' + EE'}{2} = \frac{h + 3h}{2} = 2h.$$

Donc II' = CC', ce qui montre que la figure CII'C' est un parallélogramme, d'où l'on conclut que

$$FF' = CC' = 2h.$$

D'autre part, les quadrilatères AA'B'B et DEE'D' ayant leurs côtés parallèles à ceux du parallélogramme CFF'C', sont également des parallélogrammes, et l'on a

$$BB' = AA' = h, \qquad DD' = EE' = 3h.$$

2° Les trois plans AA'D'D, BB'E'E, CC'F'F décomposent le tronc de prisme considéré en 6 troncs de prismes triangulaires de bases égales et ayant une arête latérale commune OO' = 2*h*. Le volume du tronc a donc pour expression

$$V = \frac{\text{surf. ABCDEF}}{6} \times \frac{2}{3}(3OO' + AA' + BB' + CC' + DD' + EE' + FF') = \frac{\text{surf. ABCDE}}{6} \times 12h = 3hR^2\sqrt{3}.$$

On peut aussi obtenir ce résultat en regardant le tronc de prisme comme équivalent au prisme droit de même base ABCDEF limité à un plan parallèle mené par C'F' (ces deux prismes ont en effet une partie commune et deux parties superposables).

(David LWOW, à Piatra (Roumanie).)

Remarque. — 1° On aurait pu remarquer que deux arêtes opposées AA', DD', par exemple, forment un trapèze tel que la demi-somme des bases est égale à OO'; on a donc

$$2OO' = AA' + DD' = BB' + EE' = CC' + FF'.$$

D'autre part, O et O' étant les centres de gravité de ACE, A'C'E', on a

$$AA' + CC' + EE' = 3OO',$$

d'où on déduit facilement les différentes arêtes.

2° D'une façon générale, le volume d'un tronc de prisme est équivalent à la section droite multipliée par la moyenne arithmétique des hauteurs, ou encore à un prisme ayant pour base l'une des bases du tronc et pour arêtes des droites égales et parallèles à la droite qui joint les centres de gravité des bases.

(Ont résolu la même question : MM. G. Amouroux; A. Aubert; H. Blanc; Y. Collin; L. Curt; G. A., lycée de Nîmes; J. Haag; Hugonnier-Ginet; H. Lefèvre; P. Marion; Mongin; H. Pitrat; R. Rives; A. de Saint-Gabriel; Sinoquet; P. Thonet; P. Valentin; F. Vérot; Vial; L. Ollié; E. Szivessy.)

4778. — *Trouver les plans équidistants des quatre sommets d'un tétraèdre donné* ABCD.

Tout plan équidistant de deux sommets passe par le milieu de l'arête joignant ces sommets ou est parallèle à cette arête, suivant que le plan sépare ou non les deux sommets considérés.

Un plan équidistant des quatre sommets du tétraèdre ne pouvant être parallèle à plus de trois arêtes doit nécessairement passer par les milieux d'au moins trois des arêtes restantes. Ces trois arêtes peuvent être communes à trois ou quatre faces du tétraèdre.

Dans le premier cas, les trois arêtes aboutissent à un même sommet A et le plan mené par leurs milieux, parallèle à la face opposée, répond à la question. On obtient ainsi quatre plans correspondant aux quatre sommets.

Dans le second cas, deux des arêtes telles que AB et DC aboutissent aux extrémités de la troisième, BC, et le plan MNP qui passe par leurs milieux passe aussi par le milieu Q de AD et est parallèle aux deux dernières arêtes opposées AC, BD. Aux trois couples d'arêtes opposées du tétraèdre correspondent ainsi trois nouveaux plans.

Il y a donc en tout 7 plans qui répondent à la question.

(Ph. PLISSON, instituteur aux Brûleries.)

(Ont résolu cette question : MM : Aubert; A. Gouirand; J. Haag; D. Lwow, P. Thonet; F. Clabault; L. Corbin; Duvergé et Sainte-Laguë.)

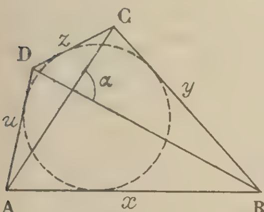
TRIGONOMÉTRIE

4733. — *Calculer les côtés et les angles d'un quadrilatère, sachant :*

1° qu'il est inscriptible ;
2° qu'il est circonscriptible ;
3° que son périmètre est $2p$;
4° que le produit des diagonales est k^2 ;
5° que l'angle aigu des diagonales est α.

Désignons par x, y, z, u les quatre côtés.

On sait (théorème de Ptolémée) que dans un quadrilatère inscriptible le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés, et que dans un quadrilatère circonscriptible, la somme de deux côtés opposés est égale à celle des deux autres. On peut donc écrire



$$xz + yu = k^2, \qquad (1)$$
$$x + z = y + u = p. \qquad (2)$$

D'autre part, la surface d'un quadrilatère à la fois inscriptible et circonscriptible étant représentée par $\sqrt{xyzu}$, on a

$$\sqrt{xyzu} = \frac{1}{2}\,\text{AC}.\text{BD}\sin\alpha,$$

ou

$$xyzu = \frac{k^2\sin^2\alpha}{4}. \qquad (3)$$

Les équations (1) et (3) montrent que xz et yu vérifient l'équation

$$X^2 - k^2X + \frac{k^2\sin^2\alpha}{4} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\left.\begin{matrix} xz \\ yu \end{matrix}\right\} = \frac{k^2(1 \pm \cos\alpha)}{2},$$

ou, en remplaçant $\cos\alpha$ par $\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ et supposant $xz > yu$, ce qui est permis,

$$xz = k^2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \qquad yu = k^2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

D'après ces valeurs et les équations (2), on conclut que x et z, y et u sont les racines respectives des deux équations

$$\left.\begin{aligned} X^2 - pX + k^2\cos^2\frac{\alpha}{2} &= 0, \\ X^2 - pX + k^2\sin^2\frac{\alpha}{2} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Connaissant les quatre côtés, il est facile d'en déduire les angles. Si l'on considère par exemple l'angle A, on a, en égalant deux expressions de $\overline{\text{BD}}^2$,

$$x^2 + u^2 - 2xu\cos A = y^2 + z^2 + 2yz\cos A,$$

d'où

$$\cos A = \frac{x^2 + u^2 - y^2 - z^2}{2(xu + yz)}.$$

Cette formule, écrite sous la forme

$$\cos A = \frac{(x-u)^2 + 2xu - (y-z)^2 - 2yz}{2(xu + yz)},$$

devient, en ayant égard à la première équation (2),

$$\cos A = \frac{xu - yz}{xu + yz}.$$

Discussion. — Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les valeurs de x, y, z, u soient réelles et positives ; en effet, dans ce cas, $\cos A$ est toujours visiblement moindre que 1 en valeur absolue, de sorte que l'angle A existe toujours et définit complètement, avec les côtés, les deux triangles ABD, BCD.

Les équations (4) auront chacune leurs racines positives si celles-ci sont réelles, c'est-à-dire si l'on a

$$p^2 - 4k^2\cos^2\frac{\alpha}{2} \geqslant 0, \qquad p^2 - 4k^2\sin^2\frac{\alpha}{2} \geqslant 0.$$

L'angle α pouvant être supposé aigu, on a $\cos\frac{\alpha}{2} > \sin\frac{\alpha}{2}$, et la seconde inégalité est comprise dans la première, qui peut aussi s'écrire

$$p \geqslant 2k\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Si $p = 2k\cos\frac{\alpha}{2}$, les équations (4) donnent

$$x = z = k\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad \left.\begin{matrix} y \\ u \end{matrix}\right\} = k\left(\cos\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\cos\alpha}\right);$$

par suite

$$\cos A = \frac{u - y}{u + y} = \frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

A ces valeurs correspond un trapèze isocèle circonscriptible. Pour $\alpha = 90°$, ce trapèze se réduit à un carré.

(J. HAAG, collège de Pont-à-Mousson.)

Remarque. — Si $\alpha = 90°$, $p \geqslant 2k\cos 45° = k\sqrt{2}$; les deux équations (4) deviennent identiques : le quadrilatère est alors composé de deux triangles symétriques par rapport à la diagonale qui est leur côté commun ; il est alors formé par les tangentes communes à deux cercles.

(Ont complètement résolu la question : MM. C. Bourveau ; L. Curt ; Cry ; Duvergé et Sainte-Laguë ; Lefèvre ; M. B., à V. ; Sinoquet ; P. Thonet ; P. Zlatco ; Billionnet ; Clabault ; Delaire ; Foucry ; Henry ; Remondet.
Ont partiellement résolu la question : MM. R. Barthélemy ; R. Bouvaist ; A. Lecoutour ; D. Lwow ; A. Vioix ; M. Petit.)

PHYSIQUE

4634. — *Sur l'axe principal d'une lentille convergente* L *ayant pour distance focale* $f = 50^{\text{cm}}$, *on place un point lumineux* P *à une distance* a *de la lentille. Du côté opposé de la lentille on applique un miroir plan* M *perpendiculaire à l'axe principal de la lentille, la face réfléchissante tournée vers la lentille* (celle-ci est supposée infiniment mince). *Les rayons lumineux issus de* P *traversent une première fois la lentille, se réfléchissent contre le miroir plan, traversent une seconde fois la lentille et ressortent enfin pour converger en un point* P′ (*réel ou virtuel*) *situé comme le point* P *sur l'axe principal.*

Calculer la distance a' *de ce point* P′ *à la lentille, connaissant* a *et* f.

Etudier la variation de a' *quand on fait varier* a *de* ∞ *à* 0.

Trouver à quelle distance il faut placer le point P *pour que le point* P′ *coïncide avec lui.*

(*Bacc. lettres-math., Dijon, novembre 1898.*)

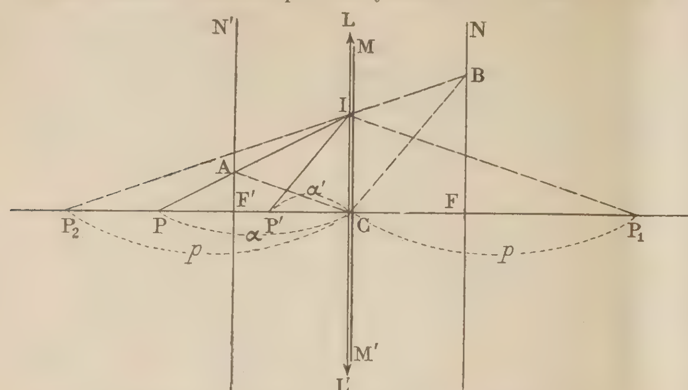
Marche des rayons. — Soient LL′, MM′ la lentille et le miroir, supposés confondus. Menons les plans focaux NF, N′F′. Un rayon quelconque PI rencontre le plan focal N′F′ au point A ; en vertu des propriétés du plan focal, ce rayon, s'il n'y avait pas de miroir, se réfracterait suivant IP_1 parallèle à AC. Mais le miroir réfléchit le rayon IP_1 selon IP_2, symétrique de IP_1 par rapport au miroir. Le prolongement de IP_2 rencontrant en B le plan focal NF, se réfracte suivant IP′ parallèle à BC.

Calcul de a'. — Posons $CP_1 = CP_2 = p$. On a

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f} \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{p} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f},$$

d'où, en éliminant p, $\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{2}{f}$.

Cette relation montre que le système de la lentille L et du



miroir M est équivalent à un miroir concave de rayon f. On en tire

$$a'=\frac{af}{2a-f}. \qquad (1)$$

Variation de a' en fonction de a. — L'égalité précédente peut être mise sous la forme $a'=\frac{f}{2-\frac{f}{a}}$.

On en déduit facilement le tableau suivant :

Variations de a	Variations correspondantes de a'
$a=\infty$	$a'=\frac{f}{2}=25^{cm}$
$\infty>a>2f$	$\frac{f}{2}<a'<\frac{2}{3}f$
$a=2f$	$a'=\frac{2}{3}f=33^{cm},33$
$2f>a>f$	$\frac{2}{3}f<a'<f$
$a=f$	$a'=f=50^{cm}$
$f>a>0$	$f<a'$
$a=0$	$a'=0$

Il résulte de ce tableau que la distance à laquelle il faut placer P pour que le point P' coïncide avec lui, c'est-à-dire pour que $a=a'$, est telle que $a=f$. Cela est évident en tenant compte de la remarque faite plus haut que le système du miroir et de la lentille est équivalent à un miroir concave de rayon f.

(E. FRAMBOISE.)

[Ont résolu la même question : MM. Ardin-Delteil ; Foucry ; A. Lecoutour ; M. Oger.]

4780. — *Dans une cloche en verre graduée à 0°, pleine de mercure et reposant sur la cuve à mercure, on introduit 0gr,75 d'éther liquide. La température de la cloche étant portée à 80°, tout le liquide se vaporise et le volume occupé par la vapeur est de 366cc,48 ; le mercure s'élève dans la cloche à une hauteur de 152mm,16. La pression extérieure ramenée est à 0° 750mm. Quelle est à cette température la densité de la vapeur d'éther, par rapport à l'air ?*

On prendra 0,0000276 pour le coefficient de dilatation cubique du verre, 0,00013 pour celui du mercure, et 0,00367 pour celui des gaz.

(*Bacc. lettres-math., Lille, juillet 1899.*)

On sait que la densité d'une vapeur non saturante est le rapport entre les masses de deux volumes égaux de vapeur et d'air dans les mêmes conditions de température et de pression. On en déduit que la masse M d'un volume V de vapeur dont la densité est x, la température t et la force élastique f, est donnée par la relation

$$M=V\times0{,}001293\times x\times\frac{f}{760}\times\frac{1}{1+\alpha t}. \qquad (1)$$

Le volume occupé par la vapeur d'éther a pour valeur

$$366{,}48(1+80\times0{,}0000276)=367^{cc},289.$$

Cherchons maintenant la force élastique f. La hauteur de 152mm,16 ramenée à 0° a pour valeur

$$152{,}16\,\frac{1+\frac{80\times0{,}0000276}{3}}{1+80\times0{,}00013}=150^{mm},7.$$

On a donc $f=750-150{,}7=599^{mm},3.$

Remplaçant M, V, f, t et α par leur valeur dans la relation (1), il vient

$$0{,}75=367{,}289\times0{,}001293\times x\times\frac{599{,}3}{760}\times\frac{1}{1+80\times0{,}00367},$$

d'où l'on tire $x=2{,}59.$

(J. HAAG, à Pont-à-Mousson.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Ageron ; A. Aubert ; L. Andoyer ; H. Blanc ; M. Brun ; J. Crétinon ; Duvergé et Sainte Lagué ; de Saint-Gabriel ; J. Germa ; A. Jayer ; G. Lallier ; A. Lecoutour ; F. Limouzi ; A. Liger ; G. Luquet ; A. Mabon ; J. Maire ; F. Mengadhon ; A. Meyer ; A. Meynier ; M. Petit ; R. Paucot ; L. Thirode ; Toulon.]

QUESTIONS PROPOSÉES

4789. — Si m et n sont des nombres entiers quelconques, le produit

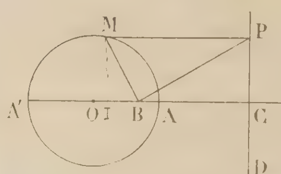
$$n(2n+1)(3n+1)(4n+1)\ldots(mn+1)$$

est divisible par tous les nombres premiers inférieurs à m.

(ALETROP, à Madrid.)

4790. — Résoudre l'équation

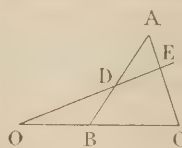
$$\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x-\operatorname{tg} 3x-\operatorname{cotg} 3x=4.$$



4791. — Sur un diamètre AA' d'un cercle on donne deux points B et C. Par le point C on mène une droite D perpendiculaire à ce diamètre. On demande de déterminer un point M sur le cercle, tel que si l'on mène la perpendiculaire MP à la droite D, l'angle MBP soit droit.

Discussion. — Construction géométrique.

(*Bacc. lettres-math., Clermont, novembre 1899.*)



4792. — On donne un triangle ABC et un point O situé sur BC en dehors du segment déterminé par les sommets B et C. On demande de mener par le point O une sécante telle que D et E désignant les intersections avec AB et AC ou avec leur prolongement, le rapport des aires des triangles ADE et ABC égale un nombre donné. — Discussion.

(*Bacc. lettres-math., Montpellier, mars 1900.*)

4793. — Construire un triangle connaissant la hauteur, la bissectrice issue du même sommet et le rayon du cercle des neuf points.

(S.-N. MIREA, lycée de Ploesti.)

4794. — Démontrer que si deux points A', B' divisent harmoniquement un segment AB, et si O est le milieu de AB, O' le milieu de A'B', on a

$$4\,\overline{OO'}^2=\overline{AB}^2+\overline{A'B'}^2.$$

(T. LALESCU, à Jassy.)

4795. — On mélange de l'air saturé d'humidité avec de l'hydrogène sec. Calculer l'état hygrométrique du mélange sachant que 100cc introduits dans l'eudiomètre se réduisent à 70 après le passage de l'étincelle et que tout l'hydrogène a été brûlé. Quelle est de plus la composition du gaz résiduel ?

(*Bacc. lettres-math., Montpellier, mars 1900.*)

4796. — On veut produire dans une canalisation électrique de résistance r un courant d'intensité I. On dispose pour cela d'une pile dont la force électromotrice et la résistance intérieure sont E et R et d'un rhéostat. De quelles manières différentes peut-on disposer ce rhéostat ? Quelles résistances doit-il alors présenter et quelle est la disposition qui épuise le moins la pile ?

(*Bacc. lettres-sciences, Poitiers, juillet 1899.*)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Directeur.

24e Année. — No 16. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 15 Mai 1900.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.

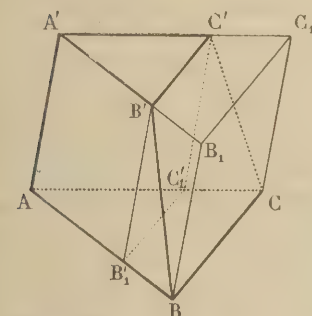
Abonnements.. Librairie Nony et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

VOLUME DE LA PYRAMIDE

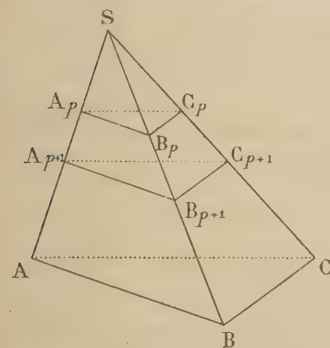
par M. **C. Rech**, professeur au lycée de Lons-le-Saunier.

Remarquons d'abord que des définitions de la somme de deux polyèdres convexes et du volume d'un polyèdre convexe (voir pour ces définitions par exemple le Traité de géométrie de M. Guichard) il résulte immédiatement que le volume de la somme des deux polyèdres est égal à la somme des volumes de ces polyèdres ; et conséquemment, si un polyèdre est la somme de deux autres, son volume est plus grand que le volume de l'un d'eux. En particulier, le volume d'une pyramide est la somme des volumes des troncs de pyramide en lesquels on la décompose par des plans parallèles à la base, et le volume d'un tronc de pyramide triangulaire ABCA'B'C' est compris entre les volumes de deux prismes triangulaires $ABCA'B_1C_1$, $A'B'C'AB'_1C'_1$ ayant respectivement pour bases la grande et la petite base du tronc de pyramide et dont l'une des arêtes latérales est AA' pour chacun d'eux.



Cela posé, considérons une pyramide triangulaire quelconque SABC dont nous désignerons l'aire de la base par B, la hauteur par H, le volume par V.

Divisons la hauteur en n parties égales et par les points de division menons des plans parallèles à la base. Soit s_p l'aire de la section $A_pB_pC_p$ de rang p à partir du sommet; la distance au sommet S de la pyramide du plan de cette section est $\frac{pH}{n}$.



On a donc

$$\frac{s_p}{B} = \frac{\left(\frac{pH}{n}\right)^2}{H^2} = \frac{p^2}{n^2},$$

d'où

$$s_p = B\,\frac{p^2}{n^2}.$$

Le volume de la pyramide est la somme des volumes des troncs de pyramides déterminés par les différentes sections.

Désignons par v_{p+1} le volume de celui ayant pour bases $A_pB_pC_p$ et $A_{p+1}B_{p+1}C_{p+1}$, il est compris entre le volume du prisme dont $A_pB_pC_p$ est la base et A_pA_{p+1} l'arête latérale de sommet A_p et le volume du prisme dont $A_{p+1}B_{p+1}C_{p+1}$ est la base et $A_{p+1}A_p$ l'arête latérale de sommet A_{p+1} ; or, les volumes de ces prismes sont respectivement $s_p \times \frac{H}{n}$ et $s_{p+1} \times \frac{H}{n}$, c'est-à-dire

$$BH\,\frac{p^2}{n^3} \quad \text{et} \quad BH\,\frac{(p+1)^2}{n^3}.$$

On a donc

$$BH\,\frac{p^2}{n^3} < v_{p+1} < BH\,\frac{(p+1)^2}{n^3}.$$

En faisant successivement $p = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ et faisant ensuite la somme membres à membres des inégalités obtenues, on a

$$\frac{BH(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2)}{n^3} < V < \frac{BH(1^2+2^2+\ldots+n^2)}{n^3},$$

c'est-à-dire

$$\frac{BH(n-1)n(2n-1)}{6n^3} < V < \frac{BHn(n+1)(2n+1)}{6n^3},$$

ou

$$\frac{BH}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) < V < \frac{BH}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Faisons maintenant augmenter n indéfiniment d'une façon arbitraire ; le premier et le troisième membre de l'inégalité tendent vers $\frac{BH}{3}$, le premier en croissant, le troisième en décroissant constamment.

On a donc $V = \frac{BH}{3}$.

On passe immédiatement par la méthode connue au volume d'une pyramide à base polygonale.

ÉCOLE NAVALE (1899)

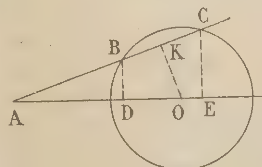
4592. — *On donne une circonférence* O *et un point* A *situé à une distance* $OA = a$ *du centre de cette circonférence. Mener par ce point une sécante* ABC, *telle que le carré de la corde* BC *augmenté de la somme des carrés des distances* BD *et* CE *de ses extrémités au diamètre* OA *soit égale à* m *fois le carré de la distance* OK *du centre à cette sécante :*

$$\overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CE}^2 = m.\overline{OK}^2.$$

On prendra cette dernière distance comme inconnue, $OK = x$. *— Discussion.*

En posant $OB = R$, on a

$$\overline{BC}^2 = 4\overline{BK}^2 = 4(R^2 - x^2)\,;$$



les triangles semblables ABD, AOK, ACE donnent d'ailleurs

$$\frac{BD}{AB} = \frac{x}{a} = \frac{CE}{AC}.$$

La condition du problème revient donc à

$$4(R^2 - x^2) + \frac{x^2}{a^2}(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2) = mx^2.$$

Or
$$AB + AC = 2AK = 2\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (1)$$
et
$$AB.AC = a^2 - R^2, \qquad (2)$$
d'où l'on déduit, en retranchant le double de (2) du carré de (1),
$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 4(a^2 - x^2) - 2(a^2 - R^2) = 2a^2 + 2R^2 - 4x^2.$$

L'équation du problème devient donc
$$4a^2(R^2 - x^2) + 2(a^2 + R^2)x^2 - 4x^4 = ma^2x^2,$$
ou
$$4x^4 - (2R^2 - 2a^2 - ma^2)x^2 - 4a^2R^2 = 0.$$

On vérifie aisément que cette équation subsiste lorsque le point A est à l'intérieur du cercle O.

Discussion. — L'équation bicarrée précédente ayant ses termes extrêmes de signes différents, fournit pour x^2 deux valeurs réelles et de signes contraires. Pour que la valeur positive de x^2 convienne, il faut qu'elle soit inférieure ou égale à R^2 et à a^2, afin que les radicaux figurant dans BC et $AB + AC$ soient réels. Par suite R^2 et a^2 devant être supérieurs à la plus grande racine de l'équation en x^2, rendent positifs le premier membre de cette équation, et *vice versa*. On doit ainsi avoir
$$f(R^2) = R^2(2R^2 + ma^2 - 2a^2) > 0,$$
$$f(a^2) = a^2(6a^2 + ma^2 - 6R^2) > 0,$$
c'est-à-dire
$$m > \frac{2(a^2 - R^2)}{a^2}, \qquad m > \frac{6(R^2 - a^2)}{a^2}.$$

Suivant que $a >$ ou $< R$, la première ou la seconde de ces deux limites de m comprend l'autre.

(C. BROUTIN, lycée de Tourcoing.)

[Ont complètement résolu cette question : MM. C. Bourvéau, à Quimperlé ; H. Pitrat, à Saint-Chamond.
Ont partiellement résolu la question : MM. V. Barol ; R. Barthélemy ; A. Besson ; L. Bois ; A. Chapron ; H. Damoiseau ; P. Delolme ; R. Dickson ; Donnadieu-Mézin ; M. Gondran ; F. Ladevèze ; H. Lefèvre ; S. N.. à Châlons ; R. Turgis ; Vien]

4593. — *Les dimensions d'un bassin tronconique, approchées par excès, sont : rayons des bases* $6^m,3$ *et* $3^m,1$, *hauteur* $5^m,9$. *On demande à quelle approximation commune il faudrait mesurer ces dimensions pour que l'on pût en déduire le volume du bassin à un mètre cube près.*

Le volume du tronc de cône étant inférieur à
$$\frac{1}{3}\pi \times 5,9\left(\overline{6,3}^2 + \overline{3,1}^2 + \overline{6,3} \times \overline{3,1}\right) < 500,$$
il suffira d'obtenir pour le résultat une erreur relative inférieure à $\frac{1}{500}$. Or on sait que dans un produit l'erreur relative est la somme des erreurs relatives des facteurs.

Si on prend tous les nombres avec p décimales exactes, les erreurs relatives sur les termes de la parenthèse seront :

$\frac{2}{63}\cdot\frac{1}{10^{p-1}}$ pour le carré du rayon de la grande base,

$\frac{2}{31}\cdot\frac{1}{10^{p-1}}$ — — — — petite base,

$\left(\frac{1}{63} + \frac{1}{31}\right)\frac{1}{10^{p-1}}$ pour le produit des rayons.

Donc l'erreur relative de la parenthèse sera $\frac{2}{31}\cdot\frac{1}{10^{p-1}}$,

l'erreur relative sur la hauteur sera $\frac{1}{59}\cdot\frac{1}{10^{p-1}}$,

l'erreur relative sur π sera $\frac{1}{31}\cdot\frac{1}{10^{p-1}}$.

Donc l'erreur relative du produit sera inférieure à
$$\left(\frac{3}{31} + \frac{1}{59}\right)\frac{1}{10^{p-1}} = \frac{208}{1829}\cdot\frac{1}{10^{p-1}} < \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10^{p-1}}.$$

On aura donc l'approximation voulue en prenant p tel que
$$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10^{p-1}} < \frac{1}{500},$$
ou
$$8 \times 10^{p-1} > 500.$$

Il suffit donc de prendre $p = 3$, c'est-à-dire d'avoir les diverses longueurs à 1 millimètre près, et π avec 3 décimales.

[M. G. Foucry, école normale de Châlons-sur-Marne. a résolu la même question.]

4594. — *Calculer les valeurs de x comprises entre zéro et* 360° *satisfaisant à l'équation*
$$\sin(\varphi + x) = \operatorname{tg}^2(62° - \varphi),$$
pour les valeurs de φ *comprises entre zéro et* 90° *données par l'équation*
$$\sin 2\varphi = \operatorname{tg}^2(228°12'21'')\cos^3(315°46'51'').$$

I. — *Calcul des valeurs de* φ.

Réduisons d'abord les arcs donnés au premier quadrant ; en observant que $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg}(a - 180°)$ et $\cos a = \sin(a - 270°)$, on a
$$\operatorname{tg} 228°12'21'' = \operatorname{tg} 48°12'21'',$$
$$\cos 315°46'51'' = \sin 45°46'51''.$$

En prenant les logarithmes des deux membres de la seconde équation, il vient alors
$$\log\sin 2\varphi = 2\log\operatorname{tg} 48°12'21'' + 3\log\sin 45°46'51''.$$

Les tables à 7 décimales donnent ensuite
$$\log\operatorname{tg} 48°12'21'' = 0,0487013,$$
$$\log\sin 45°46'51'' = \overline{1},8553236 ;$$
donc
$$\log\sin 2\varphi = 2 \times 0,0487013 + 3 \times \overline{1},8553236 = \overline{1},6633734.$$

L'angle aigu 2φ vérifiant cette équation est donné par
$$2\varphi = 27°25'45'',2,$$
$$\varphi = 13°42'52'',6.$$

L'arc 2φ étant déterminé par son sinus, son supplément correspond au même sinus, ce qui donne comme seconde valeur de φ,
$$\varphi' = 90° - 13°42'52'',6 = 76°17'7'',4.$$

II. — *Calcul des valeurs de* x.

La première valeur de φ rendant l'arc $62° - \varphi$ supérieur à $62° - 14° = 48°$, $\operatorname{tg}(62° - \varphi)$ est supérieur à 1 et ne peut représenter un sinus. A cette valeur de φ ne correspond aucune valeur de x.

De la seconde valeur de φ', on déduit
$$\operatorname{tg}(62° - \varphi') = -\operatorname{tg} 14°17'7'',4.$$

En posant
$$\sin\alpha = \operatorname{tg}^2 14°17'7'',4,$$
on a, en employant les tables,
$$\log\sin\alpha = 2\log\operatorname{tg} 14°17'7'',4 = 2 \times \overline{1},4059014 = \overline{2},8118028,$$
$$\alpha = 3°43'2'',35.$$

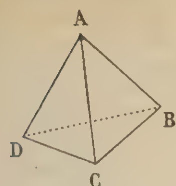
Par suite
$$\sin(\varphi' + x) = \sin\alpha,$$
d'où
$$\varphi' + x = k.360 + \alpha,$$
ou
$$\varphi' + x = (2k' + 1)180° - \alpha.$$

L'arc $\varphi' + x$ devant être compris entre 76° et $76° + 360°$, on doit prendre $k = 1$ et $k' = 0$, ce qui donne les deux arcs
$$x = 360° + \alpha - \varphi' = 287°25'54'',95$$
et
$$x = 180° - \alpha - \varphi' = 99°59'0'',25.$$

(ANTONIN BESSON, à Sardon.)

[Ont résolu la même question; MM. L. Bois, école professionnelle de Vierzon ; G. Foucry, école normale de Châlons.]

4595. — *Un tétraèdre* ABCD *a pour base* BCD *un triangle équilatéral, et la face* ABC *est un triangle isocèle de sommet* A (AB = AC). *On donne le côté*



BC = 95^{mm}

du triangle équilatéral BCD *et les deux angles*

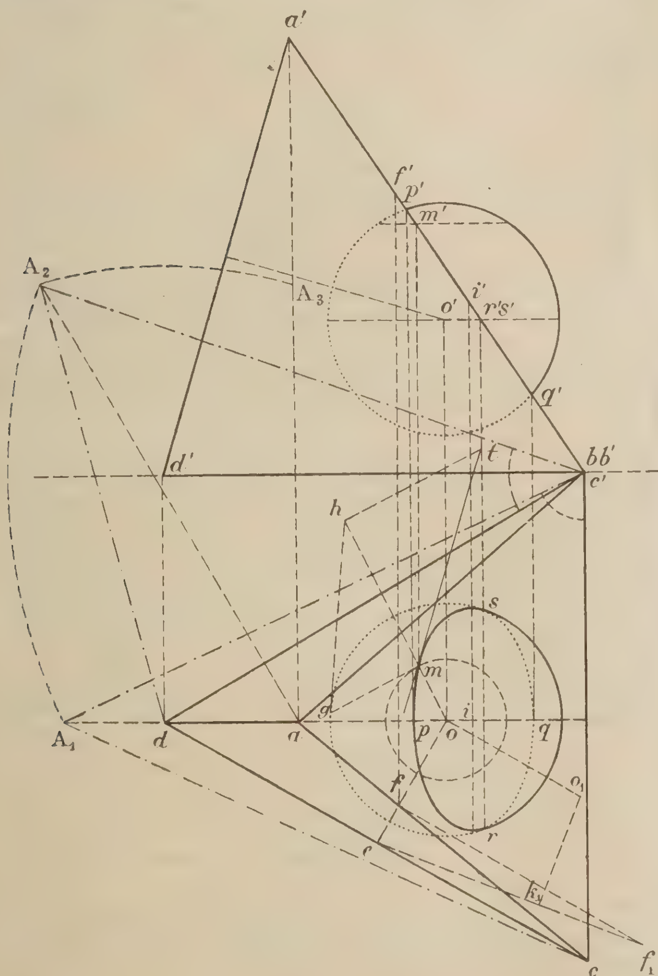
ABD = 50°, ABC = 65°.

Construire les projections de ce tétraèdre, dont la base BCD *est dans le plan horizontal de cote zéro, sur le plan horizontal et sur un plan vertical perpendiculaire à* BC.

Trouver le centre O *de la sphère circonscrite. De ce point comme centre on décrit une sphère* S *tangente aux faces* ABD, ADC *: intersection de cette sphère avec la face* ABC. *Construire la tangente en un point de cette courbe d'intersection. Déterminer les points qui se trouvent en projection horizontale sur le contour apparent de la sphère.*

Dans le tracé graphique on supposera que le tétraèdre ABCD *et la sphère* S *sont deux corps opaques se pénétrant mutuellement.*

Projections du tétraèdre. — Après avoir placé la base ABC, on construit le rabattement bcA_1 de la face ABC autour de BC, puis le rabattement de la face ABD autour de BD ; en relevant on a



a, puis la cote de A en prenant sur la perpendiculaire en a à da le point A_3 tel que $dA_3 = dA_2$. On a ainsi la projection horizontale $abcd$ et la projection verticale $a'b'c'd'$ sur un plan vertical perpendiculaire en B à BC.

Centre de la sphère circonscrite au tétraèdre. — Ce point se projette horizontalement au centre o du cercle abc et verticalement sur la trace verticale du plan de bout perpendiculaire au milieu de l'arête AD.

Sphère ayant son centre en O *et tangente aux faces* ABD, ADC. En menant par O un plan vertical perpendiculaire à cd, ce plan coupe la face ACD suivant une droite rabattue en ef_1 autour de la trace horizontale du plan ; le point O se rabat d'ailleurs en o_1 et en abaissant sur ef_1 la perpendiculaire o_1k_1 on a en vraie grandeur le rayon de la sphère considérée. On peut alors tracer les contours apparents de cette sphère.

Intersection de la sphère avec la face ABC. — Un plan horizontal quelconque coupe la sphère suivant un petit cercle et la face ABC suivant une droite de bout ; l'intersection de ces deux lignes fournit un point (m, m') de l'intersection. Cette intersection est d'ailleurs un petit cercle projeté verticalement suivant la droite $p'q'$ et horizontalement suivant une ellipse ayant pq comme petit axe ; en traçant le grand axe qui passe par le milieu i de pq et est égal à $p'q'$, on peut aussi déterminer directement cette ellipse.

Tangente au point (m, m'). — C'est l'intersection de la face ABC avec le plan tangent en (m, m') à la sphère. Elevons en m à mo une perpendiculaire qui rencontre le cercle o en g, puis menons la tangente en g jusqu'à son intersection h avec om prolongé ; ce point h appartient visiblement à la trace horizontale du plan tangent sur le plan horizontal mené par O : la tangente cherchée passe donc par le point t, intersection des traces du plan tangent et de la face ABC sur le plan en question.

Points de la projection horizontale situés sur le contour apparent horizontal de la sphère. — Ces points (r, r') et (s, s') s'obtiennent en considérant le plan horizontal mené par O.

(R. DICKSON, à Angoulême.)

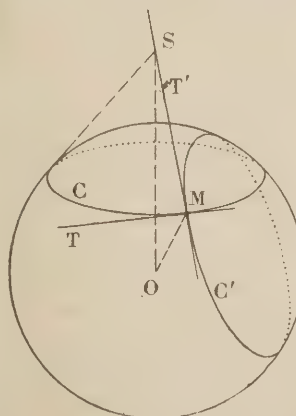
[Ont envoyé de bonnes épures : MM. C. Broutin, lycée de Tourcoing ; A. Doué, lycée de Toulon ; H. Lefèvre ; P. Letourneur, lycée du Mans ; R. Turgis.]

4597. — *Démontrer que, sur la sphère, la condition nécessaire et suffisante pour que deux arcs de petit cercle soient normaux est que le plan de l'un passe par le sommet du cône circonscrit à la sphère le long de l'autre.*

En déduire que tous les petits cercles normaux à un petit cercle donné et passant par un point donné passent par un second point fixe.

Mener, par une construction effectuée sur la sphère, un petit cercle normal à un petit cercle donné et passant par deux points donnés.

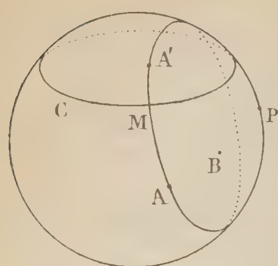
Soient C et C′ deux cercles normaux, c'est-à-dire se coupant en un point M tel que les tangentes MT, MT′ à ces cercles sont rectangulaires.



Le plan TMT′ étant tangent à la sphère passe par le sommet S du cône circonscrit le long du cercle C ; d'ailleurs la tangente MT′ étant perpendiculaire à MT appartient au plan OMS perpendiculaire à MT, et passe par suite au point S. Réciproquement, tout petit cercle C′ tangent à SM en M est normal au cercle C, puisque l'angle TMS est droit.

Il en résulte que les cercles C′ normaux au cercle C et passant par un point donné A passent

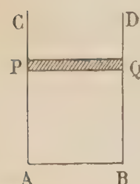
en même temps par le second point de rencontre A′ de la droite SA avec la sphère O.



Déterminons en particulier le cercle C′ qui passe par un second point donné B. A cet effet, on fait passer en A deux cercles normaux au cercle C et qui se coupent en A′ (le pôle P de l'un de ces cercles s'obtient en prenant l'intersection d'un grand cercle tangent en un point quelconque M du cercle C avec le grand cercle normal au milieu de MA). Il ne reste plus qu'à déterminer le pôle du cercle passant par trois points donnés A, A′ et B, ce qu'on sait faire.

[M. E. Foucart a complètement résolu la question : MM. R. Dickson, M. Oger et R. Turgis l'ont partiellement résolue.]

4598. — *Dans un cylindre creux de rayon* $R = 0^{m},11$, *fermé hermétiquement à sa partie inférieure* AB, *peut glisser un piston plein* PQ *du poids de* 8^{kg} *qui le ferme hermétiquement à sa partie supérieure.*



Ce cylindre ABPQ *plongé dans l'air est lui-même rempli d'air sec.*

Lorsque la température intérieure est de 0° *et la pression extérieure de* 1 *atmosphère, la distance entre la base* AB *et la face inférieure du piston* PQ, *supposé en équilibre sous l'action des pressions intérieure et extérieure, est de* 25^{cm}.

Cela posé, si la pression extérieure était de $1 + \frac{1}{100}$ *d'atmosphère et si la température intérieure était de* 100°, *la masse d'air comprise dans le cylindre restant la même, quelle serait la distance de la face inférieure du piston* PQ *à la base* AB *dans ces nouvelles conditions ?*

Quel poids faudrait-il ajouter au piston pour que cette distance fût la même que dans les conditions primitives, c'est-à-dire égale à 25^{cm} ?

On ne tiendra pas compte de la dilatation du cylindre.

1° Etant donné le volume V occupé par une masse gazeuse à une température t et sous une pression H, on détermine le volume V′ occupé par la même masse gazeuse à la température t' et sous une pression H′ en appliquant la formule qui résume les lois de Mariotte et de Gay-Lussac :

$$\frac{VH}{1+\alpha t} = \frac{V'H'}{1+\alpha t'}.$$

Dans le cas du problème,

$V = \pi \times \overline{11}^2 \times 25$; $\quad H = 1^{kg},033 + \frac{8}{\pi \times \overline{11}^2}$; $\quad t = 0°$;

$V' = \pi \times \overline{11}^2 \times x$ (x désignant la nouvelle distance de la face inférieure du piston à la base AB); $H' = 1,033 + 0,01033 + \frac{8}{\pi \times \overline{11}^2}$;

$t' = 100°$. On a donc

$$\pi \times \overline{11}^2 \times 25\left(1,033 + \frac{8}{\pi \times \overline{11}^2}\right)$$
$$= \frac{\pi \times \overline{11}^2 \times x\left(1,033 + 0,01033 + \frac{8}{\pi \times \overline{11}^2}\right)}{1 + \frac{100}{273}},$$

d'où l'on tire $\quad x = 33^{cm},8$.

2° Le volume du gaz ne variant pas, on a, en appelant P le poids à ajouter au piston,

$$1,033 + \frac{8}{\pi \times \overline{11}^2} = \frac{1,033 + 0,01033 + \frac{8+P}{\pi \times \overline{11}^2}}{1 + \frac{100}{273}},$$

d'où $\quad P = 142^{kg},9$.

(E. FOUCART, à Issy.)

[Ont résolu la même question : MM. L. Bois ; G. Foucry ; H. Lefèvre ; E. Le Maigre ; G. Le Sage ; B. Mathé ; M. Oger ; Pichon ; J. Sallaud.]

ARITHMÉTIQUE

4785. — *Prouver que tout nombre premier supérieur à* 5 *a un multiple de la forme* 11...11, *le nombre de* 1 *étant inférieur au nombre lui-même.*

Soit p un nombre premier supérieur à 5. La fraction $\frac{1}{p}$, dont le dénominateur est premier avec 10, se réduit à une fraction décimale périodique simple, la période P ayant moins de p chiffres. On a alors

$$\frac{1}{p} = \frac{P}{999\ldots},$$

ou $\quad 9 \times (111\ldots) = Pp.$

p divisant le produit $9 \times (111\ldots)$ et étant premier avec 9, divise le nombre 111..., composé de moins de p chiffres 1.

(A. GOUIRAND, lycée de Nîmes.)

Autre solution. — D'après le théorème de Fermat,

$$10^{p-1} - 1 = \text{mult. } p,$$

ou $\quad (10-1)(10^{p-2} + 10^{p-3} + \ldots + 1) = \text{mult. } p.$

Or p est premier avec $10 - 1 = 9$; donc il divise le nombre $10^{p-2} + 10^{p-3} + \ldots + 1$ formé de $p-1$ chiffres 1.

(G. DE FRANCE, à Versailles.)

Remarque. — Le nombre de chiffres 1 peut être égal à $p-1$; cela se présente pour $p = 7$. Il peut être inférieur à $p-1$ et dans ce cas c'est un diviseur de $p-1$, car la fraction $\frac{1}{p}$ donne une fraction périodique simple dont les chiffres se reproduisent de $p-1$ en $p-1$. Si la période est de moins de $p-1$ chiffres, l'ensemble de $p-1$ chiffres consécutifs se décompose en groupes formant la période la plus simple, le nombre des chiffres de celle-ci est donc diviseur de $p-1$.

[Ont résolu la même question : MM. F. Clabault ; Duvergé et Sainte-Laguë ; G. Foucry ; J. Haag ; J. Hébré ; D. Kœnig ; A. Lecoutour ; D. Lwow ; P. Plisson.]

ALGÈBRE

4745. — 1° *Construire un triangle* ABC *connaissant le côté* $BC = a$, *l'angle* B *et le point* D *où la bissectrice de l'angle* A *rencontre* BC ;

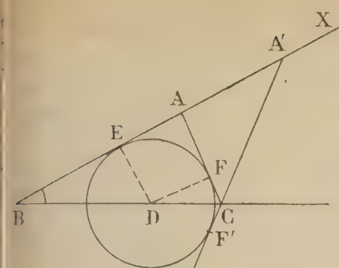
2° *Trouver et rendre calculables par logarithmes les valeurs des côtés inconnus ;*

3° *Le point* D *peut-il occuper une position quelconque sur* BC, *les autres données ne variant pas ?*

(*Bacc. lettres-math.*, *Rennes, juillet 1899.*)

1° En remarquant que les côtés AB et AC sont équidistants

du point D, on est conduit à la construction suivante :



Par le point B on mène la droite BX faisant avec le côté donné BC l'angle donné B, puis du point D comme centre on trace un cercle tangent en E à BX ; en menant ensuite du point C la tangente CF au cercle D, on obtient le triangle cherché ABC.

La seconde tangente CF' au cercle D fournit une seconde solution, également acceptable pourvu que cette tangente coupe la demi-droite BX.

Discussion. — Le problème n'est évidemment possible qu'autant que le point C est extérieur au cercle D ou sur sa circonférence. Cette condition s'exprime par

$$DC \geqslant DE,$$

ou, en posant $BD = d$,

$$a - d \geqslant d \sin B,$$

ou

$$d \leqslant \frac{a}{1 + \sin B}.$$

Si l'angle B est aigu, la solution ABC convient toujours ; la solution A'BC ne peut convenir que lorsque

$$\widehat{BCF'} > B,$$

ou, en observant que les deux angles sont aigus,

$$\sin BCF' > \sin B.$$

Or

$$\sin BCF' = \frac{DF'}{DC} = \frac{DE}{a-d},$$

$$\sin B = \frac{DE}{d}.$$

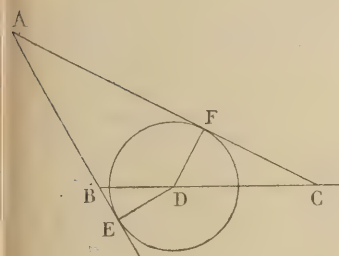
L'inégalité précédente devient donc

$$\frac{1}{a-d} > \frac{1}{d},$$

ou, comme $d < a$,

$$d > \frac{a}{2}.$$

Si l'angle B est droit, les triangles ABC et A'BC étant symétriques sont tous deux acceptables.



Si l'angle B est obtus, on doit avoir, pour que le problème soit possible,

$$\widehat{DCF} < 180° - B,$$

ou, comme les deux angles sont aigus,

$$\sin DCF < \sin(180° - B) = \sin B.$$

On a encore

$$\sin DCF = \frac{DE}{a-d},$$

$$\sin B = \frac{DE}{d};$$

donc

$$\frac{1}{a-d} < \frac{1}{d},$$

d'où on déduit

$$d < \frac{a}{2}.$$

La discussion se résume donc ainsi :

$B < 90°$ $\begin{cases} d \leqslant \frac{a}{2}, & 1 \text{ solution}, \\ \frac{a}{2} < d \leqslant \frac{a}{1+\sin B}, & 2 \text{ solutions distinctes, ou confondues ;} \end{cases}$

$B = 90°$ $d < \frac{a}{2}$, 1 solution :

$B > 90°$ $d < \frac{a}{2}$, 1 solution.

On peut d'ailleurs remarquer que si $d < \frac{a}{2}$ le côté AB adjacent au plus petit segment de BC doit être inférieur à AC, donc $B < C$; ce dernier angle est par suite nécessairement aigu. Inversement, si $B > C$, ce qui a toujours lieu si $B \geqslant 90°$, $d < \frac{a}{2}$.

2° Posons $AB = x$ et $AC = y$. On a

$$\frac{x}{y} = \frac{d}{a-d},$$

ou, en remplaçant x et y par les quantités proportionnelles sin C et sin B,

$$\sin C = \frac{d \sin B}{a-d}.$$

Cette formule logarithmique permet de calculer l'angle C si $a > d(1 + \sin B)$, car on doit avoir

$$0 < \frac{d \sin B}{a-d} < 1,$$

ce qui donne $\quad a > d, \quad a \geqslant d(1 + \sin B)$,

inégalités dont la deuxième entraîne la première.

Au moyen de la relation des sinus, on en déduit ensuite pour x et y les expressions logarithmiques

$$x = \frac{a \sin C}{\sin(B+C)}, \qquad y = \frac{a \sin B}{\sin(B+C)}.$$

3° D'après ce qu'on a vu au 1°, le point D ne peut varier qu'entre B et un certain point D' tel que

$$BD' = \frac{a}{1 + \sin B} \qquad \text{si B est aigu,}$$

ou

$$BD' = \frac{a}{2} \qquad \text{si B est obtus.}$$

Dans le premier cas, D' correspond au triangle ABC rectangle en C ; et dans le second cas, D' est le milieu de BC.

(G. ARMAINGAUD.)

Remarque. — Pour avoir AB et AC donnés par des formules logarithmiques, il y a avantage à prendre C pour angle auxiliaire, cet angle ayant une signification géométrique, plutôt que de chercher à rendre calculables par logarithmes les racines d'une équation du 2e degré.

[Ont complètement résolu la question : MM. d'Amphernet ; L. Audoyer ; R. Barthélemy ; C. Billionnet ; R. Bouvaist ; M. Brun ; F. Clabault ; L. Corbin ; Duvergé et Sainte-Laguë ; G. Foucry ; J. Haag ; J. Hébré ; E. Hélary ; J. Lamotte ; J. Lehmann ; Mengailhou ; R. Mouzon ; Noël ; L. Ollié ; Portalier ; L. de Praneuf ; M. Royer ; Szivessy ; P. Thonet ; P. Valentin.

Ont partiellement résolu la question : MM. J. Cabrol ; R. Desguin ; R. Henry ; Jacquet ; de Jarny ; L. Karkowski ; D. Lwow ; M. B., à V. ; C. Marie ; L. Richard ; P. Schwab ; Sinoquet ; Vial.]

4783. — *Trouver la relation qui doit exister entre m et m' pour que le maximum et le minimum de la fraction*

$$\frac{x^2 + 2mx + 1}{x^2 + 2m'x + 1}$$

soient égaux et de signes contraires. Quels sont-ils pour $m = 5$?

(Bacc. lettres-sciences, Paris, mars-avril 1900.)

Egalons la fraction à y et chassons le dénominateur ; il vient

$$(y-1)x^2 + 2(m'y - m)x + y - 1 = 0.$$

Pour qu'à une valeur donnée de y corresponde une valeur réelle de x, il faut et il suffit qu'on ait

$$(m'y - m)^2 - (y-1)^2 \geqslant 0,$$

ou, en décomposant la différence de carrés du premier membre,

$$[(m'-1)y-(m-1)][(m'+1)y-(m+1)] \geqslant 0.$$

Le maximum et le minimum de y sont ainsi fournis par l'une des quantités

$$\frac{m-1}{m'-1} \quad \text{et} \quad \frac{m+1}{m'+1}.$$

La condition énoncée devient donc

$$\frac{m-1}{m'-1} = -\frac{m+1}{m'+1},$$

ou, en simplifiant,

$$mm' = 1.$$

Pour $m = 5$, $m' = \frac{1}{5}$; le maximum et le minimum de la fraction sont alors égaux à ± 5.

On peut aussi obtenir immédiatement la relation précédente en écrivant que l'équation

$$(m'y-m)^2-(y-1)^2 = 0,$$

ou $$(m'^2-1)y^2-2(mm'-1)y+m^2-1 = 0$$

a ses deux racines égales et de signes contraires, ce qui revient à annuler le coefficient de y.

(E. ANZEMBERGER, lycée de Lyon.)

[Ont résolu la même question : MM. Aubert ; L. Barberot ; H. Blanc ; M. Brun ; F. Clabault ; J. Crétinon ; A. Delaire ; G. Foucry ; G. de France ; J. Germa ; M. Gondran ; J. Hébré ; Hugonnier-Ginet ; de Jarny ; D. Lwow ; P. Marion ; L. Maubeck ; Mengailhou ; R. Mouzon ; R. Paucot ; J. Pendariès ; P. Plisson ; A. Sauvageon ; Sinoquet ; P. Zlatco ; R. Barthélemy ; F. Boivin ; J. Haag ; R. Henry ; L. de Praneuf.]

GÉOMÉTRIE

4446. — *On donne un point* A, *un cercle de centre* O *et une droite* XY *perpendiculaire à* OA ; *on construit le pôle* C *d'une sécante* ABD *par rapport au cercle* O ; *on projette enfin le point* C *sur* XY *en* E, *et on demande :*

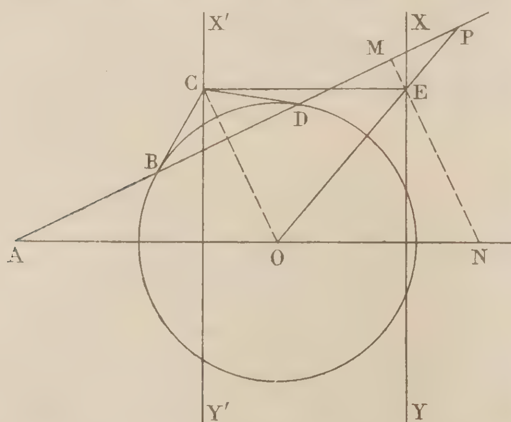
1° *Le lieu du point* M, *projection du point* E *sur la sécante variable* ABD ;

2° *Le lieu du point* P *où la sécante* ABD *rencontre la droite* OE ;

3° *De discuter le lieu du point* P ;

4° *De trouver la position que doit occuper la droite* XY *pour que le lieu du point* M *coïncide avec celui du point* P.

1° Le point C, pôle de la droite ABD, se trouve sur la polaire



X'Y' du point A par rapport au cercle O. En prolongeant EM jusqu'à sa rencontre en N avec AO, EM étant parallèle à OC, et CE à AO, OCEN est un parallélogramme et on a

$$\text{ON} = \text{CE} ;$$

ce qui montre que le point N est fixe, de sorte que le lieu de M est la circonférence de diamètre AN.

2° On voit aisément qu'à toute droite OE correspond une seule sécante ABD, et réciproquement ; le point P, commun à ces deux droites, décrit donc une conique passant par les points fixes A et O et ayant un de ses axes confondus avec AO par raison de symétrie.

3° Pour connaître la nature de cette conique, cherchons si elle admet des points à l'infini. Pour qu'il y en ait, il faut que la droite OE soit parallèle à ABD, c'est-à-dire perpendiculaire sur EN ; l'angle OEN étant alors droit, le point E appartient au cercle de diamètre ON.

Pour que la droite XY coupe le cercle ON en deux points E, il faut que cette droite soit placée du côté opposé à A par rapport au point O ; lorsque cette condition, d'ailleurs suffisante, est remplie, la conique lieu de P est une hyperbole.

Lorsque le point A et la droite XY sont d'un même côté par rapport à O, la conique est une ellipse.

Enfin lorsque X'Y' passe par O, A est à l'infini, et alors la conique n'ayant qu'un seul point à l'infini est une parabole admettant X'Y' comme tangente au sommet. (Nous ne supposons pas que XY passe par O, parce que dans ce cas OE se confondant avec XY, le lieu dégénère en une droite).

4° Pour que les lieux des points M et P coïncident, il faut que leurs axes AN et AO se confondent, ce qui exige que le segment ON = CE soit nul. La droite XY se confond alors avec la polaire X'Y' du point A, et les points M, P, confondus avec le milieu de la corde BD, décrivent le cercle de diamètre AO.

(L. OLLIÉ, à Auch.)

[Ont résolu la même question : MM. H. Michel, lycée de Douai ; J. Moisson.]

4734. — *La formule de Brassine*

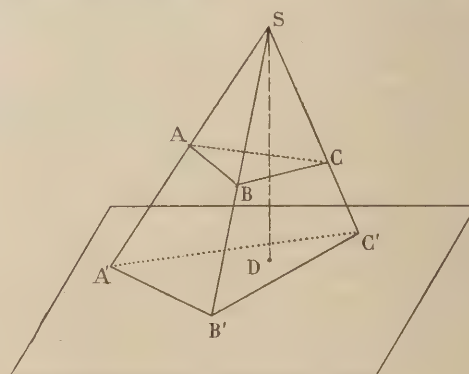
$$6\text{VR} = \sqrt{\sigma(\sigma-aa')(\sigma-bb')(\sigma-cc')},$$
$$aa'+bb'+cc' = 2\sigma,$$

dans laquelle a *et* a', b *et* b', c *et* c' *sont les couples d'arêtes opposées d'un tétraèdre,* V *le volume,* R *le rayon de la sphère circonscrite, peut se déduire par rayons vecteurs réciproques de la formule*

$$\text{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

(La formule de Brassine est l'analogue, pour l'espace, de la formule plane $abc = 4\text{RS}$.)

Soient SABC un tétraèdre et SD le diamètre de la sphère



circonscrite qui passe par S ; faisons une inversion de pôle S et de puissance $\overline{\text{SD}}^2 = 4\text{R}^2$. Les points inverses de A, B, C sont des points A', B', C' situés dans un plan perpendiculaire

à SD en D. On sait que

$$B'C' = BC \times \frac{4R^2}{SB.SC} = \frac{a}{b'c'} 4R^2 = aa' \frac{4R^2}{a'b'c'}.$$

Il résulte de là que

$$B'C' + C'A' + A'B' = \frac{4R^2}{a'b'c'}(aa' + bb' + cc') = \frac{4R^2}{a'b'c'} 2\sigma,$$

$$C'A' + A'B' - B'C' = \frac{4R^2}{a'b'c'} 2(\sigma - aa'),$$

de sorte qu'on a

$$\text{Surf. } A'B'C' = \frac{16R^4}{a'^2b'^2c'^2}\sqrt{\sigma(\sigma - aa')(\sigma - bb')(\sigma - cc')}.$$

D'autre part, les tétraèdres SABC, SA'B'C' ayant un trièdre commun, on a

$$\frac{\text{Vol. } SA'B'C'}{\text{Vol. } SABC} = \frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC} = \frac{(4R^2)^3}{a'^2b'^2c'^2},$$

d'où

$$\text{Vol. } SA'B'C' = \text{Surf. } A'B'C' \times \frac{1}{3} 2R = V. \frac{64R^6}{a'^2b'^2c'^2}.$$

En remplaçant Surf. A'B'C' par l'expression trouvée plus haut, et en simplifiant, on trouve immédiatement

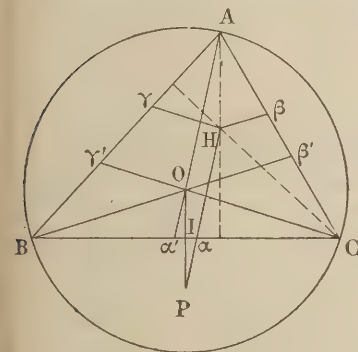
$$\sqrt{\sigma(\sigma - aa')(\sigma - bb')(\sigma - cc')} = 6VR.$$

Remarque. — De même que la condition d'existence d'un triangle de côtés a, b, c est que les facteurs $p - a$, $p - b$, $p - c$ qui figurent dans l'expression de la surface soient positifs, la condition d'existence d'un tétraèdre d'arêtes a, a', b, b', c, c' est que les facteurs $\sigma - aa'$, $\sigma - bb'$, $\sigma - cc'$ soient positifs, autrement dit qu'un des produits aa', bb', cc' soit compris entre la somme et la différence des autres.

En particulier, si le tétraèdre est à arêtes opposées égales $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$, les faces sont égales et elles ont tous leurs angles aigus ; ce cas particulier peut facilement se traiter directement.

4786. — *Par l'orthocentre* H *d'un triangle* ABC *inscrit dans le cercle* O, *on mène des parallèles aux droites* OA, OB, OC ; *ces parallèles rencontrent respectivement en* α, β, γ *les côtés opposés* BC, CA, AB. *Démontrer que les trois droites* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *sont concourantes.*

Prolongeons les parallèles AO et $H\alpha$ jusqu'à leurs rencontres en α' et P avec BC et la perpendiculaire OI à BC.



On sait que $AH = 2OI$; d'ailleurs $AH = OP$ comme côtés opposés d'un parallélogramme ; donc $2OI = OP$, ce qui montre que I est le milieu de OP et par suite aussi de $\alpha\alpha'$, à cause de la similitude des triangles $OI\alpha$ et $PI\alpha$.

On peut donc écrire

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{\alpha' C}{\alpha' B}.$$

En considérant les points de rencontre β' et γ' de BO et CO avec les côtés CA et AB, on aurait de même

$$\frac{\beta C}{\beta A} = \frac{\beta' A}{\beta' C},$$

$$\frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{\gamma' B}{\gamma' A}.$$

Ces trois égalités multipliées membre à membre donnent

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{\alpha' C}{\alpha' B} \cdot \frac{\beta' A}{\beta' C} \cdot \frac{\gamma' B}{\gamma' A}.$$

Or en vertu du théorème de Céva appliqué aux droites concourantes $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$, le second membre de l'égalité précédente est égal à -1 ; donc d'après la réciproque du même théorème, les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sont concourantes.

(AUBERT, lycée de Clermont-Ferrand.)

[Ont résolu la même question : MM. H. Blanc ; Duvergé et Sainte-Laguë ; E. Licope ; D. Lvow ; P. Plisson ; H. Rimbaud ; P. Thonet ; P. Zlatco ; J. Haag.]

TRIGONOMÉTRIE

3886. — *Dans un triangle* ABC *on inscrit un second triangle* A'B'C' *tel que les angles* BA'C', CB'A', AC'B' *soient égaux ; démontrer que les deux triangles* ABC, A'B'C' *sont semblables et trouver le rapport de similitude connaissant l'angle* $BA'C' = \theta$.

On a $\widehat{C'A'B'} = \widehat{BA'B'} - \theta.$

Mais, dans le triangle A'B'C, l'angle BA'B', extérieur au triangle B'A'C, est égal à $\theta + C$; donc

$$C'A'B' = \theta + \widehat{C} - \theta = \widehat{C}.$$

On démontrerait de même que

$$\widehat{A'B'C'} = \widehat{A}$$

et

$$\widehat{B'C'A'} = \widehat{B},$$

ce qui justifie la première partie.

Calculons maintenant en fonction des angles A, B, C et θ le rapport k des deux côtés homologues C'A' et BC.

On a

$$k = \frac{C'A'}{BC} = \frac{C'A'}{BA' + A'C}.$$

Or

$$\frac{BA'}{C'A'} = \frac{\sin(B+\theta)}{\sin B}$$

et

$$\frac{A'C}{A'B'} = \frac{\sin\theta}{\sin C}.$$

Par suite

$$k = \frac{C'A'}{\dfrac{C'A'\sin(B+\theta)}{\sin B} + \dfrac{A'B'\sin\theta}{\sin C}},$$

ou, en observant que

$$\frac{C'A'}{A'B'} = \frac{BC}{CA} = \frac{\sin A}{\sin B},$$

$$k = \frac{\sin A}{\dfrac{\sin A \sin(B+\theta)}{\sin B} + \dfrac{\sin B \sin\theta}{\sin C}}$$

$$= \frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin A \sin C \sin(B+\theta) + \sin^2 B \sin\theta}.$$

(FITZ-PATRICK.)

Remarque. — Le rapport de similitude doit évidemment être symétrique par rapport aux angles A, B, C. Le numérateur de k remplit cette condition. Cherchons donc à transformer le dénominateur. On peut écrire

$$\sin A \sin C \sin(B+\theta) + \sin^2 B \sin\theta$$
$$= \sin\theta(\sin A \sin C \cos B + 2\sin^2 B) + \cos\theta \sin A \sin B \sin C.$$

Or (voir *Relations entre les éléments d'un triangle*, p. 112).

$$2\sin A \sin C \cos B = \sin^2 A + \sin^2 C - \sin^2 B.$$

Donc $2\sin A \sin C \cos B + 2\sin^2 B = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C,$

et

$$k = \frac{\sin A \sin B \sin C}{\frac{1}{2}\sin\theta(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) + \cos\theta \sin A \sin B \sin C}.$$

[M. H. Mouchelet, lycée Condorcet, à résolu la même question.]

PHYSIQUE

4782. — *Un vase fermé, dont on négligera la dilatation, a une capacité de* 1^{mc}. *Il contient* 900^{gr} *d'eau et* 1600^{gr} *d'oxygène, et sa température est de 500°. On demande quelle est en kilogrammes, par centimètre carré, la pression à l'intérieur de ce vase, sachant qu'à cette température l'eau est entièrement réduite en vapeur.*

La vapeur d'eau et l'oxygène ont pour densités, par rapport à l'hydrogène, respectivement 9 et 16. La masse du litre d'hydrogène à la température de 0° et sous la pression de 76^{cm} *de mercure est de 8 centigrammes. Coefficient de dilatation des gaz,* $\frac{1}{273}$.

Densité du mercure, 13,6.

(*Bacc. lettres-math., Paris, mars-avril 1900.*)

La force élastique F demandée est égale à la somme $f + f'$ des forces élastiques de l'oxygène et de la vapeur d'eau.

La force élastique f de l'oxygène est donnée par la formule

$$M = V \times d \times a \times \frac{f}{76} \times \frac{1}{1+\alpha t},$$

dans laquelle $M = 1600^{gr}$, $V = 1000^{lit}$, $\alpha = \frac{1}{273}$ et $t = 500°$. Calculons $d \times a$, c'est-à-dire la masse du litre d'oxygène à 0° et 76^{cm}. La masse du litre d'hydrogène dans les mêmes conditions étant $0^{gr},08$, la masse de l'oxygène est 16 fois plus grande : $0,08 \times 16 = 1^{gr},28$. On a donc

$$1600 = \frac{1000 \times 1,28 \times f \times 273}{76\,(500+273)},$$

d'où

$$f = \frac{1600 \times 76 \times 773}{1000 \times 1,28 \times 273} = 268^{cm},99.$$

La force élastique f' de la vapeur d'eau est donnée par la formule

$$M' = V \times d' \times a \times \frac{f'}{76} \times \frac{1}{1+\alpha t}.$$

dans laquelle $M' = 900^{gr}$, $V = 1000^{lit}$, $\alpha = \frac{1}{273}$ et $t = 500°$, et $d' \times a = 0,08 \times 9 = 0^{gr},72$. On a donc

$$900 = \frac{1000 \times 0,72 \times f' \times 273}{76\,(500+273)},$$

d'où

$$f' = \frac{900 \times 76 \times 773}{1000 \times 0,72 \times 273} = 268^{cm},99.$$

Par suite $F = f + f' = 268,99 + 268,99 = 537^{cm},98$.

Cette pression exprimée en kilogrammes a pour valeur

$$\frac{537,98 \times 13,6}{1000} = 7^{kg},316.$$

(LÉON THIRODE, à Dôle.)

[Ont résolu la même question : MM. L. Audoyer ; A. Bertagna ; H. Blanc ; G. Claudon ; G. Foucry ; J. Germa ; M. Gondran ; J. Haag ; R. Henry ; de Jarny ; A. Lecoutour ; Lemoyne ; D. Lwow ; P. Marion ; A. Meynier ; Noël ; R. Paucot ; C. Tourneux ; P. Valentin.]

4784. — *Un morceau de platine pesant* 20^{gr} *est placé dans un four jusqu'à ce qu'il en ait pris la température. On le retire et on le plonge dans une masse d'eau dont le poids est de* 42^{gr} *et la température de 12° ; on constate que la température devient 22°. Quelle était la température du four ?*

On sait que la chaleur spécifique du platine est 0,03243.

(*Bacc. lettres-sciences, Paris, mars-avril 1900.*)

Soit x la température du four.

Il faut écrire que la quantité de chaleur perdue par le platine est égale à la quantité de chaleur gagnée par l'eau.

Or, la chaleur perdue par le platine est de

$$20 \times 0,03243\,(x - 22) \text{ calories}.$$

La chaleur gagnée par l'eau est de

$$42\,(22 - 12) \text{ calories}.$$

On a donc

$$20 \times 0,03243\,(x - 22) = 42\,(22 - 12),$$

d'où l'on tire $x = 669°,54$.

(G. LALLIER, à Nantes.)

[Ont résolu la même question : Mlles R. Campana ; G. Oddos ; MM. Aubert ; E. Anzemberger ; L. Audoyer ; E. Baudoin ; A. Bertagna ; H. Blanc ; F. Boivin ; M. Brun ; G. Claudon ; E. Cognet ; J. Crétinon ; A. Gunin ; A. Delaire ; H. Dobryzniak ; G. Foucry ; J. Germa ; M. Gondran ; J. Haag ; J. Hébré ; R. Henry ; J. Lamotte ; A. Lecoutour ; T. Lemoyne ; D. Lwow ; P. Marion ; Mengailhou ; A. Meynier ; R. Mouzon ; Noël ; R. Paucot ; Pendariès ; E. Roncaglia ; M. Royer ; A. Sauvageon ; L. Thirode ; C. Tourneux ; P. Valentin ; L. Vigé ; E. Pagé.]

QUESTIONS PROPOSÉES

4797. — Si deux nombres sont premiers avec 3, la différence de leurs sixièmes puissances est un multiple de 9.

4798. — Résoudre le système d'équations

$$9y^4 + 9(x^2 - y^2)y^2 + (x - 2y)(x - y)(x + y)(x + 2y) = (a^2 + 8b^2)^2,$$
$$x^2 - 2y^2 = a^2 - 8b^2.$$

4799. — Dans un triangle ABC, on joint par une droite, le sommet A au point D qui est au quart de BC. Connaissant $AB = c$, $AC = b$, $AD = l$:

1° Construire géométriquement le triangle ;

2° Calculer le troisième côté BC.

(H. JULIEN, à Origny-en-Thiérache.)

4800. — Soit $\alpha\beta\gamma$ le triangle formé par les droites symétriques d'une transversale abc par rapport aux trois côtés d'un triangle ABC.

1° Démontrer que, quelle que soit la position de la transversale, le triangle $\alpha\beta\gamma$ conserve une forme constante.

2° Trouver les lieux géométriques des points α, β, γ quand la transversale se déplace parallèlement à elle-même.

3° Prouver que si ABC a tous ses angles aigus, le centre du cercle inscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$ est sur la circonférence ABC. Considérer le cas où ABC est obtusangle.

(H. PITRAT, à Givors.)

4801. — Former l'équation qui donne $\cos\frac{a}{8}$ connaissant $\cos a$. Si on pose $\cos^2\frac{a}{8} = x$ et $\cos a = A$, on a une équation du 4e degré.

Démontrer que cette équation ne change pas lorsqu'on change x en $1 - x$; en déduire un moyen de ramener la résolution de cette équation à celle d'équations du 2e degré. Résoudre et discuter l'équation.

4802. — Si l'on prend la résultante R de deux forces P et Q, puis la résultante S des forces P et R, et enfin la résultante T des forces Q et R, on a

$$S^2 + T^2 = P^2 + Q^2 + 4R^2.$$

4803. — Un baromètre, dont la cuvette est assez large pour qu'on puisse y considérer les dénivellations du mercure comme négligeables, a une chambre dans laquelle a pénétré une certaine quantité d'air. On veut néanmoins s'en servir pour déterminer la pression atmosphérique.

Une expérience préliminaire a montré que, la température étant 0° et la pression effective 760^{mm}, le baromètre marquait 740^{mm} et la chambre barométrique avait une longueur de 25^{cm}.

On demande quelle est la pression quand, à la température de 35°, le baromètre marque 745^{mm}. On sait que le coefficient de dilatation cubique du mercure est $\frac{1}{5550}$, celui de l'air $\frac{1}{273}$.

On négligera d'ailleurs la dilatation du verre.

(*Bacc. lettres-math., Caen, avril 1898.*)

4804. — Etant donné un gaz combustible de densité 0,39, qui dégage en brûlant 11 000 calories par kilogramme et qui coûte $0^{fr},30$ le mètre cube, combien coûterait, à l'aide d'un brûleur alimenté par ce gaz, la production de 100 000 calories, et quel poids d'eau à 10° pourrait-on transformer en vapeur à 100° en utilisant 65 °/₀ de cette quantité de chaleur ?

(*Bacc. lettres-sciences, Grenoble, avril 1898.*)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Directeur.

24e Année. — N° 17. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 1er Juin 1900

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.
Abonnements.. Librairie Nony et Cie, Boul^d St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

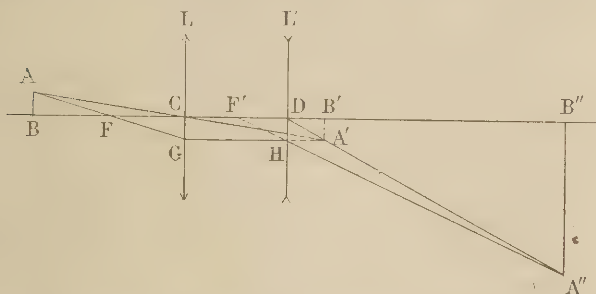
CONCOURS GÉNÉRAL DE SECONDE MODERNE (1899)

Physique et Chimie (Paris).

Solution par M. **F. Grandjean**, élève du collège Chaptal, lauréat du concours (1er prix).

4697. — *On veut projeter sur un écran l'image d'un petit objet lumineux au moyen d'un système de deux lentilles d'épaisseurs négligeables, de même axe, l'une convergente et l'autre divergente, de distances focales* 3^{cm} *et* 2^{cm}, *distantes de* $4^{cm},02$. *La distance de l'objet à la lentille convergente étant de* 6^{cm}, *quelle devra être la distance de l'écran à l'objet ? Quel sera le rapport des grandeurs linéaires de l'image et de l'objet ? Construire cette image.*

Soient C et D les centres optiques des deux lentilles, et AB l'objet que nous supposerons réduit à une dimension linéaire perpendiculaire à l'axe principal. Cherchons l'image donnée par la lentille L. Un rayon issu de A et passant par F, foyer principal de la lentille, rencontre cette lentille en G et se réfracte



suivant une direction parallèle à l'axe principal. Le rayon AC, non dévié, rencontre cette direction en A'. A' est par suite le foyer conjugué de A, et B'A', perpendiculaire à l'axe principal, l'image de AB. Les deux triangles ABF et FCG étant égaux, on a CG = AB et CG = A'B', d'où B'A' = AB. On voit aussi que CB' = CB par suite de l'égalité des triangles ABC et CA'B'.

Mais l'image B'A' ne se formera pas car les rayons sont réfractés par la lentille L'. Le rayon GA' rencontre la lentille en H et prend une direction telle que son prolongement passe par F', foyer de cette lentille. Donc l'image de A sera sur cette direction ; elle sera aussi sur la direction DA' et par suite en A'', leur intersection. B''A'', perpendiculaire à l'axe principal, sera donc l'image de AB. Cette image B''A'' est *réelle*, *droite*, *plus grande* que la droite virtuelle B'A'.

Posons $DB'' = p$, $DB' = p'$. La formule ordinaire des lentilles donne

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}.$$

Or $B'D = CB' - CD = 6 - 4,02 = 1^{cm},98$. Donc on a

$$\frac{1}{1,98} - \frac{1}{p} = \frac{1}{2},$$

d'où
$$\frac{1}{p} = \frac{1}{1,98} - \frac{1}{2}$$

et
$$p = 198^{cm}.$$

$$BB'' = DB'' + CD + CB = 198 + 4,02 + 6 = 208^{cm},02.$$

Le rapport de l'image à l'objet, $\frac{p'}{p} = \frac{198}{1,98} = 100.$

Il en résulte que l'écran devra être placé à $208^{cm},02$ de l'objet. L'image obtenue sur l'écran sera 100 fois plus grande que l'objet.

Ont résolu la même question : MM. V. Barol ; C. Billionnet. ; H. Blanc ; E. Bon ; J. Chemineau ; A. Croze ; M. Cry ; A. de Saint-Gabriel ; J. Haag ; Jacquet ; H. Julien ; David Lwow ; A. Lecoutour ; J. Lajouanine ; G. Luquet ; H. Miconnet ; A. Péquignot ; H. Rimbaud ; M. Royer ; A. Sauvageon ; T. Lemoyne.

ARITHMÉTIQUE

4789. — *Si m et n sont des nombres entiers quelconques, le produit*

$$n(2n+1)(3n+1)(4n+1)\ldots(mn+1)$$

est divisible par tous les nombres premiers inférieurs à m.

Soit p un nombre premier inférieur à m. Si p divise le premier facteur n du produit, la divisibilité de ce produit par p devient évidente. Dans le cas où le nombre premier p ne divise pas n, il est premier avec n, et divise alors l'un des p facteurs du produit suivant

$$(2n+1)(3n+1)\ldots[(p+1)n+1]. \qquad (1)$$

En effet, si l'on divise par p chacun des p facteurs du produit (1), on obtient p restes qui sont tous différents, car si deux facteurs $\alpha n + 1$ et $\beta n + 1$ donnaient un même reste r, on aurait

$$\alpha n + 1 = pq + r, \qquad \beta n + 1 = pq' + r,$$

et en retranchant

$$(\alpha - \beta)n = p(q - q') ;$$

donc p, premier avec n, diviserait $\alpha - \beta$, ce qui est impossible, puisque α est au plus égal à $p+1$ et β au moins égal à 2. Les p restes en question étant tous différents et inférieurs à p sont forcément représentés par l'un des p nombres

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1.$$

Un des facteurs du produit (1) est donc divisible par p.

Cette démonstration supposant seulement le nombre premier p inférieur à m, on en conclut que le produit

$$n(2n+1)(3n+1)\ \dots\ (mn+1)$$

est divisible par tous les nombres premiers inférieurs à m.

(P. THONET, athénée royal d'Anvers).

[Ont résolu la même question : MM. Aletrop à Madrid; M. Bayor; G. Foncry; J. Haag ; D. Lwow ; J. Maire ; Michel Pappà ; Duvergé et Sainte-Laguë ; J. Hébré ; D. König.]

ALGÈBRE

4716. — *Soient* AD *et* BE *les bissectrices des angles extérieurs en* A *et* B *d'un triangle* ABC, *ces bissectrices étant limitées aux côtés opposés.*

1° *Ces bissectrices peuvent être égales sans que le triangle soit isocèle; la longueur du côté* c *est comprise entre les longueurs des côtés* a *et* b. *On a alors*

$$\frac{1}{c-a}+\frac{1}{c-b}+\frac{c}{ab}=0.$$

2° *Si on donne* b *et* c $(b<c)$, *on trouve pour* a *une valeur acceptable et une seule.*

3° *Si on donne* b *et* c $(b>c)$, *qu'arrive-t-il?*

1° Évaluons les bissectrices AD et BE en fonction des côtés a, b, c. Deux théorèmes connus donnent

$$\overline{AD}^2 = DB.DC - bc,$$

$$\frac{DB}{c}=\frac{DC}{b}=\frac{a}{c-b},$$

d'où, en éliminant DB et DC,

$$\overline{AD}^2=\frac{a^2bc}{(c-b)^2}-bc.$$

On aurait de même

$$\overline{BE}^2=\frac{b^2ca}{(a-c)^2}-ac.$$

En égalant ces deux valeurs, il vient

$$bc.\frac{a^2-(c-b)^2}{(c-b)^2}=ac.\frac{b^2-(a-c)^2}{(a-c)^2},$$

ou, en supprimant le facteur commun toujours positif $c(a+b-c)$,

$$\frac{b(a+c-b)}{(c-b)^2}=\frac{a(b-a+c)}{(a-c)^2},$$

ce qui peut s'écrire

$$ab\left[\frac{1}{(c-b)^2}-\frac{1}{(c-a)^2}\right]=\frac{a}{c-a}-\frac{b}{c-b},$$

ou

$$\frac{ab[a^2-b^2-2(a-b)c]}{(c-b)^2(c-a)^2}=\frac{c(a-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

En divisant les deux membres par le facteur commun $\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}$, on écarte la solution évidente $a=b$ (triangle isocèle), et il reste l'équation

$$\frac{ab(a+b-2c)}{(c-b)(c-a)}=c,$$

qui peut aussi se mettre sous la forme énoncée,

$$\frac{1}{c-a}+\frac{1}{c-b}+\frac{c}{ab}=0.$$

2° L'équation précédente, ordonnée par rapport à a, devient

$$f(a)=ba^2-[bc-(c-b)^2]a-(c-b)c^2=0.$$

Dans l'hypothèse admise $(b<c)$, cette équation a ses deux termes extrêmes de signes contraires; elle admet par conséquent une seule racine positive réelle. Cette valeur de a n'est acceptable qu'autant qu'elle est comprise entre $c-b$ et $b+c$, c'est-à-dire qu'on a

$$f(c-b).f(b+c)<0.$$

Or comme $\quad f(c-b)=-2b(c^2-b^2)$

et $\quad f(c+b)=2b^3,$

cette inégalité est toujours vérifiée, ce qui justifie la seconde partie.

3° Supposons $b>c$, et posons $b=ck$. L'équation qui donne a devient

$$f(a)=ka^2+(k^2-3k+1)ac+(k-1)c^2=0,$$

$k>1$ d'après ce qui précède. Il est évident que si

$$k^2-3k+1>0,$$

l'équation ne peut avoir de racines positives ; par suite il ne peut y avoir de solution que si

$$k<\frac{3+\sqrt{5}}{2}. \qquad (1)$$

Cherchons si cette condition est suffisante. La condition de réalité des racines de l'équation en a peut s'écrire

$$\varphi(k)=(k^2-3k+1)^2-4k(k-1)$$
$$=k^4-6k^3+7k^2-2k+1\geqslant 0. \qquad (2)$$

$\varphi(k)$ n'ayant pas de facteurs qu'il soit facile d'apercevoir, considérons les autres conditions. Pour qu'une racine de $f(a)=0$ donne une solution, il faut et il suffit que

$$(k-1)c<a<(k+1)c;$$

ou

$$f[(k-1)c]=2c^3(k-1)^3,$$
$$f[(k+1)c]=2k^3c^3.$$

Ces résultats étant positifs, il n'y a pas de solution ou bien il y en a deux. Pour qu'il y en ait deux, il faut et il suffit que la demi-somme des racines de l'équation $f(a)=0$ soit comprise entre $(k-1)c$ et $(k+1)c$, autrement dit que

$$k-1<\frac{3k-k^2-1}{2k}<k+1.$$

L'inégalité de droite se ramène à

$$3k^2-k+1>0,$$

inégalité toujours vérifiée ; et celle de gauche, à

$$3k^2-5k+1<0,$$

ce qui donne, comme $k>1$, et comme 1 est entre les racines de ce trinome,

$$k<\frac{5+\sqrt{13}}{6}. \qquad (3)$$

La limite k' fournie par cette inégalité est inférieure à celle que donne l'inégalité (1) ; or en divisant $\varphi(k)$ par $3k^2-5k+1$, on a

$$27\varphi(k)=(3k^2-5k+1)(9k^2-39k-5)-8(5k-4);$$

donc

$$27\varphi(k')=-8(5k'-4)$$

et $\varphi(k')$ est négatif. Donc $\varphi(k)$ s'annule pour une valeur k_1 comprise entre 1 et k' ; $\varphi(k)$ ne s'annule qu'une fois, car sa dérivée est

$$\varphi(k)=4k^3-18k^2+14k-2=2k(k-1)(2k-7)-2,$$

elle est évidemment négative pour $1<k<k'$, donc $\varphi(k)$ décroît constamment dans cet intervalle. Donc si $1<k<k_1$, l'équation $f(a)=0$ a ses racines réelles et comprises entre $c(k-1)$ et $c(k+1)$. On a alors deux solutions.

En résumé, si $\frac{b}{c}<1$, il y a une solution ;

si $1<\frac{b}{c}<k_1$, il y a deux solutions ;

si $k_1<\frac{b}{c}$, il n'y a pas de solution.

[Ont résolu les deux premières parties de la question : MM. G. Delahaye ; Destouches ; Duvergé ; J. Hébré ; G. Marcellin ; C. Reboul ; P. Thonet.]

4781. — *Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse* a *et la somme* p *des côtés de l'angle droit et de la hauteur issue du sommet de l'angle droit. — Discussion.*

(*Bacc. lettres-math., Paris, mars-avril 1900.*)

Désignons par x, y les deux côtés inconnus et par z la hauteur relative à l'hypoténuse.

Les trois équations du problème sont

$$x + y + z = p, \qquad (1)$$

$$xy = az, \qquad (2)$$

$$x^2 + y^2 = a^2. \qquad (3)$$

On en déduit

$$(x^2 + y^2) + 2xy = (x + y)^2 = a^2 + 2az,$$

ou, en tenant compte de (1),

$$(p - z)^2 = a^2 + 2az,$$

ou

$$z^2 - 2(p + a)z + p^2 - a^2 = 0. \qquad (4)$$

Connaissant z, les équations (1) et (2) déterminent $x + y$ et xy; par suite x et y sont les racines de l'équation

$$X^2 - (p - z)X + az = 0. \qquad (5)$$

Discussion. — Pour que les valeurs de x et y conviennent, il faut et il suffit qu'elles soient réelles et positives, car l'équation (3) montre qu'elles sont alors les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle d'hypoténuse a.

La condition de réalité des racines de l'équation (5) est

$$(p - z)^2 - 4az \geqslant 0,$$

ou, en remplaçant $(p - z)^2$ par son égal $a^2 + 2az$,

$$a^2 - 2az \geqslant 0,$$

ou

$$z \leqslant \frac{a}{2}.$$

Les racines de (5) ayant leur produit az positif seront positives en même temps que leur somme, c'est-à-dire lorsque

$$z < p.$$

Or la substitution de p à z dans le premier membre de (4) donne

$$f(p) = -2ap - a^2\,;$$

ce résultat négatif indique que p sépare les deux valeurs de z, qui sont dès lors toujours réelles, l'une d'elles étant inférieure à p.

La plus petite valeur de z peut donc seule convenir à condition qu'elle soit positive, ce qui entraîne la condition évidente $p > a$. D'après la condition de réalité de x et y, il faut que la racine qui donne z soit au plus égale à $\frac{a}{2}$, et comme $\frac{a}{2} < a < p$, cette condition exige que $\frac{a}{2}$ soit compris entre les deux valeurs de z, c'est-à-dire qu'on ait

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = 4p^2 - 4ap - 7a^2 < 0.$$

Le premier membre de cette inégalité s'annule pour deux valeurs de p réelles et de signes contraires. Par suite les valeurs de p supérieures à a satisfaisant à l'inégalité sont

$$a < p < \frac{a}{2}(1 + 2\sqrt{2}).$$

Lorsque $p = a$, $\quad z' = 0$; $\quad X^2 - aX = 0$;

$x = 0$ ou a et $y = a$ ou 0 (Solution limite).

Lorsque $p = \frac{a}{2}(1 + 2\sqrt{2})$, $\quad z' = \frac{a}{2}$;

$$X^2 - \left(p - \frac{a}{2}\right)X + \frac{a^2}{2} = 0$$

ou

$$\left(X - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0;$$

le triangle rectangle devient isocèle.

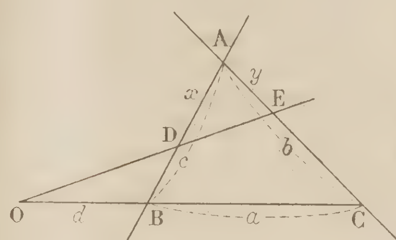
(A. **LECOUTOUR**, école primaire supérieure de Saint-Lô.)

[Ont résolu la même question : MM. R. Barthélemy ; Bayor ; Bertagna ; Bourvéau ; M. Brun ; F. Clabault ; G. Claudon ; J. Crétinon ; Demogue ; G. Foucry ; J. Germa ; M. Gondran ; J. Haag ; Hugonnier-Ginet ; D. Lwow ; P. Marion ; R. Mouzon ; Raynaud ; P. Thonet ; P. Valentin.]

4792. — *On donne un triangle* ABC *et un point* O *situé sur* BC *en dehors du segment déterminé par les sommets* B *et* C. *On demande de mener par le point* O *une sécante telle que* D *et* E *désignant les intersections avec* AB *et* AC *ou avec leur prolongement, le rapport des aires des triangles* ADE *et* ABC *égale un nombre donné. — Discussion.*

(*Bacc. lettres-math., Montpellier, mars 1900.*)

Soient a, b, c les côtés du triangle, d la distance OB et k le nombre donné.



Un théorème connu donne

$$\frac{\text{ADE}}{\text{ABC}} = \frac{\text{AD.AE}}{bc},$$

ou, en posant $\overline{\text{AD}} = x$ et $\overline{\text{AE}} = y$,

$$xy = bck. \qquad (1)$$

D'ailleurs, en appliquant le théorème de Ménélaüs, on a

$$\frac{\overline{\text{DA}}}{\overline{\text{DB}}} \cdot \frac{\overline{\text{EC}}}{\overline{\text{EA}}} \cdot \frac{\overline{\text{OB}}}{\overline{\text{OC}}} = 1,$$

ou

$$\frac{x}{c - x} \cdot \frac{b - y}{y} \cdot \frac{d}{d + a} = 1,$$

ou, en simplifiant,

$$axy + bdx - c(d + a)y = 0. \qquad (2)$$

Par l'élimination de y, le système des équations (1) et (2) se ramène au suivant :

$$\begin{cases} y = \dfrac{kbc}{x}, \\ dx^2 + kacx - (d + a)c^2 = 0. \end{cases}$$

Discussion. — Les équations (1) et (2) étant absolument générales, toute valeur réelle de x ou de y fournit une solution du problème.

L'équation du second degré en x ayant ses deux termes extrêmes de signes contraires, a ses deux racines réelles et de signes contraires. A ces racines correspondent deux points D situés de part et d'autre de A. L'un de ces points est d'ailleurs entre A et B lorsque $k < 1$; ce fait, évident *a priori*, peut être vérifié directement en comparant $\text{AB} = c$ aux deux racines.

Ainsi dans le cas de figure énoncé, le problème comporte toujours deux solutions.

Examen du cas où O *tombe entre* B *et* C. — Ce cas rentre dans le précédent en regardant d comme négatif et supérieur à $-a$. Dans ce cas, les deux valeurs de x ne sont réelles qu'autant qu'on a

$$k^2a^2c^2 + 4d(d + a)c^2 \geqslant 0,$$

ou

$$k^2 \geqslant \frac{-4d(d + a)}{a^2}.$$

Le rapport k prend alors une valeur absolue minimum lorsque

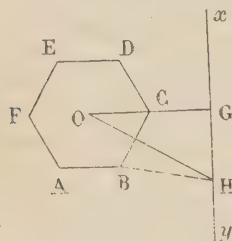
$$x = -\frac{kac}{2d} = \pm c\sqrt{\frac{d+a}{-d}}.$$

(R. CATTIN, à Mont-de-Marsan.)

[Ont résolu la même question : MM. J. Arnaud ; A. Aubert ; M. Bayor ; H. Blanc ; Duvergé et Sainte-Laguë ; M. Gondran ; J. Haag ; J. Hébré ; H. Janois ; A. Lecoutour ; E. Licope ; D. Lwow ; E. Pagé ; P. Thonet ; C. Titre ; Vial ; P. Zlatco ; J. Jarrier ; M. Royer.]

GÉOMÉTRIE

4749. — *Étant donné un hexagone régulier* ABCDEF *de côté a, de centre* O, *sur le prolongement du rayon* OC *on prend une longueur* CG $= a$, *et par le point* G *on mène la perpendiculaire xy à* OG :

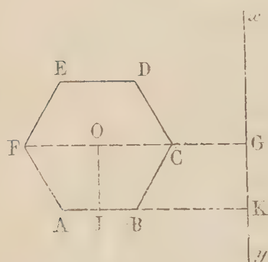


1° *Trouver l'expression* V *du volume engendré par l'hexagone en tournant autour de xy, et calculer par logarithmes le côté a sachant que* $V = 0^{mc},547238$;

2° *Du centre* O *on abaisse la perpendiculaire sur le côté* BC *jusqu'à son intersection* H *avec xy, et on joint le point* H *au sommet* B ; *calculer en fonction de a la longueur* BH ; *mettre tous les calculs.*

(*École des Beaux-Arts, 1899, section d'Architecture.*)

1° En prolongeant AB jusqu'à sa rencontre en K avec xy, le volume V engendré par l'hexagone est visiblement le double de la différence des volumes des troncs de cônes engendrés par les trapèzes AFGK et BCGK. Donc



$$V = \frac{2}{3}\pi GK(\overline{AK}^2 + \overline{FG}^2 + AK.FG - \overline{BK}^2 - \overline{CG}^2 - BK.CG).$$

Or $\qquad GK = OI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

$$AK = AI + IK = \frac{a}{2} + 2a = \frac{5}{2}a, \quad FG = 3a;$$

$$BK = IK - IB = 2a - \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a, \quad CG = a.$$

En remplaçant dans V, il vient

$$V = \frac{\pi a\sqrt{3}}{3}\left(\frac{25}{4}a^2 + 9a^2 + \frac{15}{2}a^2 - \frac{9}{4}a^2 - a^2 - \frac{3}{2}a^2\right),$$

ou, après réduction,

$$V = 6\pi a^3\sqrt{3}.$$

(Ce dernier résultat se déduit immédiatement de l'application du théorème de Guldin, car

$$V = ABCDE \times 2\pi OG = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \times 4\pi a = 6\pi a^3\sqrt{3}.)$$

Application logarithmique. — En prenant le centimètre pour unité de longueur, on peut écrire

$$6\pi a^3\sqrt{3} = 547238,$$

d'où
$$a = \sqrt[3]{\frac{547238}{6\pi\sqrt{3}}},$$

et par suite

$$\log a = \frac{1}{3}(\log 547238 + \text{colog } 6 + \text{colog } \pi + \frac{1}{2}\text{ colog } 3).$$

Les tables donnent :

$$\log 547238 = 5,73818$$
$$\text{colog } 6 = \bar{1},22185$$
$$\text{colog } 3,1416 = \bar{1},50285$$
$$\frac{1}{2}\text{ colog } 3 = \bar{1},76144$$
$$3 \log a = 4,22432$$
$$\log a = 1,40811, \quad a = 25^{cm},59.$$

2° La droite OH étant perpendiculaire au milieu M de BC, on a

$$\overline{BH}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{MH}^2.$$

Or

$$BM = \frac{a}{2} \qquad \text{et} \qquad MH = OH - OM;$$

d'ailleurs le quadrilatère inscriptible MCGH donne

$$OH.OM = OC.OG = 2a^2,$$

d'où

$$OH = \frac{2a^2}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{4a}{\sqrt{3}} = \frac{4a\sqrt{3}}{3}.$$

Par suite

$$\overline{BH}^2 = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{4a\sqrt{3}}{3} - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{21a^2}{9}$$

et

$$BH = \frac{a\sqrt{21}}{3}.$$

En remplaçant a ou $\log a$ par la valeur obtenue plus haut, on trouve

$$\log BH = \log a + \frac{1}{2}\log 21 + \text{colog } 3 = 1,59210$$

et

$$BH = 39^{cm},09.$$

(H. DAMOISEAU, école primaire supérieure de Bar-sur-Seine.)

[Ont résolu complètement la question : MM. Antoine ; E. Anzemberger ; A. Arcizet ; L. Barberot ; C. Billionnet ; C. Bouscau ; M. Brun ; E. Chaineau ; F. Clabault ; G. Cleuziou ; E. Cognet ; Delaire ; L. Demogue ; Deslandes ; Foucher ; G. Foucry ; J. Haag ; J. Hébré ; R. Henry ; de Jarny ; A. Lecoutour ; J. Lehmann ; A. Le Moal ; G. Luquet ; D. Lwow ; H. Ménielle ; A. Meynier ; Noël ; J. Pendariès ; A. Pequignot ; J. Picart ; J. Reynaud ; E. Roncaglia ; A. de Saint-Gabriel ; P. Sandon ; A. Sauvageon ; G. Sinoquet ; H. Taton ; P. Thonet ; P. Valentin ; N. Vaslin ; F. Vérot ; A. Vioix.

Ont résolu partiellement la question : MM. Baroux ; R. Bouvaist ; J. Cougnoux ; L. Curt ; Duvergé et Sainte-Laguë ; H. Julien ; G. Lallier ; E. Le Maigre ; Méléard ; P. Pille ; P. Saintin ; L. Thiébert.]

4760. — *Construire un triangle* ABC *connaissant la hauteur h_c issue du sommet* C, *la médiane m_b issue du sommet* B *et la différence $a^2 - b^2$, a et b étant les côtés opposés aux angles* A *et* B.

Première solution. — En appelant m_a la médiane issue de A, on a les relations

$$a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2},$$

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2},$$

d'où l'on déduit par soustraction,

$$a^2 - b^2 = 2m_b^2 - 2m_a^2 + \frac{b^2 - a^2}{2},$$

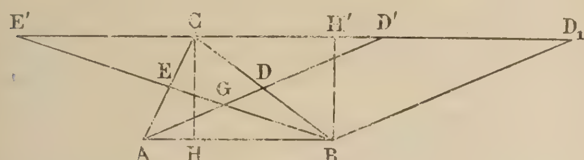
et, en posant $a^2 - b^2 = k^2$,

$$4m_a^2 = 4m_b^2 - 3k^2. \qquad (1)$$

Cette relation montre que la longueur $2m_a$ est représentée géométriquement par le côté d'un triangle rectangle dont l'hypo-

ténuse serait $2m_b$ et l'autre côté $k\sqrt{3}$ (ce dernier côté est lui-même représenté par la hauteur d'un triangle équilatéral de côté $2k$).

On est alors ramené à construire le triangle ABC connaissant la hauteur CH et les médianes AD et BE.



Pour cela, supposons le problème résolu, et menons par C une parallèle à AB qui coupe AD et BE prolongés en D' et E', puis en H' et D_1 les parallèles à CH et AD' issues de B. Le triangle $BE'D_1$ étant déterminé par la hauteur et les deux côtés issus de B peut être facilement construit. En remarquant ensuite que AD rencontre EB aux $\frac{2}{3}$ à partir de B, on en déduit A en menant par le point G situé au $\frac{1}{3}$ de BE' à partir de B une parallèle à BD_1 ; enfin on obtient C en joignant A au milieu E de BE'. Comme il existe deux triangles $BE'D_1$, le problème comporte deux solutions.

Pour que cette construction soit possible, il faut et il suffit que le triangle $BE'D_1$ existe, ce qui exige

$$2m_b \geqslant h_c \quad \text{et} \quad 2m_a \geqslant h_c\,;$$

comme d'après (1) on a $m_b > m_a$, la première inégalité est vérifiée en même temps que la seconde, qui peut s'écrire

$$4m_b^2 - 3k^2 \geqslant h_c^2,$$

ou

$$k^2 \leqslant \frac{4m_b^2 - h_c^2}{3}.$$

(F. CLABAULT, instituteur à Rosières.)

Remarque. — On pouvait chercher à construire le triangle AGB dans lequel on avait $BG = \frac{2}{3}\,m_b$, $AG = \frac{2}{3}\,m_a$; la hauteur partant de G était $\frac{1}{3}\,h_c$. AGB étant construit, on avait C en joignant le milieu de AB à G et en prolongeant cette droite d'une longueur double.

Seconde solution. — La condition

$$\overline{BC}^2 - \overline{CA}^2 = k^2$$

peut s'écrire $\overline{BC}^2 - 4\overline{CE}^2 = k^2$.

Or on sait qu'en général le lieu des points C tels que

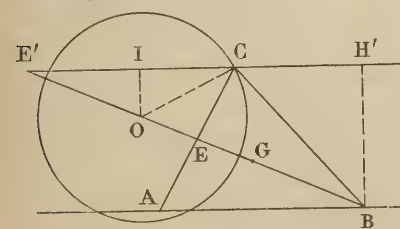
$$m\overline{BC}^2 - n\overline{CE}^2 = k^2$$

est un cercle ayant son centre en un point O tel que $\frac{\overline{OB}}{\overline{OE}} = -\frac{n}{m}$ et pour rayon

$$OC = \frac{(m-n)k^2 + mn\overline{BE}^2}{(m-n)^2}.$$

Dans le cas actuel, le cercle qui contient C a son centre en un point O de BE prolongée tel que $OB = 4OE$ (ce point est visiblement le symétrique de G par rapport à E); le rayon du cercle a pour valeur

$$OC = \frac{\sqrt{4m_b^2 - 3k^2}}{3}.$$



En traçant le cercle O, sa rencontre avec le côté E'H' du triangle connu BE'H' détermine C et par suite le triangle.

Pour que le cercle rencontre E'H', on doit avoir

$$OC \geqslant OI,$$

ou, en observant que $\frac{OI}{BH'} = \frac{E'O}{E'B} = \frac{1}{3}$,

$$\frac{\sqrt{4m_b^2 - 3k^2}}{3} \geqslant \frac{h_c}{3},$$

ou

$$k^2 \leqslant \frac{4m_b^2 - h_c^2}{3}.$$

Lorsque cette condition est remplie, il existe deux points C, et par suite deux solutions.

[DAVID LWOW, à Piatra (Roumanie).]

[Ont résolu la même question : MM. C. Billionnet ; H. Blanc ; A. Gouirand ; M. Gondran ; J. Haag ; R. Henry ; H. Janois ; A. Lecointour ; P. Le Verrier ; Mongin ; L. Ollié ; E. Szivessy ; P. Thonet ; J. Valentin ; Ch. Vallot ; P. Zlatco.]

4777. — *Étant donnés trois segments* AA', BB', CC' *dans un plan, construire un cercle qui les divise harmoniquement tous les trois.*

Considérons le cercle O qui divise harmoniquement aux points a, a' le segment AA'. En menant du milieu M de AA' la tangente MT au cercle O, on a

$$\overline{MT}^2 = Ma.Ma' = \overline{MA}^2,$$

ce qui montre que le cercle O coupe orthogonalement en T le cercle de diamètre AA'.

Tout revient donc à construire un cercle O qui coupe orthogonalement les trois cercles décrits sur AA', BB', CC' comme diamètres.

Or on sait que les cercles orthogonaux à deux cercles ont leurs centres sur l'axe radical des deux cercles. Le centre du cercle cherché s'obtient donc en prenant l'intersection (centre radical) des axes radicaux des cercles AA', BB', CC', pris deux à deux. En menant ensuite de ce point une tangente à l'un des cercles, son point de contact détermine un point du cercle cherché.

Cette construction ne fournit de solution qu'autant que les axes radicaux des trois cercles ne sont pas parallèles et se coupent à l'extérieur des trois cercles. La première condition est toujours remplie lorsque les milieux des segments AA', BB', CC' ne sont pas en ligne droite.

(J.-R. ASTALEY-PICIER, collège Chaptal.)

[Ont résolu cette question : MM. H. Blanc ; F. Clabault ; A. Delaire ; Duvergé et Sainte-Laguë ; A. Gouirand ; J. Haag ; A. Legros ; R. Mouzon ; A. Pequignot ; M. Petitjean ; P. Plisson ; P. Thonet.]

4794. — *Démontrer que si deux points* A', B' *divisent harmoniquement un segment* AB, *et si* O *est le milieu de* AB, O' *le milieu de* A'B', *on a*

$$4\overline{OO'}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{A'B'}^2.$$

Première solution. — On sait que les points A', B', conjugués harmoniques par rapport à A, B, et le milieu O de AB sont liés

par la relation $\overline{OA}^2 = \overline{OA'}.\overline{OB'}$.

Or

$$\overline{OA'} = \overline{OO'} - \overline{A'O'},$$
$$\overline{OB'} = \overline{OO'} + \overline{O'B'};$$

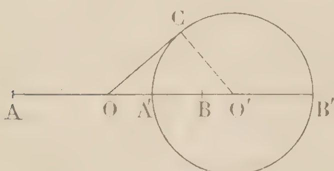
donc $\overline{OA}^2 = (\overline{OO'} - \overline{A'O'})(\overline{OO'} + \overline{O'B'}),$

ou, en observant que $\overline{OA} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$ et $\overline{A'O'} = \overline{O'B'} = \dfrac{\overline{A'B'}}{2}$,

$$\frac{\overline{AB}^2}{4} = \overline{OO'}^2 - \frac{\overline{A'B'}^2}{4},$$

ou $4\,\overline{OO'}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{A'B'}^2$. C. q. f. d.

Deuxième solution. — Décrivons le cercle O′ de diamètre A′B′ et par le milieu O de AB menons la tangente OC à ce cercle. On a successivement



$$\overline{OO'}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CO'}^2$$
$$= \overline{OA'}.\overline{OB'} + \overline{O'A'}^2$$
$$= \overline{OA}^2 + \overline{O'A'}^2$$
$$= \frac{\overline{AB}^2}{4} + \frac{\overline{A'B'}^2}{4}.$$

Troisième solution. — Elle consiste à montrer que le carré construit sur OO′ comme côté équivaut à la somme des deux carrés de côtés OB et O′A′ ou, ce qui revient au même, que le carré OBFE est la somme des deux rectangles OA′IC et GIDH. En effet



$$OA'.OC + GI.GH$$
$$= OA'.OO' + OA'.A'O$$
$$= OA'(OO' + O'B')$$
$$= OA'.OB' = \overline{OB}^2.$$

(J. HAAG, collège de Pont-à-Mousson.)

[Ont résolu la même question : Mlle M. D. P. ; MM. J. Arnaud ; Aubert ; M. Bayor ; H. Blanc ; J. Bourrec ; R. Cattin ; E. Cognet ; A. Delaire ; H. Dobryzniak ; Duvergé et Sainte-Laguë ; G. Foucry ; M. Gondran ; J. Hébré ; H. Janois ; T. Lalescu ; A. Larne ; T. Lemoyne ; H. Lévy ; D. Lwow ; A. Meyer ; R. Mouzon ; Noël ; P. Petit ; Petitjean ; H. Pitrat ; P. Plisson ; R. Rives ; A. Sauvageon ; H. Sebah ; P. Valentin.]

TRIGONOMÉTRIE

4679. — *On donne une demi-circonférence de diamètre* $AB = 2R$. *Par l'extrémité* A *et le centre* O, *on mène deux droites,* AC, OD, *parallèles et faisant avec le diamètre* AB *un angle* x. *Elles rencontrent la demi-circonférence en deux points* C *et* D. *On joint l'autre extrémité* B *à* C *et à* D, *ainsi que* C *et* D. *On a alors le trapèze* AODC *et le triangle* BCD. *Déterminer l'angle* x *pour que l'on ait :*

1° *Aire du trapèze* AODC + *aire du triangle* BCD = S^2. *Discuter et trouver la valeur maxima de* S^2.

2° *Aire du trapèze* AODC = 2 *fois l'aire du triangle* BCD ;

3° *Aire du triangle* BCD = 2 *fois l'aire du trapèze* AODC.

(*Bacc. lettres-math., Montpellier, novembre 1898.*)

Le rayon OD, parallèle à AC, est perpendiculaire à la corde BC en son milieu E.

On a dès lors

$$\text{aire AODC} = \frac{AC + OD}{2}.\,CE,$$

$$\text{aire BCD} = \frac{1}{2}BC.DE.$$

Or $AC = 2R\cos x$, $BC = 2R\sin x$,

$$CE = EB = R\sin x, \qquad DE = R(1-\cos x).$$

En remplaçant, il vient

$$\text{aire AODC} = \frac{R^2(1+2\cos x)\sin x}{2},$$

$$\text{aire BCD} = R^2\sin x(1-\cos x).$$

1° Écrivons que la somme de ces deux expressions est S^2 ; on obtient, après réductions,

$$3R^2\sin x = 2S^2,$$

d'où l'on tire $\sin x = \dfrac{2S^2}{3R^2}$.

Pour que cette valeur positive réponde au sinus d'un arc réel, il faut qu'elle soit inférieure ou égale à 1, et cela suffit puisque x peut varier de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$:

$$\frac{2S^2}{3R^2} \leqslant 1, \qquad \text{ou} \qquad S^2 \leqslant \frac{3}{2}R^2.$$

Le maximum de S^2 est $\dfrac{3}{2}R^2$; il correspond à $x = 90°$, ce qui donne le cas de figure ci-contre.

2° On doit avoir

$$\frac{R^2\sin x(1+2\cos x)}{2} = 2R^2\sin x(1-\cos x),$$

ou, en supprimant le facteur commun $R^2\sin x$, qui ne peut être nul,

$$1 + 2\cos x = 4(1-\cos x),$$

d'où $\cos x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 60°$.

Cette solution répond à la figure ci-contre, où ACDB est un demi-hexagone régulier.

3° La troisième hypothèse se traduit par l'équation

$$R^2\sin x(1-\cos x) = R^2(1+2\cos x)\sin x$$

ou, après suppression du facteur commun,

$$1 - \cos x = 1 + 2\cos x,$$

d'où $\cos x = 0$ et $x = 90°$.

On retrouve ainsi le cas de figure du maximum de S^2.

(D'AMPHERNET, école Saint-Charles, Saint-Brieuc.)

[Ont résolu la même question : MM. H. André ; V. Barol ; C. Billionnet ; E. Bon ; E. Brandhoff ; J. Cabrol ; A. Chapron ; L. Curt ; Destouches ; Donnadieu ; H. Duchesne ; Duvergé ; G. Foucry ; E. Fournon ; L. Gautier ; Gillard ; M. Gondran ; J. Haag ; R. Henry ; H. Julien ; Lajouanine ; A. Larcher ; D. Lwow ; G. Marie ; L. Ollié ; L. Patin ; A. Pequignot ; A. de Saint-Gabriel ; E. Sinturel ; C. Soulas ; P. Thonet ; P. Vien ; R. Bouvaist.]

4775. — *Soient* α *et* β *deux arcs, d'extrémités différentes, vérifiant l'équation*

$$a\cos x + b\sin x = c.$$

Calculer $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$ *et* $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

α et β vérifiant l'équation, on peut écrire

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = c = a \cos \beta + b \sin \beta,$$

ou
$$\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \beta - \sin \alpha} = \frac{b}{a},$$

ou, en transformant en produits les différences du premier membre,

$$\frac{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{b}{a}$$

et enfin, en supprimant le facteur commun $\sin \frac{\alpha-\beta}{2}$, différent de zéro par hypothèse,

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{b}{a}.$$

Connaissant $\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}$, il est facile d'en déduire $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$ et $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, au moyen des formules connues

$$\cos 2a = \frac{1-\operatorname{tg}^2 a}{1+\operatorname{tg}^2 a}, \qquad \sin 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1+\operatorname{tg}^2 a},$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}.$$

On trouve ainsi

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}, \qquad \sin(\alpha+\beta) = \frac{2ab}{a^2+b^2},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

(LUCIEN MAUBECK, Saint-Etienne-Valbenoîte.)

Remarque. — On sait qu'on peut résoudre l'équation proposée en exprimant $\cos x$ et $\sin x$ au moyen de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$; on a ainsi une équation du 2e degré dont les racines sont $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, de sorte qu'on peut calculer $\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}$ au moyen de fonctions symétriques des racines, et par suite les lignes trigonométriques de l'arc $(\alpha+\beta)$.

Autre solution. — On sait que l'équation

$$a \cos x + b \sin x = c$$

se résout en posant $b = a \operatorname{tg} \varphi$; l'équation devient alors

$$a\left(\cos x + \frac{\sin \varphi \sin x}{\cos \varphi}\right) = c,$$

ou
$$\cos(x-\varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi.$$

Si γ désigne l'un des arcs ayant pour cosinus $\frac{c}{a} \cos \varphi$, tous les arcs vérifiant l'équation précédente sont compris dans la double formule

$$x - \varphi = 2k\pi \pm \gamma.$$

Les valeurs α et β de l'arc x étant deux arcs d'extrémités différentes, on peut donc écrire

$$\alpha = 2k\pi + \gamma + \varphi,$$
$$\beta = 2k'\pi - \gamma + \varphi,$$

d'où, en ajoutant,

$$\alpha + \beta = 2k''\pi + 2\varphi.$$

Par suite

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos 2\varphi, \qquad \sin(\alpha+\beta) = \sin 2\varphi,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg} 2\varphi.$$

Cette solution ne diffère pas au fond de la précédente, puisque $\operatorname{tg} \varphi$ et $\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}$ ont les mêmes valeurs.

(DAVID LWOW, à Piatra.)

[Ont résolu cette question : MM. Aubert ; R. Barthélemy ; H. Blanc ; Boivin ; Duvergé et Sainte-Laguë ; A. Gouirand ; M. Goudran ; J. Haag ; R. Mouzon ; P. Plisson ; P. Zlatco.]

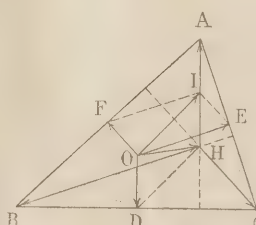
MÉCANIQUE

4404. — *Soient* O *le centre du cercle circonscrit à un triangle* ABC ; H *le point de rencontre des hauteurs ;* D, E, F *les milieux des côtés. Aux points* O *et* H *on applique six forces représentées en grandeur et en direction par* OD, OE, OF, HA, HB, HC.

Déterminer l'intensité et la direction de la résultante du système.

Dans quel cas ces forces se font-elles équilibre ?

Cherchons d'abord la résultante des trois forces appliquées en O. Joignons E et F au milieu I de AH. On sait que $OF = \frac{HC}{2}$; d'ailleurs, dans le triangle AHC, $IE = \frac{HC}{2}$;



donc les droites OF, IE sont égales et parallèles. La figure OEIF est donc un parallélogramme, de sorte que OI représente la résultante des deux forces OE, OF.

De même, comme

$$OD = \frac{AH}{2} = IH,$$

la figure ODHI est également un parallélogramme dans lequel OH représente la résultante des deux forces OD, OI, c'est-à-dire la résultante des trois forces OD, OE, OF.

Les trois forces appliquées en H étant respectivement le double des forces appliquées en O, et dirigées en sens contraire de ces dernières, admettent une résultante égale au double de la résultante OH et dirigée en sens contraire, ou de H vers O.

En composant ces deux résultantes, on voit que la résultante finale est égale à OH et dirigée suivant HO ; on peut d'ailleurs la supposer appliquée en un point quelconque de OH.

Pour que l'équilibre des six forces considérées existe, il faut et il suffit que leur résultante OH soit nulle, c'est-à-dire que les points O et H se confondent ou, autrement dit, que le triangle ABC soit équilatéral.

(E. SINTUREL, collège de Cusset.)

Remarque. — Il peut être bon de signaler le théorème suivant :

Si un point M *est soumis à des forces* $MA_1, MA_2, \ldots, MA_n$, *et si* G *est le centre des moyennes distances de* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *la résultante est dirigée suivant* MG *et représentée par* nMG.

Dans le cas actuel, le centre des moyennes distances de A, B, C est le point de rencontre G des médianes du triangle, et le triangle DEF admet pour médianes les médianes de ABC. Donc les systèmes de forces appliquées en O et H ont des résultantes représentées, en grandeur et direction, par 3 OG et 3 HG ; et on conclut facilement.

[Ont résolu la même question : MM. Boutry ; L. Guilhem, à Saô Paulo (Brésil) G. Hiernaux, à Vouziers ; L. Magne ; M. Rebeix.]

PHYSIQUE

4795. — *On mélange de l'air saturé d'humidité avec de l'hydrogène sec. Calculer l'état hygrométrique du mélange sachant que 100cc introduits dans l'eudiomètre se réduisent à 70 après le passage de l'étincelle et que tout l'hydrogène a été brûlé. Quelle est de plus la composition du gaz résiduel ?*

(*Bacc. lettres-math., Montpellier, mars 1900.*)

Le mélange introduit dans l'éprouvette est composé d'azote, d'oxygène et d'hydrogène.

Sur 100cc de ce mélange, 30 ont disparu après le passage de l'étincelle. Ces 30cc étaient formés de 20cc d'hydrogène et 10cc d'oxygène. Puisque tout l'hydrogène a été brûlé, il y avait 80cc d'air dans les 100cc de mélange.

Les 80cc d'air étaient saturés d'humidité ; l'état hygrométrique du mélange est donc représenté par $\frac{80}{100}$ ou $\frac{4}{5}$.

80cc d'air sont composés de $\frac{80 \times 79}{100} = 63^v,2$ d'azote et, $\frac{80 \times 21}{100} = 16^v,8$ d'oxygène. Comme 10cc d'oxygène ont disparu, on voit que les 70cc qui restent après l'étincelle sont formés de 63cc,2 d'azote et de 6cc,8 d'oxygène.

(VIAL.)

[Ont résolu la même question : MM. Aubert ; G. Foucry ; J. Janier, de Jarny; J. Haag ; T. Lemoyne.]

4796. — *On veut produire dans une canalisation électrique de résistance* r *un courant d'intensité* I. *On dispose pour cela d'une pile dont la force électromotrice et la résistance intérieure sont* E *et* R *et d'un rhéostat. De quelles manières différentes peut-on disposer ce rhéostat ? Quelles résistances doit-il alors présenter et quelle est la disposition qui épuise le moins la pile ?*

(*Bacc. lettres-sciences, Poitiers, juillet 1899.*)

On peut associer le rhéostat avec le conducteur donné soit en série, soit en dérivation.

Dans la première disposition, la résistance extérieure du circuit est égale à $r + x$, x désignant la résistance du rhéostat. Par suite, on a, d'après la loi d'Ohm,

$$I = \frac{E}{R + r + x},$$

d'où

$$x = \frac{E - I(R + r)}{I}.$$

Dans la seconde disposition, on sait que le système des deux fils de dérivation se comporte comme un conducteur unique de résistance $\frac{ry}{r+y}$, y étant la résistance que possède alors le rhéostat. Or la dérivation étant nécessairement produite entre les deux pôles de la pile, $\frac{ry}{r+y}$ représente la résistance extérieure de la pile. Par suite, si l'on représente par I' l'intensité du courant à l'intérieur de la pile, on a

$$I' = \frac{E}{R + \frac{ry}{r+y}}.$$

Mais on a aussi $I' = I + i$, i étant l'intensité du courant qui passe dans le rhéostat; et comme les intensités sont inversement proportionnelles aux résistances, on a

$$\frac{I}{i} = \frac{y}{r},$$

d'où

$$\frac{I}{I+i} = \frac{y}{y+r} \quad \text{et} \quad I = I' \times \frac{y}{y+r}.$$

Remplaçant I' par sa valeur trouvée précédemment, il vient

$$I = \frac{E}{R + \frac{ry}{r+y}} \times \frac{y}{y+r} = \frac{Ey}{R(y+r) + ry},$$

d'où l'on tire

$$y = \frac{IRr}{E - I(R+r)}.$$

Quant à la disposition qui épuise le moins la pile, c'est évidemment la première, puisque dans ce cas la pile fournit par seconde une quantité d'électricité égale à I, tandis qu'avec la seconde disposition, elle débite $I + i$ dans le même temps.

(J. HAAG.)

[A résolu la même question: M. J. Arnaud.]

QUESTIONS PROPOSÉES

4805. — En divisant un multiple de 67 par 10, on obtient le quotient q et le reste r. Démontrer que $q - 20r$ est divisible par 67.

4806. — Résoudre l'équation

$$(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0.$$

(J. DELPONT.)

4807. — Etudier les variations de la fraction

$$\frac{x^4 + 4x^2 + 1}{2x^3 + 2x}.$$

4808. — On donne deux circonférences O et O' se coupant orthogonalement. D'un point P pris sur O on mène à O' les tangentes PM et PN ; on joint les points de contact. La droite MN rencontre le cercle O en deux points A et B. Démontrer que PA et PB passent chacune par un point fixe.

(AUBERT.)

4809. — On donne une ellipse et une hyperbole homofocales de foyers fixes F et F'. La somme des rayons vecteurs relatifs à un point de l'ellipse est $2a$; la différence des rayons vecteurs relatifs à un point de l'hyperbole est $2a'$. Sachant que le rapport $\frac{a}{a'}$ est constant, trouver le lieu des points d'intersection de l'ellipse et de l'hyperbole.

(M. REBEIX.)

4810. — Eliminer l'angle φ entre les deux équations

$$a + b \operatorname{tg}\varphi + \cos 2\varphi\,(c \operatorname{tg}\varphi - d) = 0,$$
$$a \operatorname{tg}\varphi - b + \cos 2\varphi\,(c + d \operatorname{tg}\varphi) = 0.$$

(H. PITRAT.)

4811. — Un corps, de densité égale à 2, placé dans l'un des plateaux d'une balance parfaitement juste, est équilibré par 100gr de poids marqués placés dans l'autre plateau. Sachant que la matière qui constitue ces poids marqués a une densité égale à 8, et que la pesée est faite dans l'air sec à la pression de 74cm de mercure et à 30°, on demande quelle surcharge on devrait mettre dans le second plateau pour que l'équilibre eût lieu dans le vide.

Poids normal du litre d'air. . . 1gr,3.
Coefficient de dilatation de l'air. . . 0,00367.

(*Bacc. mod. lettres-math., Marseille, mars 1899.*)

4812. — 100gr de cuivre à 100°, plongés dans 500gr d'eau à 5°,1, ont porté la température de cette masse liquide à 6°,8. La même expérience étant répétée avec 800gr d'essence de térébenthine à 6°, la température de l'essence s'est élevée à 8°,5. On demande quelle est la chaleur spécifique de l'essence.

(*Bacc. lettres-math., Lyon, avril 1898.*)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Directeur.

24e Année. — N° 18. JOURNAL Paris, le 15 Juin 1900.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.

Abonnements.. Librairie Nony et Cie, Boulᵈ St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

ARITHMÉTIQUE

4797. — *Si deux nombres sont premiers avec 3, la différence de leurs sixièmes puissances est un multiple de 9.*

Un nombre entier a premier avec 3 l'est aussi avec 9, et par suite ne peut être que de l'une des formes

$$9m \pm 1, \qquad 9m \pm 2, \qquad 9m \pm 4.$$

La sixième puissance de a équivaut donc à un multiple de 9 augmenté de l'un des trois nombres 1, 2^6, 4^6 ou de leur reste commun 1 par rapport au diviseur 9. On peut donc écrire

$$a^6 = \text{mult. } 9 + 1.$$

En considérant un second nombre b premier avec 3, on aurait de même

$$b^6 = \text{mult. } 9 + 1.$$

On déduit de là $\quad a^6 - b^6 = \text{mult. } 9.$

(G. FOUCRY, école normale de Châlons-sur-Marne.)

Remarque. — Si a et b sont premiers avec 3, on a

$$a^2 = \text{mult. } 3 + 1, \qquad b^2 = \text{mult. } 3 + 1.$$

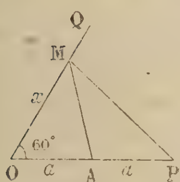
Or $$a^6 - b^6 = (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4),$$

et chacune des parenthèses est multiple de 3.

[Ont résolu la même question : MM. A. Ageron : Aubert ; E. Baudouin : Bertagna : A. Bertrand ; H. Blanc ; I. Bourrec : F. Clabault ; G. Claudon ; Y. Collin ; Consolin ; A. Cotton : A. Delaire ; H. Dobryzniak ; Duvergé et Sainte-Laguë ; A. Foy; L. Giboin; M. Gondran; Guinand ; J. Haag ; J. Hébré; R. Henry ; Jacquet ; Janois ; D. Konig ; A. Lecoutour ; Luquet ; D. Lwow ; J. Maire ; Ménéchal ; R. Mouzon ; Noël ; P. E., à Bonneval ; M. Pappâ ; R. Paucot ; Pendariès ; E. Perdu ; P. Petit ; Rives ; M. Royer ; A. de Saint-Gabriel ; G. Saintville ; L. Thiébert ; R. Simon ; Sinoquet; P. Valentin ;. Ch. Vallot ; Vérot ; P. Sauveau.]

ALGÈBRE

4215. — *On donne un angle* POQ *de* 60°, *et sur l'un des côtés* OP *on porte à la suite l'une de l'autre deux longueurs égales entre elles* $OA = AP = a$; *on demande de trouver sur l'autre côté* OQ *un point* M *tel que le périmètre du triangle* MAP *ait une valeur donnée.*



On prendra si l'on veut pour inconnue $OM = x$.

(*Bacc. lettres-math., Oran, juillet 1897.*)

Le triangle OMA donne

$$\overline{MA}^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos 60° = a^2 + x^2 - ax\ ;$$

de même

$$\overline{MP}^2 = 4a^2 + x^2 - 2ax.$$

L'équation du problème est donc

$$a + \sqrt{a^2 + x^2 - ax} + \sqrt{4a^2 + x^2 - 2ax} = p.$$

Isolons l'un des radicaux et élevons ensuite au carré ; il vient

$$(a - p + \sqrt{a^2 + x^2 - ax})^2 = 4a^2 + x^2 - 2ax,$$

ou $$2(a - p)\sqrt{a^2 + x^2 - ax} = -ax + 3a^2 - (a - p)^2,$$

ou, en élevant de nouveau au carré et simplifiant,

$$(2p - a)(2p - 3a)x^2 - 6ap(p - 2a)x - p(p - 4a)(p^2 - 4a^2) = 0.$$

La condition de réalité est

$$9a^2p^2(p - 2a)^2 + p(p - 4a)(p^2 - 4a^2)(2p - a)(2p - 3a) \geqslant 0,$$

ou $$4p(p - 2a)(p - a)^2(p^2 - 2ap - 6a^2) \geqslant 0.$$

Comme p doit être évidemment supérieur à $2a$, cette condition se réduit à

$$p \geqslant a(1 + \sqrt{7}).$$

Si $\quad p > 4a$, les racines sont de signes contraires.

Si $\quad a(1 + \sqrt{7}) < p < 4a$, elles sont toutes deux positives.

Il est d'ailleurs facile de voir géométriquement que dans le premier cas on obtient deux points M situés de part et d'autre de O et dans le second deux points situés sur OQ.

En effet, le point M est sur une ellipse de foyers A et P, de grand axe $p - a$; pour déterminer les points de cette ellipse situés sur OQ ou sur son prolongement, il suffit de prendre A′ symétrique de A par rapport à OQ et de construire un cercle passant par A et A′ et tangent au cercle de centre P et de rayon $p - a$.

Pour que cette construction soit possible, il faut et il suffit que $PA' \leqslant p - a$. Or $AA' = a\sqrt{3}$ et

$$\overline{PA'}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AA'}^2 + 2AA'.AP.\cos 30°$$
$$= a^2 + 3a^2 + 2a\sqrt{3}\,.a.\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 7a^2,$$

ce qui donne

$$p \geqslant a + a\sqrt{7}.$$

Le point M correspondant au minimum de p, le point M′ est situé sur PA′.

MA + MP augmente quand M s'éloigne de M′.

Si M vient en O, $\quad MA + MP = 3a \quad$ et $\quad p = 4a$.

Si M vient au-dessous de O, $\quad MA + MP > 3a \quad$ et $\quad p > 4a$.

[Ont résolu la même question : MM. J. Bordas, à Tulle ; G. Hiernaux, école normale de Châlons ; P. Le Hénaff, école normale de Saint-Brieuc.]

4798. — *Résoudre le système d'équations*

$$9y^4 + 9(x^2 - y^2)y^2 + (x - 2y)(x - y)(x + y)(x + 2y) = (a^2 + 8b^2)^2,$$
$$x^2 - 2y^2 = a^2 - 8b^2.$$

(F. PÉGORIER.)

La première équation peut s'écrire

$$9x^2y^2 + (x^2 - y^2)(x^2 - 4y^2) = (a^2 + 8b^2)^2,$$

ou

$$x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 = (a^2 + 8b^2)^2,$$

ou, en extrayant les racines carrées des deux membres,

$$x^2 + 2y^2 = \pm (a^2 + 8b^2).$$

On est ainsi ramené à l'un des deux systèmes

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = a^2 + 8b^2, \\ x^2 - 2y^2 = a^2 - 8b^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 2y^2 = -a^2 - 8b^2, \\ x^2 - 2y^2 = a^2 - 8b^2. \end{cases}$$

Le second système ne peut avoir de solutions réelles ; le premier donne, en ajoutant et retranchant les équations membre à membre,

$$\begin{cases} x^2 = a^2, \\ y^2 = 4b^2; \end{cases}$$

et enfin

$$\begin{cases} x = \pm a, \\ y = \pm 2b. \end{cases}$$

Chaque valeur de x pouvant être combinée avec l'une des deux valeurs correspondantes de y, on voit que le système proposé admet quatre systèmes de solutions réelles.

(A. BERTRAND, à Azillanet.)

[Ont résolu la même question : MM. Aubert ; E. Baudouin ; Bertagna ; H. Blanc ; F. Boivin ; F. Clabault ; G. Claudon ; E. Cognet ; Y. Collin ; L. Corbin ; A. Cotton ; A. Delaire ; Duvergé et Sainte-Laguë ; G. Foucry ; A. Foy ; M. Gondran ; A. Gorce ; Guinand ; J. Haag ; J. Hébré ; R. Henry ; A. Huet ; Janois ; J. Jarrier ; D. Konig ; Lacreuse ; Luquet ; D. Lwow ; R. Mouzon ; Noël ; F. Pégorier ; P. Petit ; H. Pitrat ; G. Pruvot ; M. Royer ; P. Saintin ; R. Simon ; Sinoquet ; L. Thiébert ; D. Tuïssuzian ; A. Vachon ; A. Vannier ; Vérot ; P. Zlatco.]

GÉOMÉTRIE

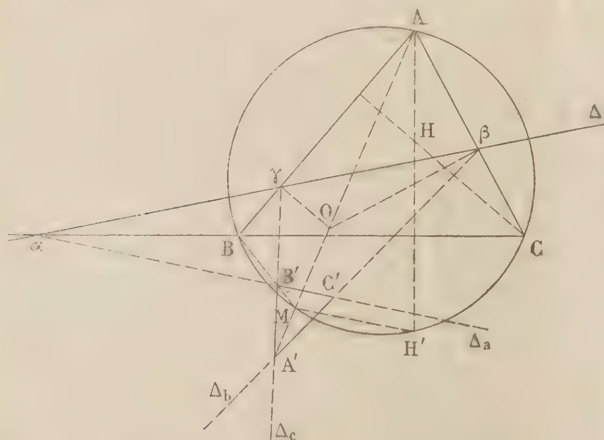
4577. — *Les symétriques d'une droite quelconque Δ du plan d'un triangle* ABC *par rapport aux côtés de ce triangle forment un triangle* A'B'C'.

1° AA', BB' *et* CC' *concourent en un point* M. *Lieu du point* M.

2° *Le point* M *est le centre d'un cercle tangent aux côtés du triangle* A'B'C' : *le rayon de ce cercle a pour valeur la distance de l'orthocentre du triangle* ABC *à la droite* Δ.

Soient α, β, γ les points où Δ coupe les côtés du triangle ABC, Δ_a, Δ_b, Δ_c les symétriques de cette droite Δ par rapport aux côtés. Ces trois droites forment un triangle A'B'C'.

1° Le théorème des triangles homologiques appliqué aux triangles ABC, A'B'C' résout immédiatement la première question ;



ces deux triangles ont en effet Δ comme axe d'homologie ; donc les trois droites AA', BB', CC' concourent en un point M.

Mais la solution suivante est préférable.

Aux points β et γ menons les perpendiculaires à AC et AB ; elles se coupent en O ; ces droites forment avec les côtés AC et AB l'ensemble des quatre bissectrices des angles de Δ avec Δ_b et Δ_c.

Donc les deux points O et A sont sur la bissectrice intérieure de l'angle A' de Δ_b et Δ_c. La droite AA' est donc la bissectrice intérieure de l'angle en A' du triangle A'B'C'.

On montrerait de même que les deux autres bissectrices intérieures du triangle A'B'C' sont les droites BB' et CC'. Dès lors les trois droites AA', BB', CC' se coupent en un même point M, qui est le centre du cercle inscrit au triangle A'B'C'.

Cherchons le lieu du point M quand Δ varie.

Je vais montrer tout d'abord que les angles du triangle A'B'C' sont les suppléments des doubles des angles du triangle ABC.

En effet, on a par exemple

$$\begin{aligned} \widehat{B'A'C'} &= \widehat{A'\gamma\alpha} - \widehat{A'\beta\alpha} \\ &= \widehat{2B\gamma\alpha} - (180^\circ - \widehat{2A\beta\gamma}) \\ &= 2\,(\widehat{A\gamma\beta} + \widehat{A\beta\gamma}) - 180^\circ \\ &= 2\,(180^\circ - A) - 180^\circ \\ &= 180^\circ - 2A. \end{aligned}$$

Une démonstration analogue s'appliquerait aux deux autres angles du triangle A'B'C'.

Or si nous considérons l'angle $\widehat{AMB}$, il est égal à

$$\frac{A' + B'}{2} = \frac{180^\circ - 2A + 180^\circ - 2B}{2} = C.$$

Ce point M est donc sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

2° Je vais montrer que le rayon du cercle inscrit au triangle A'B'C' est égal à la distance de l'orthocentre H du triangle ABC à Δ.

Soit H' le symétrique de H par rapport à BC ; ce point H' est sur le cercle circonscrit au triangle ABC. La distance du point H à Δ est égale à la distance de H' à Δ_a.

Or le rayon du cercle inscrit à A'B'C' est la distance de M à Δ_a. Pour démontrer le théorème il suffit donc de montrer que MH' est parallèle à Δ_a.

Pour montrer ce parallélisme, je vais établir l'égalité des deux angles BMH' et BB'C'.

BMH' étant inscrit au cercle circonscrit à ABC, on a

$$\begin{aligned} \widehat{BMH'} &= 180^\circ - \widehat{BAH'} \\ &= 180^\circ - (90^\circ - B) \\ &= 90^\circ + B. \end{aligned}$$

Mais $\widehat{BB'C'} = 180^\circ - \dfrac{B'}{2} = 180^\circ - \dfrac{180^\circ - 2B}{2} = 90^\circ + B.$

Donc $\widehat{BMH'} = \widehat{BB'C'}$. C. q. f. d.

Remarques. — 1° La droite de Simson du point M est parallèle à Δ.

2° Si Δ tourne autour de l'orthocentre du triangle ABC, les trois droites Δ_a, Δ_b, Δ_c concourent en un même point du cercle circonscrit à ABC.

Si Δ enveloppe un cercle de centre H, le triangle A'B'C' a une grandeur invariable, et ses trois sommets décrivent chacun un limaçon de Pascal.

Si l'on s'appuie sur ce théorème : *Le lieu des sommets des angles constants circonscrits à deux cercles se compose de deux limaçons de Pascal*, on peut démontrer que :

Si Δ enveloppe un cercle quelconque, les trois sommets du triangle A'B'C' décrivent des limaçons de Pascal et l'enveloppe des côtés se compose de trois cercles.

En particulier, si Δ tourne autour d'un point fixe, les sommets du triangle A'B'C' décrivent trois cercles.

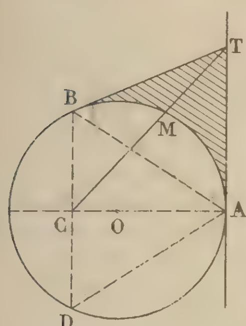
(M. REBEIX, à Clermont.)

[Ont résolu la même question : MM. A.-D., à Castres ; E. Foucart ; M. Oger ; P. Tribier.]

4761. — *Un cône de révolution est circonscrit à deux sphères tangentes extérieurement. Démontrer que le volume compris entre le cône et les deux sphères est la moitié du volume de la partie extérieure au cône de la sphère qui passe par les deux cercles de contact du cône et des sphères considérées.*

Nous établirons d'abord le lemme suivant :

Si d'un point extérieur à un cercle O on mène les tangentes TA, TB et qu'on fasse tourner la figure autour du diamètre passant par A, le triangle mixtiligne TAMB engendre un volume équivalent au cône engendré par le triangle TAC, C étant la projection de B sur OA.



En effet, en considérant le volume en question comme la différence entre le tronc de cône et le segment sphérique à une base engendrés respectivement par le trapèze ACBT et le segment AMBC, on a

$$V = \frac{\pi AC}{3}(\overline{AT}^2 + \overline{BC}^2 + AT.BC) - \frac{\pi AC.\overline{BC}^2}{2} - \frac{\pi \overline{AC}^3}{6},$$

ou $$V = \frac{\pi AC}{6}(2\overline{AT}^2 + 2AT.BC - \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2).$$

Or, en prolongeant BC jusqu'en D, les triangles isocèles semblables TAB, ABD donnent

$$\frac{TA}{AB} = \frac{AB}{BD},$$

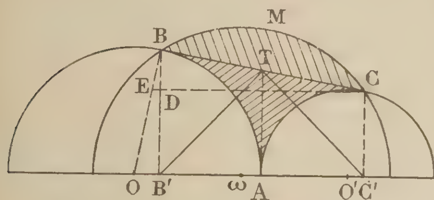
ou $$2BC.AT = \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2.$$

L'expression de V devient alors

$$V = \frac{\pi AC}{6} \times 2\overline{AT}^2 = \frac{\pi}{3}\overline{AT}^2.AC.$$

C. q. f. d.

Considérons maintenant les deux demi-cercles O, O′, tangents en A, et leur tangente commune extérieure BC ; traçons le demi-cercle ω ayant son centre sur OO′ et passant par B et C. Il s'agit de montrer que le volume engendré par le triangle mixtiligne ABC est la moitié du volume engendré par le segment BMC.



Menons la tangente commune en A. D'après le lemme précédent, le volume engendré par le triangle mixtiligne ABC équivaut au volume engendré par le triangle TB′C′; son expression est donc

$$\frac{\pi}{3}\overline{AT}^2(AB' + AC') = \frac{\pi}{3}\overline{AT}^2.B'C'.$$

D'ailleurs le segment BMC engendre un anneau sphérique dont le volume s'exprime par

$$\frac{\pi}{6}\overline{BC}^2.B'C',$$

ou, puisque $BC = 2AT$,

$$\frac{2\pi}{3}\overline{AT}^2.B'C'.$$

Remarque. — On peut facilement calculer l'un des volumes considérés, en fonction des rayons R, R′ des cercles O, O′. Si l'on mène en effet CDE parallèle à OO′, le triangle rectangle BEC donne

$$\overline{BC}^2 = CD.CE$$

ou $$\overline{CE}^2 - \overline{BE}^2 = B'C'.OO',$$

d'où $$B'C' = \frac{(R+R')^2 - (R-R')^2}{R+R'} = \frac{4RR'}{R+R'}$$

et $$\frac{\pi}{3}\overline{AT}^2.B'C' = \frac{\pi}{3}RR'.\frac{4RR'}{R+R'} = \frac{4\pi}{3}.\frac{R^2R'^2}{R+R'}.$$

(Georges Delahaye, à Roye.)

[Ont résolu la même question : MM. C. Billionnet ; D. Lwow.]

4769. — *On donne un cercle de rayon R. Sur une corde MN de ce cercle on construit, dans un plan perpendiculaire au plan du cercle O, un segment S capable d'un angle constant α. En supposant que la corde variable MN se déplace parallèlement à elle-même, on demande les lieux géométriques :*

1° *Du centre du cercle S ;*

2° *Des points de contact des tangentes au cercle S parallèles à MN ;*

3° *Des points de contact des tangentes au cercle S perpendiculaires à MN.*

1° *Lieu du centre S.* — Le triangle MIS donne

$$SI = MI \operatorname{tg}(90° - \alpha),$$

ou $$\frac{SI}{MI} = \operatorname{cotg} \alpha.$$

Le rapport des ordonnées des points S et M, prises par rapport au diamètre fixe AB perpendiculaire aux cordes parallèles MN étant constant, le lieu de S est une ellipse dont l'un des axes est AB et dont l'autre est dirigé suivant la perpendiculaire en O au plan du cercle O et égal à $R \operatorname{cotg} \alpha$.

Suivant que $\operatorname{cotg} \alpha < \text{ou} > 1$ ou $\alpha > \text{ou} < 45°$, AB représente le grand ou le petit axe de l'ellipse. Pour $\alpha = 45°$, l'ellipse se réduit à un cercle de diamètre AB ; pour $\alpha = 90°$, S se confond avec I et décrit AB.

2° *Lieux des points de contact* C, C′ *des tangentes parallèles à* MN. — On a

$$CI = MI \operatorname{cotg} C,$$

ou $$\frac{CI}{MI} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

Le lieu de C est donc aussi une ellipse située dans le même plan que l'ellipse précédente et ayant avec elle un axe commun AB, l'autre étant égal à $R \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$.

Suivant que α est aigu ou obtus, AB représente le petit ou le grand axe de l'ellipse. Pour $\alpha = 90°$, l'ellipse devient un cercle de diamètre AB.

En remarquant que

$$\frac{C'I}{MI} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

on voit que C′ décrit une autre ellipse dont l'un des axes est AB et dont l'autre est égal à $R \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Suivant que α est aigu ou obtus, AB est le plus grand ou le plus petit axe.

3° *Lieux des points de contact* D, D′ *des tangentes perpendiculaires à* MN. — Ces deux lieux étant symétriques par rapport au plan ABC, il suffit de connaître l'un d'eux.

En posant $\widehat{SDI} = \varphi$, on a

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\widehat{SDI} = \frac{SI}{SD} = \frac{SI}{SM} = \cos\alpha.$$

La droite DI appartient donc au plan mené par AB et faisant un angle connu φ avec le plan du cercle O. D'ailleurs

$$\text{DI} \sin \varphi = \text{SI} = \text{MI} \operatorname{cotg} \alpha,$$

d'où
$$\frac{\text{DI}}{\text{MI}} = \frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\sin \varphi},$$

ou encore, en observant que $\sin \varphi = \dfrac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$,

$$\frac{\text{DI}}{\text{MI}} = \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}}{\sin \alpha}.$$

Le rapport $\dfrac{\text{DI}}{\text{MI}}$ étant constant, on en conclut que le lieu de D est une ellipse analogue aux précédentes et située dans le plan défini plus haut. Comme ici $\dfrac{\text{DI}}{\text{MI}} > 1$, AB est toujours le petit axe.

(H. LEFÈVRE.)

[Ont résolu la même question : MM. Bouvaist ; C.D., lycée de Lille ; L. Charpentier ; Delaire ; Duvergé et Sainte-Laguë ; J. Haag ; D. Lwow ; L. Ollié ; A. Pequignot ; P. Plisson ; F. Clabault ; G. Foucry ; J. Hébré. — M. Noël l'a résolue partiellement.]

4793. — *Construire un triangle connaissant la hauteur, la bissectrice issue du même sommet et le rayon du cercle des neuf points.*

Le rayon du cercle des neuf points étant la moitié du rayon du cercle circonscrit, on est ramené à construire un triangle dont on connaît la hauteur $\text{AH} = h$, la bissectrice $\text{AD} = l$ et le rayon R du cercle circonscrit O.

Le triangle AHD est déterminé par un côté et l'hypoténuse. D'ailleurs la bissectrice AD prolongée passe par le milieu E de l'arc BC et OE est perpendiculaire au milieu de BC ou parallèle à AH ; donc

$$\widehat{\text{HAE}} = \widehat{\text{AEO}} = \widehat{\text{EAO}},$$

ce qui montre que AD est bissectrice de l'angle HAO. De là cette construction :

Avec les longueurs h et l, on construit le triangle AHD ; on mène la droite AK symétrique de AH par rapport à AD, et de A comme centre, avec un rayon égal à R, on décrit un cercle qui coupe AK au point O.

Il ne reste plus qu'à tracer le cercle, qui rencontre généralement HD en deux points B et C.

Pour que la construction précédente conduise à une solution, il faut d'abord que le triangle AHD existe, ce qui suppose $h < l$; il faut ensuite que le rayon R du cercle O surpasse le rayon O'A du cercle limite O' tangent en D à HD. Or O' se projetant au milieu de AD, on a

$$\text{AO}' \cos \text{OAE} = \frac{l}{2},$$

ou, comme $\cos \text{OAE} = \cos \text{DAH} = \dfrac{h}{l}$,

$$\text{AO}' = \frac{l^2}{2h}.$$

La condition $\text{R} > \text{AO}'$ revient donc à

$$\text{R} > \frac{l^2}{2h},$$

et, en la rapprochant de la condition $h < l$, on a la double condition de possibilité,

$$h^2 < l^2 < 2\text{R}h ;$$

ces deux limites de l^2 ne sont d'ailleurs compatibles qu'en supposant $h < 2\text{R}$.

(JACQUET, à Uchizy.)

[Ont résolu la même question : Mlle M. D. P. ; MM. Bayor ; H. Blanc ; G. Foucry ; J. Haag ; J. Hébré ; H. Janois ; D. Konig ; E. Licope ; D. Lwow ; S-N. Mirea ; R. Mouzon ; Noël ; M. Petitjean ; H. Pitrat ; P. Plisson ; Tuïssuzian ; Duvergé et Sainte-Laguë ; L. Giboin.]

TRIGONOMÉTRIE

4779. — *Soit* ABC *un triangle, soit* A'B'C' *le triangle formé par les points de contact des côtés avec le cercle inscrit ; si on appelle* α, β, γ *les côtés de* A'B'C', a, b, c *ceux de* ABC, $2p$ *le périmètre de ce dernier triangle, on a*

$$\frac{\alpha^2}{a(p-a)} = \frac{\beta^2}{b(p-b)} = \frac{\gamma^2}{c(p-c)}.$$

La relation des sinus appliquée au triangle A'B'C' donne

$$\frac{\alpha}{\sin \text{A}'} = \frac{\beta}{\sin \text{B}'} = \frac{\gamma}{\sin \text{C}'}. \quad (1)$$

Or

$$\sin \text{A}' = \sin \frac{\text{B}'\text{OC}}{2} = \sin \frac{180° - \text{A}}{2} = \cos \frac{\text{A}}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \text{A}}{2}} ;$$

en remplaçant cos A par sa valeur tirée de la relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \text{A}$, il vient

$$\sin^2 \text{A}' = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{p(p-a)}{bc}.$$

On aurait de même

$$\sin^2 \text{B}' = \frac{p(p-b)}{ca}, \qquad \sin^2 \text{C}' = \frac{p(p-c)}{ab}.$$

Les relations (1) s'écrivent alors

$$\frac{\alpha^2 bc}{p(p-a)} = \frac{\beta^2 ca}{p(p-b)} = \frac{\gamma^2 ab}{p(p-c)},$$

ou, en multipliant chaque membre haut et bas respectivement par a, b, c,

$$\frac{\alpha^2}{a(p-a)} = \frac{\beta^2}{b(p-b)} = \frac{\gamma^2}{c(p-c)}. \quad (2)$$

En considérant le triangle analogue à A'B'C' ayant pour sommets les points de contact A'', B'', C'' des côtés de ABC avec le cercle exinscrit dans l'angle A, on obtiendrait de même, en appelant α', β', γ' les côtés du triangle,

$$\frac{\alpha'^2}{ap} = \frac{\beta'^2}{b(p-c)} = \frac{\gamma'^2}{c(p-b)}.$$

Remarque. — On peut montrer que les rapport égaux (2) représentent la valeur $\dfrac{r}{\text{R}}$ du rapport des rayons des cercles inscrit et circonscrit du triangle ABC. En effet, on a

$$\frac{\alpha}{\sin \text{A}'} = 2r,$$

d'où
$$\frac{\alpha^2}{a(p-a)} = \frac{4r^2 p(p-a)}{a(p-a)bc} = \frac{4\text{S}.r}{abc} = \frac{r}{\text{R}} ;$$

on verrait de même que

$$\frac{\alpha'^2}{ap} = \frac{r'}{\text{R}},$$

r' étant le rayon du cercle exinscrit dans l'angle A.

(L. J. B., à Lille.)

Autre solution. — Dans le triangle OB'C' on a

$$B'C' = \alpha = 2\,r\cos\frac{A}{2} = 2r\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

d'où $\alpha^2 = \dfrac{4r^2p(p-a)}{bc} = a(p-a)\dfrac{4r^2p}{abc} = a(p-a)\dfrac{r^2p}{RS}$

$$= a(p-a)\frac{r}{R},$$

d'où enfin

$$\frac{r}{R} = \frac{\alpha^2}{a(p-a)} = \frac{\beta^2}{b(p-b)} = \frac{\gamma^2}{c(p-c)}.$$

Solution géométrique. — On a

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = \frac{A'B'C'}{AB'C'}\cdot\frac{AB'C'}{ABC}.$$

Or les triangles A'B'C' et AB'C' ont respectivement les angles en A' et B' égaux ; donc

$$\frac{A'B'C'}{AB'C'} = \frac{\beta\gamma}{\alpha\,.\,AB'} = \frac{\beta\gamma}{\alpha(p-a)};$$

de même

$$\frac{AB'C'}{ABC} = \frac{AB'.AC'}{bc} = \frac{(p-a)^2}{bc}.$$

Par suite

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = \frac{\beta\gamma(p-a)}{\alpha bc}.$$

Par analogie

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = \frac{\gamma\alpha(p-b)}{\beta ca},$$

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = \frac{\alpha\beta(p-c)}{\gamma ab}.$$

On peut donc écrire

$$\frac{\beta\gamma(p-a)}{\alpha bc} = \frac{\gamma\alpha(p-b)}{\beta ca} = \frac{\alpha\beta(p-c)}{\gamma ab},$$

et, en multipliant chaque membre haut et bas respectivement par $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$,

$$\frac{a(p-a)}{\alpha^2} = \frac{b(p-b)}{\beta^2} = \frac{c(p-c)}{\gamma^2}.$$

(A. LECOUTOUR, *école primaire supérieure de Saint-Lô.*)

[Ont résolu la même question : MM. A. Aubert ; R. Barthélemy ; H. Blanc ; A. Delaire ; G. Delahaye ; G Foucry ; G. A. lycée de Nîmes; J. Haag; D. Lwow ; A. Meyer; H. Pitrat; P. Plisson, Sinoquet ; P. Thonet ; P. Zlatco; F. Clabault; Duvergé et Sainte-Laguë ; R. Henry ; A. Legros ; T. Lemoyne ; E. Licope ; G. Luquet ; A. Martrou ; Marx ; R. Mouzon ; A. de Saint-Gabriel.]

4790. — *Résoudre l'équation*

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} 3x - \operatorname{cotg} 3x = 4.$$

En remarquant que

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{2}{\sin 2x},$$

l'équation proposée peut s'écrire

$$\frac{2}{\sin 2x} - \frac{2}{\sin 2\times 3x} = 4,$$

ou $\qquad \sin 6x - \sin 2x = 2\sin 2x \sin 6x,$

ou, en transformant le premier membre en produit,

$$2\sin 2x \cos 4x = 2\sin 2x \sin 6x.$$

En supprimant le facteur commun $2\sin 2x$, qui donnerait $x = k\dfrac{\pi}{2}$, et par suite des valeurs infinies pour deux des termes du premier membre, il vient

$$\cos 4x = \sin 6x,$$

ou $\qquad \cos 4x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 6x\right).$

Tous les arcs ayant même cosinus étant compris dans la formule $2k\pi \pm \alpha$, on satisfait à l'équation précédente en posant

$$2k\pi \pm 4x = \frac{\pi}{2} - 6x;$$

on tire de là

$$10x = -2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{20} + k'\frac{\pi}{5}$$

et $\qquad 2x = -2k\pi + \dfrac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = \dfrac{\pi}{4} + k''\pi.$

Les arcs vérifiant la première formule ont leurs extrémités terminées aux sommets d'un décagone régulier inscrit ; ceux de la seconde sont terminés aux extrémités d'un même diamètre.

(RAOUL MOUZON, *collège de Fontenay.*)

Remarque. — Pour $k' = 1$, la première formule donne

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi(1+4)}{20} = \frac{\pi}{4},$$

de sorte que les solutions données par la seconde formule rentrent dans celles que donnent la première.

[Ont résolu la même question : MM. Aubert ; C. Berthoux ; H. Blanc ; G. Ducroux ; J. Haag ; A. Joyer ; D. König ; A. Larue ; D. Lwow ; Noël ; A. Sauvageon ; P. Thonet ; P. Valentin ; P. Zlatco.]

MÉCANIQUE

4802. — *Si l'on prend la résultante* R *de deux forces* P *et* Q, *puis la résultante* S *des forces* P *et* R, *et enfin la résultante* T *des forces* Q *et* R, *on a*

$$S^2 + T^2 = P^2 + Q^2 + 4R^2.$$

La résultante S des forces P et R s'exprime au moyen des deux composantes et de leur angle α, par la formule connue

$$S^2 = P^2 + R^2 + 2PR\cos\alpha;$$

de même $\qquad T^2 = Q^2 + R^2 + 2QR\cos\beta,$

β désignant l'angle des forces Q et R.

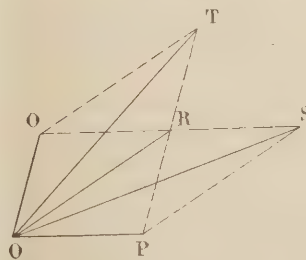
Par suite

$$S^2 + T^2 = P^2 + Q^2 + 2R^2 + 2R(P\cos\alpha + Q\cos\beta),$$

ou, en observant que $P\cos\alpha + Q\cos\beta = R$,

$$S^2 + T^2 = P^2 + Q^2 + 4R^2.$$

Démonstration géométrique. — Les résultantes R, S, T sont représentées géométriquement par les diagonales OR, OS, OT de trois parallélogrammes.



Comme $QR = OP = RS$, OR est médiane du triangle OQS et l'on a

$$\overline{OS}^2 + \overline{OQ}^2 = 2\overline{OR}^2 + 2\overline{RS}^2,$$

ou $S^2 + Q^2 = 2R^2 + 2P^2$. (1)

De même, en remarquant que OR est également médiane du triangle OPT, on a

$$T^2 + P^2 = 2R^2 + 2Q^2. \qquad (2)$$

L'addition des égalités (1) et (2) fournit la relation proposée.

(HENRI PITRAT, *à Givors.*)

[Ont résolu la même question : MM. Aubert : Avocat ; Bertagna ; H. Blanc ; R. Cattin ; G. Claudon ; E. Cognet ; Y. Collin ; A. Delaire ; H. Dobryzniak ; Duvergé et Sainte-Laguë ; G. Foucry ; A. Foy ; A. Gaumer ; Gaumont ; L. Giboin ; M. Gondran ; J. Haag ; J. Hébré ; R. Henry ; Jacquet ; Janois ; J.-M. Lagarde ; A. Larue ; A. Lecoutour ; E. Licope ; F. Limouzi ; Lionnet ; Luquet ; D. Lwow ; J. Maire ; L. Maubeck ; A. Meyer ; P. Millet ; R. Mouzon ; Noël ; P. E., à Bonneval; M. Pappà ; E. Perdu ; L. de Praneuf ; G. Pruvot ; R. Rives ; A. de Saint-Gabriel ; G. Saintville ; A. Sauvageon ; Sinoquet ; L. Thiébert ; A. Vachon ; P. Valentin ; A. Vannier ; Vérot ; A. Sauveau.]

PHYSIQUE

4803. — *Un baromètre, dont la cuvette est assez large pour qu'on puisse y considérer les dénivellations du mercure comme négligeables, a une chambre dans laquelle a pénétré une certaine quantité d'air. On veut néanmoins s'en servir pour déterminer la pression atmosphérique.*

Une expérience préliminaire a montré que, la température étant 0° *et la pression effective* 760^{mm}, *le baromètre marquait* 740^{mm} *et la chambre barométrique avait une longueur de* 25^{cm}.

On demande quelle est la pression quand, à la température de 35°, *le baromètre marque* 745^{mm}. *On sait que le coefficient de dilatation cubique du mercure est* $\frac{1}{5550}$, *celui de l'air* $\frac{1}{273}$.

On négligera d'ailleurs la dilatation du verre.

(*Bacc. lettres-math., Caen, avril 1898.*)

Dans l'expérience préliminaire, l'air contenu dans la chambre barométrique occupait un volume de $25 \times s$ (s étant la section du tube) sous une pression de $760 - 740 = 20^{mm}$ à la température de 0°.

Dans la seconde expérience, la même masse d'air occupe un volume de $(74 + 25 - 74{,}5)s$ ou $24{,}5\,s$ à la température de 35° et sous la pression de $\left(X - \frac{745}{1 + \frac{35}{5550}}\right)^{mm}$, X désignant la pression atmosphérique et $\frac{745}{1 + \frac{35}{5550}}$ étant la hauteur du mercure ramenée à 0°.

En appliquant l'équation qui réunit les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, il vient

$$25s \times 20 = \frac{24{,}5\,s}{1 + \frac{35}{273}}\left(X - \frac{745}{1 + \frac{35}{5550}}\right)$$

d'où l'on tire $\quad X = 763^{mm},3.$

(E. COGNET, à Saint-Etienne.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Ageron ; A. Bertagna ; A. Beckerich ; F. Boivin ; R. Cattin ; G. Chamberand ; G. Claudon ; L. Corbin ; A. Cotton et Desreboulles ; Delaire ; Dobryzniak ; Duvergé et Sainte-Laguë ; P. E., à Bonneval ; A. Foucry ; M. Gondran ; J. Haag ; R. Henry ; J. Jarrier ; H. Janois ; T. Lemoyne ; F. Limouzy ; J. Maire ; L. Maubeck ; A. Meyer ; R. Mouzon ; Noël ; R. Paucot ; de Praneuf ; G. Pruvot ; M. Royer ; A. Sauvageon ; Sinoquet ; R. Simon ; D. Tuissuzian ; A. Vannier.]

4804. — *Étant donné un gaz combustible de densité 0,39, qui dégage en brûlant 11 000 calories par kilogramme et qui coûte* 0^{fr},30 *le mètre cube, combien coûterait, à l'aide d'un brûleur alimenté par ce gaz, la production de 100 000 calories, et quel poids d'eau à 10° pourrait-on transformer en vapeur à 100° en utilisant 65 °/₀ de cette quantité de chaleur ?*

(*Bacc. lettres-sciences, Grenoble, avril 1898.*)

Un mètre cube du gaz donné pèse

$$1293^{gr} \times 0{,}39 = 504^{gr},27.$$

Le nombre de calories par mètre cube que ce gaz dégage en brûlant est de $\frac{11\,000 \times 504{,}27}{1000} = 5\,546^{cal},97.$

La production de 100 000 calories coûtera donc

$$\frac{0{,}30 \times 100\,000}{5\,546{,}97} = 5^{fr},40.$$

Appelons x le poids de l'eau que l'on pourra transformer en vapeur. La chaleur de vaporisation de l'eau étant 537^{cal}, les x^{kg} d'eau, pour s'élever de 10° à 100° et pour se vaporiser, absorberont $(100 - 10)x + 537$ calories; et comme on n'utilise que les 65 °/₀ des 100 000 calories, on a

$$(100 - 10)x + 537x = \frac{100\,000 \times 65}{100},$$

d'où $\quad x = 103^{kg},67.$

(F. LIMOUZI.)

[Ont résolu la même question : MM. F. Boivin ; R. Cattin ; G. Claudon ; E. Cognet ; L. Corbin ; A. Cotton; A. Delaire; Dobryzniak ; Duvergé et Saint-Lagué ; P. E., à Bonneval ; G. Foucry ; A. de Saint-Gabriel ; L. Gaumont ; J. Germa ; L. Giboin ; A. Gorce ; J. Haag ; R. Henry ; J. Jarrier ; H. Janois ; G. Lallier ; A. Lecoutour; T. Lemoyne; L. Lionnet; David Lwow ; G. Luquet ; A. Meyer ; Noël ; R. Paucot ; J. Pendariès ; G. Pruvot ; M. Royer ; G. Saintville ; A. Sauvageon ; Sinoquet ; Thiébault ; D. Tuissuzian ; M. del Valle ; P. Valentin ; A. Vannier.]

CONCOURS DE 1900

ÉCOLE NAVALE

Arithmétique et Algèbre.

I. — Une série à termes positifs est convergente lorsque, à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ou $\sqrt[n]{u_n}$ restent plus petits qu'un nombre fixe plus petit lui-même que l'unité.

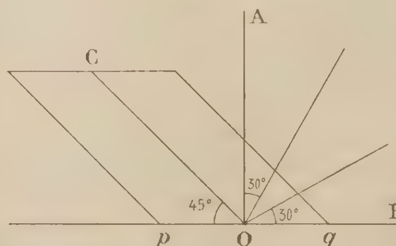
II. — **4813**. — On donne une droite AB, de longueur $2a$; on demande de déterminer sur la perpendiculaire OZ élevée au milieu O de cette droite deux points X et Y tels que, si l'on fait passer par chacun d'eux et par les extrémités de AB deux arcs de cercles : 1° le volume lenticulaire engendré par la surface AXBY, comprise entre ces deux arcs, en tournant autour de OZ soit dans un rapport p avec le cylindre ayant pour hauteur XY et pour diamètre de base la longueur AB ; 2° la surface de cette lentille ait pour valeur $2\pi m^2$ ($OX = x$, $OY = y$).

III. — **4814**. — La durée de l'oscillation d'un pendule simple de longueur l est donnée par la formule $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; calculer à $\frac{1}{100}$ de seconde près la durée d'oscillation d'un pendule de 300 mètres, sachant que $g = 9{,}8094$ en prenant le mètre et la seconde comme unités.

(*30 mai, de 7 h. à 10 h. 1/2.*)

Géométrie descriptive.

4815. — Deux cônes de révolution ont leur sommet commun O situé dans le plan horizontal de cote zéro. Ils ont même demi-angle au sommet 30°. L'axe du premier est la demi-droite verticale OA dirigée vers le haut ; l'axe du second est la demi-droite horizontale OB dirigée vers la droite.



On considère un cylindre oblique à base circulaire horizontale dont l'axe OC, situé dans le plan OAB, est incliné de 45° sur l'horizon et disposé par rapport à OA et OB comme l'indique la figure. Sa

base inférieure est dans le plan horizontal de cote zéro et a pour rayon $Op = Oq = 42^{mm}$. Sa base supérieure est dans le plan horizontal de cote égale à $+75^{mm}$.

Construire les courbes d'intersection de ce cylindre et des deux cônes et représenter la partie solide du cylindre extérieure aux deux cônes. On effectuera cette représentation sur le plan horizontal de cote zéro, sur le plan vertical OAB, et sur un second plan vertical perpendiculaire à OB et distant de O de 60^{mm} à droite.

On déterminera la tangente en un point des courbes d'intersection.

(31 mai, de 7 h. à 10 h. 1/2.)

Géométrie et Géométrie analytique.

I. — Toutes les figures symétriques d'une même figure soit par rapport à un point, soit par rapport à un plan, sont superposables.

II. — **4816**. — ABA'B' est un trapèze inscriptible et circonscriptible : il est nécessairement isocèle.

Soient O et I les centres respectifs des cercles circonscrit et inscrit ; M le point de contact de AB et de la circonférence inscrite ; OR la perpendiculaire abaissée de O sur AB ; MQ la perpendiculaire abaissée de M sur OI, et P son point de rencontre avec OR ; T le point de rencontre de AB et de OI.

Démontrer les propriétés suivantes :

1° La circonférence décrite sur AB comme diamètre est tangente en I à OI, et le point T est d'égale puissance par rapport au point I et à la circonférence O ;

2° Les quatre points A, M, B, T forment une division harmonique ;

3° $\overline{RI}^2 = \overline{OR} \times \overline{IM}$ et l'angle OAP est droit.

Appliquer ces propriétés à la construction d'un trapèze inscriptible et circonscriptible connaissant :

1° son périmètre et le rayon du cercle circonscrit ;

2° la distance OI des centres des cercles inscrit et circonscrit et le rayon du cercle circonscrit ;

3° les rayons des cercles inscrit et circonscrit.

III. — Oxy sont deux axes rectangulaires ; BB' une droite parallèle à l'axe des x ; $\overline{OB} = b$.

On joint un point $M(x, y)$ au point O, et on considère sur cette droite le point $N(x', y')$ tel qu'en abaissant les perpendiculaires MP et NQ sur la droite BB', on ait la relation segmentaire

$$\overline{MP}.\overline{NQ} = \overline{OB}^2.$$

1° Exprimer les coordonnées x', y' du point N en fonction des coordonnées x, y du point M.

2° Lieu du point N lorsque le point M décrit une circonférence de rayon; a tangente en O à l'axe des y. Ce lieu est une conique ; la discuter ; la rapporter à ses axes de symétrie ; équations de ses axes.

3° Prendre comme nouveaux axes de coordonnées les bissectrices des axes primitifs, et construire le lieu des sommets des axes de cette conique quand b restant fixe, le rayon a varie (*).

(1er juin, de 7 h. à 10 h. 1/2.)

Calcul trigonométrique.

4817. — Calculer les valeurs de x comprises entre zéro et 90° satisfaisant à la formule

$$\text{tg}^2(2x + 310°) = \frac{\cos(3\varphi + 37°)\sin^3 139°19'28''}{\cos 218°19'25''}$$

sachant que l'on a

$$\text{tg}\,\varphi = (0,94732)^5 \ \text{tg}\, 131°19'15''.$$

(1er juin, de 2 h. à 3 h.)

(*) Cette question est traitée dans la *Revue de Mathématiques spéciales*.

Physique et Chimie.

I. — Comment détermine-t-on une température au moyen du thermomètre à poids? Théorie.

II. — **4818**. — Deux tubes verticaux A et B cylindriques, de même section et de même hauteur, communiquent à leur partie inférieure par un tube horizontal et sont fermés à leur partie supérieure. Ils contiennent du mercure et de l'air sec.

Lorsque les deux tubes sont à la même température, le niveau est le même dans les deux tubes, et la partie occupée par l'air a une hauteur de 50^{cm}.

La température du tube A étant maintenue à 0° et celle du tube B à 100°, on constate que le niveau du mercure dans le tube B baisse de 5^{cm}. Quelle est à un centimètre près, la pression de l'air contenu dans l'un et l'autre tube lorsque leur température commune est de 0° ?

On ne tiendra pas compte de la dilatation du mercure ni de celle de l'enveloppe.

III. — Le chlore. Propriétés et préparation.

(2 juin, de 7 h. à 10 h. 1/2.)

BACCALAURÉATS

SESSION D'AVRIL 1900

Lettres-Mathématiques.

AIX

I. — Un point M, mobile sans frottement sur une ellipse, est attiré vers les foyers F et F' par des forces proportionnelles aux rayons vecteurs MF et MF'.

En quels points de la courbe le mobile M doit-il être placé, sans vitesse initiale, pour qu'il y demeure en équilibre?

II. — Trouver trois nombres en progression géométrique, sachant que leur somme est égale à 741 et que le troisième surpasse le premier de 624.

I. — On mélange par parties égales de l'eau et de l'alcool absolu dont la densité par rapport à l'eau est 0,79. On constate qu'il se produit par le mélange une contraction de $\frac{1}{20}$ du volume total.

On demande quel degré marquera ce mélange : 1° à l'alcoomètre centésimal; 2° au pèse-liqueur de Baumé (pour les liquides plus légers que l'eau), sachant que ce dernier marque 0^d dans une dissolution de densité 1,075 et 10_d dans l'eau. On négligera l'influence de la capillarité.

II. — *1er sujet*. — Piles à courants constants.

II. — *2e sujet*. — Solénoïdes; leurs propriétés.

II. — *3e sujet*. — Induction électrique; expériences fondamentales.

BORDEAUX

I. — *1er sujet*. — Construction des tangentes à l'ellipse parallèles à une droite donnée.

I. — *2e sujet*. — Construction de la tangente à la parabole parallèle à une droite donnée.

I. — *3e sujet*. — Déterminer dans la parabole la relation qui existe entre le carré d'une corde perpendiculaire à l'axe et sa distance au sommet.

II. — Un triangle équilatéral MNP a ses sommets sur trois des côtés d'un carré ABCD. Le sommet M est sur le côté AB; on désigne par a le côté du carré, par l la longueur AM.

Trouver l'expression du côté du triangle équilatéral.

Examiner d'abord le cas où les sommets N et P sont situés sur les deux côtés AD et BC, puis celui où l'un des sommets N ou P se trouve sur le côté CD.

I. — Pour comparer les forces électromotrices E_1 et E_2 de deux piles, de résistances intérieures r_1 et r_2 inconnues, on les met en circuit avec un galvanomètre de résistance g également inconnue.

Dans une première expérience, les piles sont réunies par deux pôles contraires, et on lit la déviation D du galvanomètre. Dans une seconde expérience, elles sont réunies par deux pôles de même nom, c'est-à-dire mises en opposition, et on lit la déviation d. En admettant la proportionnalité des intensités aux déviations, on demande le rapport des deux forces électromotrices.

Cas particulier : D = 56 divisions, d = 8 divisions.

II. — *1er sujet.* — Énoncer les lois d'Ohm et de Joule ; les expliquer sur un exemple.

II. — *2e sujet.* — Décrire le galvanomètre sensible que vous connaissez le mieux : l'appliquer à la mesure d'un courant de grande intensité.

II. — *3e sujet.* — Courants thermo-électriques.

CAEN

I. — Étant donnée la fraction décimale périodique 0,43 537 537 537, montrer qu'elle a une limite quand le nombre de périodes croît indéfiniment et trouver cette limite.

II. — Établir une formule permettant de calculer les angles B et C d'un triangle ABC quand on connaît la différence B — C et les côtés b et c du triangle. Effectuer les calculs dans le cas où l'on a B — C = 58° 23′ 30″.

$$\log b = 3,42876, \qquad \log c = 3,00088.$$

I. — Galvanomètres.

II. — Un projectile est lancé avec une vitesse initiale V_0 suivant une direction inclinée de 45° au-dessus du sol supposé horizontal. On demande à quelle distance de son point de départ il retombera sur le sol. On ne tiendra pas compte de la résistance de l'air.

Application : $V_0 = 200^m$ par seconde.

DIJON

I. — *1er sujet.* — Projections stéréographiques.

I. — *2e sujet.* — Expliquer l'inégalité des jours et des nuits.

II. — Sur deux des arêtes d'un trièdre trirectangle de sommet O, on donne OB = b, OC = c et on demande la position sur la troisième arête d'un point M qui soit le sommet d'un angle plan BMC de valeur donnée α.

I. — *1er sujet.* — Téléphone.

I. — *2e sujet.* — Télégraphe.

II. — Combien de temps faut-il à un corps tombant dans le vide, à partir de l'instant où il est abandonné, pour qu'il ait une vitesse de 20^m par seconde, en supposant qu'à l'endroit où se produit cette chute le pendule simple qui effectue une oscillation simple par seconde ait une longueur de 99^{cm} ?

LILLE

I. — *1er sujet.* — Lieu géométrique des points dont le rapport des distances à deux points fixes est constant.

I. — *2e sujet.* — Division d'une droite en moyenne et extrême raison.

I. — *3e sujet.* — Inscription du pentadécagone régulier dans la circonférence.

II. — Trouver les systèmes des valeurs de x, y, z déterminées par les équations

$$yz + y + z = a, \qquad zx + z + x = b, \qquad xy + x + y = c.$$

Discuter la réalité et les signes de ces valeurs et les comparer entre elles.

I. — *1er sujet.* — Force élastique maximum de la vapeur d'eau à diverses températures.

I. — *2e sujet.* — Mélange des gaz et des vapeurs.

I. — *3e sujet.* — Chaleur de vaporisation.

II. — Un point lumineux se trouve sur l'axe d'une lentille convergente de 50^{cm} de distance focale à 25^{cm} de la lentille. Après avoir traversé la lentille, les rayons se réfléchissent sur un miroir plan perpendiculaire à l'axe de la lentille et distant de la lentille de 25^{cm}. Après cette réflexion, les rayons traversent de nouveau la lentille convergente. Où se forme l'image définitive ?

QUESTIONS PROPOSÉES

4819. — Démontrer que si $\frac{A}{B}$ est la fraction génératrice d'une fraction périodique ayant i chiffres irréguliers et p chiffres périodiques, $\frac{A^2}{B^2}$ est la fraction génératrice d'une fraction périodique ayant $2i$ chiffres irréguliers, le nombre des chiffres périodiques étant un multiple de p.

4820. — Étant donnée une demi-sphère de rayon R, calculer le rayon O′A′ d'une section parallèle à la base AB de l'hémisphère et telle que le rapport du volume du tronc de cône ABA′B′ à celui de la sphère qui a pour diamètre la distance OO′ des deux plans parallèles soit égal à un nombre donné m. — Discuter.

Application : $R = 5^m$, $m = 3$. Calculer O′A′ à 1/2 centimètre près.

(*Bacc. lettres-math., Nancy, mars 1900.*)

4821. — Sur l'axe d'une parabole donnée on considère un point A situé par rapport au sommet du même côté que le foyer, à une distance du sommet triple de la distance du foyer à la directrice. D'un point M de la parabole, on abaisse sur l'axe la perpendiculaire MP. Quand le point M se déplace, chercher comment varie la surface totale du cylindre engendré par la révolution autour de PA du rectangle ayant pour deux de ses côtés les droites MP et PA.

(*Bacc. lettres-sciences, Caen, mars 1900.*)

4822. — On donne une demi-circonférence de rayon R et sur le diamètre AB un point P, situé à une distance a du centre O.

1° Par le point P on mène une sécante PCD faisant avec AP un angle donné α. Calculer les tangentes des angles x et y que forment les cordes AC et AD avec le diamètre AB. Montrer que le produit $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$ est indépendant de l'angle α.

2° Mener par le point P la sécante PCD de manière que le produit des cordes AC et AD soit égal à une quantité donnée m^2.

(*Bacc. lettres-math., Bordeaux, novembre 1899.*)

4823. — Un triangle rectangle a un côté OB de l'angle droit horizontal, tandis que l'autre OA, de longueur a, est vertical et dirigé vers le haut. Un point matériel pesant, de masse m, descend sans vitesse initiale et sans frottement, à partir de A, le long de l'hypoténuse AB. Ce point matériel est, en outre, repoussé par le sommet A avec une force constante égale à $mk \times AB^{\alpha}$, k désignant une constante positive et α un exposant entier et positif.

1° Calculer le temps que met le mobile pour arriver en B.

2° En supposant que la descente du même point s'effectue successivement sur les hypoténuses AB, AB′, AB″, de différents triangles, quel est celui de ces triangles qui donnera le temps de descente minimum, dans chacun des deux cas particuliers où $\alpha = 1$ et $\alpha = 3$?

(*Bacc. lettres-math., Lille, mars 1899.*)

4824. — On donne une sphère de 10^{cm} de diamètre intérieur et dont la paroi a 3^{mm} d'épaisseur en métal dont la densité est 10 à 4°. On veut qu'elle reste en équilibre indifférent quand elle est entièrement dans de l'eau à 4°. On demande à quelle pression on doit comprimer de l'azote dans la boule. Densité de l'azote, 0,97.

L'équilibre étant obtenu à 4°, on demande ce qui se passera si l'on chauffe ou si l'on refroidit le système.

(*Bacc. lettres-math., Toulouse, mars 1900.*)

4825. — On considère un manomètre à air comprimé dont le tube est cylindrique et qui contient une colonne d'air de 80^{cm} de hauteur sous la pression extérieure de 75^{cm} de mercure. A quelle distance du sommet se fixe le niveau du liquide lorsque la pression exercée sur le mercure de la cuvette devient égale à 375^{cm} ? On négligera l'abaissement du niveau du mercure dans la cuvette.

(*Bacc. lettres-sciences, Rennes, mars 1900.*)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Directeur.

24e Année. — N° 19. JOURNAL Paris, le 1er Juillet 1900.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.

Abonnements.. Librairie **Nony** et Cie, Boul^d St-Germain, 63, PARIS.

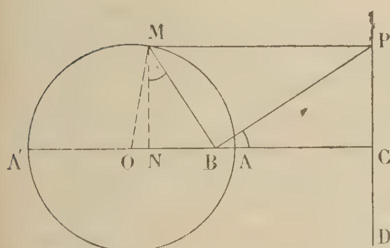
Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

ALGÈBRE

4791. — *Sur un diamètre AA' d'un cercle on donne deux points B et C. Par le point C on mène une droite D perpendiculaire à ce diamètre. On demande de déterminer un point M sur le cercle, tel que si l'on mène la perpendiculaire MP à la droite D, l'angle MBP soit droit.*

Discussion. — Construction géométrique.

(*Bacc. lettres-math., Clermont, novembre 1899.*)



Menons MN perpendiculaire à AA' et posons $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$, $\overline{ON} = x$. Les triangles semblables MNB, BCP donnent

$$\frac{MN}{NB} = \frac{BC}{CP},$$

ou, comme

$$CP = MN,$$

$$\overline{MN}^2 = NB.BC,$$

ou

$$R^2 - x^2 = (b - x)(c - b), \qquad (1)$$

ou

$$f(x) = x^2 - (c - b)x + b(c - b) - R^2 = 0.$$

Discussion. — Pour qu'à une valeur de x réponde un point M, il faut et il suffit que cette valeur soit réelle et comprise entre $-R$ et $+R$. Or d'après (1), x sera compris entre $-R$ et $+R$ si $x < b$, puisque $c - b > 0$, C n'étant pas compris entre O et B.

Cas d'une solution. — Dans ce cas, b sépare les deux racines, et l'on a

$$f(b) = b^2 - R^2 < 0,$$

ou

$$-R < b < +R.$$

Le point B est alors intérieur au cercle O.

Cas de deux solutions. — On doit avoir à la fois

$$\delta = (c - b)^2 - 4b(c - b) + 4R^2 \geqslant 0,$$

$$f(b) = b^2 - R^2 > 0, \qquad \frac{c - b}{2} < b.$$

La condition $\delta \geqslant 0$ revient à prendre :

soit $$c - b < 2\left(b - \sqrt{b^2 - R^2}\right),$$

soit $$c - b > 2\left(b + \sqrt{b^2 - R^2}\right).$$

Cette dernière hypothèse se trouve exclue par la condition $c - b < 2b$. Il reste alors

$$b > R \quad \text{et} \quad 0 < c - b < 2\left(b - \sqrt{b^2 - R^2}\right).$$

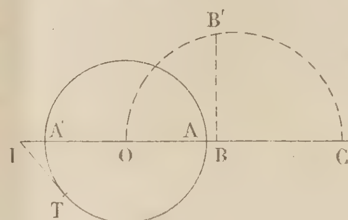
Ainsi lorsque B est extérieur au cercle O, il y a deux solutions

si $$0 < c - b < 2\left(b - \sqrt{b^2 - R^2}\right),$$

ou $$b < c < 3b - 2\sqrt{b^2 - R^2}.$$

Construction géométrique des racines. — Il s'agit de construire deux longueurs x' et x'' telles que

$$x' + x'' = c - b, \qquad x'x'' = b(c - b) - R^2.$$



Pour cela, prenons sur OC la longueur OI égale à l'ordonnée $BB' = \sqrt{b(c - b)}$ du cercle de diamètre OC. En menant de I une tangente au cercle O (ou bien une ordonnée perpendiculaire à OC si I tombe entre A' et A), on a

$$\overline{IT}^2 = \overline{IO}^2 - R^2 = b(c - b) - R^2 = x'x''.$$

Connaissant la somme (ou la différence) BC des deux longueurs et leur produit $\overline{IT}^2$, on les obtient facilement par l'une des constructions connues.

(Jean-François Débierre, lycée de Moulins.)

N.-B. — Dans quelques solutions, M est déterminé par l'intersection de deux coniques ou bien d'une parabole et d'un cercle; or, ainsi compris, le problème n'est pas résolu par la règle et le compas.

(Ont résolu cette question : MM. A. Gorce ; J. Haag ; J. Jarrier ; M. Royer ; P. Thonet.)

4807. — *Étudier les variations de la fraction*

$$\frac{x^4 + 4x^2 + 1}{2x^3 + 2x}.$$

Posons $$\frac{x^4 + 4x^2 + 1}{2x^3 + 2x} = y,$$

et cherchons les valeurs réelles de x correspondant à une valeur donnée de y.

Ces valeurs sont données par l'équation réciproque

$$x^4 - 2yx^3 + 4x^2 - 2yx + 1 = 0.$$

Pour résoudre cette équation, on l'écrit sous la forme

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2y\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0;$$

on pose alors $$x + \frac{1}{x} = z,$$

d'où l'on déduit $$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2,$$

et, en remplaçant dans l'équation,

$$f(z) = z^2 - 2yz + 2 = 0. \qquad (1)$$

Connaissant z, on aura x en résolvant l'équation

$$x^2 - zx + 1 = 0.$$

Pour que x soit réel, il faut et il suffit que l'équation (1) donne des racines telles que

$$z^2 - 4 \geqslant 0,$$

c'est-à-dire $z \leqslant -2$, ou $z \geqslant 2$.

L'équation (1) ne donne de valeurs réelles pour z, que si $y^2 \geqslant 2$.

Comparons les racines de cette équation à -2 et $+2$. On a

$$f(-2) = 6 + 4y,$$
$$f(+2) = 6 - 4y.$$

Si $y < -\frac{3}{2}$, $f(-2)$ est négatif et $f(+2)$ positif ; on a

$$z' < -2 < z'' < 2.$$

Si $-\frac{3}{2} < y < \frac{3}{2}$, $f(-2)$ et $f(+2)$ sont positifs ; on a

$$-2 < z' < z'' < 2.$$

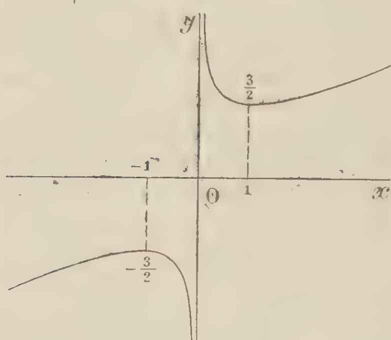
Si $y > \frac{3}{2}$, $f(-2)$ est positif et $f(+2)$ négatif ; on a

$$-2 < z' < 2 < z''.$$

Ainsi x n'est réel que lorsque $y < -\frac{3}{2}$ et $y > \frac{3}{2}$, ce qui fournit un maximum et un minimum relatifs pour y.

En remarquant d'ailleurs que la fonction y n'est jamais nulle, son numérateur étant toujours positif ; — qu'elle devient infinie pour $x = 0$, valeur qui annule son dénominateur, on déduit de là le tableau des variations de y, représentées par la courbe figurative ci-dessous.

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
y	$-\infty$	croît	$-\frac{3}{2}$ Max.	décr	$\mp\infty$	décr.	$\frac{3}{2}$ Min.	croît	$+\infty$



La fonction restant la même en valeur absolue lorsque x change de signe, on voit que la courbe admet l'origine pour centre.

(J. HAAG, collège de Pont-à-Mousson.)

Autre solution (par les dérivées). — Prenons la dérivée de la fonction ; on trouve

$$y' = \frac{(4x^3 + 8x)(2x^3 + 2x) - (x^4 + 4x^2 + 1)(6x^2 + 2)}{(2x^3 + 2x)^2}$$
$$= \frac{2(x^6 - x^4 + x^2 - 1)}{(2x^3 + 2x)^2} = \frac{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}{2x^2(x^2 + 1)^2}.$$

y' prend le signe de $x^2 - 1$; par suite y' est positif et y croît pour toute valeur de x non comprise entre -1 et $+1$. Pour toute autre valeur de x, y' est négatif et y décroît. On conclut facilement de là les résultats obtenus plus haut.

(R. HENRY, instituteur à Troyes.)

[Ont résolu cette question : MM. M. Bayor; H. Blanc; F. Clabault; A. Delaire; Duvergé et A. Sainte Laguë ; G. Foucry ; M. Gondran ; A. Huet ; Laurence ; P. Millet ; D. Tuïssuzian ; Aubert ; Janois.]

GÉOMÉTRIE

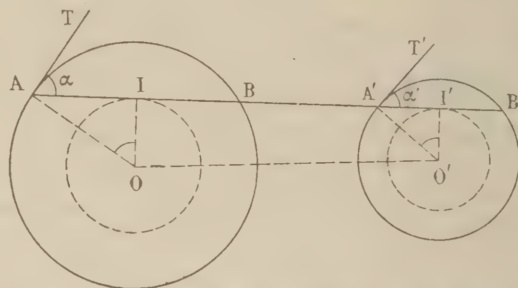
4606. — *Étant données deux circonférences* O *et* O', *dans un même plan, tracer une droite qui les coupe respectivement sous les angles donnés* α *et* α'.

Discuter la solution et calculer les segments interceptés par les deux circonférences sur la droite, en désignant par r *et* r' *les rayons et par* d *la distance des centres.*

On rappelle que l'angle de deux courbes en un point qui leur est commun est celui de leurs tangentes en ce point.

(*Bacc. lettres-math., Rennes, novembre 1898.*)

Supposons le problème résolu : soit ABA'B' la droite formant des angles α et α' avec les tangentes en A, A' aux deux cercles O, O'.



L'angle TAB $= \alpha$ ayant même mesure que la moitié de l'arc AB, cet arc a une longueur connue ; par suite, la corde AB a aussi une longueur connue et se trouve à une distance connue du centre O (facile à obtenir, soit géométriquement, soit par le calcul). Le problème revient donc à mener une tangente commune à deux cercles de centres O, O' et de rayons donnés, — problème classique.

Discussion. — La seule condition de possibilité est que les petits cercles O, O', de rayons $r\cos\alpha$, $r'\cos\alpha'$ ne soient pas intérieurs l'un à l'autre, condition remplie lorsque

$$d \geqslant |\, r\cos\alpha - r'\cos\alpha' \,|\,.$$

Suivant que les petits cercles O, O' sont sécants ou extérieurs, c'est-à-dire selon que

$$d < r\cos\alpha + r'\cos\alpha',$$

ou

$$d > r\cos\alpha + r'\cos\alpha',$$

le problème comporte deux ou quatre solutions distinctes.

Lorsque $d = |\, r\cos\alpha - r'\cos\alpha' \,|$, les deux solutions du cas général se confondent en une seule. Lorsque $d = r\cos\alpha + r'\cos\alpha'$, deux des quatre solutions du cas général coïncident, ce qui réduit le nombre des solutions à trois.

Calcul des segments AB, BA', A'B' *déterminés sur la droite par les cercles* O, O'. — On a

$$AB = 2AI = 2r\sin\alpha,$$
$$A'B' = 2A'I' = 2r'\sin\alpha' ;$$

puis

$$BA' = II' - IB - A'I'.$$

Pour calculer II', menons O'K parallèle à II' :

$$II' = KO' = \sqrt{d^2 - \overline{OK}^2}$$
$$= \sqrt{d^2 - (r\cos\alpha - r'\cos\alpha')^2} ;$$

par suite

$$BA' = \sqrt{d^2 - (r\cos\alpha - r'\cos\alpha')^2} - (r\sin\alpha + r'\sin\alpha').$$

En considérant une tangente commune intérieure, la valeur de BA' devient

$$BA' = \sqrt{d^2 - (r\cos\alpha + r'\cos\alpha')^2} - (r\sin\alpha + r'\sin\alpha').$$

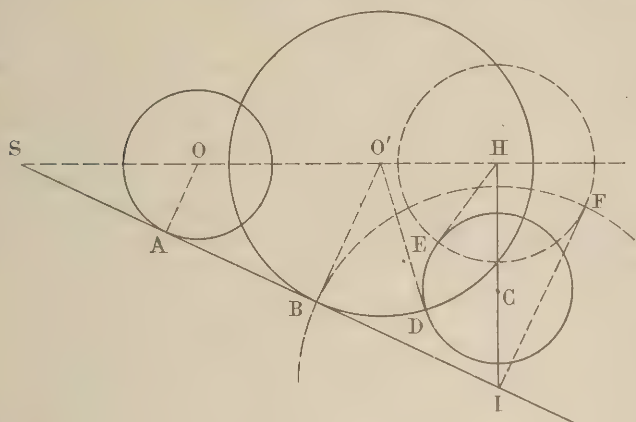
(A. DROCOURT, à Dourdan.)

[Ont résolu la même question : MM. V. Barol, école primaire supérieure de Lorgues ; H. Debenest, instituteur ; C. Marie.]

4770. — *On donne deux cercles* O *et* C, *et un point* S. *Déterminer le cercle qui coupe orthogonalement le cercle* C *et qui admet avec le cercle* O *le point* S *pour centre d'homothétie.*

Nous distinguerons deux cas principaux suivant que le point S est extérieur ou intérieur au cercle O.

1° S *est extérieur au cercle* O. — Dans ce cas, on peut mener de S la tangente SA au cercle O et le problème revient à déterminer un cercle O′ ayant son centre sur SO, tangent en B à SA

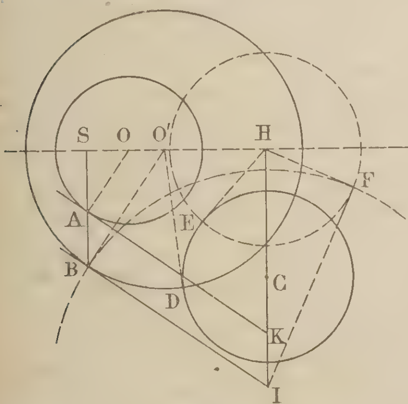


et coupant orthogonalement en D le cercle C. Or si I est le point de rencontre de SA avec la perpendiculaire CH à SO, le cercle de centre I et de rayon IB est aussi orthogonal en B au cercle O′, de sorte que les cercles I et C admettent la droite SO comme axe radical. Il en résulte que le cercle I est orthogonal à tout cercle ayant son centre sur SO et orthogonal au cercle C; en particulier dans le cas où H est extérieur au cercle C (cas de la figure), on peut prendre H comme centre de ce cercle, et en menant alors la tangente IF au cercle H, on a le rayon IF du cercle I, ce qui détermine le point B et par suite le cercle O′. Comme il y a deux points B, le problème comporte deux solutions.

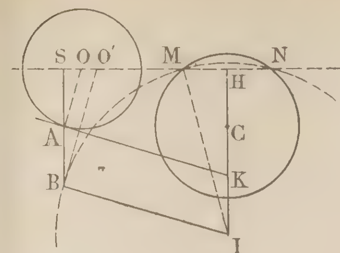
Lorsque H est intérieur au cercle C, ce cercle coupe SO en deux points qui appartiennent au cercle I, qui se trouve immédiatement connu.

Pour que la construction soit possible, il faut et il suffit que le cercle I existe, condition toujours remplie dans le dernier cas. Dans le cas de la figure, ce cercle n'existe qu'autant que le rayon HE du cercle H ne surpasse pas HI, condition qui dépend uniquement de la grandeur et de la position du cercle C relativement aux points H et I.

2° S *est intérieur au cercle* O. — Dans ce cas on remplace la tangente SAB du cas précédent par la perpendiculaire SAB à SO, et l'on remarque que la tangente en B étant par hypothèse parallèle à la tangente au point homologue A du cercle O, sa direction est connue ; sa longueur BI est d'ailleurs égale au segment AK de la tangente en A compris entre les parallèles connues SA et HC. On voit qu'il s'agit ici de trouver le centre du cercle I, au lieu de son rayon comme dans le cas précédent. Pour cela, on remarque que HI est l'hypoténuse d'un triangle rectangle IHF dont les deux côtés de l'angle droit sont égaux aux longueurs connues HE et AK. Le point I obtenu, on mène IB parallèle à



AK et BO′ perpendiculaire à AK, ce qui détermine complètement le cercle O′. Au second point d'intersection de SA avec le cercle I répond une seconde solution.



Dans le cas de la figure, H est supposé extérieur au cercle C, et le cercle I existe toujours, et par suite aussi le cercle O′.

En examinant le cas où le point H est intérieur au cercle O, on a la figure ci-contre, qui montre que le point I n'existe qu'autant qu'on a

$$MI \text{ ou } AK \geqslant MH.$$

(X..., lycée de Marseille.)

Seconde solution. — On sait que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un cercle soit orthogonal à C est qu'il divise harmoniquement un diamètre de C. D'autre part, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un cercle soit homothétique d'un cercle O par rapport à un point S est qu'il soit inverse de ce cercle O par rapport à S pris comme pôle d'inversion.

S A B B′ A′ C

Soient A et B les points où SC coupe le cercle O, A′, B′ les points où un cercle ω répondant à la question coupe SC.

Soit k la puissance de S par rapport à O ; soit μ la puissance d'inversion qui transforme O en ω ; et enfin R le rayon de C. On a

$$\overline{SA}.\overline{SB} = k,$$
$$\overline{SA}.\overline{SA'} = \overline{SB}.\overline{SB'} = \mu,$$
$$\overline{CA'}.\overline{CB'} = R^2.$$

Or

$$\overline{CA'} = \overline{CS} + \overline{SA'} = \overline{CS} + \frac{\mu}{\overline{SA}},$$
$$\overline{CB'} = \overline{CS} + \overline{SB'} = \overline{CS} + \frac{\mu}{\overline{SB}};$$

donc

$$\left(\overline{CS} + \frac{\mu}{\overline{SA}}\right)\left(\overline{CS} + \frac{\mu}{\overline{SB}}\right) = R^2,$$
$$\frac{\mu^2}{k} + \mu.\overline{CS}\cdot\frac{\overline{SA}+\overline{SB}}{k} + \overline{CS}^2 = R^2.$$

Si on appelle I le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur SC, on a $\overline{SA} + \overline{SB} = 2\overline{SI}$ et l'équation précédente devient

$$\mu^2 + 2k \times \overline{SI}.\overline{CS}\mu + k\overline{CS}^2 = kR^2.$$

Dans cette équation qui s'applique à tous les cas de figure, n'entrent comme éléments connus que des grandeurs toujours réelles. Cette équation détermine les puissances d'inversion qu'il faut employer pour déduire du cercle O par une inversion de pôle S les cercles cherchés.

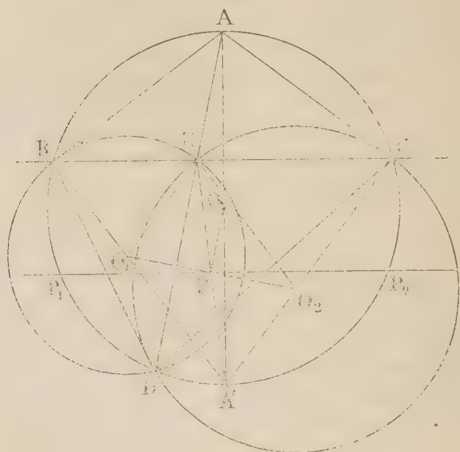
[Ont résolu partiellement la question: MM. H. Blanc, lycée de Clermont; Duvergé et Sainte-Laguë, lycée de Bordeaux ; D. Lwow à Piatra ; P. Thonet, athénée d'Anvers ; L. Trapinaud, institution Turgot, Limoges ; D. Tuïssuzian, lycée de Versailles.]

4787. — *On considère un triangle isocèle* ABC *de sommet* A *et le cercle circonscrit de centre* O.

1° *Par le sommet* A *on mène une droite quelconque rencontrant le cercle* O *en* D *et la base* BC *en* E. *Démontrer que les cercles, de centres* O_1 *et* O_2, *circonscrits aux triangles* BDE *et* CDE *sont respectivement tangents en* B *et* C *aux côtés* AB *et* AC.

2° Trouver l'enveloppe de la ligne des centres O_1O_2 des cercles précédents et les tangentes communes à cette enveloppe et au cercle O.

1° Les angles inscrits ABC et BDA sous-tendant dans le cercle O des cordes égales sont égaux ; par suite, l'angle ABE est égal à l'angle BDE inscrit dans le cercle O_1 et AB est tangente au



cercle O_1. On verrait de même que AC est tangente au cercle O_2.

2° D'après ce qui précède, les points O_1 et O_2 sont situés sur les droites BA′, CA′ qui joignent B et C au point A′ diamétralement opposé à A. D'ailleurs la figure $O_1A'O_2E$ est un parallélogramme, car les triangles BO_1E, BA′C, EO_2C étant isocèles, O_1E est parallèle à A′C et EO_2 à A′B ; les diagonales O_1O_2 et EA′ se coupent donc mutuellement en leur milieu P. Or PO joignant dans le triangle AA′E les milieux de deux côtés est parallèle au troisième AE, c'est-à-dire perpendiculaire sur O_1O_2. La projection P de O sur O_1O_2 est ainsi le milieu de A′E et comme telle décrit une parallèle fixe P_1P_2 équidistante de BC et de A′. On conclut de là que la droite O_1O_2 enveloppe une parabole de foyer O et admettant la droite P_1P_2 pour tangente au sommet. Cette parabole est tangente aux droites BA′ et A′C qui sont des positions particulières de la droite O_1O_2.

Pour qu'une tangente au cercle O soit en même temps tangente à la parabole, il faut et il suffit que son point de contact tombe sur la tangente au sommet de la parabole, ce qui donne les deux points de contact P_1 et P_2 du cercle O avec les tangentes cherchées.

(A. AUBERT, lycée de Clermont-Ferrand.)

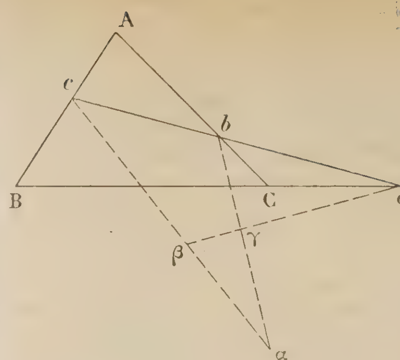
[Ont complètement résolu la question : MM. Bayor ; H. Blanc ; F. Clabault ; G. De France ; G. Foucry ; J. Haag ; D. Lwow ; Noël ; J. Pendariès ; P. Thonet ; D. Tuïssuzian.
Ont partiellement résolu la question : MM. R. Henry et R. Mouzon.]

4800. — *Soit αβγ le triangle formé par les droites symétriques d'une transversale abc par rapport aux trois côtés d'un triangle* ABC.

1° Démontrer que, quelle que soit la position de la transversale, le triangle αβγ conserve une forme constante.

2° Trouver les lieux géométriques des points α, β, γ quand la transversale se déplace parallèlement à elle-même.

3° Prouver que si ABC a tous ses angles aigus, le centre du cercle inscrit au triangle αβγ est sur la circonférence ABC. Considérer le cas où ABC est obtusangle.



1° On a

$$\widehat{b\alpha c} = \widehat{\alpha ba} - \widehat{\alpha ca}.$$

Or $\widehat{\alpha ba} = \widehat{2abc} = \widehat{2Abc}$,

$$\widehat{\alpha ca} = 180° - \widehat{2Acb}.$$

Donc

$$\widehat{b\alpha c} = 2(\widehat{Abc} + \widehat{Acb}) - 180°$$
$$= 2(180° - A) - 180°$$
$$= 180° - 2A.$$

Lorsque A est droit, cette valeur montre que l'angle βαγ devient nul ; α est alors rejeté à l'infini.

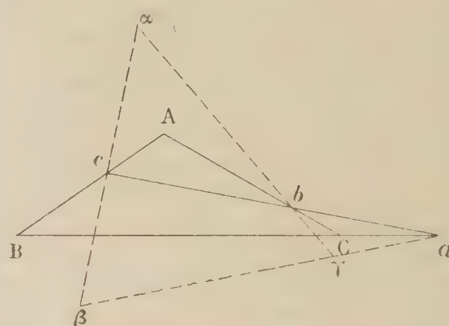
Lorsque A est obtus, la figure ci-dessous donne

$$\widehat{b\alpha c} = \widehat{\alpha ba} - \widehat{\alpha ca}.$$

Or $\widehat{\alpha ba} = 180° - \widehat{2Abc}$, $\widehat{\alpha ca} = \widehat{2Acb}$.

Donc $\widehat{b\alpha c} = 180° - 2(\widehat{Abc} + \widehat{Acb})$,

$$= 180° - 2(180° - A) = 2A - 180°.$$



Ainsi, pour A aigu ou obtus, on a

$$\widehat{b\alpha c} = |\ 180° - 2A\ |,$$

et, par analogie,

$$\widehat{a\beta c} = |\ 180° - 2B\ |,$$
$$\widehat{b\gamma a} = |\ 180° - 2C\ |.$$

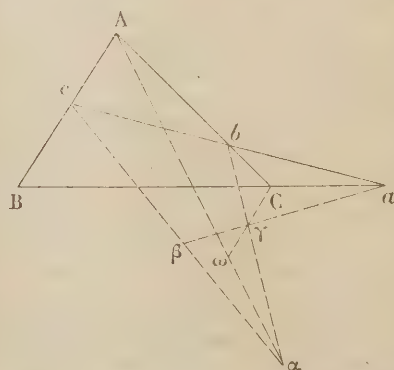
Le triangle αβγ reste donc semblable à lui-même quelle que soit la position de la transversale *abc*.

2° Quand la transversale *abc* se déplace parallèlement à elle-même, il en est de même de ses symétriques *ac*, *ab* par rapport aux côtés fixes AB, AC. Par suite, les diverses positions du triangle *abc* sont homothétiques par rapport au sommet A, et le lieu de α est une droite fixe passant par A.

De même, β et γ décrivent respectivement deux droites fixes passant par B et C.

3° Dans le cas de la première figure (A aigu), le point A, intersection des bissectrices extérieures des angles *b*, *c* du triangle α*bc* est situé sur la bissectrice intérieure de l'angle *b*α*c*. On verrait de même que les droites Bβ et Cγ sont les bissectrices intérieures des angles β et γ.

Les trois droites Aα, Bβ, Cγ se coupent donc au centre ω du cercle inscrit au triangle αβγ.

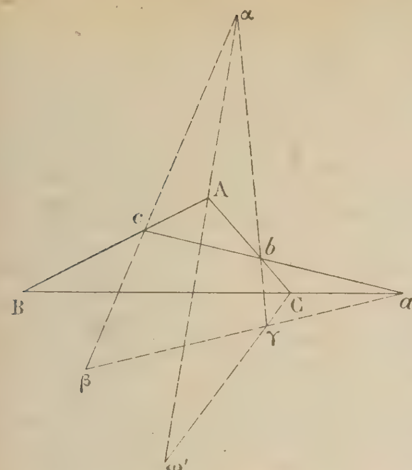


Pour établir que le point ω appartient au cercle circonscrit ABC, démontrons que $\widehat{A\omega C} = B$. En effet, on a

$$\widehat{A\omega C} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$$
$$= \frac{180° - 2A + 180° - 2C}{2}$$
$$= 180° - A - C = B.$$

En considérant le cas de la seconde figure (A obtus) on voit facilement que dans le triangle αβγ, αA est une bissectrice intérieure et βB, γC

deux bissectrices extérieures, de sorte que les trois droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ se coupent ici au centre ω' du cercle exinscrit dans l'angle α. On a, comme plus haut,



$$\widehat{A\omega' C} = \frac{180^\circ - \gamma}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

$$= \frac{180^\circ - 2C}{2} - \frac{2A - 180^\circ}{2}$$

$$= 180^\circ - C - A = B.$$

Il résulte de là que le point ω' se trouve également sur la circonférence ABC.

(Denis KONIG, à Budapest.)

[Ont résolu la même question : MM. H. Blanc ; F. Clabault ; Duvergé et Sainte-Laguë ; G. Foucry ; L. Giboin ; Guinand ; J. Haag ; R. Henry ; H. Janois ; T. Lemoyne ; E. Licope ; J. Pendariès ; H. Pitrat.]

4809. — *On donne une ellipse et une hyperbole homofocales de foyers fixes F et F′. La somme des rayons vecteurs relatifs à un point de l'ellipse est $2a$; la différence des rayons vecteurs relatifs à un point de l'hyperbole est $2a'$. Sachant que le rapport $\frac{a}{a'}$ est constant, trouver le lieu des points d'intersection de l'ellipse et de l'hyperbole.*

Soit M l'un des points communs à l'ellipse et à l'hyperbole. On a par définition

$$MF + MF' = 2a,$$
$$MF - MF' = 2a',$$

d'où, par addition et soustraction,

$$MF = a + a',$$
$$MF' = a - a'.$$

On déduit de là, en désignant par k le rapport constant $\frac{a}{a'}$,

$$\frac{MF}{MF'} = \frac{a + a'}{a - a'} = \frac{k+1}{k-1}.$$

Le lieu de M est donc la circonférence dont le diamètre AB divise harmoniquement le segment FF′ dans le rapport connu $\frac{k+1}{k-1}$. En considérant l'un des points communs à l'ellipse et à la seconde branche de l'hyperbole, on obtient une seconde circonférence symétrique de la précédente par rapport au milieu de AB.

On peut remarquer que chacune des droites MA et MB est à la fois tangente à l'une des deux coniques et normale à l'autre.

(Maxime GONDRAN, à Caen.)

[Ont résolu la même question : MM. Aubert ; V. Barol ; R. Barthélemy ; M. Bayor ; H. Blanc ; F. Clabault ; L. Corbin ; Duvergé et Sainte-Laguë ; G. Foucry ; J. Haag ; F. Licope ; Mouzon ; Noël ; M. Rebeix ; D. Tuissuzian.]

TRIGONOMÉTRIE

4801. — *Former l'équation qui donne $\cos\frac{a}{8}$ connaissant $\cos a$.*

Si on pose $\cos^2\frac{a}{8} = x$ et $\cos a = A$, on a une équation du 4e degré.

Démontrer que cette équation ne change pas lorsqu'on change x en $1 - x$; en déduire un moyen de ramener la résolution de cette équation à celle d'équations du 2e degré. Résoudre et discuter l'équation.

Appliquons successivement la formule générale

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1.$$

Il vient $\cos\frac{a}{4} = 2\cos^2\frac{a}{8} - 1 = 2x - 1,$

$$\cos\frac{a}{2} = 2(2x-1)^2 - 1 = 8x^2 - 8x + 1,$$

$$\cos a = 2(8x^2 - 8x + 1)^2 - 1.$$

En développant cette dernière équation, on trouve

$$128x^4 - 256x^3 + 160x^2 - 32x + 1 - A = 0.$$

Pour établir que cette équation ne change pas lorsqu'on remplace x par $1 - x$, reprenons l'équation non développée sous la forme

$$2[8x(x-1) + 1]^2 - 1 - A = 0,$$

et opérons la substitution ; nous aurons

$$2[8(1-x)(-x) + 1]^2 - 1 - A = 0,$$

équation identique à la précédente.

Cette remarque conduit à poser

$$x(1-x) = y,$$

y étant déterminé par l'équation

$$2(-8y + 1)^2 - 1 - A = 0,$$

ou

$$128y^2 - 32y + 1 - A = 0.$$

On en déduit ensuite x par l'équation

$$x^2 - x + y = 0$$

qui donne

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4y}}{2}.$$

Discussion. — Ces deux valeurs de x sont réelles lorsque $y \leqslant \frac{1}{4}$; dans ce cas, pour des valeurs positives de y elles sont visiblement positives et inférieures à 1 et fournissent ainsi deux valeurs acceptables pour $\cos^2\frac{a}{8}$.

Nous allons d'ailleurs montrer que les deux valeurs de y sont toujours réelles, positives et inférieures à $\frac{1}{4}$. En effet, la condition de réalité

$$\overline{16}^2 - 128(1 - A) = 128(1 + A) \geqslant 0$$

est vérifiée, puisque $A \geqslant -1$. De plus, comme $A < 1$, les deux valeurs de y sont positives et, par suite, inférieures à leur somme $\frac{32}{128} = \frac{1}{4}$.

Aux deux valeurs de y correspondent donc pour x quatre valeurs acceptables, ce qui donne pour $\cos\frac{a}{8}$ huit valeurs égales deux à deux et de signes contraires. Ces valeurs ont pour expression générale

$$\cos\frac{a}{8} = \pm\frac{\sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2(1 + \cos a)}}}}{2}.$$

(G. FOUCRY, école normale de Châlons-sur-Marne.)

Remarque. — Si α est un arc tel que $\cos\alpha = A$, on trouve pour expression de $\frac{a}{8}$

$$\frac{a}{8} = \pm\frac{\alpha}{8} + \frac{2k\pi}{8}.$$

Les extrémités des arcs sont les sommets de deux octogones symétriques par rapport au diamètre qui passe par l'origine des arcs ; de sorte qu'il suffit de considérer un seul de ces octogones pour avoir tous les cosinus. Or comme

$$\cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

on voit que les carrés des 8 cosinus ont deux à deux pour somme 1.

[Ont résolu la même question ; MM. A. Aubert ; Bertagna ; H. Blanc ; F. Clabault ; E. Cognet ; Duvergé et Sainte-Laguë ; J. Haag ; D. Konig ; D. Lwow ; R. Mouzon ; Noël ; P. Saintin.]

MÉCANIQUE

4625. — *Sur AB comme hypoténuse, on construit un triangle rectangle isocèle ABC ; sur BC comme hypoténuse, on construit, extérieurement au précédent, un triangle rectangle isocèle* BCC_1, *et ainsi de suite. Soit* C_n *le dernier point obtenu. On demande :*

1° *La longueur de la ligne brisée* $ACC_1C_2 \ldots C_n$;

2° *La somme des aires des triangles que l'on a construits ;*

3° *En considérant les droites AC;* CC_1, $C_1C_2, \ldots, C_{n-1}C_n$ *comme représentant des forces en grandeur et direction, de réduire ce système de forces à un couple et à une force passant par B.*

(*Bacc. lettres-math., Toulouse, novembre 1898.*)

1° Posons $AB = a$. On a successivement

$$AC = a\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$CC_1 = AC\frac{\sqrt{2}}{2} = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2,$$

$$C_1C_2 = CC_1\frac{\sqrt{2}}{2} = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3,$$

$$\cdots\cdots$$

$$C_{n-1}C_2 = C_{n-2}C_{n-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$$

Les diverses parties de la ligne brisée $ACC_1C_2 \ldots C_n$ forment ainsi les termes d'une progression géométrique décroissante dont le premier terme est $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ et la raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$; cette ligne a donc pour longueur

$$L = \frac{a\sqrt{2}}{2} \times \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Lorsque n croît indéfiniment, L a pour limite

$$L' = \frac{a\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}-1} = a\left(\sqrt{2}+1\right).$$

2° Chacun des $n+1$ triangles formés a une surface moitié moindre que le précédent. Comme la surface du premier est $\frac{a^2}{4}$, la somme de ces $n+1$ triangles est égale à

$$\frac{a^2}{4}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{a^2}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Pour n infini, cette somme a pour limite $\frac{a^2}{2}$.

3° La ligne polygonale $ACC_1 \ldots C_n$ est celle que l'on obtient en composant les forces, de sorte que AC_n est la résultante du système. On peut considérer AC_n comme la résultante de forces représentées par AB et BC_n ; BC_n, étant égal à $C_{n-1}C_n$, tend vers 0 lorsque n augmente indéfiniment, et la résultante du système tend vers la force représentée en grandeur et direction par AB. Si on transporte les forces en B, on a une résultante de translation ayant même grandeur et même direction que AC_n.

Le moment du couple correspondant est égal à la somme des moments des forces par rapport à B, ou au double de la somme des surfaces des triangles BAC, BCC_1, ...Ce moment a donc pour limite a^2.

[Ont partiellement résolu la question : MM. E. Ardin-Delteil ; H. Dodier ; A. Larue.]

PHYSIQUE

4811. — *Un corps, de densité égale à 2, placé dans l'un des plateaux d'une balance parfaitement juste, est équilibré par* 100^{gr} *de poids marqués placés dans l'autre plateau. Sachant que la matière qui constitue ces poids marqués a une densité égale à 8, et que la pesée est faite dans l'air sec à la pression de* 74^{cm} *de mercure et à 30°, on demande quelle surcharge on devrait mettre dans le second plateau pour que l'équilibre eût lieu dans le vide.*

Poids normal du litre d'air. . . . $1^{gr},3$.
Coefficient de dilatation de l'air. 0,00367

(*Bacc. mod. lettres-math., Marseille, mars 1899.*)

La balance étant parfaitement juste, les poids apparents des corps placés dans chaque plateau sont égaux lorsqu'il y a équilibre.

Dans la première expérience, le poids réel du corps placé dans le premier plateau est $2\,V^{gr}$, V étant son volume en centimètres cubes. La poussée qu'il éprouve de la part de l'air environnant est égale à

$$V \times 0{,}0013 \times \frac{74}{76} \times \frac{1}{1+30\times 0{,}00367}.$$

Son poids apparent est donc de

$$P = V\left(2 - \frac{0{,}0013\times 74}{76\times 1{,}1101}\right).$$

En remplaçant dans cette formule V par $\frac{100}{8}$, volume des poids marqués en centimètres cubes, et 2 par 8, densité de ces poids, on a aussi

$$P = \frac{100}{8}\left(8 - \frac{0{,}0013\times 74}{76\times 1{,}1101}\right),$$

puisque les poids apparents du corps et des poids marqués sont égaux au moment considéré. Egalant ces deux valeurs de P, il vient

$$V = 50^{cc},0214.$$

Si l'on opère ensuite dans le vide, les poussées ne se produisent plus. Le poids réel du corps est $50{,}0214 \times 2 = 100^{gr},0428$; le poids réel des poids marqués est 100^{gr}. Pour que l'équilibre existe, il faut donc placer dans le second plateau une surcharge de

$$100^{gr},0428 - 100^{gr} = 0^{gr},0428.$$

(**J. HAAG, à Pont-à-Mousson.**)

[Ont résolu la même question : MM. R. Cattin; E. Cognet; L. Corbin ; Chamberaud ; A. Cotton ; Duvergé et Sainte-Laguë ; G. Foucry ; R. Henry ; A. de Saint-Gabriel ; M. Gondran ; de Jarny ; Jarrier ; M. Laurence ; E. Liger ; Lecoutour ; L. Maubeck ; Le Maigre ; M. Royer ; A. Sauvageon ; D. Tuissuzian ; L. Thirode ; P. Valentin ; L. Vige.]

4812. — 100^{gr} *de cuivre à 100°, plongés dans* 500^{gr} *d'eau à 5°,1, ont porté la température de cette masse liquide à 6°,8. La même expérience étant répétée avec* 800^{gr} *d'essence de térébenthine à 6°, la température de l'essence s'est élevée à 8°,5. On demande quelle est la chaleur spécifique de l'essence.*

(*Bacc. lettres-math., Lyon, avril 1898.*)

Soient x et c les chaleurs spécifiques de l'essence et du cuivre. Exprimons d'abord que la chaleur perdue par le cuivre est gagnée par l'eau et, ensuite, que la chaleur perdue par le cuivre est gagnée par l'essence. Nous obtenons ainsi les deux équations

$$100\,c\,(100 - 6{,}8) = 500\,(6{,}8 - 5{,}1),$$

$$100\,c\,(100 - 8{,}5) = 800\,x\,(8{,}5 - 6),$$

qui donnent, après division membre à membre pour éliminer c,

$$\frac{100-6,8}{100-8,5}=\frac{5\,(6,8-5,1)}{8\,(8,5-6)},$$

d'où $$x=0,417.$$

(M. GONDRAN, à Caen.)

(Ont résolu la même question : MM. R. Bazin ; H. Blanc ; F. Boivin ; Bourrec ; R. Cattin ; J. Chemineau ; E. Cognet ; L. Corbin ; Delaire ; Duvergé et Sainte-Laguë ; H. Durand ; Foy ; E. Foucry ; A. de Saint-Gabriel ; C. Godard ; J. Haag ; R. Henry ; de Jarny ; J. Jarrier ; M. Laurence ; T. Lemoyne ; A. Le Maigre ; J. Maire ; Maubeck ; E. Pagé ; A. Ranc ; L. Richard ; M. Royer ; P. Saintin ; A. Sauvageon ; E. Szivessy ; P. Thonet ; D. Tuïssuzian ; Merced del Valle ; A. Vannier ; P. Valentin ; J. Vige.)

CONCOURS DE 1900 (*Suite*).

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

Mathématiques.

I. — **4826**. — Un particulier achète un terrain à bâtir et un champ contigu, qui ont ensemble une superficie de 1 hectare 56 ares. Le terrain à bâtir coûte 4800^{fr} et le champ 3500^{fr}, et le prix d'un mètre carré du terrain surpasse de 2^{fr},75 le prix d'un mètre carré du champ. Quels sont les prix du mètre carré du terrain et de l'hectare du champ ?

II. — **4827**. — On donne deux demi-droites orthogonales AX et BY, dont $AB=2a$ est, en position et en grandeur, la plus courte distance. On prend sur elles deux longueurs variables $AP=x$ et $BQ=y$, telles que $xy=k^2$, k^2 étant une constante donnée :

1° Quel est le minimum de PQ ?

2° Quelle valeur faut-il donner à k^2 pour que l'on ait, en outre, constamment
$$x+y=PQ\,?$$

3° Montrer que, lorsqu'il en est ainsi, PQ reste tangente à la sphère décrite sur AB comme diamètre.

4° Montrer que le lieu géométrique du point de contact de PQ et de cette sphère est la demi-circonférence de grand cercle située dans le plan bissecteur du dièdre XABY.

(*7 juin, de 7 h. 1/2 à 10 h. 1/2.*)

Calcul logarithmique.

Résoudre un triangle, connaissant les trois côtés :
$$a=8915,\qquad b=7132,\qquad c=5349.$$

(*7 juin, de 1 h. 1/2 à 2 h. 1/2.*)

Épure.

4828. — Placer la feuille de manière que l'en-tête soit à droite.

Sur une droite parallèle au bord inférieur de la feuille et située à 14^{cm} de ce bord, marquer les points A et b, A à 12^{cm} et b à 22^{cm} du bord de gauche.

A est le centre d'une sphère de 10^{cm} de rayon et b est le point de contact avec le plan de comparaison (plan de la feuille) d'une sphère de 10^{cm} de diamètre, dont le centre est B.

Soit I le point où la droite AB perce le plan horizontal tangent à la fois à ces deux sphères, et soit C le point de cote maxima de l'intersection de ces mêmes sphères ; soit enfin P le plan qui a IC pour ligne de plus grande pente.

Représenter la projection horizontale de l'ensemble des portions des surfaces sphériques qui est compris entre le plan de comparaison et le plan P. On supposera le plan P transparent, les surfaces sphériques opaques, et on supposera enlevée la portion de chaque surface sphérique comprise dans l'autre sphère.

Construire les projections horizontales des tangentes menées de I aux sections faites dans les sphères par le plan P. Inscrire les cotes du point I, des points de contact des tangentes précédentes, et des points de contact des tangentes menées aux deux sections planes : 1° parallèlement au plan horizontal ; 2° parallèlement au plan vertical contenant les centres des sphères.

(*8 juin, de 7 h. 1/2 à 10 h. 1/2.*)

CONCOURS GÉNÉRAUX

Classe de Mathématiques élémentaires.

Mathématiques (Paris et Départements.)

I. — **4829**. — Soient, sur un cercle donné, un point fixe A et deux points variables P, Q, extrémités d'une corde de longueur donnée. Sur les cordes AP, PQ on construit un parallélogramme APQR. Prouver qu'il y a sur le cercle donné un point fixe B, tel que le triangle BQR reste semblable à lui-même en se déplaçant. Trouver le lieu du point qui partage QR dans un rapport donné.

II. — **4830**. — Démontrer le théorème suivant :

Pour que quatre forces appliquées aux quatre sommets d'un tétraèdre solide, suivant les hauteurs de ce tétraèdre, se fassent équilibre, il faut et il suffit que ces forces soient respectivement proportionnelles aux aires des faces auxquelles elles sont perpendiculaires et qu'elles soient toutes dirigées du sommet vers la face opposée, ou toutes dans le sens contraire.

On pourra s'appuyer sur les deux lemmes suivants :

1° Six forces appliquées à un tétraèdre solide suivant les arêtes de ce tétraèdre doivent être nulles pour se faire équilibre ;

2° Soit ABCD un tétraèdre ; soient $A\alpha$, $B\beta$ les perpendiculaires menées respectivement par les sommets A, B aux faces ACD, BCD et limitées respectivement aux faces BCD, ACD ; on a
$$\frac{A\alpha}{B\beta}=\frac{\text{surf. ACD}}{\text{surf. BCD}}.$$

N.-B. — La vérité du premier lemme apparaît immédiatement en composant d'une part trois des forces appliquées à un même sommet, d'autre part les trois forces situées dans la face opposée. Il est inutile d'en reproduire la démonstration, dont il ne sera pas tenu compte.

(*14 juin, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.*)

Classe de Première Sciences.

Physique et Chimie (Paris et Départements).

I. — Spectroscope. Spectres des diverses sources lumineuses. Analyse spectrale.

II. — Acides formique, acétique, oxalique, tartrique.

III. — **4831**. — On partage en deux parties égales 6 volumes d'un mélange de deux hydrocarbures gazeux. La première partie est traitée par le brome qui absorbe 1 volume. Après élimination du brome en excès, on ajoute au gaz restant 5 volumes d'oxygène, puis on fait passer l'étincelle. Le volume total se trouve alors ramené à 3 volumes dont 2 sont absorbables par la potasse et le dernier volume par le phosphore. La deuxième partie additionnée de 8 volumes d'oxygène donne 5 volumes après le passage de l'étincelle. La potasse absorbe 4 volumes et abandonne un résidu complètement absorbable par le phosphore.

On demande d'établir les formules moléculaires des deux composants du mélange.

(*14 juin, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.*)

BACCALAURÉATS

SESSION D'AVRIL 1900

Lettres-Mathématiques (*fin*).

LYON

Étant donnés les côtés a et b d'un triangle et l'angle C compris entre ces côtés, calculer le côté c, les angles A et B et la surface S. On discutera les formules obtenues toutes les fois qu'elles donneront lieu à plusieurs solutions.

Application. — On donne :
$$a=2199^{\text{m}},1,\qquad b=2\,513^{\text{m}},3,\qquad A=27^\circ\,47'\,44'',8.$$
Calculer B, C, c, S.

I. — *1er sujet.* — Chaleur spécifique.

I. — *2e sujet.* — Dilatation des gaz par la chaleur.

II. — On demande le volume d'un aérostat rempli d'hydrogène capable d'enlever 1 250^{kg} avec une force ascensionnelle de 10^{kg}. Le poids du

litre d'air à 0° et sous la pression de 76^{cm} de mercure est $1^{gr},293$. La densité de l'hydrogène par rapport à l'air est 0,0693. On négligera le volume de l'enveloppe et celui de la nacelle.

NANCY

I. — Étant donnée une demi-sphère de rayon R, calculer le rayon O'A' d'une section parallèle à la base AB de l'hémisphère et telle que le rapport du volume du tronc de cône ABA'B' à celui de la sphère qui a pour diamètre la distance OO' des deux plans parallèles soit égal à un nombre donné m. Discuter.

Application : $R = 5^m$, $m = 3$. Calculer O'A' à 1/2 centimètre près.

II. — *1ᵉʳ sujet.* — Le plus petit commun multiple de deux nombres est égal au produit de ces deux nombres divisé par leur plus grand commun diviseur.

II. — *2ᵉ sujet.* — Extraire, en exposant la théorie, la racine du plus grand carré contenu dans le nombre 5 376.

I. — *1ᵉʳ sujet.* — Lois fondamentales des courants.

I. — *2ᵉ sujet.* — Effets calorifiques et lumineux des courants. Arc voltaïque. Lampes à incandescence.

II. — Un ballon en verre argenté ayant à 0° une capacité de 1^{lit} est mis en relation avec un réservoir contenant de l'oxygène à une pression que l'on maintient constante et égale à 76^{cm} de mercure. On refroidit le ballon à — 180°. On demande le poids d'oxygène qu'il contient.

Densité de l'oxygène, $d = 1,1056$;
Poids du litre d'air à 0° et 76^{cm}, $1^{gr},3$;
Coefficient de dilatation de l'oxygène, $\alpha = 0,003$;
Coefficient de dilatation cubique du verre, $k = \frac{3}{180000}$.

POITIERS

I. — *1ᵉʳ sujet.* — La tangente en un point d'une parabole fait des angles égaux avec le rayon vecteur et la parallèle à l'axe.

I. — *2ᵉ sujet.* — Mener à l'ellipse une tangente parallèle à une droite donnée.

I. — *3ᵉ sujet.* — La sous-normale à la parabole est constante. Peut-on dire quelque chose sur la sous-tangente ?

II. — 1° Calculer le troisième côté d'un triangle dont les deux autres côtés ont pour longueurs $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$, l'angle compris A étant donné par la formule $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. 2° Trouver en degrés, minutes les angles du triangle.

I. — *1ᵉʳ sujet.* — Photométrie.

I. — *2ᵉ sujet.* — Propriétés des miroirs concaves.

I. — *3ᵉ sujet.* — Microscope composé.

II. — Un vase cylindrique convenablement lesté flotte verticalement dans un liquide. A 0°, la longueur immergée est h. Que deviendra-t-elle lorsqu'on portera tout le système à la température t ? On désignera par m le coefficient de dilatation cubique du liquide et par k le coefficient de dilatation linéaire du vase.

RENNES

I. — *1ᵉʳ sujet.* — Formule des intérêts composés. Discussion. Cas de placement pendant un nombre fractionnaire d'années.

II. — *2ᵉ sujet.* — Quelle somme faut-il verser chaque année pendant n années consécutives pour amortir un emprunt de A^{fr} en tenant compte des intérêts composés au taux de $100r$ °/ₒ? Examiner les cas où $n = \infty$ et où $r = 0$.

I. — *3ᵉ sujet.* — Démontrer que les puissances successives d'un nombre plus grand que l'unité vont sans cesse en croissant et peuvent dépasser toute limite donnée, tandis que celles d'un nombre plus petit que l'unité vont en décroissant et tendent vers zéro. Quelle est la limite de l'expression $\sqrt[m]{a}$ lorsqu'on fait tendre m vers l'infini, a désignant un nombre positif quelconque ?

II. — Trouver les limites entre lesquelles peut varier l'expression

$$\frac{\operatorname{tg}(x+\alpha) - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}(x+\alpha)}$$

dans laquelle α désigne un angle positif donné et x une variable réelle, ainsi que les valeurs correspondantes de x.

I. — *1ᵉʳ sujet.* — Condensation électrique.

I. — *2ᵉ sujet.* — Effets calorifiques et lumineux des courants.

I. — *3ᵉ sujet.* — Bobine d'induction.

II. — Dans un récipient dont le volume intérieur est invariable et égal à 25^{lit} se trouve une masse d'air de 39^{gr}.

1° Calculer la pression que cet air exerce sur les parois à 0°.

2° On demande à quelle température cette pression deviendrait égale à deux atmosphères, le volume du récipient restant fixe.

Calcul et raisonnement.

Masse du litre d'air à 0° et à la pression 760 ... $1^{gr},3$; coefficient de dilatation des gaz ... $\frac{1}{273}$.

TOULOUSE

I. — *1ᵉʳ sujet.* — Fractions périodiques simples et fractions périodiques mixtes.

I. — *2ᵉ sujet* — Inscription du décagone régulier dans une circonférence.

I. — *3ᵉ sujet.* — Quand un arc est plus petit que 90°, la différence entre l'arc et son sinus est moindre que le quart du cube de l'arc.

II. — Couper une sphère de rayon R par un plan de manière que le segment sphérique CAD ait avec le secteur sphérique correspondant CADO un rapport donné, m. Discussion.

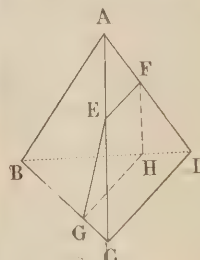
I. — Lois des vibrations transversales des cordes. Expériences à l'appui.

II. — On donne une sphère de 10^{cm} de diamètre intérieur et dont la paroi a 3^{mm} d'épaisseur en métal dont la densité est 10 à 4°. On veut qu'elle reste en équilibre indifférent quand elle est entièrement dans de l'eau à 4°. On demande à quelle pression on doit comprimer de l'azote dans la boule. Densité de l'azote, 0,97.

L'équilibre étant obtenu à 4°, on demande ce qui se passera si l'on chauffe ou si l'on refroidit le système.

QUESTIONS PROPOSÉES

4832. — Démontrer que si p est un nombre premier absolu, le seul carré dont la différence avec p soit un carré est $\frac{p+1}{2}$.

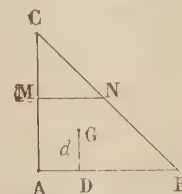


4833. — On donne un tétraèdre régulier ABCD dont le côté est a. Sur les côtés DA, CA on prend deux longueurs DF, CE égales à x ; sur les côtés DB, CB, des longueurs DH, CG égales à y. On demande de déterminer x et y de telle sorte que le trapèze EFGH soit circonscrit à un cercle de rayon R. Discussion. Évaluer ensuite le volume du polyèdre EFDCGH.

(*Bacc. lettres-math., Clermont, juillet 1899.*)

4834. — On considère un cercle O et deux cordes MA, MB ; dans l'angle AMB on inscrit un cercle tangent en C, D aux côtés MA, MB et touchant également le cercle O.

Enveloppe de la droite CD lorsque les points A, B restant fixes, le point M décrit le cercle O.



4835. — On donne un triangle ABC, rectangle en A, isocèle et homogène, et l'on demande de couper ce triangle par une parallèle MN au côté AB de manière que le centre de gravité G du trapèze AMNB ainsi formé soit à une distance donnée d du côté AB. Discussion. On pourra prendre pour inconnue la longueur AM.

(*Bacc. lettres-math., Lille, novembre 1899.*)

4836. — Un projectile est lancé avec une vitesse initiale v_0 suivant une direction inclinée de 45° au-dessus du sol supposé horizontal. On demande à quelle distance de son point de départ il retombera sur le sol.

On ne tiendra pas compte de la résistance de l'air.

Application : $v_0 = 200^m$ par seconde.

(*Bacc. lettres-math., Caen, mars 1900.*)

4837. — Un point lumineux se trouve sur l'axe d'une lentille convergente de 50^{cm} de distance focale à 25^{cm} de la lentille. Après avoir traversé la lentille, les rayons se réfléchissent sur un miroir plan perpendiculaire à l'axe de la lentille et distant de la lentille de 25^{cm}. Après cette réflexion, les rayons traversent de nouveau la lentille convergente. Où se forme l'image définitive ?

(*Bacc. lettres-sciences, Lille, mars 1900.*)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Directeur.

24e Année. — N° 20. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 15 Juillet 1900.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.

Abonnements.. Librairie Nony et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

NOTE SUR LA MÉTHODE INDIRECTE APPLIQUÉE A L'ÉTUDE DES VARIATIONS DE LA FONCTION $\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$,

par M. **G. Fleury**, licencié ès sciences mathématiques, répétiteur au lycée Henri IV.

Rappel de quelques définitions et théorèmes.

Définitions. — I. Une fonction $f(x)$ est *continue pour une valeur* x_1 finie et déterminée de la variable lorsque :

1° $f(x_1)$ a une valeur finie et bien déterminée ;

2° $f(x)$ a pour limite $f(x_1)$ quand x tend vers x_1.

II. Une fonction est *continue dans un intervalle* fixé par deux valeurs de la variable quand elle est continue pour toutes les valeurs de x comprises dans l'intervalle.

Théorèmes. — *Le trinome du second degré est continu pour toutes les valeurs de la variable.*

La fraction rationnelle du 2e degré $\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ *est continue pour toutes les valeurs de x, sauf pour celles qui annulent le dénominateur, sans annuler le numérateur.*

Nous ne considérerons désormais les fonctions que dans les intervalles où elles sont continues.

Définition. — Une fonction $y=f(x)$ passe par un *maximum*, pour une valeur x_1 finie et déterminée, si l'on peut trouver des nombres positifs α et β tels que : x croissant de $x_1-\alpha$ à x_1 et de x_1 à $x_1+\beta$, les valeurs correspondantes de y croissent de $f(x_1-\alpha)$ à $f(x_1)$ et décroissent de $f(x_1)$ jusqu'à $f(x_1+\beta)$ (*).

Remarque. — D'après la définition, une valeur y_1 d'une fonction ne peut être un maximum que si cette valeur y_1 correspond à une *valeur x_1 finie et déterminée* de la variable.

Définition et remarque analogues pour le *minimum*.

Variation de $F(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$.

Nous appellerons $\rho(y)$ *le réalisant* de l'équation du 2e degré en x
$$F(x)=y,$$

(*) On peut dire aussi qu'une fonction $f(x)$ qui reste finie et continue lorsque x varie de a à b est *croissante*, si pour des valeurs x', $x'+h$ $(h>0)$ comprises dans l'intervalle (a, b), on a
$$f(x'+h)-f(x')>0\,;$$
la fonction est *décroissante* si
$$f(x'+h)-f(x')<0.$$
Alors une fonction passe par un *maximum* pour $x=x_0$, si elle est croissante pour $x<x_0$ et décroissante pour $x>x_0$; elle passe par un *minimum* si après avoir été décroissante elle devient croissante.
Il y a donc maximum ou minimum quand le sens de variation change ; les deux cas se distinguent par le mode de changement.

équation qui se réduit à
$$(a-a'y)x^2+(b-b'y)x+c-c'y=0,$$
$$\rho(y)\equiv(b-b'y)^2-4(c-c'y)(a-a'y),$$
ou en ordonnant
$$\rho(y)\equiv(b'^2-4a'c')y^2+2(2ca'+2ac'-bb')y+b^2-4ac.$$
$\rho(y)$ est un trinome du 2e degré en y, donc *continu*.

Considérons le *réalisant* de l'équation
$$\rho(y)=0.$$
Il s'écrit
$$(2ac'+2ca'-bb')^2-(b^2-4ac)(b'^2-4a'c')$$
$$\equiv 4[(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')]$$
$$\equiv 4R,$$
en désignant par R le *résultant* des deux équations
$$ax^2+bx+c=0,$$
$$a'x^2+b'x+c'=0.$$
Nous supposerons que les deux termes de la fraction $F(x)$ n'ont pas de racine commune, car alors $F(x)$ se réduirait à une fraction rationnelle du 1er degré que l'on sait étudier.

Donc nous supposerons $R\neq 0$.

Il en résulte que $\rho(y)$ n'est jamais un carré parfait, ou, ce qui revient au même, que $\rho(y)=0$ a toujours, ou ses racines *imaginaires*, ou ses racines *réelles* et *distinctes*.

Théorème. — *Toute valeur maximum ou minimum de y annule* nécessairement $\rho(y)$.

Lemme. — Dans une équation du 2e degré $Ax^2+Bx+C=0$ à coefficients variables, le premier n'étant ni nul ni infini, pour que la différence entre les deux racines devienne aussi petite que l'on veut, en valeur absolue, il faut et il suffit que le réalisant puisse devenir, en valeur absolue, plus petit que toute quantité donnée.

Cela résulte évidemment de l'égalité
$$|x''-x'|=\frac{\sqrt{B^2-4AC}}{|A|}.$$

Soit maintenant y_1 une valeur maximum ou minimum de $F(x)$ atteinte pour $x=x_1$ (x_1 étant fini et bien déterminé).

Alors on pourra toujours trouver à partir d'un certain moment des nombres positifs α et β aussi petits que l'on voudra, et tels que x croissant de $x_1-\alpha$ à $x_1+\beta$, la fonction $F(x)$ parte de $y_1+\varepsilon$ et revienne à $y_1+\varepsilon$ en passant par y_1, $|\varepsilon|$ étant aussi petit qu'on veut (Définition du maximum).

Si donc on considère l'équation du 2e degré
$$f(x)=y_1+\varepsilon,$$
elle aura deux racines réelles $x_1-\alpha$ et $x_1+\beta$ dont la différence $\beta+\alpha$ peut devenir aussi petite que l'on veut.

Le résultant $\rho(y_1+\varepsilon)$ a donc pour limite 0.

D'autre part $\rho(y_1+\varepsilon)$ a pour limite $\rho(y_1)$, puisque le trinome $\rho(y)$ est continu. Donc
$$\rho(y_1)=0. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

Conséquence. — Dans les intervalles limités par les racines de $\rho(y) = 0$, la fonction croît constamment ou décroît constamment.

Pour s'assurer s'il y a maximum ou non, il suffira de comparer à y_1 les valeurs de y correspondant à deux valeurs de x situées de part et d'autre de x_1.

Théorème. — *Toute valeur* y_1, *atteinte pour une valeur* x_1 *finie et déterminée, et pour laquelle* $\rho(y)$ *change de signe, est un maximum ou un minimum de* $F(x)$.

Lemme. — h et k étant des nombres positifs assez petits, les équations

$$F(x) = y_1 - h,$$
$$F(x) = y_1 + k$$

ne peuvent avoir ensemble de racines réelles.

En effet $\rho(y_1 - h)$ et $\rho(y_1 + k)$ sont de signes contraires.

Faisons croître maintenant x de $x_1 - \alpha$ à $x_1 + \beta$; y variera de $y_1 + \varepsilon$ à $y_1 + \eta$.

ε et η seront, en valeur absolue, aussi petits qu'on le désirera grâce à la continuité de $F(x)$.

Les équations

$$F(x) = y_1 + \varepsilon, \qquad F(x) = y_1 + \eta$$

vérifiées l'une pour $x_1 - \alpha$, l'autre pour $x_1 + \beta$, ont ensemble des racines réelles. Donc ε et η sont de même signe, en vertu du lemme ; et $y_1 + \varepsilon$ et $y_1 + \eta$ sont des nombres ou tous deux supérieurs à y_1 ou tous deux inférieurs. Dans le premier cas, il y a minimum ; dans le deuxième il y a maximum.

C. q. f. d.

Remarque. — L'équation $\rho(y) = 0$ dans notre hypothèse n'a jamais de racines égales ; $\rho(y)$ change donc toujours de signe en s'annulant.

Conséquence. — Les racines de $\rho(y) = 0$ sont les maximum et minimum de $F(x)$ quand elles correspondent à des valeurs de x finies.

Remarque. — Pour qu'une racine y_1 de $\rho(y) = 0$ soit un maximum ou un minimum de $F(x)$, il faut qu'à y_1 correspondent des valeurs de x *finies* et bien déterminées.

Or pour $x = \infty$, $F(x) = \frac{a}{a'}$, et d'ailleurs l'équation $F(x) = \frac{a}{a'}$ n'est vérifiée par aucune valeur finie de x.

Donc toute racine de $\rho(y) = 0$ représentera un maximum ou un minimum de $F(x)$, à moins que cette racine ne soit précisément $\frac{a}{a'}$.

Or pour que $\rho\left(\frac{a}{a'}\right) = 0$, il faut et il suffit évidemment que $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ ou $ab' - ba' = 0$.

Remarque. — L'équation $\rho(y) = 0$ n'ayant jamais ses racines égales, a toujours au moins une racine différente de $\frac{a}{a'}$.

Conséquence. — Si $ab' - ba' = 0$, la racine de $\rho(y) = 0$ différente de $\frac{a}{a'}$ est un maximum ou un minimum de $F(x)$.

Remarque. — Pour qu'une racine y_1 de $\rho(y) = 0$ soit un maximum ou un minimum de $F(x)$, il faut que y_1 soit fini.

Conséquence. — Si $b'^2 - 4a'c' = 0$, un maximum ou un minimum de $F(x)$ disparaît.

On peut alors au point de vue des maximum et minimum de la fonction $F(x)$ résumer tous les cas possibles dans le petit tableau suivant :

			$\rho(y)$	$F(x)$
$R < 0$			a ses racines imaginaires	n'a ni maximum ni minimum
$R > 0$	$ab' - ba' \neq 0$	$b'^2 - 4a'c' \neq 0$	a 2 racines réelles distinctes	2 max. ou min.
		$b'^2 - 4a'c' = 0$	a 1 racine réelle finie	1 max. ou min.
	$ab' - ba' = 0$	$b'^2 - 4a'c' \neq 0$	2 racines réelles dont l'une est $\frac{a}{a'}$	1 max. ou min.
		$b'^2 - 4a'c' = 0$	1 seule racine finie égale à $\frac{a}{a'}$	0 max. ou min.

L'étude complète des diverses formes de la courbe $y = F(x)$, relève maintenant de problèmes connus.

Nous aurons en effet à comparer $\frac{a}{a'}$ aux valeurs maximum ou minimum y' et y'' de $F(x)$, c'est-à-dire aux racines de

$$\rho(y) = 0.$$

Il faudra également ranger par ordre de grandeur croissante les nombres qui rendent $F(x)$ discontinue et les nombres qui la rendent maximum ou minimum.

Les premiers sont donnés par les racines de l'équation

$$a'x^2 + b'x + c' = 0 ;$$

les seconds, par les racines de

$$(ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + bc' - cb' = 0.$$

Il s'agit donc de comparer les racines de deux équations du 2e degré : problème particulier connu que nous ne traiterons pas, puisqu'il est complètement indépendant de la question de maximum.

ARITHMÉTIQUE

4805. — *En divisant un multiple de 67 par 10, on obtient le quotient* q *et le reste* r. *Démontrer que* $q - 20r$ *est divisible par 67.*

Par hypothèse, on a

$$67m = 10q + r ;$$

on en déduit

$$r = 67m - 10q,$$

et

$$q - 20r = q - 20(67m - 10q)$$
$$= 201q - 20 \times 67m = 67(3q - 20m).$$

C. q. f. d.

(G. FOUCRY, école normale de Châlons-sur-Marne.)

[Ont résolu la même question : Mlle M. D. P.; MM. A. Amblard ; V. Barol ; M. Bayor ; H. Blanc ; F. Clabault ; L. Corbin ; A. Cotton ; A. Delaire ; Duvergé et Sainte-Laguë ; M. Gondran ; J. Haag ; R. Henry ; D. Konig ; X. Lacreuse ; A. Larue ; M. Laurence ; A. Lecoutour ; J. Maire ; W. Méléard ; L. Richard ; M. Royer ; P. Saintin ; C. Vallot ; E. Baudouin ; Bourrec ; Guinand ; H. Janois ; R. Mouzon ; Noël ; M. Pappà ; L. Patin ; Pendariès ; A. Pichon ; F. Vérot.]

4819. — *Démontrer que si* $\frac{A}{B}$ *est la fraction génératrice d'une fraction périodique ayant* i *chiffres irréguliers et* p *chiffres périodiques,* $\frac{A^2}{B^2}$ *est la fraction génératrice d'une fraction périodique ayant* $2i$ *chiffres irréguliers, le nombre des chiffres périodiques étant un multiple de* p.

Nous pouvons supposer A et B premiers entre eux ; pour que $\frac{A}{B}$ donne une fraction périodique mixte ayant i chiffres irréguliers, il faut et il suffit que B contienne, avec des facteurs premiers avec 10, l'un des facteurs 2 ou 5 avec un exposant égal à i, l'autre pouvant figurer avec un exposant inférieur ou égal à i.

Alors B^2 aura l'un des facteurs 2 ou 5 avec un exposant égal

à $2i$ et des facteurs premiers avec 10. Donc la fraction $\frac{A^2}{B^2}$ donnera naissance à une fraction périodique mixte ayant $2i$ chiffres irréguliers.

Soit p' le nombre des chiffres périodiques ; on doit pouvoir écrire

$$\frac{A^2}{B^2} = \frac{N}{10^{2i}(10^{p'}-1)}$$

et si on appelle B' le nombre obtenu en supprimant dans B les facteurs 2 ou 5, B'^2 divisant $10^{2i}(10^{p'}-1)$ et étant premier avec 10, divise $10^{p'}-1$.

A fortiori B' divise $10^{p'}-1$ et on peut écrire

$$\frac{A}{B} = \frac{N'}{10^{i}(10^{p'}-1)},$$

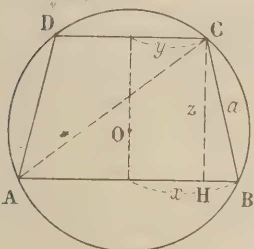
ce qui exprime que les chiffres périodiques se reproduisent de p en p'.

Mais il se peut, on le voit facilement sur des exemples, qu'un ensemble de p' chiffres comprenne plusieurs périodes, de sorte que le nombre p des chiffres d'une période irréductible est un diviseur de p'.

ALGÈBRE

4767. — *Calculer les bases d'un trapèze isocèle inscrit dans un cercle de rayon R, connaissant la longueur commune a des côtés non parallèles et la surface m^2.*

Désignons par x et y les demi-bases cherchées et par z la hauteur du trapèze. On a d'abord



$$(x+y)z = m^2\,; \qquad (1)$$

le triangle rectangle BHC donne ensuite

$$(x-y)^2 + z^2 = a^2\,; \qquad (2)$$

puis, en considérant R comme le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC,

$$a.\mathrm{AC} = 2\mathrm{R}z,$$

ou

$$a\sqrt{(x+y)^2+z^2} = 2\mathrm{R}z.$$

En élevant au carré, on a

$$(x+y)^2 + z^2 = \frac{4\mathrm{R}^2z^2}{a^2}\,; \qquad (3)$$

en remplaçant $x+y$ par $\frac{m^2}{z}$ dans l'équation (3), on trouve

$$z^4 = \frac{a^2m^4}{4\mathrm{R}^2-a^2}.$$

Les deux premières équations donnent alors x et y, car on a

$$x+y = \frac{m^2}{z}, \qquad (x-y)^2 = a^2 - z^2.$$

On peut aussi retrancher membre à membre les équations (3) et (2), ce qui donne

$$4xy = \frac{4\mathrm{R}^2z^2}{a^2} - a^2.$$

En se reportant à la figure, on voit qu'on peut construire un trapèze connaissant z ; la figure montre qu'on doit avoir pour cela $z < a$. On a donc à exprimer :

1° la condition de réalité $4\mathrm{R}^2 > a^2$, condition évidente géométriquement ;

2° la condition $z \leqslant a$, qui donne

$$\frac{a^2m^4}{4\mathrm{R}^2-a^2} \leqslant a^4,$$

ou, comme $4\mathrm{R}^2 - a^2 > 0$,

$$m^2 \leqslant a^2\sqrt{4\mathrm{R}^2-a^2}.$$

Mais pour qu'on ait un trapèze proprement dit, il faut en outre que x et y soient tous deux positifs, ce qui exige que

$$z^2 \geqslant \frac{a^4}{4\mathrm{R}^2},$$

ou

$$\frac{am^2}{\sqrt{4\mathrm{R}^2-a^2}} \geqslant \frac{a^4}{4\mathrm{R}^2},$$

c'est-à-dire

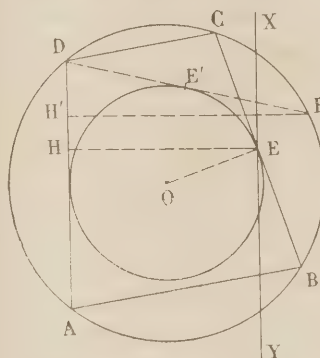
$$m^2 \geqslant \frac{a^3\sqrt{4\mathrm{R}^2-a^2}}{4\mathrm{R}^2}.$$

Si $m^2 = a\sqrt{4\mathrm{R}^2-a^2}$, $x = y$; le trapèze devient un rectangle de côtés a et $2\sqrt{4\mathrm{R}^2-a^2}$.

Si $m^2 = \frac{a^3}{4\mathrm{R}^2}\sqrt{4\mathrm{R}^2-a^2}$, $x+y = x-y$ ou $y = 0$; le trapèze devient un triangle isocèle ayant a pour côtés égaux.

(HUGONNIER-GINET, école normale d'Albertville.)

Solution géométrique. — Supposons AD placé. La corde BC étant connue, un premier lieu de son milieu E est un cercle O de rayon $\sqrt{\mathrm{R}^2-\frac{a^2}{4}}$.



Pour obtenir un second lieu de E, on remarque qu'en abaissant EH perpendiculaire sur AD, on a

$$m^2 = \mathrm{AD.EH},$$

d'où

$$\mathrm{EH} = \frac{m^2}{a}.$$

Ce second lieu est donc une parallèle XY à AD. La connaissance du point E entraîne celle du trapèze ; on peut observer que les trapèzes correspondants aux deux points d'intersection de la droite et du cercle étant symétriques, fournissent la même solution.

Pour que XY coupe le petit cercle O, il faut et il suffit qu'on ait

$$\mathrm{EH} \leqslant 2\sqrt{\mathrm{R}^2-\frac{a^2}{4}},$$

ou

$$m^2 \leqslant a\sqrt{4\mathrm{R}^2-a^2}\,;$$

il faut en outre que E ne dépasse pas la position E' pour laquelle BC se confond avec B'D, ce qui entraîne

$$\mathrm{EH} \text{ ou } \frac{m^2}{a} \geqslant \frac{\mathrm{B'H'}}{2}.$$

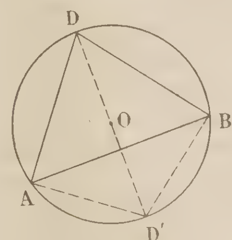
Or

$$\mathrm{B'D.B'A} = 2\mathrm{R.B'H'},$$

d'où

$$\mathrm{B'H'} = \frac{a.\mathrm{B'A}}{2\mathrm{R}}\,;$$

d'ailleurs le théorème de Ptolémée appliqué au quadrilatère inscrit ADB'D' (D' étant symétrique de D par rapport à O) donne



$$\mathrm{AB'}.2\mathrm{R} = 2a.\mathrm{AD'},$$

d'où

$$\mathrm{AB'} = \frac{a\sqrt{4\mathrm{R}^2-a^2}}{\mathrm{R}}\,;$$

donc

$$\mathrm{B'H'} = \frac{a^2\sqrt{4\mathrm{R}^2-a^2}}{2\mathrm{R}^2}\,;$$

et

$$m^2 \geqslant \frac{a^3\sqrt{4\mathrm{R}^2-a^2}}{4\mathrm{R}^2}.$$

(C. BOURVEAU, à Quimperlé.)

Remarque. — On pourrait aussi considérer BC comme connu ; AD serait alors la tangente commune au petit cercle O et au cercle de centre E et de rayon EH.

(DUVERGÉ et A. SAINTE-LAGUE, lycée de Bordeaux.)

[Ont résolu cette question : MM. d'Amphernet ; M. Gondrau ; A. Gorce ; J. Haag ; H. Lefèvre ; A. Pequignot ; P. Thonet.]

4806. — *Résoudre l'équation*

$$(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0.$$

Posons $x^2 - x + 1 = y$. L'équation s'écrit

$$y^4 - 10x^2y^2 + 9x^4 = 0,$$

d'où l'on tire

$$y^2 = 5x^2 \pm \sqrt{16x^4} = \begin{cases} 9x^2 \\ x^2. \end{cases}$$

$$y = \pm 3x, \qquad y = \pm x.$$

On est ramené à résoudre l'une des quatre équations

$$x^2 - x + 1 = 3x, \qquad x^2 - x + 1 = -3x,$$
$$x^2 - x + 1 = x, \qquad x^2 - x + 1 = -x.$$

Les trois premières seules ont leurs racines réelles ; ces racines sont

$$2 \pm \sqrt{2}, \qquad -1, \qquad +1,$$

les deux dernières racines étant doubles.

(G. FOUCRY, école normale de Châlons.)

Remarque. — L'équation proposée est réciproque ; si on divise tous les termes par x^4, on a

$$\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right)^4 - 10\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 9 = 0,$$

et en posant $x + \frac{1}{x} = z$, on trouve z par l'équation

$$(z - 1)^4 - 10(z - 1)^2 + 9 = 0$$

qui donne $$(z - 1)^2 = 5 \pm \sqrt{25 - 9}$$

d'où on déduit $z - 1 = \pm 1$ et $z - 1 = \pm 3$.

x est alors donné par les équations trouvées dans la solution précédente.

(Ont résolu la même question : MM. A. Amblard ; V. Barol ; M. Bayor ; J. Chapron ; E. Cognet ; L. Corbin ; A Cotton ; A. Delaire ; J. Delpont ; A. de Saint-Gabriel ; Duvergé et Sainte-Laguë ; Foy ; C. Godard ; M. Gondran ; J. Haag ; R. Henry ; A. Huet ; M. Laurence ; A. Lecoutour ; E. Le Maigre ; J. Maire ; W. Méléard ; P. Millet ; M, Picou ; L. Richard ; M. Royer ; P. Saintain ; A. Sauvageon ; P. Thonet ; D. Tuïssuzian ; P. Valentin ; C. Vallot ; F. Velardi ; A. Vidalenc ; P. Zlatco ; Aubert ; Bazin ; Janois ; Mouzon ; Pendariès ; Pichon ; Vérot.)

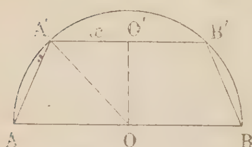
4820. — *Etant donnée une demi-sphère de rayon R, calculer le rayon O'A' d'une section parallèle à la base AB de l'hémisphère et telle que le rapport du volume du tronc de cône ABA'B' à celui de la sphère qui a pour diamètre la distance OO' des deux plans parallèles soit égal à un nombre donné m. — Discuter.*

Application : $R = 5^m$, $m = 3$. *Calculer O'A' à 1/2 centimètre près.*

(*Bacc. lettres-math., Nancy, mars 1900.*)

Posons $O'A' = x$. On doit avoir

$$\frac{1}{3}\pi\, OO'(R^2 + x^2 + Rx) = \frac{1}{6}\pi\, \overline{OO'}^3\, m,$$



ou $$2(R^2 + x^2 + Rx) = m\overline{OO'}^2 \quad (1)$$

ou, en remplaçant $\overline{OO'}^2$ par $R^2 - x^2$ et ordonnant,

$$f(x) = (m + 2)x^2 + 2Rx - (m - 2)R^2 = 0.$$

Discussion. — Pour qu'une valeur de x convienne au problème posé, il faut et il suffit qu'elle soit réelle et comprise entre 0 et R. Les deux racines ne peuvent être positives à la fois, les coefficients de x^2 et de x étant de même signe ; on ne peut donc avoir qu'une solution au plus, ce qui a lieu lorsque

$$f(0).\, f(R) < 0,$$

ou $$-(m - 2)R^2.\, 6R^2 > 0,$$

ou $$m > 2.$$

Si $m = 2$, on a $x = 0$, et le tronc de cône devient un cône dont la hauteur est égale au rayon de base R.

Lorsque $m < 2$, les deux valeurs de x sont toutes deux négatives ou bien imaginaires, et ne peuvent convenir.

Remarque. — En se reportant à la condition (1), on voit facilement qu'une valeur négative de x peut s'interpréter en considérant le tronc de cône ABA'B' comme de *seconde espèce.*

Application. — Pour $R = 5^m$ et $m = 3$, on trouve

$$O'A' = x = -1 + \sqrt{6} = 1^m{,}45 \text{ à } 0^{cm}{,}5 \text{ près par excès.}$$

(J. HAAG, collège de Pont-à-Mousson.)

[Ont résolu cette question : MM. E. Anzemberger ; J. Chemineau ; E. Cognet ; L. Corbin ; A. Delaire ; A. Foy ; C. Godard ; M. Gondran ; Janois ; G. Lallier ; D. Lwow ; L. Maubeck ; G. Oberlin ; P. Thonet ; P. Valentin.]

4821. — *Sur l'axe d'une parabole donnée on considère un point A situé par rapport au sommet du même côté que le foyer, à une distance du sommet triple de la distance du foyer à la directrice. D'un point M de la parabole, on abaisse sur l'axe la perpendiculaire MP. Quand le point M se déplace, chercher comment varie la surface totale du cylindre engendré par la révolution autour de PA du rectangle ayant pour deux de ses côtés les droites MP et PA.*

(*Bacc. lettres-sciences, Caen, mars 1900.*)

En posant $SP = x$ et $MP = y$, on a la relation connue

$$y^2 = 2px. \qquad (1)$$

Le cylindre a pour rayon de base y et pour hauteur $3p - x$ si P est à gauche de A, ou $x - 3p$ si P est à droite de A. La surface totale a donc pour expression

$$2\pi y^2 + 2\pi y\,(3p - x) \quad \text{si P est à gauche de A,}$$

ou $$2\pi y^2 + 2\pi y\,(x - 3p) \quad \text{si P est à droite de A.}$$

En remplaçant x par sa valeur tirée de l'équation (1), on a

$$\frac{\pi}{p}\,(2py^2 + 6p^2y - y^3),$$

ou $$\frac{\pi}{p}\,(2py^2 + y^3 - 6p^2y).$$

On peut remarquer que ces deux expressions ne diffèrent que par le signe de y.

La première expression représente la surface totale du cylindre lorsque y varie de 0 à $p\sqrt{6}$; la seconde représente la surface totale lorsque y est supérieur à $p\sqrt{6}$.

1er Cas. — Pour étudier les variations de la première expression, il suffit d'étudier celles de

$$F(y) = 2py^2 + 6p^2y - y^3 ;$$

la dérivée est

$$F'(y) = 4py + 6p^2 - 3y^2.$$

Celle-ci s'annule pour une valeur positive de y

$$y_1 = \frac{p(2 + \sqrt{22})}{3},$$

qui est inférieure à $p\sqrt{6}$.

La dérivée $F'(y)$ étant positive lorsque y varie de 0 à y_1, et négative lorsque y varie de y_1 à $p\sqrt{6}$, la fonction a un maximum pour $y = y_1$

y	0		y_1		$p\sqrt{6}$
$F(y)$	0	croît	$F(y_1)$	décroît	$12p^3$

2e Cas. — Pour étudier les variations de la seconde fonction

$$F_1(y) = 2py^2 + y^3 - 6p^2y,$$

prenons la dérivée

$$F_1'(y) = 4py + 3y^2 - 6p^2 ;$$

la racine positive de $F_1'(y)$ est inférieure à $p\sqrt{6}$, de sorte que la fonction $F_1(y)$ croît constamment lorsque y varie de $p\sqrt{6}$ à $+\infty$.

Donc la surface totale du cylindre croît constamment lorsque

le point P est à droite de A ; ce qui était d'ailleurs évident *à priori*.

[M. G. Foucry, école normale de Châlons, a résolu la même question.]

GÉOMÉTRIE

4465. — *Deux cercles, de centres O, O', sont tangents extérieurement en C. Soient A, B leurs points de contact respectifs avec l'une de leurs tangentes communes.*

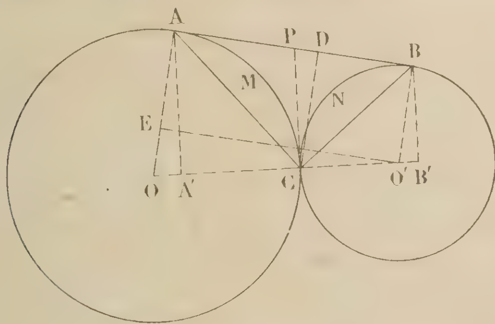
1° *On suppose que la figure tourne autour de la ligne OO' et l'on demande de calculer le volume engendré par l'aire qui est limitée par la droite AB et les arcs de cercle AC, BC.*

2° *On suppose que les rayons des cercles varient, leur somme restant constante, et l'on demande de trouver les valeurs des rayons pour lesquelles le volume précédent est maximum.*

3° *On suppose que les rayons varient, leur produit restant constant, et l'on demande d'étudier la variation du volume et d'en indiquer la représentation graphique.*

(*Bacc. lettres-math., Montpellier, juillet 1898.*)

1° Menons la tangente commune CP. Le volume engendré par le triangle mixtiligne AMCNB est égal au volume engendré par le triangle ABC moins les anneaux sphériques engendrés



par les segments circulaires AMC et BNC. On a donc, en abaissant CD perpendiculaire à AB,

$$V = \frac{1}{3}\,\text{surf. AB.CD} - \frac{1}{6}\pi\overline{AC}^2.CA' - \frac{1}{6}\pi\overline{BC}^2.CB',$$

ou, comme $\text{surf. AB} = 2\pi CP.AB = \pi\overline{AB}^2$, $CB' = CA'$,

et $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$,

puisque, comme il est facile de le voir, $\widehat{ACB} = 1$ droit,

$$V = \frac{1}{3}\pi\overline{AB}^2\left(CD - \frac{1}{2}CA'\right).$$

Calculons AB, CD et CA' en fonction de R et R'. Si on mène O'E parallèle à AB, le triangle rectangle OO'E donne

$$AB = EO' = \sqrt{(R+R')^2 - (R-R')^2} = 2\sqrt{RR'}\,;$$

en comparant le triangle CPD au triangle semblable O'OE, on obtient

$$\frac{CD}{CP} = \frac{O'E}{O'O}, \qquad \text{d'où} \qquad CD = \frac{\overline{AB}^2}{2(R+R')} = \frac{2RR'}{R+R'}.$$

D'ailleurs, on a

$$CA'.CP = 2\,\text{surf. ACP} = ABC = \frac{1}{2}\,AB.CD,$$

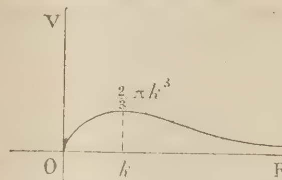
ou, comme $CP = \frac{1}{2}AB$,

$$CA' = CD.$$

En remplaçant dans V, il vient

$$V = \frac{1}{3}\pi\overline{AB}^2.\frac{CD}{2} = \frac{4}{3}\pi\frac{R^2R'^2}{R+R'}.$$

2° Cette valeur montre que lorsqu'on suppose R+R' constant, V atteint son maximum en même temps que le produit RR' c'est-à-dire pour R = R'. Dans ce cas, le volume V devient égal à $\frac{2}{3}\pi R^3$ et représente la moitié du volume de la sphère engendrée par l'un des cercles égaux O, O'.



3° Supposons maintenant le produit RR' constant et égal à k^2. V est alors inversement proportionnel à la somme R + R' ; or comme $RR' = k^2$, cette somme devient minimum pour R = R' = k, et V passe par un maximum, égal à $\frac{2}{3}\pi k^3$. En remarquant que V s'annule pour R = 0 et R = ∞, on en déduit aisément la variation de V, figurée par la courbe ci-contre.

(L. A. BLANC, à Clermont-Ferrand).

[Ont résolu cette question : MM. E. Ardin-Delteil ; L. Bois ; C. Bourvéau ; Bouzy ; B. Carrière ; R. Coural ; P. Delolme ; J. Delpont ; F. Fabia ; A. Fadeuille ; J. Fiton ; E. Gernez ; R. Henry ; R. Hüe ; H. Janois ; G. Jullian ; E. Le Maigre ; G. Le Sage ; A. Lescure ; Lorcerie ; P. Macherey ; M. Maigret ; C. Marie ; B. Meheust ; J. Moisson ; G. Nazare ; M. Oger ; F. Pégorier ; Poude ; L. Rausch ; Remondet ; G. Schoonheere ; R. Thomas ; P. Tribier.]

4776. — *Trouver dans le plan d'un triangle le point tel que la somme de ses distances aux trois sommets du triangle soit minimum (solution géométrique).*

Soit P un point quelconque du plan du triangle. Faisons tourner l'angle BCP de 60° autour de C ; soit B'CP' sa nouvelle position. Le triangle CPP' est équilatéral ; on a PP' = PC, et par suite

$$PA + PB + PC = PA + P'B' + PP'.$$

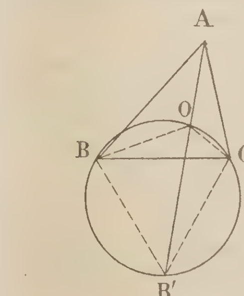
La somme considérée est ainsi représentée par la longueur de la ligne brisée APP'B'.

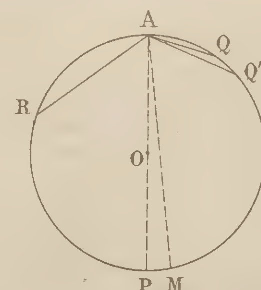
Or cette ligne atteint évidemment son minimum lorsque P et P' viennent sur la droite connue AB'. Dans ce cas l'angle B'PC étant égal à l'angle P'PC ou à son égal $\widehat{B'BC}$, les points P et B font partie d'un même segment capable de base B'C.

Le point demandé O est donc l'intersection du cercle circonscrit au triangle équilatéral BCB' avec la droite AB'.

Cette solution suppose le sommet A en dehors du cercle BCB' ; elle tombe donc en défaut lorsque l'angle A est égal ou supérieur à l'angle BOC = 120°.

Nous allons montrer que dans ce cas particulier, le sommet A lui-même correspond au minimum de la somme.





LEMME PRÉLIMINAIRE. — *Si un angle RAQ inscrit dans le cercle O est supérieur à 120°, on a*

$$AR + AQ < AP,$$

AP *étant le diamètre du cercle.*

En effet, considérons l'angle RAQ′ égal à 120°; en supposant AR > AQ, on voit facilement que AQ < AQ′; donc

$$AR + AQ < AR + AQ'.$$

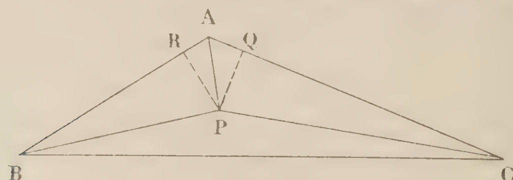
Or si M est le milieu de l'arc RPQ′, on sait que la somme des distances du point A à deux sommets du triangle équilatéral RMQ′ est égale à la distance au troisième sommet, donc

$$AR + AQ' = AM;$$

par suite $\quad AR + AQ < AM \quad$ ou AP *a fortiori*. (*)

Cela posé, considérons le triangle ABC où l'angle A est supérieur à 120°.

Je dis que pour un point intérieur quelconque P (seul cas à



examiner), la somme PA + PB + PC est supérieure à AB + AC. En effet, si l'on abaisse les perpendiculaires PR et PQ sur AB, AC on a (lemme précédent)

$$PA > AR + AQ.$$

D'autre part,

$$PB > PR,$$
$$PC > QC.$$

En ajoutant membre à membre ces inégalités de même sens, il vient $\quad PA + PB + PC > AR + RP + AQ + QC,$

ou $\quad PA + PB + PC > AB + AC. \quad$ C. q. f. d.

(J. MOISSON, à Versailles.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Delaire ; Duvergé et Sainte-Laguë ; G. A., lycée de Nîmes ; C. Marie ; E. Péguet ; H. Pitrat ; A. de Saint-Gabriel ; P. Thonet ; T. Lemoyne ; P. Zlatco.]

4799. — *Dans un triangle* ABC, *on joint par une droite le sommet* A *au point* D *qui est au quart de* BC. *Connaissant* AB = c, AC = b, AD = l :

1° *Construire géométriquement le triangle ;*

2° *Calculer le troisième côté* BC.

1° Menons par le point D une parallèle à AB qui coupe AC en E. On a

$$AD = l, \qquad DE = \frac{3}{4}c, \qquad AE = \frac{b}{4}.$$

Le triangle ADE est ainsi déterminé par ses trois côtés. En le construisant, il ne reste plus qu'à prolonger AE d'une longueur EC = 3AE, à tirer CD et à mener par A une parallèle à ED qui rencontre CD en B.

La seule condition de possibilité est que le triangle ADE existe, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{1}{4}\,|\,3c - b\,| < l < \frac{1}{4}(3c + b).$$

2° Traçons la médiane AM du triangle ABC et remarquons que AD est aussi médiane du triangle ABM. En appliquant la relation connue, on obtient, en posant BC = x,

$$b^2 + c^2 = 2\overline{AM}^2 + 2\left(\frac{x}{2}\right)^2, \qquad (1)$$

$$c^2 + \overline{AM}^2 = 2l^2 + 2\left(\frac{x}{4}\right)^2. \qquad (2)$$

(*) On peut remarquer aussi que la somme des distances d'un point d'un arc quelconque aux extrémités de la corde est maxima quand le point est au milieu de l'arc ; donc AR + AQ′ est inférieur au double de la corde qui sous-tend la moitié de l'arc, corde qui est égale au rayon.

Pour éliminer AM, ajoutons à (1) le double de (2) ; il vient

$$b^2 + 3c^2 = 4l^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4},$$

d'où

$$x = 2\sqrt{\frac{b^2 + 3c^2 - 4l^2}{3}}.$$

(H. BLANC, lycée de Clermont.)

Remarque. — Si on écrit que

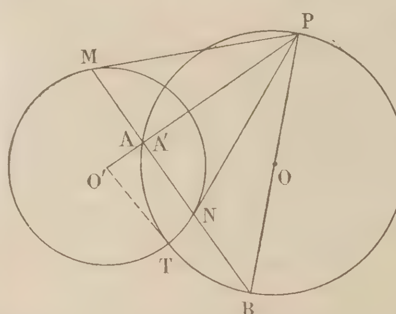
$$(b - c)^2 < x^2 < (b + c)^2,$$

on retrouve les conditions de possibilité trouvées en discutant la construction.

[Ont résolu cette question : MM. A. Ageron ; Aubert ; E. Baudouin ; A. Bertagua ; R. Cattin ; G. Chamberaud ; F. Clabault ; L. Corbin ; A. Cotton ; A. Delaire ; Duvergé et Sainte-Laguë ; G. Foucry ; A. Foy ; L. Giboin ; G. Guinand ; J. Haag ; E. Hélary ; R. Henry ; A. Huet ; Jacquet ; H. Janois ; H. Julien ; X. Lacreuse ; A. Lecoutour ; E. Licope ; G. Luquet ; D. Lwow ; J. Maire ; G. Marquet ; P. Millet ; R. Mouzon ; Noël ; P. E., à Bonneval ; J. Pendariès ; P. Petit ; H. Pitrat ; A. de Saint-Gabriel ; A. Séclet ; R. Simon ; Sinoquet ; D. Tuïssuzian ; G. Vachet ; C. Vallot ; F. Vérot.]

4808. — *On donne deux circonférences* O *et* O′ *se coupant orthogonalement. D'un point* P *pris sur* O *on mène à* O′ *les tangentes* PM *et* PN ; *on joint les points de contact. La droite* MN *rencontre le cercle* O *en deux points* A *et* B. *Démontrer que* PA *et* PB *passent chacune par un point fixe.*

Nous allons faire voir que le point A se confond avec le point d'intersection A′ de la droite PO′ avec le cercle O.



En effet, le cercle O′ étant orthogonal au cercle O, on a

$$OA'.OP = \overline{OT}^2 = \overline{OM}^2,$$

ce qui montre que le point A′ appartient à la polaire MN du point P par rapport au cercle O′, de sorte que A et A′ se confondent en un seul point.

Ainsi la droite PA passe par le point fixe O′, et la droite PB, diamètre du cercle O puisque $\widehat{PA'B} = 1$ droit, passe par le point fixe O.

(D. TUISSUZIAN, lycée de Versailles.)

[Ont résolu cette question : MM. A. Amblard ; Aubert ; M. Bayor ; H. Blanc ; J. Chapron ; F. Clabault ; Duvergé et A. Sainte-Laguë ; G. Foucry ; J. Haag ; R. Henry ; T. Lemoyne ; P. Thonet ; P. Valentin.]

TRIGONOMÉTRIE

3543. — *Résoudre l'équation*

$$\text{séc}\,2x + \sin 3x = \text{cosec}\,3x + \cos 2x.$$

Cette équation s'écrit

$$\frac{1}{\cos 2x} - \frac{1}{\sin 3x} = \cos 2x - \sin 3x,$$

ou

$$(\cos 2x - \sin 3x)\left(\frac{1}{\cos 2x \sin 3x} + 1\right) = 0.$$

Sous cette dernière forme, on voit que l'équation se dédouble en deux autres : $\quad \cos 2x = \sin 3x$

et $\quad \cos 2x.\sin 3x = -1.$

La première, qui peut s'écrire

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right),$$

est vérifiée pour

$$2x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right),$$

d'où

$$x = (4k + 1)\frac{\pi}{10}, \qquad x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Les extrémités des arcs donnés par la première solution forment un pentagone régulier, dont l'un des sommets correspond aussi à la seconde solution.

La seconde équation exige qu'on ait,

soit $\cos 2x = -1$ et $\sin 3x = 1$,

soit $\cos 2x = 1$ et $\sin 3x = -1$.

Dans le premier cas, on doit avoir

$$2x = 2k\pi + \pi \quad \text{et} \quad 3x = \frac{\pi}{2} + 2k'\pi,$$

valeurs compatibles si

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{2} = \frac{(4k'+1)\pi}{6},$$

ce qui suppose $4k'+1 = 3(2k+1)$, ou $2k'-3k = 1$.

Cette équation peut s'écrire

$$2(k'-2) = 3(k-1),$$

ou

$$\frac{k'-2}{k-1} = \frac{3}{2};$$

les solutions entières sont donc données par $k' = 3p+2$, $k = 2p+1$.

Dans le second cas, on doit avoir

$$2x = 2k\pi \quad \text{et} \quad 3x = \frac{3\pi}{2} + 2k'\pi.$$

Pour que ces valeurs fussent compatibles, il faudrait que

$$k\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{2k'\pi}{3},$$

ou

$$6k = 3 + 4k'.$$

Or $6k$ et $4k'$ étant pairs et 3 étant impair, cette équation n'a pas de solutions entières.

[Ont résolu cette question : MM. Bertière ; E. Lapenne ; F. Pégorier ; L. Tronchon.]

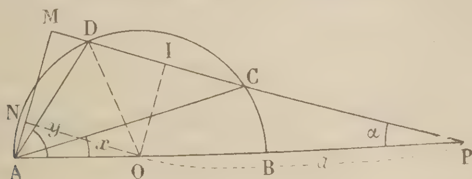
4822. — *On donne une demi-circonférence de rayon* R *et sur le diamètre* AB *un point* P, *situé à une distance* a *du centre* O.

1° *Par le point* P *on mène une sécante* PCD *faisant avec* AP *un angle donné* α. *Calculer les tangentes des angles* x *et* y *que forment les cordes* AC *et* AD *avec le diamètre* AB. *Montrer que le produit* $\operatorname{tg} x . \operatorname{tg} y$ *est indépendant de l'angle* α.

2° *Mener par le point* P *la sécante* PCD *de manière que le produit des cordes* AC *et* AD *soit égal à une quantité donnée* m^2.

(*Bacc. lettres-math., Bordeaux, novembre 1899.*)

1° Projetons A et O en M et I sur PD, puis O en N sur AM. On a $\widehat{CDB} = x$ comme ayant même mesure, et $\widehat{DAM} = \widehat{CDB}$



comme ayant leurs côtés perpendiculaires ; donc

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \widehat{DAM} = \frac{MD}{MA}.$$

Or $MD = MI - DI = ON - DI = R\cos\alpha - \sqrt{R^2 - a^2\sin^2\alpha}$,

$MA = AP\sin\alpha = (a+R)\sin\alpha$.

Donc

$$\operatorname{tg} x = \frac{R\cos\alpha - \sqrt{R^2 - a^2\sin^2\alpha}}{(a+R)\sin\alpha}.$$

Un calcul analogue donne

$$\operatorname{tg} y = \frac{R\cos\alpha + \sqrt{R^2 - a^2\sin^2\alpha}}{(a+R)\sin\alpha}.$$

On déduit de là

$$\operatorname{tg} x . \operatorname{tg} y = \frac{R^2\cos^2\alpha - (R^2 - a^2\sin^2\alpha)}{(a+R)\sin^2\alpha} = \frac{a-R}{a+R},$$

ce qui montre que le produit $\operatorname{tg} x . \operatorname{tg} y$ est indépendant de l'angle α.

2° On doit avoir $AC.AD = m^2$.

Or $AC.AD = 2R.AM$ (théorème connu) et $AM = (a+R)\sin\alpha$.

Donc

$$\sin\alpha = \frac{m^2}{2R(a+R)}.$$

L'angle α étant au plus égal à l'angle formé par PO avec la tangente au cercle issue de P, son sinus ne peut surpasser $\frac{R}{a}$, ce qui donne la condition

$$\frac{m^2}{2R(a+R)} \leqslant \frac{R}{a}, \quad \text{ou} \quad m^2 \leqslant \frac{2R^2(a+R)}{a}.$$

Dans ce qui précède on suppose implicitement $a > R$. Si $a < R$, les valeurs de $\operatorname{tg} x$ et $\operatorname{tg} y$ restent les mêmes pourvu qu'on regarde l'angle x qui a changé de sens comme négatif.

Quant à l'angle α qui détermine la sécante PCD, il peut prendre une valeur quelconque lorsqu'on trouve pour $\sin\alpha$ une valeur acceptable, ce qui suppose $m^2 \leqslant 2R(a+R)$.

(SAINT-BERTIN, à Saint-Omer.)

[Ont résolu la même question : MM. R. Barthélemy ; F. Clabault ; Delaire ; Foucry ; Haag ; Janois ; Legros ; Oberlin ; Szivessy ; Thonet ; Zlatco.]

PHYSIQUE

4825. — *On considère un manomètre à air comprimé dont le tube est cylindrique et qui contient une colonne d'air de* 80^{cm} *de hauteur sous la pression extérieure de* 75^{cm} *de mercure. A quelle distance du sommet se fixe le niveau du liquide lorsque la pression exercée sur le mercure de la cuvette devient égale à* 375^{cm} ? *On négligera l'abaissement du niveau du mercure dans la cuvette.*

(*Bacc. lettres-sciences, Rennes, mars 1900.*)

Sous la pression extérieure de 75^{cm}, le mercure a le même niveau dans le tube et dans la cuvette.

Soient s la section du tube, x la distance demandée. Lorsque la pression de 375^{cm} s'exerce sur le mercure de la cuvette, le mercure occupe dans le tube une hauteur de $(80 - x)^{cm}$ et la force élastique de l'air comprimé est de

$$375 - (80 - x) = 295 + x.$$

Appliquant la loi de Mariotte, il vient

$$80s \times 75 = xs(295 + x),$$

d'où

$$x^2 + 295x - 6000 = 0.$$

La racine positive convient seule et l'on a

$$x = 19^{cm},1.$$

(E. COGNET.)

[Ont résolu la même question : MM. R. Cattin ; L. Corbin ; A. Delaire ; M. Gondran ; Godard ; J. Jarrier ; J. Haag ; R. Henry ; David Lwow ; A. Pichon ; R. Simon ; A. V., à Chaource ; P. Valentin ; C. Baudouin ; H. Dobryzniak ; G. Foucry ; A. Foy d'Orches ; A. de Saint-Gabriel ; G. Lallier ; Noël et Mouzon ; C. Tourneux.]

CONCOURS DE 1900 (*Suite*).

INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

Mathématiques.

I. — **4838.** Déterminer toutes les valeurs de x qui vérifient l'inégalité

$$\frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 5x + 6} > 2.$$

II. — **4839.** Soient ABC un triangle et P le point où la bissectrice intérieure de l'angle A rencontre la perpendiculaire élevée sur BC en son milieu ; démontrer que le rapport $\frac{PA}{PB}$ est égal au rapport $\frac{AB+AC}{BC}$.

Comment doit-on modifier cette proposition lorsque l'on remplace P par le point P' d'intersection de la bissectrice extérieure de l'angle A avec la perpendiculaire élevée sur BC en son milieu ?

(*11 juin. — Durée : 3 heures.*)

Physique et Chimie.

I. — Principe de la pile de Volta ; polarisation ; piles à courant constant.

II. — **4840**. Dans une presse hydraulique, on exerce une pression totale de 50^{kg} sur le petit piston, qui a un diamètre de 25^{mm} ; quel diamètre faut-il donner au grand piston, en millimètres, pour qu'il exerce une pression totale de 2500^{kg} ?

III. — Propriétés générales des azotates, sulfates, carbonates.

(*11 juin. — Durée : 3 heures.*)

Sciences naturelles.

I. — Structure et fonctions de l'estomac chez l'Homme et chez les principaux Mammifères.

II. — Le grain de pollen : sa structure ; ses modifications et son rôle dans la fécondation. Comparaison avec les spores des Cryptogames vasculaires. (*12 juin. — Durée : 3 heures.*)

Épure.

4841. — La ligne de terre xy est le petit axe de la feuille, x étant à gauche. Dans le plan horizontal se trouve un triangle isocèle $\alpha\beta\gamma$, dont le sommet α est sur le grand axe de la feuille, à 10^{cm} en avant de xy, et dont la base $\beta\gamma$ coïncide avec xy, β étant à gauche.

La droite $\alpha\beta$ est la trace horizontale d'un plan P dont la partie supérieure fait un angle de $30°$ avec la partie du plan horizontal qui contient γ.

Dans le plan P se trouve un octogone régulier de 5^{cm} de rayon, dont le centre se projette horizontalement au point milieu de $\alpha\gamma$; de plus l'une des diagonales qui passent par deux sommets opposés de cet octogone est horizontale. Cet octogone est la base d'une pyramide régulière située au-dessus du plan P, ayant 10^{cm} de hauteur.

Représenter cette pyramide par ses deux projections, ainsi que la circonférence circonscrite à l'octogone de base.

On fera la distinction des parties vues et cachées en supposant la pyramide pleine et opaque. (*13 juin. — Durée : 3 heures.*)

CONCOURS GÉNÉRAUX

Classe de Mathématiques élémentaires.

Physique et Chimie (Paris).

I. — Condensateur. — Bouteille de Leyde. — Batteries.

II. — **4842**. Deux prismes de même angle A et d'indices n et n' sont placés à la suite l'un de l'autre de manière que les faces en regard soient parallèles et laissent entre elles une mince lame d'air.

On fait tomber sur le premier prisme un rayon de lumière suivant la normale et on mesure la déviation totale e qu'il a subie après avoir traversé les deux prismes.

On demande de chercher l'expression de l'indice n du premier prisme en fonction de l'indice n' du second et des deux angles A et e.

III. — Anhydride carbonique et oxyde de carbone.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques élémentaires.

4843. — O et O' étant les points d'intersection des côtés opposés d'un quadrilatère Q, on considère le quadrilatère Q' formé par les bissectrices des angles du quadrilatère Q, de telle sorte que deux côtés opposés de Q' soient les bissectrices de deux angles opposés de Q.

1° Soit I le point d'intersection des diagonales du quadrilatère Q' ; quel est le lieu géométrique du point I lorsque le quadrilatère Q se déforme de façon que, O et O' restant fixes, deux sommets opposés de ce quadrilatère décrivent, respectivement, deux cercles fixes passant chacun par les deux points O et O' ?

2° Les trois points O, O' et I restant fixes, et l'un des sommets du quadrilatère Q décrivant une droite Δ, quels sont les lieux géométriques décrits par les trois autres sommets de ce quadrilatère ?

Discuter la nature de chacun de ces lieux suivant la position de la droite Δ dans le plan.

3° Calculer les angles et les côtés du quadrilatère Q', connaissant les angles et les côtés du quadrilatère Q.

Montrer que si l'on désigne par A, B, C, D les angles du quadrilatère Q, et par a', b', c', d' les longueurs des côtés de Q' qui sont, respectivement, les bissectrices de ces angles, on a la relation

$$a' \sin\frac{A}{2} + c' \sin\frac{C}{2} = b' \sin\frac{B}{2} + d' \sin\frac{D}{2}.$$

(*2 juillet, de 7 h. à 2 h.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4844. — Démontrer que $a^7 - a$ est toujours divisible par 42.

4845. — Trouver les plus petits nombres entiers x et y tels que

$$\frac{x^2 - y}{x^2 + y} = \left(\frac{7}{17}\right)^2.$$

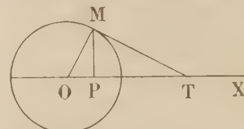
4846. — Résoudre le système d'équations

$$x^2 - xy + a^2y = 0, \qquad y^2 - xy - 4x = 0.$$

4847. — Simplifier l'expression

$$\frac{a+x}{x(x-y)(x-z)} + \frac{a+y}{y(y-x)(y-z)} + \frac{a+z}{z(z-x)(z-y)}.$$

4848. — Étant données une circonférence de centre O et une droite OX, trouver sur la circonférence un point M tel que si on mène par ce point la tangente, qu'on prolonge jusqu'à sa rencontre en T avec la droite OX, l'aire du triangle OMT soit dans un rapport donné k avec l'aire du carré ayant pour côté la perpendiculaire MP abaissée du point M sur la droite OX. On déterminera le point M par la distance $OP = x$ de sa projection P sur OX, au centre de la circonférence. — Discussion.



(*Bacc. lettres-sciences, Lyon, juillet 1899.*)

4849. — Si les angles d'un triangle sont en progression arithmétique et les hauteurs en progression géométrique, le triangle est équilatéral.

(J. Sallaud.)

4850. — Construire un triangle connaissant un côté, la hauteur correspondante et sachant en outre que le produit des trois côtés est égal à quatre fois le cube de la hauteur donnée.

4851. — Sur les côtés d'un angle on prend deux longueurs OA, OB quelconques ; au milieu A' de OA on élève A'C perpendiculaire sur OA ; au milieu B' de OB on élève B'D perpendiculaire sur OB ; ces droites se coupent en E.

Démontrer que A, B, C, D, E sont sur un cercle.

4852. — Sur le côté BA prolongé d'un triangle ABC rectangle en A on prend un point M tel que les triangles MBO et BAC soient équivalents, O étant le centre du cercle circonscrit au triangle. Les droites AC, OM se coupent en E. On mène BE et on prend sur cette droite un point H tel que $\frac{BH}{HE} = m$, m étant un nombre donné. On demande le lieu du point H lorsque le point A décrit la circonférence de diamètre BC. (Victor Barol.)

4853. — Dans un triangle ABC, soit O le point de rencontre des perpendiculaires élevées sur chaque côté en son milieu et soit α le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet A sur BC. On prend sur $A\alpha$ un point A' tel que $A\alpha . \alpha A' = B\alpha . \alpha C$ en grandeur et en signe. De même, sur les hauteurs $B\beta$ et $C\gamma$ on prend les points B' et C' tels que

$$B\beta . \beta B' = C\beta . \beta A, \qquad C\gamma . \gamma C' = A\gamma . \gamma B.$$

1° Démontrer que les points A, B, C, A', B', C' sont sur une même circonférence.

2° Exprimer les hauteurs $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ en fonction des angles du triangle ABC et de la longueur $AO = l$.

3° Démontrer que la somme

$$\frac{AA'}{A\alpha} + \frac{BB'}{B\beta} + \frac{CC'}{C\gamma}$$

est constante ou indépendante du triangle ABC considéré. Trouver la valeur de cette somme. Examiner le cas où l'angle C est obtus.

4° Établir la formule $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$.

(*Concours général de 1900 entre les élèves des institutions libres du Nord et du Pas-de-Calais.*)

4854. — Combien de temps faut-il à un corps tombant dans le vide, à partir de l'instant où il est abandonné, pour qu'il ait une vitesse de 20^m par seconde, en supposant qu'à l'endroit où se produit cette chute le pendule simple qui effectue une oscillation simple par seconde ait une longueur de 99^{cm} ? (*Bacc. lettres-math., Dijon, mars 1900.*)

4855. — Un courant électrique traverse un voltamètre contenant de l'eau acidulée de densité d ; au bout de n secondes, le volume de l'hydrogène recueilli dans l'éprouvette est V à la température $t°$. La hauteur du liquide acidulé dans l'éprouvette est h. H étant la pression atmosphérique et T la tension de la vapeur d'eau au-dessus de l'eau acidulée, quelle est en ampères l'intensité I du courant ? On sait d'ailleurs qu'un coulomb libère une quantité d'hydrogène à 0°, sous la pression 76^m, égale à $0^{cc},1158$.

Application : $V = 25^{cc},8$, $t = 13°,5$, $H = 762^{mm}$, $h = 75^{mm}$, $n = 35^m10^s$, $d = 1,1$, $T = 11^{mm},5$.

(*Bacc. lettres-sciences, Lille, novembre 1899.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, Directeur.

TABLE DES MATIÈRES

Année 1899-1900

NOTES

ARITHMÉTIQUE

ALGÈBRE

GÉOMÉTRIE

TRIGONOMÉTRIE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

MÉCANIQUE

PHYSIQUE

Problèmes sur la pesanteur et l'élasticité des corps.

CHIMIE

EXAMENS ET CONCOURS

BACCALAURÉATS

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet. Facdouel, Dir.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
ÉLÉMENTAIRES

PUBLIÉ PAR

H. VUIBERT

25E ANNÉE

1900 - 1901

PARIS

LIBRAIRIE NONY ET Cie

63, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

25e Année. — N° 1. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 1er Octobre 1900.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0 30	0 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.

Abonnements.. Librairie Nony et Cie, Boulᵈ St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (1900)

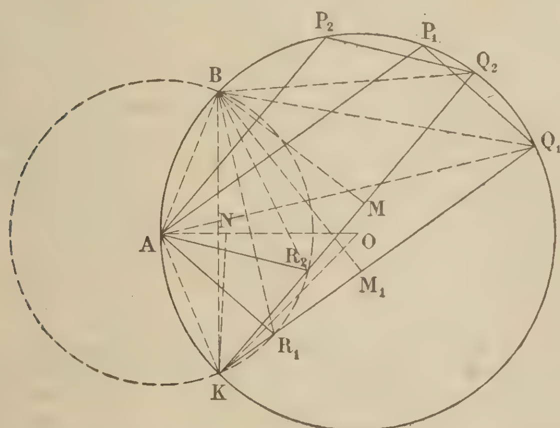
Mathématiques (Paris et Départements).

Solution par M. **M. Guillaume**, élève du lycée de Chaumont, Lauréat du concours (1er prix (*)).

[M. Sarrazin, professeur.]

I. — **4829.** *Soient, sur un cercle donné, un point fixe A et deux points variables P, Q, extrémités d'une corde de longueur donnée. Sur les cordes AP, PQ on construit un parallélogramme APQR. Prouver qu'il y a sur le cercle donné un point fixe B, tel que le triangle BQR reste semblable à lui-même en se déplaçant. Trouver le lieu du point qui partage QR dans un rapport donné.*

1° Soient $AP_1Q_1R_1$, $AP_2Q_2R_2$ deux positions quelconques du parallélogramme APQR. Le côté AR de ce parallélogramme restera constamment égal au côté opposé PQ, c'est-à-dire à la longueur donnée. Donc pour toutes les positions du parallélogramme, le point R sera un point d'une circonférence de centre A et de rayon égal à PQ.



Soit B l'un des points d'intersection de cette circonférence avec la circonférence donnée. Joignons ce point aux points A, Q, R_1, Q_2, R_2. Les cordes égales AB et P_1Q_1 sous-tendent des arcs égaux :

$$\text{arc } AB = \text{arc } P_1Q_1.$$

A ces deux arcs ajoutons l'arc BP_1. Il vient

$$\text{arc } ABP_1 = \text{arc } BP_1Q_1.$$

Ces deux arcs étant égaux, les cordes qui les sous-tendent sont égales :

$$BQ_1 = AP_1 = Q_1R_1 ;$$

donc le triangle BQ_1R_1 est isocèle. On verrait de même que le triangle BQ_2R_2 l'est aussi.

Menons AQ_1. Les triangles ABQ_1 et AR_1Q_1 ont les trois côtés égaux chacun à chacun ; donc ils sont égaux. Par suite, on a

$$\widehat{BAQ_1} = \widehat{R_1AQ_1}, \qquad \text{ou} \qquad \widehat{BAR_1} = 2\,\widehat{BAQ_1}.$$

Or dans la circonférence A, l'angle BAR_1 a même mesure que l'arc BR_1 ; dans la circonférence O, l'angle BAQ_1 a même mesure que la moitié de l'arc BQ_1. Donc l'arc BR_1 de la circonférence A et l'arc BQ_1 de la circonférence O correspondent au même nombre de degrés. On verrait de même que les arcs BR_2 et BQ_2 ont le même nombre de degrés. Par suite, il en est de même des arcs $(BR_1 - BR_2)$ et $(BQ_1 - BQ_2)$, c'est-à-dire des arcs R_1R_2 et Q_1Q_2. Donc les angles R_1BR_2 et Q_1BQ_2, qui ont même mesure que les moitiés de ces arcs, sont égaux :

$$\widehat{R_1BR_2} = \widehat{Q_1BQ_2}.$$

Aux deux membres de cette égalité, ajoutons l'angle R_2BQ_1; il vient

$$\widehat{R_1BQ_1} = \widehat{R_2BQ_2}.$$

Les deux triangles R_1BQ_1 et R_2BQ_2 ont donc un angle égal ; en outre, ils sont isocèles : donc ils sont semblables. Le point B est donc tel que le triangle BQR reste semblable à lui-même en se déplaçant. C. q. f. d.

2° Les droites Q_1R_1, Q_2R_2 concourent au point K, qui est le deuxième point d'intersection des deux circonférences. En effet, l'angle de ces deux droites est égal à l'angle P_1AP_2 puisque ces deux angles ont leurs côtés parallèles et de même sens. L'angle P_1AP_2 a même mesure que la moitié de l'arc P_1P_2, et par suite même mesure que la moitié de l'arc Q_1Q_2. L'angle Q_1KQ_2 doit donc avoir même mesure que la moitié de l'arc Q_1Q_2 compris entre ses côtés. Donc le point K est un point de la circonférence O. En outre, puisque l'angle Q_1KQ_2 a même mesure que la moitié de l'arc Q_1Q_2 de la circonférence O, il a aussi même mesure que l'arc R_1R_2 de la circonférence A, qui a le même nombre de degrés. Or ses côtés passent par les extrémités de cet arc ; donc le sommet K de l'angle est sur la circonférence A. Il est donc à l'intersection des deux circonférences.

Considérons maintenant un point M qui divise QR dans le rapport de m à n. Soient M_1 sa position sur Q_1R_1, M_2 sa position sur Q_2R_2. Menons BM_1, BM_2. Les triangles M_1BR_1, M_2BR_2 sont semblables. En effet, ils ont un angle égal $(\widehat{BR_1M_1} = \widehat{BR_2M_2})$ compris entre côtés homologues proportionnels, puisque l'on a

$$\frac{M_1R_1}{M_2R_2} = \frac{Q_1R_1}{Q_2R_2} = \frac{BR_1}{BR_2}.$$

Ces deux triangles étant semblables, il en résulte que l'angle

(*) Dans la comparaison entre les copies classées de Paris et celles des départements, M. Guillaume a obtenu le premier rang.

BMR ou BMK est constant, et que d'un point quelconque du lieu on voit la droite BK sous un angle constant. Le lieu cherché est donc l'arc d'un segment capable de l'angle BMR, décrit sur la corde BK, et à droite de BK.

Pour certaines positions du parallélogramme, le point M se trouvera à gauche du point K. Il est facile de voir que, dans ce cas, l'angle sous lequel, du point M, on verra la droite BK, ne sera plus l'angle BMR, mais son supplément BMQ. Le lieu sera alors l'arc d'un segment capable du supplément de BMR, décrit sur la corde BK, et à gauche de BK. Ce sera par conséquent le reste de la circonférence dont faisait partie le lieu dans le premier cas. Le lieu du point M se compose donc de toute la circonférence.

Le centre de cette circonférence est le point N qui divise la droite AO dans le rapport donné. En effet, les triangles BQ_1R_1 et AOK sont isocèles; ils ont un angle égal ($\widehat{BQ_1K} = \widehat{AOK}$ comme ayant tous deux même mesure que la moitié de l'arc BAK); ils sont donc semblables. Par suite, les triangles BM_1R_1 et ANK le sont aussi. L'angle ANK est donc égal à l'angle BMK. En outre, le point N, étant sur AO, est équidistant des points B et K. Il est donc le centre d'une circonférence de rayon NB dans laquelle la corde BK détermine deux segments capables, l'un de l'angle BMR, l'autre de son supplément.

[Ont résolu la même question : MM. Anzemberger, F. Clabault; J. Haag; E. Licope; D. Lwow; R. Manen; Noël et Mouzon; R. Paucot.]

II. — **4830.** *Démontrer le théorème suivant :*

Pour que quatre forces appliquées aux quatre sommets d'un tétraèdre solide, suivant les hauteurs de ce tétraèdre, se fassent équilibre, il faut et il suffit que ces forces soient respectivement proportionnelles aux aires des faces auxquelles elles sont perpendiculaires, et qu'elles soient toutes dirigées du sommet vers la face opposée, ou toutes dans le sens contraire.

On pourra s'appuyer sur les deux lemmes suivants :

1° *Six forces appliquées à un tétraèdre solide suivant les arêtes de ce tétraèdre doivent être nulles pour se faire équilibre ;*

2° *Soit* ABCD *un tétraèdre; soient* $A\alpha$, $B\beta$ *les perpendiculaires menées respectivement par les sommets* A, B *aux faces* ACD, BCD *et limitées respectivement aux faces* BCD, ACD ; *on a*

$$\frac{A\alpha}{B\beta} = \frac{\text{surf. ACD}}{\text{surf. BCD}}.$$

N.-B. — *La vérité du premier lemme apparaît immédiatement en composant d'une part trois des forces appliquées à un même sommet, d'autre part les trois forces situées dans la face opposée. Il est inutile d'en reproduire la démonstration, dont il ne sera pas tenu compte.*

1° **Démonstration du second lemme.** — Dans le tétraèdre ABCD, menons les hauteurs AH, BH'. Les triangles rectangles $AH\alpha$, $BH'\beta$ ont un angle aigu égal ; donc ils sont semblables, et l'on a

$$\frac{A\alpha}{B\beta} = \frac{AH}{BH'}. \qquad (1)$$

Le volume du tétraèdre est

$$V = \frac{1}{3}\,BCD \times AH = \frac{1}{3}\,ACD \times BH'.$$

On peut donc écrire $\dfrac{AH'}{BH'} = \dfrac{ACD}{BCD}$.

Portons cette valeur dans l'égalité (1). Il vient

$$\frac{A\alpha}{B\beta} = \frac{ACD}{BCD}. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

2° **Démonstration du théorème.** — *a*) Les conditions sont *suffisantes*, c'est-à-dire que si l'on a

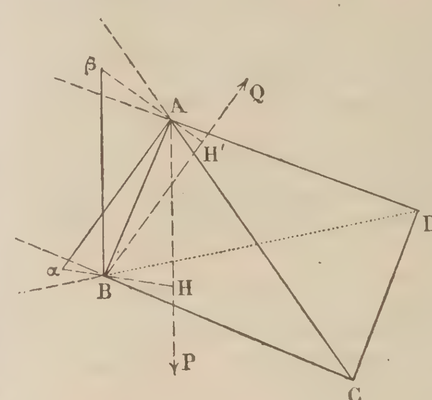
$$\frac{P}{BCD} = \frac{Q}{ACD} = \frac{S}{ABD} = \frac{T}{ABC}$$

(P, Q, S, T désignant les forces appliquées respectivement aux sommets A, B, C, D) et si toutes ces forces sont dirigées du sommet vers la face opposée, ou toutes en sens contraire, il y aura équilibre.

En effet, si l'on a $\dfrac{P}{BCD} = \dfrac{Q}{ACD}$,

ou $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{BCD}{ACD} = \dfrac{B\beta}{A\alpha}$,

on peut choisir, pour représenter les forces, une échelle telle que P soit représentée par une longueur égale à $B\beta$, et Q par une longueur égale à $A\alpha$. Décomposons alors P en trois forces agissant suivant les arêtes issues de A. La composante qui agira suivant AB s'obtiendra en menant par l'extrémité de P un plan parallèle au plan ACD, et par conséquent il est facile de voir que cette composante sera représentée par la longueur AB. De même, si on décomposait Q en trois forces agissant suivant les arêtes issues de B, la composante qui agira suivant AB sera représentée en intensité par une longueur égale à AB.



Supposons que les forces agissent toutes du sommet vers la face opposée. Alors le plan mené par l'extrémité de P parallèlement au plan ACD rencontrera AB au point B, c'est-à-dire que la composante de P agira dans le sens $\overline{AB}$. Au contraire, la composante de Q agira suivant $\overline{BA}$, car le plan mené par l'extrémité de Q parallèlement au plan BCD rencontrera AB au point A. Supposons au contraire que les forces P et Q agissent des sommets A et B vers l'extérieur du tétraèdre. Les forces étant changées de sens par rapport au cas précédent, leurs composantes le seront aussi. La composante de P agira alors dans le sens $\overline{BA}$, et celle de Q dans le sens $\overline{AB}$. Dans ces deux cas, aux extrémités A et B de l'arête AB sont appliquées deux forces égales et directement opposées. Ces deux forces se détruisent donc. En décomposant les forces S, T, on verrait de même que les composantes des 4 forces se détruisent deux à deux. Il y a donc équilibre. Donc les conditions sont suffisantes.

b) Les conditions sont *nécessaires*, c'est-à-dire que s'il y a équilibre, on a

$$\frac{P}{BCD} = \frac{Q}{ACD} = \frac{S}{ABD} = \frac{T}{ABC}$$

et les forces P, Q, S, T sont toutes dirigées du sommet vers la face opposée, ou toutes en sens contraire.

En effet, décomposons chacune des forces en 3 autres agissant suivant les arêtes du tétraèdre ; on aura ainsi 12 forces qui, en se composant deux à deux, peuvent se réduire à 6. D'après le premier lemme, puisqu'il y a équilibre, ces 6 forces doivent être nulles. Donc les composantes des forces P, Q, S, T se détruisent deux à deux.

Considérons par exemple la composante de P et celle de Q, qui agissent suivant l'arête AB. Puisqu'elles se détruisent, c'est qu'elles sont égales et directement opposées. On peut donc choisir pour représenter les forces une échelle telle que ces deux composantes soient représentées l'une et l'autre par une longueur égale à AB. Pour construire la force P, on connaît les directions des 3 composantes et l'intensité de l'une d'elles.

Supposons par exemple que la composante connue agisse suivant AB, et dans le sens $\overline{AB}$. Pour construire P, par le point B je mène un plan parallèle au plan ACD ; ce plan coupe la droite AH en un point P. Les droites AP et Bβ sont des parallèles comprises entre plans parallèles. Donc la force P sera représentée par une longueur égale à Bβ. On verrait de même que la force Q serait représentée par une longueur égale à Aα. On a donc

$$\frac{P}{Q} = \frac{B\beta}{A\alpha} = \frac{BCD}{ACD}, \qquad (2)$$

quelle que soit d'ailleurs l'échelle choisie, puisque le rapport $\frac{P}{Q}$ ne dépend pas de la manière dont on représente les forces.

En outre, si la composante de P agit dans le sens $\overline{AB}$, la composante de Q agit dans le sens $\overline{BA}$, et par conséquent les deux forces agissent du sommet vers la face opposée. Si la composante de P agit suivant $\overline{BA}$, la composante de Q agit suivant $\overline{AB}$; c'est-à-dire que les deux forces agissent vers l'extérieur du tétraèdre.

L'égalité (2) peut s'écrire $\frac{P}{BCD} = \frac{Q}{ACD}$, et, si l'on considérait les composantes de S, T, on verrait que l'on peut écrire

$$\frac{P}{BCD} = \frac{Q}{ACD} = \frac{S}{ABD} = \frac{T}{ABC}$$

et que les 4 forces agissent toutes vers l'intérieur du tétraèdre, ou toutes vers l'extérieur. C. q. f. d.

[Ont résolu la même question : MM. Anzemberger ; N. Ollier ; R. Paucot ; P. Valentin.]

ARITHMÉTIQUE

4832. — *Démontrer que si p est un nombre premier absolu, le seul carré entier dont la différence avec p soit un carré est $\left(\frac{p+1}{2}\right)^2$.*

Soit x^2 un carré entier tel que la différence $x^2 - p$ représente aussi un carré entier y^2. On a

$$x^2 - p = y^2,$$

ou

$$(x-y)(x+y) = p.$$

p étant premier absolu n'admet d'autre facteur entier que lui-même ou l'unité. On doit donc avoir

$$x - y = 1,$$
$$x + y = p,$$

d'où, par addition et soustraction,

$$x = \frac{p+1}{2}, \qquad y = \frac{p-1}{2}.$$

Pour tout nombre premier p supérieur à 2, le carré $\left(\frac{p+1}{2}\right)^2$ est entier et est le seul répondant à la question.

(P. THONET, athénée royal d'Anvers.)

Remarque. — Si p n'était pas premier, on pourrait le décomposer, au moins d'une façon, en un produit de facteurs tous deux différents de 1, soit

$$p = a \times b.$$

L'équation

$$x^2 - ab = y^2$$

admet évidemment la solution

$$x = \frac{a+b}{2}, \qquad y = \frac{a-b}{2}.$$

Or, on a identiquement

$$4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2 = (p+1)^2 - (p-1)^2,$$

et comme $a < p$, $b > 1$, on a $a - b < p - 1$ et par suite, en vertu de l'égalité précédente,

$$a + b < p + 1.$$

On déduit facilement de là que l'on peut affirmer qu'*un nombre p ($p \neq 2$) est premier si $x^2 - p$ n'est jamais carré pour les valeurs de x inférieures à $\frac{p+1}{2}$.*

On a ainsi un procédé permettant de reconnaître si un nombre est premier.

[Ont résolu la même question : MM. H. Belbenoit, instituteur à Auxon ; F. Clabault, instituteur à Rosières ; J. Haag, collège de Pont-à-Mousson ; R. Henry, instituteur à Troyes ; D. König, à Budapest ; E. Licope, à Mons ; J. Limasset, lycée de Laon ; D. Lwow, à Piatra ; P. Valentin, à Briançon ; Hugonnier-Ginet.]

ALGÈBRE

4846. — *Résoudre le système d'équations*

$$x^2 - xy + a^2y = 0, \qquad y^2 - xy - 4x = 0.$$

De la première équation on déduit

$$y = \frac{x^2}{x - a^2}; \qquad (1)$$

en portant cette valeur dans la seconde équation, il vient

$$\frac{x^4}{(x-a^2)^2} - \frac{x^3}{x-a^2} - 4x = 0,$$

ou

$$x^4 - x^3(x-a^2) - 4x(x-a^2)^2 = 0,$$

ou

$$a^2x^3 - 4x(x-a^2)^2 = 0,$$

ou enfin

$$x[ax - 2(x-a^2)][ax + 2(x-a^2)] = 0.$$

On tire de là les trois racines

$$x = 0, \qquad x = -\frac{2a^2}{a-2}, \qquad x = \frac{2a^2}{a+2};$$

les valeurs correspondantes de y fournies par la formule (1) sont

$$y = 0, \qquad y = -\frac{4a}{a-2}, \qquad y = -\frac{4a}{a+2}.$$

Tant que les valeurs précédentes de x et y demeurent finies, elles vérifient le système d'équations proposé. Examinons ce qui arrive pour des valeurs infinies de x et y.

Dans ce cas, on a $a = \pm 2$; le système d'équations devient

$$x^2 - xy + 4y = 0, \qquad y^2 - xy - 4x = 0,$$

et n'admet alors que les deux solutions

$$x = y = 0; \qquad x = 2, \qquad y = -2.$$

[Ont résolu la même question : MM. Anzemberger, lycée de Lyon ; R. Bellencourt, à Pierrepont ; Bouzy ; F. Clabault, instituteur à Rosières ; H. Dobryzniak, instituteur à Argentan ; G. Foucry, école normale de Châlons ; H. Guillaud, école primaire supérieure de Chantonnay ; G. Guinand ; H. Janois, instituteur à Saint-Calais ; D. König ; A. Lecoutour, à Saint-Malo ; J. Lehmann, instituteur à Boufarik (Algérie) ; D. Lwow, à Piatra ; J. Ménéchal, instituteur au Bugue ; L. Minjoz, école normale d'Albertville ; R. Mouzon, collège de Fontenay ; Noël ; P. Saintin, lycée de Versailles ; E. Sautreau, collège Chaptal ; Sinoquet ; F. Sol, à Saint-Antonin ; H. Tellier, lycée de Charleville ; P. Zlatco, à Bucarest ; G. de France.]

4847. — *Simplifier l'expression*

$$\frac{a+x}{x(x-y)(x-z)} + \frac{a+y}{y(y-x)(y-z)} + \frac{a+z}{z(z-x)(z-y)}.$$

Réduisons les trois fractions au même dénominateur en prenant pour plus petit dénominateur commun le produit $xyz(x-y)(y-z)(z-x)$; il vient

$$\frac{(a+x)yz(z-y)+(a+y)xz(x-z)+(a+z)xy(y-x)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}$$

$$=\frac{a[yz(z-y)+xz(x-z)+xy(y-x)]+xyz(z-y+x-z+y-x)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}$$

$$=\frac{a(yz^2-y^2z+x^2z-xz^2+xy^2-x^2y)}{xyz(-y^2z-xz^2+yz^2-x^2y+xy^2+x^2z)}$$

$$=\frac{a}{xyz}.$$

(J. HAAG, collège de Pont-à-Mousson.)

Remarque. — Il n'était pas nécessaire de développer les termes de la fraction obtenue. On pouvait voir que le numérateur devenait nul lorsque deux des lettres x, y, z prenaient la même valeur; on en déduisait la possibilité de supprimer les facteurs $x-y$, $y-z$, $z-x$ aux deux termes.

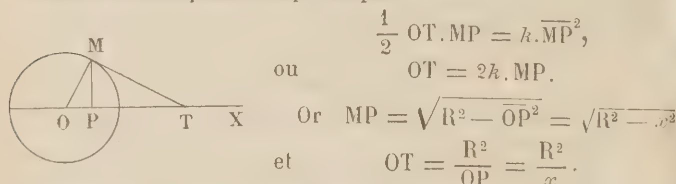
[Ont résolu la même question : MM. E. Anzemberger, lycée de Lyon ; H. Belbenoit, à Arras ; G. Foucry, école normale de Châlons ; R. Heury, instituteur à Troyes ; H. Janois, instituteur à Saint-Calais ; A. Legros ; D. Lwow, à Piatra (Roumanie) ; R. Mouzon, collège de Fontenay ; Noël ; L. Patin, instituteur à Arvillers ; Sinoquet ; F. Sol, à Saint-Antonin ; P. Thonet, athénée royal d'Anvers ; H. Varennes, à Deux-Chaises ; P. Zlatco, à Bucarest ; G. de France ; F. Pégorier.

4848. — *Etant données une circonférence de centre* O *et une droite* OX, *trouver sur la circonférence un point* M *tel que si on mène par ce point la tangente, qu'on prolonge jusqu'à sa rencontre en* T *avec la droite* OX, *l'aire du triangle* OMT *soit dans un rapport donné* k *avec l'aire du carré ayant pour côté la perpendiculaire* MP *abaissée du point* M *sur la droite* OX. *On déterminera le point* M *par la distance* $OP = x$ *de sa projection* P *sur* OX, *au centre de la circonférence. — Discussion.*

(*Bacc. lettres-sciences, Lyon, juillet 1899.*)

La condition imposée s'exprime par

$$\frac{1}{2}\,OT.MP = k.\overline{MP}^2,$$



ou

$$OT = 2k.MP.$$

Or

$$MP = \sqrt{R^2-\overline{OP}^2} = \sqrt{R^2-x^2}$$

et

$$OT = \frac{R^2}{OP} = \frac{R^2}{x}.$$

L'équation du problème est donc

$$\frac{R^2}{x} = 2k\sqrt{R^2-x^2},$$

ou, en élevant au carré et ordonnant,

$$4k^2x^4 - 4k^2R^2x^2 + R^4 = 0.$$

Discussion. — Une valeur de x ne peut convenir que si elle est réelle et comprise entre 0 et R.

La somme des deux valeurs de x^2 étant R^2 et leur produit $\frac{R^4}{4k^2}$, ces valeurs seront toutes deux positives et inférieures à R^2 si elles sont réelles, ce qui suppose

$$4k^4R^4 - 4k^2R^4 \geqslant 0,$$

ou simplement

$$k \geqslant 1,$$

puisque le rapport k est essentiellement positif.

Ainsi, lorsque $k \geqslant 1$, le problème admet toujours deux solutions, qui se confondent en une seule pour $k = 1$, d'où $x^2 = \frac{R^2}{2}$ ou $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$; dans ce cas particulier, le triangle OMP est rectangle isocèle.

(A. LEGROS, lycée de Rouen.)

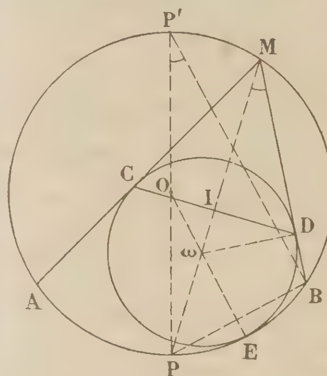
[Ont résolu la même question : MM. E. Anzemberger, lycée de Lyon ; Bouzy ; F. Clabault, instituteur à Rosières ; H. Dobryzniak, instituteur à Argentan ; G. Foucry, école normale de Châlons ; H. Guillaud, école primaire supérieure de Chantonnay ; J. Haag, collège de Pont-à-Mousson ; H. Janois, instituteur à Saint-Calais ; de Jarny ; J. Lamotte, à Noirmoutier ; J. Lehmann, instituteur à Boufarik (Algérie) ; D. Lwow, à Piatra (Roumanie) ; Merced del Valle ; A. Meynier, à Sciez ; L. Minjoz ; R. Mouzon, collège de Fontenay ; Noël ; P. Saintin, lycée de Versailles ; F. Sol, à Saint-Antonin ; H. Tellier, lycée de Charleville ; Tourneux ; P. Valentin, à Briançon ; A. Vannier, à Chaource ; P. Zlatco, à Bucarest.]

GÉOMÉTRIE

4834. — *On considère un cercle* O *et deux cordes* MA, MB ; *dans l'angle* AMB *on inscrit un cercle tangent en* C, D *aux côtés* MA, MB *et touchant également le cercle* O.

Enveloppe de la droite CD *lorsque les points* A, B *restant fixes, le point* M *décrit le cercle* O.

La droite Mω qui joint le point M au centre du cercle inscrit dans le triangle mixtiligne MAB passe par le milieu I de CD et le milieu P de AB. De plus, elle est perpendiculaire à CD. Je dis que PI est constant.



En effet, la valeur absolue de la puissance de ω par rapport au cercle O peut s'exprimer par

$$P\omega.\omega M = \overline{OE}^2 - \overline{O\omega}^2 ;$$

or, dans le triangle MωD,

$$\omega I.\omega M = \overline{\omega D}^2.$$

En ajoutant ces deux égalités, il vient

$$PI.\omega M = \overline{OE}^2 + \overline{\omega D}^2 - \overline{O\omega}^2,$$

ou, comme $O\omega = OE - \omega D$,

$$PI.\omega M = 2OE.\omega D.$$

D'autre part, $OE = OP$, et les triangles ωDM, PBP' étant semblables puisqu'ils sont rectangles et que $\widehat{M} = \widehat{P'}$, on a

$$PI = 2OP.\frac{\omega D}{\omega M} = PP'.\frac{PB}{PP'} = PB.$$

La droite CD enveloppe ainsi un cercle de centre P et de rayon PB ou PA.

On conclut aisément de là que le point I se confond avec le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

L'arc AB du cercle enveloppe compris dans le cercle O correspond à des cercles ω tangents intérieurement au cercle O ; l'arc restant correspond aux cercles ω' tangents extérieurement (*).

En prenant le point M sur l'arc APB, on obtiendrait de même un second cercle enveloppe de centre P'.

(P. THONET, athénée royal d'Anvers.)

[Ont résolu la même question : MM. H. Belbenoit, instituteur à Auxon J. Chapron, commis des Postes à Lyon.]

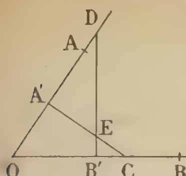
4851. — *Sur les côtés d'un angle on prend deux longueurs* OA, OB *quelconques : au milieu* A' *de* OA *on élève* A'C *perpendiculaire sur* OA ; *au milieu* B' *de* OB *on élève* B'D *perpendiculaire sur* OB ; *ces droites se coupent en* E.

Démontrer que A, B, C, D, E *sont sur un cercle.*

Première solution. — Pour démontrer que les quatre points

(*) Soient ω et ω' deux cercles tangents l'un intérieurement, l'autre extérieurement à O, et *situés dans l'angle* AMB ; les droites C'D' et CD sont évidemment parallèles, de sorte que l'enveloppe des cordes correspondant aux cercles ω' *compris dans l'angle* AMB est l'arc de cercle symétrique de AB.

A, B, C, D sont sur un même cercle, il suffit d'établir la relation



$$OA.OD = OB.OC,$$

ou
$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}.$$

Or, comme $OA = 2OA'$, $OB = 2OB'$, cette dernière proportion résulte immédiatement de la similitude des triangles rectangles OA'C, OB'D, qui ont un angle commun.

On démontre de même que les quatre points A, D, C, E sont sur un même cercle en remarquant que la relation

$$A'A.A'D = A'C.A'E,$$

ou
$$\frac{A'O}{A'C} = \frac{A'E}{A'D},$$

résulte immédiatement de la similitude des triangles A'OC, A'ED.

(Henri TELLIER, lycée de Charleville.)

Seconde solution. — Menons les droites AC et BD. Les triangles OAC et OBD étant isocèles, on a

$$\widehat{OAC} = \widehat{AOC} = \widehat{OBD},$$

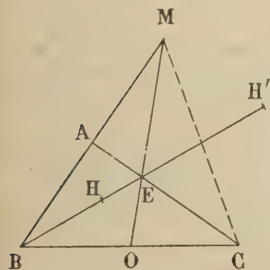
ce qui montre que les points A et B appartiennent à un segment de base CD et capable de l'angle AOB. D'ailleurs, comme $\widehat{CED} = \widehat{A'EB'} = 180° - \widehat{AOB}$, le point E se trouve aussi sur le cercle défini par ce segment.

(Henri PITRAT, à Givors.)

[Ont résolu la même question : Mlle M. D. P. ; MM. Anzemberger, lycée de Lyon ; P. Bancillon, école normale de Montbrison ; R. Bazin ; H. Belbenoit ; A. Berthou, école spéciale de Travaux publics ; G. Boissonnet ; C. Broutin ; F. Clabault ; G. Foucry ; G. Guinand ; J. Haag, collège de Pont-à-Mousson ; R. Henry ; H. Janois ; D. Konig ; A. Lecoutour ; A. Legros ; J. Lehmann ; E. Licope ; D. Lwow ; R. Manen, petit séminaire de Massals ; J. Ménéchal ; A. Meynier ; L. Minjoz ; R. Mouzon, collège de Fontenay ; Noël ; L. Ollié ; L. Patin ; H. de la Perrelle ; E. Santreau, collège Chaptal ; Sinoquet ; F. Sol ; C. Tannenzapf ; P. Valentin ; A. Vannier ; H. Varennes ; P. Zlatco ; G. de France.]

4852. — *Sur le côté* BA *prolongé d'un triangle* ABC *rectangle en* A *on prend un point* M *tel que les triangles* MBO *et* BAC *soient équivalents,* O *étant le centre du cercle circonscrit au triangle. Les droites* AC, OM *se coupent en* E. *On mène* BE *et on prend sur cette droite un point* H *tel que* $\frac{BH}{HE} = m$, *m étant un nombre donné. On demande le lieu du point* H *lorsque le point* A *décrit la circonférence de diamètre* BC.

Les triangles MBO, ABC ayant un angle commun B sont entre eux comme les produits des côtés comprenant cet angle ; ces triangles devant être équivalents, on a



$$BM.BO = BA.BC,$$

ou, comme
$$BC = 2BO,$$
$$BM = 2BA.$$

Le point E est donc l'intersection des médianes AC, OM du triangle BMC ; ce point E est alors au tiers de AC à partir de A, de sorte que le lieu de E est un cercle homothétique du cercle de diamètre BC décrit par A, C étant le centre et $\frac{2}{3}$ le rapport d'homothétie.

De même, les points H et H' qui divisent BE dans le rapport *m* décrivent respectivement deux cercles homothétiques du cercle décrit par E, B étant ici le centre et $\frac{m}{m+1}$ ou $\frac{m}{m-1}$ le rapport d'homothétie.

Remarque. — Les résultats précédents peuvent être facilement généralisés en supposant que le point fixe O est un point quelconque du côté BC, et en supposant que A décrit un cercle passant par B et C sans que BC soit un diamètre.

(L. OLLIÉ, à Auch.)

[Ont résolu la même question : MM. V. Barol, école primaire supérieure de Lorgues ; G. Boissonnet ; Bouzy ; C. Broutin ; F. Clabault, instituteur à Rosières ; G. Foucry ; J. Haag, collège de Pont-à-Mousson ; H. Janois ; D. Konig ; J. Lehmann ; A. Legros ; E. Licope ; D. Lwow ; R. Manen ; L. Minjoz ; H. de la Perrelle ; H. Pitrat ; H. Tellier, lycée de Charleville ; P. Thonet, athénée royal d'Anvers ; G. de France.]

PHYSIQUE

4836. — *Un projectile est lancé avec une vitesse initiale* v_0 *suivant une direction inclinée de 45° au-dessus du sol supposé horizontal. On demande à quelle distance de son point de départ il retombera sur le sol.*

On ne tiendra pas compte de la résistance de l'air.

Application : $v_0 = 200^m$ *par seconde.*

(*Bacc. lettres-math., Caen, mars 1900.*)

Si le projectile n'était pas soumis à l'action de la pesanteur, il suivrait la direction Oy d'un mouvement uniforme puisqu'on néglige la résistance de l'air. Mais la pesanteur sollicite le projectile à se déplacer de haut en bas d'un mouvement uniformément accéléré et, au bout d'un temps t, le projectile touche le sol en un certain point P. Sans la pesanteur, le projectile serait à ce même moment en un point M, tel que l'on ait

$$OM = v_0 t,$$

en désignant par v_0 sa vitesse initiale, et à une hauteur

$$MP = OM \sin 45° = v_0 t \sin 45°.$$

On a évidemment

$$v_0 t \sin 45° = \frac{1}{2} g t^2,$$

d'où
$$t = \frac{2 v_0 \sin 45°}{g}.$$

D'un autre côté, on a

$$OP = OM \cos 45° = v_0 t \cos 45°.$$

En remplaçant dans cette équation t par sa valeur, il vient

$$OP = \frac{2 v_0^2 \sin 45° \cos 45°}{g} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Application. — $v_0 = 200^m$ par seconde. En prenant $g = 9^m,81$, on trouve

$$OP = 4077^m,4.$$

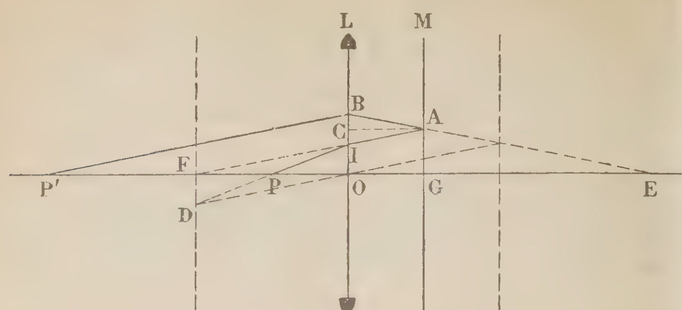
(A. VANNIER, à Chaource.)

[Ont résolu la même question : MM. Anzemberger ; H. Belbenoit ; L. Demogue ; A. Foy, d'Orches ; R. Henry, instituteur à Troyes ; A. Legros ; L. Maubeck ; P. Valentin ; Hugonnier-Ginet.]

4837. — *Un point lumineux se trouve sur l'axe d'une lentille convergente de* 50^{cm} *de distance focale à* 25^{cm} *de la lentille. Après avoir traversé la lentille, les rayons se réfléchissent sur un miroir plan perpendiculaire à l'axe de la lentille et distant de la lentille de* 25^{cm}. *Après cette réflexion, les rayons traversent de nouveau la lentille convergente. Où se forme l'image définitive ?*

(*Bacc. lettres-sciences, Lille, mars 1900.*)

Soient la lentille L et le miroir M. Un rayon lumineux PI issu du point P sortira de la lentille parallèlement à l'axe secon-



daire DO ; en A il se réfléchit et revient en B. Le rayon BA prolongé coupe l'axe principal en E ; tout se passe comme si la lumière venait de ce point ; il faut donc en déterminer la position. On a

$$\widehat{BAC} = \widehat{CAI} = \widehat{IFO} = \widehat{AEG}.$$

Le triangle AFE est donc isocèle et $GE = GF$; donc

$$EO = GE + GO = 100^{cm}.$$

Le point E se trouvant à une distance de la lentille double de la distance focale, son image P' se trouvera à la même distance de l'autre côté de la lentille.

(A. MEYNIER, à Sciez.)

[Ont résolu la même question: MM. Anzemberger, E. Baudouin; H. Belbenoit; R. Cattin ; E. Cognet ; A. Delaire ; L. Demogue ; R. Henry ; F. Limouzi ; L. Maubeck ; M. Royer ; P. Thonel ; A. Vannier.]

BACCALAURÉATS

SESSION DE JUILLET 1900

PARIS

Lettres-Sciences.

Mathématiques.

I. — **4856**. On donne une parabole de paramètre p. De son sommet A comme centre, avec un rayon égal à $2p\sqrt{2}$, on décrit une circonférence qui coupe la parabole en deux points M et M'. On demande d'exprimer en fonction de p la surface du segment commun à la parabole et au cercle, et de calculer le rapport de cette surface à celle du triangle MTM' obtenu en menant à la parabole les tangentes aux points M et M'. (On sait que la surface d'un segment de parabole, compris entre le sommet et une perpendiculaire à l'axe, vaut les $\frac{2}{3}$ du rectangle ayant pour dimensions cette corde et la distance de cette corde au sommet de la parabole.)

II. — *1er sujet*. — Centre de gravité. Sa recherche dans quelques cas simples : triangle, trapèze, quadrilatère, pyramide.

II. — *2e sujet*. — Mouvement uniformément varié. — Loi des espaces. Lois des vitesses.

II. — *3e sujet*. — Notions sur les résistances passives. — Frottement ; ses lois.

Physique.

I. — **4857**. Un corps de pompe reçoit de la vapeur d'eau à la température de 200° et à la pression de onze atmosphères. Sur la face opposée du piston s'exerce la pression atmosphérique.

Le travail résultant d'un coup de piston est de 10 000 kilogrammètres. Quel est le volume du corps de pompe ?

Quelle masse de vapeur reçoit-il à chaque coup de piston ?

Densité de la vapeur d'eau par rapport à l'air, 0,622. Masse normale du litre d'air, $1^{gr},293$.

Coefficient de dilatation des gaz, $\frac{1}{273}$.

Densité du mercure, 13, 6.

II. — *1er sujet*. — Lunette de Galilée.

II. — *2e sujet*. — Télescope de Newton.

II. — *3e sujet*. — Lunette astronomique.

Lettres-Mathématiques.

Mathématiques.

I. — **4858**. Un triangle équilatéral ABC de côté a tourne autour d'un axe XX' situé dans son plan et passant par son sommet A.

Déterminer l'angle $\theta = BAX'$ de telle façon que la surface totale engendrée par le périmètre du triangle soit égale à πm^2.

II. — *1er sujet*. — Géométrie descriptive : angle de deux plans.

II. — *2e sujet*. — Descriptive : angle d'une droite et d'un plan.

II. — *3e sujet*. — Descriptive : distance d'un point à un plan.

Physique.

I. — **4857**. (Voir plus haut.)

II. — *1er sujet*. — Lunette de Galilée.

II. — *2e sujet*. — Télescope de Newton.

II. — *3e sujet*. — Lunette astronomique.

CONCOURS DE 1900 (*Suite*).

ÉCOLE NATIONALE ET SPÉCIALE DES BEAUX-ARTS

SECTION D'ARCHITECTURE

Mathématiques.

I. — **4859**. Étant donné un hexagone régulier ABCDEF inscrit dans une circonférence de rayon R, du sommet C comme centre, avec CE pour rayon, on décrit l'arc de cercle AE, et on considère la portion du plan limitée par l'arc AE et les côtés AB, BC, CD, DE (partie ombrée). 1° Trouver l'aire s de la partie ombrée. 2° Trouver le volume V et l'aire S du solide engendré par la partie ombrée en tournant autour de CD. 3° Calculer par logarithmes le rayon R sachant que $V = 7^{lit},2758$; mettre tous les calculs.

II. — **4860**. Former, résoudre, puis discuter suivant les valeurs de m l'équation qui donne les valeurs de x qui satisfont aux trois équations aux trois inconnues x, y, z :

$$y + 2z = (m+1)x - 4m,$$
$$y + z = mx - 2m - 1,$$
$$y^2 - 2z^2 + 2xy - xz - x - 2y + 8m^2 - 8m - 2 = 0;$$

mettre tous les calculs.

(*1re session, 1er mai. — Durée : 2 heures.*)

Géométrie descriptive.

PROJECTIONS D'UNE CROIX

Une croix de pierre est donnée par son élévation, par son plan ABCD, et par la coupe diagonale sur son centre ; la face principale et les faces latérales sont moulurées ; la face postérieure est plane.

Établir ses deux projections, en supposant :

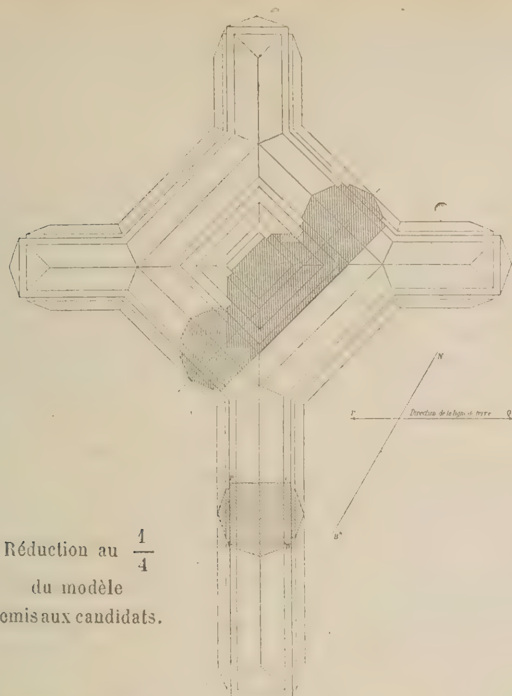
1° Que l'arête postérieure de la croix, qui est verticale sur l'élévation et qui correspond au point B de la coupe plane, a pour projection horizontale la droite marquée B^hN, le point inférieur de cette arête venant au point B^h, qui est ainsi la trace horizontale de l'arête projetée suivant B^hN ;

2° Que cette arête, ainsi projetée horizontalement suivant B^hN, fait avec le plan horizontal un angle de 22 degrés et demi (1/4 d'un angle droit) ;

3° Que la croix a subi autour de cette arête un mouvement de rotation tel que par un de ses points elle est venue en contact avec le plan horizontal, du côté gauche de la feuille ;

4° Que le plan vertical de projection, dont la trace sur le plan hori-

zontal de projection est parallèle à la droite PQ, est en contact avec l'un des points de la croix.



Réduction au $\frac{1}{4}$ du modèle remis aux candidats.

On cherchera ensuite les ombres propres de la croix ainsi projetée, et les ombres portées sur le plan horizontal et sur le plan vertical de projection ; ombres à 45°.

Ligne de terre parallèle au petit côté de la feuille.

NOTA. — Les candidats sont invités *expressément* à tracer sur l'épure *toutes* les lignes de construction au moyen desquelles ils ont obtenu les deux projections de la croix, ainsi que les ombres demandées.

(*1re session, 30 avril. — Durée : 8 heures.*)

CONCOURS GÉNÉRAUX

Classe de Seconde moderne.

Mathématiques (Paris et départements).

I. — **4861**. Étant donnés un cercle de rayon R et l'un de ses diamètres AOA', on trace une corde MM' qui rencontre en P ce diamètre ; trouver l'angle que doit faire cette corde avec AA' pour que la somme des carrés des segments PM, PM' soit indépendante de la position du point P sur le diamètre donné.

II. — **4862**. Un plan P partage le volume d'une sphère en deux parties V, V', et détermine sur la surface deux calottes sphériques S, S' (S correspond à V) :

1° On donne le rapport k de S à S', et l'on propose d'évaluer le rapport h de V à V' ;

2° Comparer h à k.

III. — **4863**. On donne un hexagone régulier dont les sommets successifs sont a, b, c, d, e, f, quand on parcourt le polygone toujours dans le même sens ; le quadrilatère $bcde$ est la base d'une pyramide située dans le plan de figure ; a est la projection sur ce plan du sommet A de la pyramide :

1° Construire la cote du sommet A, sachant que les deux faces Ade, Abc sont perpendiculaires entre elles ;

2° Construire la projection, sur le plan de figure, de la section du solide par le plan passant par le point F, projeté en f et dont la cote est le rayon de l'hexagone, et tel que la section soit un parallélogramme.

(*28 juin, de 8 h. 1/2 à 1 h. 1/2.*)

Physique et Chimie (Paris).

I. — Galvanomètre.

II. — Aluminium. Alumine. Aluns.

III. — **4864**. Au centre d'un ballon sphérique en verre, on place un petit objet lumineux dont l'image est projetée sur un écran par une lentille convenablement située entre l'écran et le ballon actuellement plein d'air.

On mesure la grandeur linéaire de l'image réelle. Puis on remplit le ballon d'un liquide réfringent.

1° Faudra-t-il déplacer la lentille pour maintenir sur l'écran une image nette de l'objet ?

2° L'indice de réfraction du liquide étant n, quel sera *a priori* le rapport de la grandeur linéaire de cette seconde image à celle de la première ?

3° A quelles applications pourront conduire les résultats de ces expériences ?

(Il n'y a pas lieu de tenir compte des effets optiques de la paroi de verre du ballon.)

(*10 juillet, de 8 h. 1/2 à 1 h. 1/2.*)

Classe de Première-Sciences.

Mathématiques (Paris et Départements).

4865. — 1° On donne dans un plan un quadrilatère ABCD, formé de quatre tiges rigides de longueurs invariables, savoir :

$$AB = a, \qquad BC = b, \qquad CD = c, \qquad DA = d.$$

Ces tiges sont articulées entre elles aux sommets A, B, C, D du quadrilatère, en sorte que celui-ci, sans sortir de son plan, tout en conservant les mêmes côtés, peut se déformer librement par suite de la variation de ses angles. On démontrera que la relation

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

est nécessaire et suffisante pour que les diagonales AC et BD du quadrilatère restent rectangulaires au cours de la déformation.

2° Supposons cette condition remplie ; on place le quadrilatère articulé dans un plan vertical, de façon qu'il repose par ses deux sommets A et B sur une horizontale fixe XY de ce plan, sur laquelle ces sommets sont libres de glisser : on attache en B un poids P ; en D un poids Q. De plus on exerce en A et C des efforts dirigés suivant l'horizontale XY, que l'on désignera respectivement par T et T', ces forces T et T' étant comptées positivement dans le sens XY et négativement dans le sens opposé.

Calculer T et T' de manière qu'il y ait équilibre. Discuter les valeurs trouvées. Examiner le cas où T, T' pourraient être nuls.

3° Calculer les pressions verticales exercées en A et C sur l'horizontale XY.

On négligera le poids des tiges, ainsi que les frottements.

(*27 juin, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.*)

ÉCOLE NORMALE DE SÈVRES

Arithmétique et Géométrie.

I. — **4866**. Déterminer tous les entiers dont le carré a 5 chiffres et est divisible par 54.

II. — **4867**. On construit un polygone convexe de $2n$ côtés dont tous les angles sont égaux et dont tous les côtés de rang impair sont égaux ainsi que les côtés de rang pair.

1° Démontrer qu'un tel polygone est inscriptible dans une circonférence.

2° Étant donnée la valeur a des côtés de rang pair et la valeur b des côtés de rang impair, calculer, en supposant l'entier n égal à 3, le rayon de la circonférence circonscrite.

III. — **4868**. Déterminer dans l'espace le lieu des points tels que les carrés de leurs distances à trois points donnés A, B, C aient des différences données.

IV. — **4869**. Deux points mobiles se meuvent respectivement sur deux droites concourantes. Leurs mouvements sont uniformes, mais accomplis avec des vitesses qui ne sont pas nécessairement égales. Lieu du milieu de la droite qui joint à chaque instant les deux mobiles.

(*18 juin, de 8 h. à midi.*)

Physique et Chimie.

I. — Comment peut-on, en s'appuyant sur les lois et les phénomènes élémentaires de l'électrostatique, mesurer :

1° La quantité d'électricité contenue sur un corps conducteur sphérique de très petit rayon ;
2° La charge totale répandue sur un conducteur de dimensions notables.
3° La quantité d'électricité que possède un diélectrique électrisé ?

II. — **4870**. Un miroir plan est appliqué contre un axe qui repose sur des coussinets fixes ; le miroir et son axe sont parallèles à la ligne des pôles. Un moteur fait tourner le système avec une vitesse uniforme d'un tour en quarante-huit heures dans le sens du mouvement des étoiles.

Démontrer que l'image d'une étoile quelconque dans le miroir est fixe. On sait que toutes les étoiles paraissent décrire en vingt-quatre heures des circonférences dont les plans sont perpendiculaires à la ligne des pôles, et les centres sont sur cette ligne.

III. — Azote. — Composition de l'air.

(19 juin, de 8 h. à midi.)

Histoire naturelle.

I. — Les Mammifères ; comparaison de leur organisation avec celle de l'Homme. — Modifications principales des membres et des dents. — Classification.

II. — Comparer la structure primaire de la racine, de la tige et de la feuille.

(22 juin, de 8 h. à midi.)

QUESTIONS PROPOSÉES (*)

4871. — Quelle est la plus haute puissance de 13 contenue dans le produit des 10 000 premiers nombres entiers ?

(A. Benoît, lycée d'Avignon.)

4872. — Trouver combien il y a de fractions irréductibles inférieures à 1 pouvant donner naissance à une fraction périodique mixte ayant un chiffre irrégulier et deux chiffres périodiques.

4873. — Trouver quatre nombres entiers dont la somme est égale à 100, sachant en outre que les trois premiers sont en progression géométrique et que le quatrième est égal au produit des deux premiers ainsi qu'à la somme du deuxième et du troisième.

(F. Deville, pensionnat Valbenoite, Saint-Etienne.)

4874. — Vérifier que le polynome

$$x^3+px-q$$

devient nul quand on remplace x par

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

(L. Faure, à Montauban.)

4875. — Déterminer a et b de façon que

$$x^4+ax^3+bx^2+8x+4$$

soit un carré.

4876. — Soient x' et x'' les racines de l'équation

$$x^2+px+q=0.$$

Former et discuter l'équation qui a pour racines $x'(1-x')$, $x''(1-x'')$.

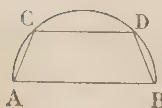
4877. — Résoudre l'équation

$$3^x+3^{x-1}+3^{x-2}+3^{x-3}+3^{x-4}=363.$$

(J. Bailly, à Nevers.)

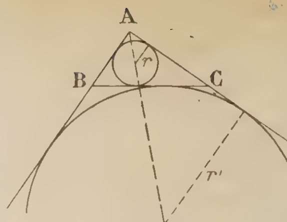
4878. — Résoudre l'équation

$$\frac{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{x-b}}=\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}.$$



4879. — On donne un demi-cercle de diamètre AB ; mener une corde CD parallèle à AB de façon que si on fait tourner la figure autour de AB, le trapèze ACDB engendre un volume équivalent à celui de la demi-sphère de diamètre AB.

(*) Les questions précédées d'un numéro impair seront résolues dans le numéro du 15 octobre ; les autres, dans le numéro du 1er novembre.



4880. — Soient r le rayon du cercle inscrit dans un triangle rectangle ABC, r' le rayon du cercle tangent à l'hypoténuse et aux prolongements des côtés de l'angle droit.

Étant donnés l'hypoténuse $BC=a$, le rapport $m=\frac{r'}{r}$ de ces deux rayons, calculer les deux côtés de l'angle droit. — Discuter.

(Bacc. lettres-math., Lille, juillet 1900.)

4881. — Calculer le rayon du cercle inscrit dans un triangle de périmètre $2p$, sachant que la différence entre la surface du triangle et celle du cercle inscrit est maxima.

4882. — Dans un triangle ABC, mener une sécante DE rencontrant les côtés AB et AC respectivement en D et E, telle que l'on ait

$$\frac{BD}{m}=\frac{DE}{n}=\frac{EC}{k}.$$

(A. Pichon, lycée de Niort.)

4883. — Construire un triangle connaissant deux côtés et le produit du troisième côté par la projection sur ce dernier de l'un des deux autres côtés.

(Burgat, école normale d'Albertville.)

4884. — Construire un quadrilatère ABCD connaissant les sommets A et B, la différence des angles en A et B, le rapport $\frac{AD}{BC}$, et sachant en outre que les sommets C et D se trouvent sur deux cercles donnés.

4885. — Démontrer par la géométrie que dans un triangle rectangle dont les angles aigus sont 15° et 75°, le produit des côtés de l'angle droit est équivalent au carré de la moitié de l'hypoténuse.

(E. Baticle, collège de Château-Thierry.)

4886. — Des extrémités A et B du diamètre d'une demi-circonférence, on mène deux cordes AC, BD se coupant en un point I. Démontrer : 1° que la somme AC.AI + BD.BI est constante quelles que soient les cordes ; 2° que si K est le pied de la perpendiculaire abaissée de I sur AB, IK est bissectrice de l'angle CKD.

(H. Pitrat, à Saint-Chamond.)

4887. — Etant donnés deux points fixes A et O, on fait tourner autour de O un angle constant XOY et on projette le point A sur OX et OY en B et C. Lieu du milieu de BC. Lieux des points de concours des médianes et des hauteurs du triangle OBC.

(R. Guillemin, collège Rollin.)

4888. — On donne un cercle fixe et un point M du cercle ; on mène des droites MP, MQ parallèles à des directions fixes. Trouver le lieu des centres des cercles inscrits dans les triangles MPQ lorsque M décrit le cercle donné.

4889. — Un vase en verre est pesé dans les deux conditions suivantes :

1° Après qu'on l'a rempli d'air sec à 0° ;

2° Après qu'on l'a rempli d'une certaine vapeur à 200° et sous la même pression que précédemment.

On constate que son poids n'a pas changé. Quelle est la densité de la vapeur par rapport à l'air ?

Coefficient de dilatation cubique du verre, 0,000025.
— — — des gaz, 0,003665.

(Bacc. lettres-math., Poitiers, mars 1899.)

4890. — On donne un prisme triangulaire ABCA'B'C' en verre, dont la face latérale AA'BB' est perpendiculaire à la face latérale AA'CC' tandis qu'elle fait un angle de 60° avec la troisième face BB'CC' ; l'indice de réfraction du verre est égal à $\sqrt{2}$. Un rayon lumineux perpendiculaire à la face AA'BB', pénètre à l'intérieur du prisme en traversant cette face ; déterminer sa marche ultérieure et calculer sa déviation après sa sortie du prisme.

(Bacc. lettres-math., Caen, juillet 1900.)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet, Facdouel, Dir.

25e Année. — N° 2. JOURNAL Paris, le 15 Octobre 1900.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Abonnements.. Librairie Nony et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

SUR CERTAINES ÉQUATIONS DU QUATRIÈME DEGRÉ

par M. **Ch. Bioche**.

1. Abel a démontré qu'on ne pouvait pas obtenir de formules algébriques donnant les racines de l'équation générale du m^e degré lorsque m dépasse 4. Même lorsque m est égal à 3 ou à 4, les formules qu'on pourrait écrire seraient ordinairement inutilisables à cause de leur complication. Il y a donc grand intérêt à étudier les cas dans lesquels la résolution d'une équation peut se ramener à la résolution d'équations du second degré.

Ces cas se présentent en particulier pour des équations du quatrième degré appartenant à des types qu'on rencontre fréquemment dans les applications; telles sont les équations suivantes :

$x^4 + px^2 + q = 0,$ équation bicarrée;

$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0,$ équation réciproque de 1re espèce;

$x^4 + ax^3 + bx^2 - ax + 1 = 0,$ équation réciproque de 2e espèce.

Les procédés de résolution de ces équations sont classiques; mais il me semble utile d'appeler l'attention sur les raisons pour lesquelles ces équations peuvent être résolues au moyen d'équations du second degré seulement. Ces raisons ont une portée très grande, de sorte que ce que je vais dire peut être considéré comme une introduction très élémentaire à des notions d'une grande importance(*). D'ailleurs, à un point de vue plus modeste, cela peut donner de l'intérêt à des questions de calcul algébrique qui semblent un peu arides au premier abord.

2. Les trois types d'équations que je viens de rappeler possèdent une propriété commune; en effet, si on change x en $-X$ dans la première équation, en $\frac{1}{X}$ dans la seconde, en $-\frac{1}{X}$ dans la troisième, on retombe à chaque fois sur l'équation d'où on était parti. C'est ce qu'on exprime en disant qu'*il y a pour chacune de ces équations une substitution qui la transforme en elle-même*.

Il résulte de là que la fonction $y = x^2$ ne prend que deux valeurs lorsqu'on remplace x successivement par les quatre racines de l'équation bicarrée.

De même, la fonction

$$y = x + \frac{1}{x}$$

ne prend que deux valeurs lorsqu'on remplace x successivement par les quatre racines de l'équation réciproque de première espèce.

Et enfin la fonction

$$y = x - \frac{1}{x}$$

ne prend que deux valeurs lorsqu'on remplace x successivement par les quatre racines de l'équation réciproque de seconde espèce.

On est donc conduit à former pour chaque équation l'équation en y correspondante; cette équation est du second degré, et connaissant une de ses racines, on obtient les deux racines de l'équation en x, qui lui correspondent, en résolvant une équation du second degré.

Le calcul à faire, dans chaque cas, est trop connu pour que je le reproduise.

3. On peut employer une autre méthode, en partant de considérations relatives à l'équation générale du quatrième degré.

Si on appelle x_1, x_2, x_3, x_4 les racines d'une équation du quatrième degré, le premier membre de cette équation peut s'écrire

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

La résolution de l'équation $f(x) = 0$ dépend de la décomposition de $f(x)$ en un produit de deux facteurs du second degré. Or il y a trois façons de grouper les quatre facteurs du premier degré en deux facteurs du second degré, car on peut associer le facteur $x - x_1$ à chacun des trois autres, comme on le voit par le tableau des décompositions :

$$[(x - x_1)(x - x_2)] \times [(x - x_3)(x - x_4)],$$
$$[(x - x_1)(x - x_3)] \times [(x - x_2)(x - x_4)],$$
$$[(x - x_1)(x - x_4)] \times [(x - x_2)(x - x_3)].$$

On conçoit alors comment il se fait que les diverses méthodes classiques de résolution de l'équation du quatrième degré conduisent à résoudre d'abord une équation du troisième degré. Je n'insiste pas sur ce point, en renvoyant mes lecteurs aux traités d'algèbre de mathématiques spéciales, et j'en reviens aux équations particulières déjà considérées.

4. Les racines de ces équations se correspondent deux à deux de telle façon que :

1° pour l'équation bicarrée, la somme de deux racines correspondantes soit 0;

2° pour les équations réciproques, le produit de deux racines correspondantes soit $+1$ ou -1, suivant l'espèce de l'équation.

On peut donc chercher à décomposer le premier membre de l'équation donnée en un produit de facteurs du second degré, tels que les racines de chacun d'eux forment un couple de racines correspondantes; ce qui particularise le mode de décomposition.

(*) A ceux de nos lecteurs qui voudraient approfondir la théorie des équations algébriques, nous ne saurions trop recommander l'étude des *Leçons sur la résolution algébrique des équations* de M. Vogt (Lib. Nony.)

Par exemple, si on considère l'équation réciproque de première espèce, on peut chercher à déterminer p et p' de façon que l'on ait, quel que soit x,

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = (x^2 + px + 1)(x^2 + p'x + 1).$$

L'identification donne facilement

$$p + p' = a,$$
$$pp' = b - 2;$$

on a alors p et p' comme racines d'une équation du second degré. Soit p une des racines de cette équation ; le couple de valeurs correspondantes de x est donné par

$$x^2 + px + 1 = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$p = -\left(x + \frac{1}{x}\right),$$

de sorte que p et p' ne sont autre chose que les valeurs de la fonction $-y$ mise en évidence par la première méthode.

5. Ce qui précède n'est pas spécial aux types d'équations dont j'ai parlé. Il est clair, par exemple, que la dernière marche suivie s'applique immédiatement au cas où on aurait à considérer une équation dont les racines auraient deux à deux même produit sans que ce produit fût ± 1 ; ou au cas où les racines auraient deux à deux même somme sans que cette somme fût 0.

Je ferai remarquer d'ailleurs, en passant, que ces équations se ramèneraient facilement à des équations rentrant dans l'un des types particuliers que j'ai considérés tout d'abord. Mais il peut y avoir avantage à les traiter directement sans les ramener à ces types.

Il serait facile aussi de résoudre, en s'inspirant de ce que je viens de dire, des équations du quatrième degré dont les racines seraient liées deux à deux par une relation involutive

$$\alpha x'x'' + \beta(x' + x'') + \gamma = 0.$$

Ce cas comprend, comme cas particuliers, tous ceux dont j'ai parlé.

ARITHMÉTIQUE

4844. — *Démontrer que* $a^7 - a$ *est toujours divisible par* 42.

Nous allons montrer que l'expression proposée, qui peut s'écrire

$$a(a^6 - 1),$$

est divisible par chacun des nombres premiers 2, 3, 7 et par suite par leur produit 42.

La divisibilité étant évidente lorsque a contient l'un des facteurs 2, 3, 7, on peut supposer a premier avec chacun des facteurs 2, 3 et 7.

Divisibilité par 2. — a étant impair, $a^6 - 1$ est pair.

Divisibilité par 3. — Tout nombre a non divisible par 3 est de l'une des formes $m.3 \pm 1$. Par suite

$$a^6 - 1 = (m.3 \pm 1)^6 - 1 = m.3 + 1 - 1 = m.3.$$

Divisibilité par 7. — Tout nombre a non divisible par 7 est de l'une des formes

$$m.7 \pm 1, \qquad m.7 \pm 2, \qquad m.7 \pm 3.$$

Dès lors,

$$a^6 - 1 = (m.7 \pm 1)^6 - 1 = m.7 + 1 - 1 = m.7,$$
$$a^6 - 1 = (m.7 \pm 2)^6 - 1 = m.7 + 64 - 1 = m.7,$$
$$a^6 - 1 = (m.7 \pm 3)^6 - 1 = m.7 + 729 - 1 = m.7.$$

Remarque. — La divisibilité de $a^6 - 1$ par 7 lorsque a est premier avec 7 est un cas particulier du théorème de Fermat.

(A. VANNIER, à Chaource.)

[Ont résolu la même question : Mlle E. Lazare, institutrice à Piatra (Roumanie) ; MM. Anzemberger, lycée de Lyon ; P. Bancillon, école normale de Montbrison ; H. Belbenoit ; G. Boissonnet ; A. Caillet, instituteur à Gordes ; F. Clabault ; G. Foucry, école normale de Châlons ; J. Gauthier, instituteur à Ecoche ; G. Guinand ; J. Haag, collège de Pont-à-Mousson ; R. Henry, instituteur à Troyes ; H. Janois, instituteur à Saint-Calais ; D. König, à Budapest ; J. Lamotte ; A. Lecoutour ; J. Lehmann ; E. Licope, à Mons ; D. Lwow, à Piatra ; R. Manen, petit séminaire de Massals ; J. Ménéchal ; A. Meynier ; L. Minjoz, école normale d'Albertville ; R. Mouzon, collège de Fontenay ; Noël ; L. Patin ; H. Pitrat ; E. Roncaglia, à Modène ; M. Royer, instituteur à Saint-Vincent ; Sinoquet ; C. Tourneux ; P. Valentin ; H. Varennes ; N. Vaslin ; P. Zlatco, lycée de Bucarest ; G. de France ; L. Guilhem ; Hugonnier-Ginet ; F. Pégorier.]

4871. — *Quelle est la plus haute puissance de* 13 *contenue dans le produit des* 10000 *premiers nombres entiers ?*

La plus haute puissance cherchée est évidemment contenue dans le produit de tous les multiples de 13 non supérieurs à 10000. Ces multiples sont

$$13 \times 1, \qquad 13 \times 2, \qquad 13 \times 3, \qquad \ldots,$$

et leur nombre est au plus égal au quotient entier de 10000 par 13, soit 769 ; le produit de tous ces multiples peut donc s'écrire

$$13^{769} \times 1 \times 2 \times \ldots \times 769.$$

On est alors ramené à chercher le produit de tous les multiples de 13 compris entre 1 et 769. En opérant comme plus haut, on voit que ce produit est représenté par

$$13^{59} \times 1 \times 2 \times \ldots \times 59.$$

De même, le produit des multiples de 13 compris entre 1 et 59 est

$$13^4 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4.$$

Comme de 1 à 4, il n'existe aucun multiple de 13, on en conclut que la plus haute puissance cherchée est

$$769 + 59 + 4 = 832.$$

(C. GOUGNEAUD et H. VARENNES, à Deux-Chaises.)

Généralisation. — Proposons-nous de trouver la plus haute puissance d'un nombre premier p contenue dans le produit des n premiers nombres entiers.

D'après le raisonnement précédent, cette plus haute puissance est égale à la somme des nombres de multiples de p, p^2, p^3, ... compris entre 1 et n. Or ces divers nombres de multiples sont les quotients entiers q_1, q_2, ... de n par p, p^2, ..., de sorte que le nombre cherché est

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n,$$

q_n correspondant au quotient de n par la plus haute puissance de p contenue dans n. Chacun des nombres q_2, q_3, ... est le quotient entier du précédent par p.

(H. PITRAT, à Givors.)

[Ont résolu la même question : Mlles A. Madonne, à Bordeaux ; G. Oddos, à Bordeaux ; MM. Benoit, à Avignon ; Durand, instituteur à Salernes ; E. Hiernaux, école normale de Châlons ; D. Kœnig, à Budapest ; J. Lehmann, instituteur à Boufarik.]

ALGÈBRE

4835. — *On donne un triangle* ABC, *rectangle en* A, *isocèle et homogène, et l'on demande de couper ce triangle par une parallèle* MN *au côté* AB *de manière que le centre de gravité* G

du trapèze AMNB ainsi formé soit à une distance donnée d du côté AB. Discussion. On pourra prendre pour inconnue la longueur AM.

(*Bacc. lettres-math., Lille, novembre 1899.*)

On sait que dans un trapèze, le rapport des distances du centre de gravité G aux bases MN et AB est égal à

$$\frac{2AB + MN}{AB + 2MN}.$$

En posant $AB = a$ et $AM = x$, on a donc l'équation

$$\frac{x - d}{d} = \frac{2a + MN}{a + 2MN},$$

ou, en observant que $MN = MC = a - x$,

$$\frac{x - d}{d} = \frac{3a - x}{3a - 2x}, \qquad (1)$$

et après avoir ordonné,

$$f(x) = 2x^2 - 3(a + d)x + 6ad = 0.$$

Discussion. — Pour qu'une valeur de x convienne, il faut et il suffit qu'elle soit réelle, positive et au plus égale à a. Une telle valeur rendant d'ailleurs positif le second membre de (1), on aura $x > d$.

La condition de réalité est

$$9(a + d)^2 - 48ad \geqslant 0,$$

ou

$$3d^2 - 10ad + 3a^2 \geqslant 0.$$

Le premier membre de cette inégalité s'annule pour $d = \frac{a}{3}$ et $d = 3a$; comme $d < a$, l'inégalité est donc vérifiée pour

$$d \leqslant \frac{a}{3}.$$

On a d'ailleurs

$$f(a) = a(3d - a),$$

résultat négatif d'après ce qui précède.

Donc a sépare les deux valeurs de x, et la plus petite, qui est positive, convient au problème.

Cas limite. — Lorsque $d = \frac{a}{3}$, on a

$$x = \frac{3}{4}\left(a + \frac{a}{3}\right) = a,$$

résultat qu'on pouvait prévoir, puisque dans ce cas le centre de gravité du trapèze coïncide avec celui du triangle.

Et dans le cas général, il était clair que G devait être plus voisin de AB que le centre de gravité du triangle; on pouvait donc prévoir la condition

$$d \leqslant \frac{a}{3}.$$

(NOEL et Raoul MOUZON.)

[Ont résolu la même question : MM. H. Belbenoit, instituteur à Auxon; R. Cattin, à Mont-de-Marsan; A. Foy, à Orches; A. Delaire; L. Demogne; R. Henry, instituteur à Troyes; A. Lecoutour; D. Lwow, à Piatra (Roumanie); A. Vannier, à Chaource; Hugonnier-Ginet.]

4845. — *Trouver les plus petits nombres entiers x et y tels que*

$$\frac{x^2 - y}{x^2 + y} = \left(\frac{7}{17}\right)^2.$$

La fraction du second membre étant irréductible, on doit avoir

$$x^2 - y = 7^2.k, \qquad x^2 + y = \overline{17}^2.k,$$

d'où, en ajoutant et retranchant,

$$x^2 = \frac{k}{2}(49 + 289) = 169k,$$

$$y = \frac{k}{2}(289 - 49) = 120k.$$

Comme $169 = \overline{13}^2$, les plus petites valeurs de x^2 et y s'obtiennent en faisant $k = 1$, ce qui donne

$$x = 13 \qquad \text{et} \qquad y = 120.$$

(SINOQUET.)

[Ont résolu la même question : MM. P. Bancillon, école normale de Montbrison; H. Belbenoit; R. Bellencourt; G. Boissonnet; Bouzy; Caillet, instituteur à Gordes; F. Clabault; G. Foucry, école normale de Châlons; G. Guinand; R. Henry, instituteur à Troyes; H. Janois, instituteur à Saint-Calais; D. König; A. Lecoutour; A. Legros; A. Lehmann; D. Lwow, à Piatra; R. Manen, petit séminaire de Massals; J. Ménéchal, instituteur au Bugue; A. Meynier; L. Minjoz, école normale d'Albertville; R. Mouzon, collège de Fontenay; Noël; H. Pitrat; M. Royer; F. Sol; C. Tourneux; P. Valentin; A. Vannier; H. Varennes; P. Zlatco, à Bucarest; G. de France; L. Guilhem; E. Hugonnier-Ginet; F. Pégorier.]

4873. — *Trouver quatre nombres entiers dont la somme est égale à 100, sachant en outre que les trois premiers sont en progression géométrique et que le quatrième est égal au produit des deux premiers ainsi qu'à la somme du deuxième et du troisième.*

Soient x, y, z, t les quatre nombres entiers demandés. On doit avoir

$$x + y + z + t = 100, \qquad (1)$$

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z}, \qquad (2)$$

$$t = xy = y + z. \qquad (3)$$

En remplaçant dans (1), z et t par leurs valeurs tirées de (3), il vient

$$x + y + xy - y + xy = 100,$$

ou

$$x(1 + 2y) = 100.$$

D'après cette dernière égalité, tout revient à décomposer 100 en un produit de deux nombres entiers dont l'un, $1 + 2y$, est impair et supérieur à 1, ce qui n'est possible qu'en prenant soit $1 + 2y = 5$, soit $1 + 2y = 25$.

Dans le premier cas, on a

$$y = 2, \qquad x = \frac{100}{5} = 20, \qquad t = 40, \qquad z = 40 - 2 = 38,$$

et, dans le second cas,

$$y = 12, \qquad x = \frac{100}{25} = 4, \qquad t = 48, \qquad z = 48 - 12 = 36.$$

La seconde solution vérifiant seule la condition (2), est seule acceptable.

(C. GOUGNEAUD et H. VARENNES, à Deux-Chaises.)

[Ont résolu la question : Mlle A. Madonne; MM. E. Anzemberger, lycée de Lyon; H. Cazaux, lycée de Tarbes; F. Deville, pensionnat Valbenoite, Saint-Etienne; H. Dobryzniak; Durand, instituteur à Salernes; G. Estadieu; L. Geoffroy; V. Herzenberg, lycée de Jassy; E. Hiernaux, école normale de Châlons; Hugonnier-Ginet; D. Kœnig, à Budapest; A. Legros; J. Ménechal; A. Meynier; P. Saintin, lycée de Versailles; J. Tastet, lycée de Pau; P. Valentin; P. Zlatco, à Bucarest; Beaudouin; J. Lehmann; Noël; L. Périno; M. Petit; A. Pichon.]

4877. — *Résoudre l'équation*

$$3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 363.$$

En posant $3^{x-4} = y$, l'équation s'écrit

$$3^4y + 3^3y + 3^2y + 3y + y = 363,$$

d'où l'on tire

$$y = \frac{363}{3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1} = \frac{363}{121} = 3.$$

On est ainsi ramené à l'équation

$$3^{x-4} = 3,$$

visiblement vérifiée pour $x - 4 = 1$ ou $x = 5$.

(Henri PITRAT, à Givors.)

Remarque. — On peut constater aussi que le premier membre s'écrit

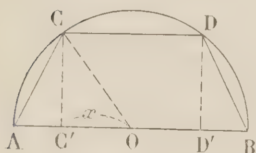
$$3^x\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}\right)=3^x\,\frac{1-\frac{1}{3^5}}{1-\frac{1}{3}}=3^x\,\frac{3^5-1}{3^4(3-1)}=\frac{121}{81}\times 3^x,$$

d'où
$$3^x=\frac{81}{121}\times 363=3^5.$$

[Ont résolu la même question : MM. G. Amouroux ; E. Anzemberger ; J. Bailly ; P. Bancillon ; L. Barberot ; E. Baudouin ; M. Bégué ; H. Belbenoit ; A. Bottin ; Cazaux ; Daure ; Durand ; G. Estadieu ; L. Geoffroy ; V. Herzenberg ; E. Hiernaux ; L. Hostier ; E. Hugonnier-Ginet ; A. Jouart ; D. Kœnig ; D. Laurent ; M. Laurence ; A. Legros ; J. Lehmann ; J. Ménéchal ; Noël ; L. Ollié ; L. Périno ; M. Petit ; A. Pichon ; M. Popescu ; V. Thébault ; P. Thonel ; P. Valentin ; Ch. Vallot ; H. Varennes ; P. Zlatco.]

4879. — *On donne un demi-cercle de diamètre* AB ; *mener une corde* CD *parallèle à* AB *de façon que si on fait tourner la figure autour de* AB, *le trapèze* ACDB *engendre un volume équivalent à celui de la demi-sphère de diamètre* AB.

Soient C′ et D′ les projections de C et D sur AB. En tournant autour de AB, le trapèze ACDB engendre un volume composé du cylindre engendré par le rectangle CDD′C′ et des deux cônes égaux engendrés par chacun des triangles ACC′, BDD′.

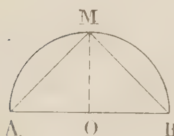


En posant
$$OA = R \quad \text{et} \quad OC' = OD' = x,$$
le cylindre et l'un des cônes ont pour rayon de base commun $CC'=\sqrt{R^2-x^2}$ et pour hauteurs respectives $C'D'=2x$ et $AC'=R-x$. L'équation du problème est donc

$$\pi(R^2-x^2)2x+\frac{2}{3}\pi(R^2-x^2)(R-x)=\frac{2}{3}\pi R^3,$$

ou
$$(R^2-x^2)(R+2x)=R^3,$$
ou enfin
$$x(2x^2+Rx-2R^2)=0.$$

La solution $x=0$ correspond au cas où la corde CD est tangente en M au cercle AB ; le triangle MAB engendre alors un volume égal à la demi-sphère, comme on s'en assure facilement.



L'équation restante
$$2x^2+Rx-2R^2=0,$$
ayant ses deux termes extrêmes de signes contraires, admet deux racines réelles et de signes contraires. Pour que la racine positive, seule acceptable ici, convienne, il faut qu'elle soit inférieure à R. Or, en substituant R à x dans le premier membre de l'équation, on obtient
$$2R^2+R^2-2R^2=R^2 ;$$
ce résultat, positif ou de même signe que le coefficient du terme en x^2, montre que R est extérieur aux racines, du côté de la racine positive. Cette racine,
$$x=\frac{R}{4}(-1+\sqrt{17}),$$
fournit ainsi une seconde solution du problème.

(P. SAINTIN, lycée de Versailles.)

[Ont résolu la même question : Mlle G. Oddos, à Bordeaux ; MM. Anzemberger ; P. Bancillon ; V. Barol ; L. Bordron ; A. Bottin ; R. Cattin ; Cazaux ; L. Colombey ; Dobryzniak ; A. Duittoz ; Durand ; H. Guillaud ; E. Hiernaux ; E. Hugonnier-Ginet ; D. Kœnig ; A. Legros ; A. Meynier ; J. Motte ; Noël ; L. Ollié ; L. Périno ; M. Petit ; F. Rottier ; G. Salaun ; J. Tastet ; Ch. Vallot ; H. Varennes ; P. Zlatco.]

4881. — *Calculer le rayon du cercle inscrit dans un triangle de périmètre* $2p$, *sachant que la différence entre la surface du triangle et celle du cercle inscrit est maxima.*

En désignant par x le rayon du cercle inscrit, la différence considérée s'exprime par
$$px-\pi x^2,$$
ou, en mettant le facteur πx en évidence,
$$\pi x\left(\frac{p}{\pi}-x\right).$$

Sous cette dernière forme, on voit que la différence dépend du produit de deux facteurs variables, x et $\frac{p}{\pi}-x$, dont la somme $\frac{p}{\pi}$ est constante ; ce produit est, comme on sait, maxima lorsque les deux facteurs sont égaux à leur demi-somme, ce qui donne
$$2\pi x=p, \qquad \text{ou} \qquad x=\frac{p}{2\pi}.$$

Avant d'accepter cette valeur, il convient de s'assurer qu'elle est inférieure au maximum du rayon du cercle inscrit dans un triangle de périmètre $2p$. Ce dernier rayon, égal à celui du cercle inscrit dans un triangle équilatéral de côté $\frac{2p}{3}$, a pour valeur
$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2p}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{p}{3\sqrt{3}}.$$

Or on a
$$2\pi > 3\sqrt{3}, \qquad \text{car} \qquad \pi>3 \qquad \text{et} \qquad 2>\sqrt{3} ;$$
donc la valeur trouvée est acceptable.

(VICTOR BAROL, timonier breveté, instructeur sur la *Couronne*.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Anzemberger ; P. Bancillon ; H. Cazaux ; L. Colombey ; Daure ; Durand ; L. Geoffroy ; E. Hugonnier-Ginet ; D. Kœnig ; D. Laurent ; A. Legros ; E. Licope ; L. Ollié ; H. de la Perrelle ; M. Petit ; A. Pichon ; E. Sautreau ; D. Tuïssuzian ; F. Valentin ; P. Vallée ; H. Varennes.]

GÉOMÉTRIE

4476. — *On donne deux circonférences* O *et* O′ *se coupant en* A *et* B. *On mène par* A *une sécante variable* DAE, *rencontrant ces circonférences en* D *et* E. *On trace* BE *coupant l'autre cercle en un second point* C.

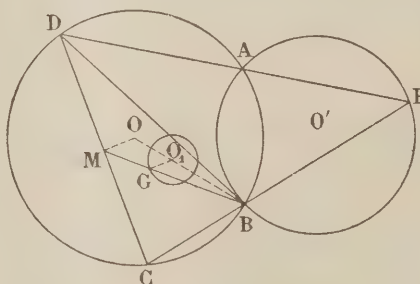
Trouver :

1° *le lieu géométrique du centre de gravité du triangle* BDC ;

2° *le lieu géométrique du centre de gravité du triangle* BDE ;

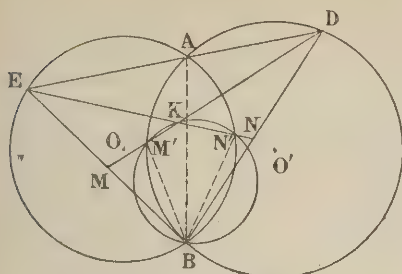
3° *le lieu géométrique du centre du cercle circonscrit au triangle* EDC, *lorsqu'on fait tourner la sécante* DAE *autour du point* A.

1° Le centre de gravité du triangle BDC se trouve aux $\frac{2}{3}$ de la médiane BM à partir de B. Or l'angle inscrit CBD étant la somme des angles constants ADB et AEB est constant ; la corde CD interceptée par cet angle est donc aussi constante et son milieu M décrit un cercle concentrique au cercle O. Par suite, le lieu de G est un cercle homothétique O_1, B étant le centre et $\frac{2}{3}$ le rapport d'homothétie.

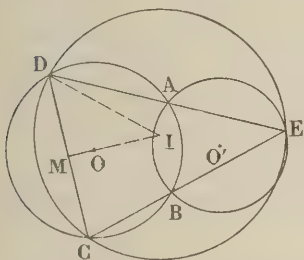


2° Les angles D et F étant constants, le triangle BDE reste

semblable à lui-même. Les médianes DM et EN font alors des angles constants avec le côté DE ; ces angles étant inscrits, l'un dans le cercle O' et l'autre dans le cercle O, interceptent sur ces cercles les arcs constants AM', AN', de sorte que AM et AN passent par les points fixes M' et N'. Je dis que le lieu du point de rencontre K des médianes AM et AN est le cercle BM'N'. En effet, le quadrilatère BM'KN' est inscriptible comme ayant les angles opposés M' et N' respectivement égaux aux angles supplémentaires BAD et BAE.



3° Le cercle circonscrit au triangle CDE s'obtient en décrivant sur la corde constante CD un segment capable de l'angle constant AEB.



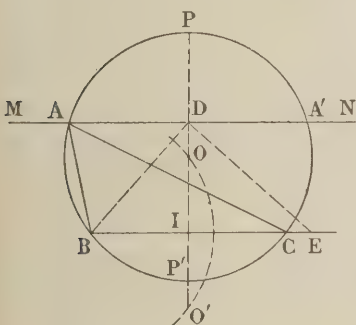
Il en résulte que le rayon ID de ce cercle est invariable. Par suite, le triangle rectangle DIM ayant deux côtés DI et DM constants, le troisième MI l'est aussi ; d'ailleurs la constance de MI et MO entraîne celle de OI, et le point I décrit un cercle concentrique au cercle O.

(G. SCHOONHEERE, école professionnelle de Vierzon.)

[Ont résolu la même question : MM. Aycat ; H. Carpentier ; J.-M. Chalvin ; C. H. G. B. ; F. Clabault, instituteur à Rosières ; Debrun ; Decoudun, école J.-B. Say ; P. Delolme, instituteur au Puy ; L. Ecoffard, école primaire supérieure de Dôle ; E. Garry, école J.-B. Say ; G. H. D. O. ; G. Marquet ; H. Michel, lycée de Douai ; M. Oger, école normale de Poitiers ; M. Rivière ; P. Tribier ; E. Vaunac ; Vial.]

4850. — *Construire un triangle connaissant un côté, la hauteur correspondante et sachant en outre que le produit des trois côtés est égal à quatre fois le cube de la hauteur donnée.*

Soit $BC = a$ le côté donné. Un premier lieu du sommet A est la parallèle MN à BC menée à une distance égale à la hauteur donnée h.



D'autre part, en désignant par b et c les deux côtés inconnus du triangle, on a par hypothèse

$$abc = 4h^3 ;$$

or on sait que $bc = 2Rh$, R étant le rayon du cercle circonscrit.

Par suite

$$2aRh = 4h^3,$$

d'où
$$R = \frac{2h^2}{a}.$$

Connaissant R (sur la figure R est représenté géométriquement par le segment IE du triangle rectangle BDE tel que $BI = \frac{a}{2}$ et $DI = h$), on peut faire passer par les points B, C un cercle de rayon R et de centre O ou O' ; on obtient ainsi un second lieu de A.

Nous allons montrer que lorsque les cercles O et O' existent, l'un d'eux rencontre toujours la droite MN et l'autre ne la coupe pas.

En effet, pour que les cercles O et O' existent, il faut et il suffit qu'on ait

$$R \geqslant \frac{a}{2},$$

ou
$$\frac{2h^2}{a} \geqslant \frac{a}{2},$$

c'est-à-dire
$$h \geqslant \frac{a}{2}. \qquad (1)$$

Pour que la droite MN rencontre l'un des cercles O ou O', il faut et il suffit que h soit respectivement inférieur à l'un des segments IP ou IP' du diamètre perpendiculaire à BC. Or comme

$$IP + IP' = 2R = \frac{4h^2}{a} \qquad \text{et} \qquad IP . IP' = \overline{IB}^2 = \frac{a^2}{4},$$

IP et IP' sont les racines de l'équation

$$f(u) = u^2 - \frac{4h^2}{a}\cdot u + \frac{a^2}{4} = 0$$

En formant $f(h)$, on trouve

$$f(h) = h^2 - \frac{4h^3}{a} + \frac{a^2}{4}$$
$$= \frac{a^3 + 4ah^2 - 16h^3}{4a}$$
$$= \frac{(a-2h)(a^2+2ah+8h^2)}{4a}.$$

Le trinome $a^2 + 2ah + 8h^2$ ne s'annulant pour aucune valeur réelle de h est positif, et $f(h)$ prend le signe de $a - 2h$, c'est-à-dire est négatif, d'après (1).

h est donc compris entre IP et IP' et le cercle O seul détermine deux triangles ABC, A'BC, symétriques par rapport à PP'.

Ainsi, lorsque $h \geqslant \frac{a}{2}$, le problème comporte toujours une solution distincte et une seule dans laquelle l'angle A est aigu.

(H. VARENNES, à Deux-Chaises.)

Remarque. — On peut éviter la décomposition d'un polynome du 3e degré en facteurs si on observe :

1° que, comme $IP . IP' = \frac{a^2}{4}$, on a $IP > \frac{a}{2} > IP'$, ce qui montre que $h > IP'$;

2° que $IP = R + OI = \frac{2h^2}{a} + OI$.

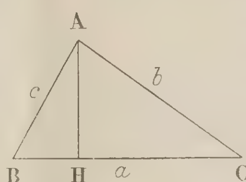
Or $\frac{2h^2}{a} = h\frac{2h}{a} > h;$ donc $IP > h$.

On voit ainsi que $IP > h > IP'$.

[Ont résolu la même question : Mlle M. D. P. ; MM. Anzemberger ; R. Bazin ; Bouzy ; F. Clabault ; G. Foucry ; G. Guinand ; J. Haag ; de Jarny ; D. König ; A. Lecoutour ; E. Licope ; F. Limouzi ; D. Lwow ; R. Manen ; L. Minjoz ; R. Mouzon ; Noël ; H. Pitrat ; M. Royer ; Sinoquet ; F. Sol ; H. Tellier ; P. Valentin ; G. de France ; L. Guilhem ; E. Hugonnier-Ginet.]

4883. — *Construire un triangle connaissant deux côtés et le produit du troisième côté par la projection sur ce dernier de l'un des deux autres côtés.*

Supposons que dans le triangle ABC on connaisse les côtés $AC = b$, $AB = c$ et le produit $BH.BC = m^2$. Si l'on peut obtenir facilement le troisième côté $BC = a$, le triangle sera déterminé par ses trois côtés.



Or, un théorème connu donne, en supposant l'angle B aigu,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a.BH,$$

d'où
$$a^2 = b^2 - c^2 + 2m^2,$$

expression facile à construire au moyen de triangles rectangles.

Pour que le triangle de côtés a, b, c existe, on doit avoir

$$(b-c)^2 < a^2 < (b+c)^2,$$

ou, en remplaçant a^2 par sa valeur et résolvant par rapport à m^2,

$$c(c-b) < m^2 < c(b+c).$$

Nous avons supposé l'angle B aigu, ce qui a toujours lieu si $c > b$.

Si $b > c$, l'angle B pourrait être obtus, on aurait

$$a^2 = b^2 - c^2 - 2m^2,$$

et la condition de possibilité deviendrait alors

$$m^2 < c(b-c).$$

En résumé, le problème n'admet deux solutions que si l'on a

$$b > c \qquad \text{et} \qquad m^2 < c(b-c);$$

il en admet une seule si

$$b \leqslant c, \qquad c(c-b) < m^2 < c(b+c).$$

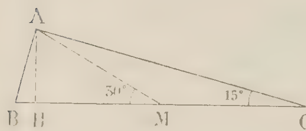
(NOEL.)

[Ont résolu la même question : Mlle A. Saleilles; MM. V. Barol; A. Belbenoit, à Arras; Burgat, école normale d'Albertville; E. Hiernaux, école normale de Châlons; M. Laurence; D. Laurent, lycée de Saint-Étienne; A. Legros, J. Lehmann, instituteur à Boufarik; Naboulet, à Beaucaire; L. Ollié, à Auch; L. Périno, à Valence; F. Sol, à Saint-Antonin; J. Tastet; H. Varennes, à Deux-Chaises.]

4885. — *Démontrer par la géométrie que dans un triangle rectangle dont les angles aigus sont 15° et 75°, le produit des côtés de l'angle droit est équivalent au carré de la moitié de l'hypoténuse.*

Soit ABC un triangle rectangle tel que le plus petit angle, C, est de 15°, l'angle B étant alors

$$90° - 15° = 75°.$$



Menons la hauteur AH et la médiane AM. En égalant deux expressions de l'aire du triangle, on a

$$AB.AC = AH.BC.$$

Mais M étant le centre du cercle circonscrit au triangle, l'angle au centre AMB est le double de l'angle inscrit ACB et vaut $2 \times 15° = 30°$; dans le triangle rectangle AHM, AH est ainsi opposé à un angle de 30° et l'on a $AH = \frac{AM}{2} = \frac{BC}{4}$. Par suite

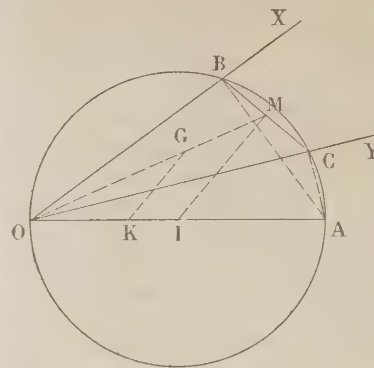
$$AB.AC = \frac{BC}{4}.BC = \left(\frac{BC}{2}\right)^2.$$

(VICTOR BAROL, timonier breveté, instructeur sur la *Couronne*.)

[Ont résolu la même question : Mlles A. Madonne; G. Oddos; A. Saleilles; MM. G. Amouroux; E. Anzemberger; P. Bancillon; E. Bandouin; M. Bégué; H. Belbenoit; P. Bily; L. Bordron; A. Bottin; A. Champeix; R. Chassériaud; L. Colombey; Daure; Durand; L. Geoffroy; E. Hiernaux; L. Hostier; E. Hugonnier-Ginet; A. Jouart; D. Kœnig; D. Laurent; A. Legros; J. Lehmann; J. Ménéchal; J. Motte; Naboulet; Noël; L. Ollié; L. Périno; H. de la Perrelle; M. Petitjean; A. Pichon; H. Pitrat; M. Popescu; H. Richier; P. Saintin; G. Salaun; E. Sautreau; F. Sol; J. Tastet; V. Thébault; D. Tuïssuzian; P. Valentin; F. Vallée; H. Varennes; P. Zlatco.]

4887. — *Étant donnés deux points fixes* A *et* O, *on fait tourner autour de* O *un angle constant* XOY *et on projette le point* A *sur* OX *et* OY *en* B *et* C. *Lieu du milieu de* BC. *Lieux des points de concours des médianes et des hauteurs du triangle* OBC.

Lieux du milieu M *de* BC *et du point de concours des médianes du triangle* OBC. — 1° Les angles OBA, OCA étant droits sont inscrits dans un cercle fixe I de diamètre OA. Par suite la corde BC, interceptée par l'angle inscrit XOY, de grandeur constante, a une longueur constante, et le lieu de son milieu M est un cercle ayant pour centre le milieu I de OA.



2° Par le point de concours G des médianes du triangle OBC, menons la parallèle GK à MI. On a

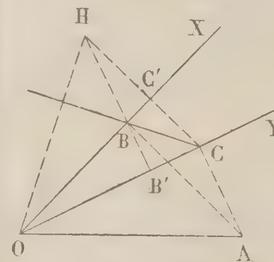
$$\frac{OK}{OI} = \frac{KG}{IM} = \frac{OG}{OM} = \frac{2}{3},$$

d'où $\qquad OK = \frac{2}{3}OI, \qquad KG = \frac{2}{3}IM,$

ce qui montre que le lieu de G est un cercle de centre K et de rayon KG (ce cercle est d'ailleurs homothétique au cercle I par rapport au point O, le rapport d'homothétie étant $\frac{2}{3}$).

La droite OM pouvant prendre toutes les positions possibles autour de O, les cercles I et K sont entièrement décrits par les points M et G.

3° *Lieu du point de concours des hauteurs du triangle* OBC. — Soit H ce point déterminé par les deux hauteurs BB′ et CC′.



Les triangles HOC′, BCC′ ayant les côtés perpendiculaires sont semblables; donc

$$\frac{OH}{BC} = \frac{OC'}{CC'} = \text{cotg } XOY = \text{const.}$$

Comme BC est constant, la constance du rapport $\frac{OH}{BC}$ entraîne celle de OH, et le point H décrit un cercle de centre O. Ce cercle appartient d'ailleurs entièrement au lieu, puisque la droite OH peut prendre toutes les directions possibles autour de O.

Remarque. — On aurait pu aussi déduire le lieu de H de celui de G. On sait en effet que la droite HG passe par le centre fixe I du cercle circonscrit au triangle OBC, et que l'on a $HG = 2GI$; il en résulte que le lieu du point H est un cercle homothétique du cercle décrit par G, I étant le centre et 3 le rapport d'homothétie.

[Ont résolu la même question : MM. E. Anzemberger; V. Barol; H. Belbenoit, à Arras; A. Champeix; Durand; R. Guillemin; E. Hiernaux; E. Hugonnier-Ginet; A. Jouart; D. Kœnig; A. Legros; J. Lehmann; J. Ménéchal; Naboulet; L. Ollié; Périno; M. Petitjean; H. Pitrat; G. Salaun; E. Sautreau; P. Valentin.]

PHYSIQUE ET CHIMIE

CONCOURS GÉNÉRAL DE PREMIÈRE SCIENCES (1900)

Solution par M. **Gaston Dulché**, élève du collège Chaptal, lauréat du concours (1er prix).

4831. — *On partage en deux parties égales 6 volumes d'un mélange de deux hydrocarbures gazeux. La première partie est traitée par le brome qui absorbe 1 volume. Après élimination du*

brome en excès, on ajoute au gaz restant 5 volumes d'oxygène, puis on fait passer l'étincelle. Le volume total se trouve alors ramené à 3 volumes dont 2 sont absorbables par la potasse et le dernier volume par le phosphore. La deuxième partie additionnée de 8 volumes d'oxygène donne 5 volumes après le passage de l'étincelle. La potasse absorbe 4 volumes et abandonne un résidu complètement absorbable par le phosphore.

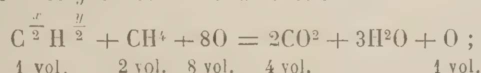
On demande d'établir les formules moléculaires des deux composants du mélange.

On peut supposer le mélange homogène ; on aura donc dans chaque partie 3 volumes du mélange.

1re partie. — L'un des deux gaz est absorbé par le brome en excès ; il reste donc 2 volumes du second hydrocarbure. La formule trouvée pour ce dernier sera sa formule moléculaire puisqu'il occupe 2 volumes dans les conditions ordinaires.

Après le passage de l'étincelle dans le mélange de 5 volumes d'oxygène et de 2 volumes d'hydrocarbure, on a 2 volumes absorbables par la potasse qui sont du gaz carbonique, représenté par la formule CO^2. Il y a donc un atome de carbone dans la formule cherchée ; O^2 représente 2 volumes d'oxygène employés à donner CO^2 ; 1 volume a été absorbé par le phosphore et 2 volumes d'oxygène ont servi à former $2H^2O$. Il y a donc 4H dans la formule cherchée et l'hydrocarbure a pour formule moléculaire CH^4 ; c'est le *méthane*.

2e partie. — Soit C^xH^y l'hydrocarbure inconnu On aura les valeurs de x et y en écrivant la réaction



$$\underset{1\text{ vol.}}{C^{\frac{x}{2}}H^{\frac{y}{2}}} + \underset{2\text{ vol.}}{CH^4} + \underset{8\text{ vol.}}{8O} = \underset{4\text{ vol.}}{2CO^2} + 3H^2O + \underset{1\text{ vol.}}{O}\,;$$

d'où, en identifiant,

$$C^{\frac{x}{2}} + C = 2C,$$
$$C^{\frac{x}{2}} = C,$$
$$\frac{x}{2} = 1$$

et

$$x = 2.$$

De même

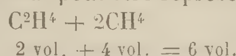
$$H^{\frac{y}{2}} + H^4 = H^6,$$
$$H^{\frac{y}{2}} = H^2,$$
$$\frac{y}{2} = 2,$$

et

$$y = 4.$$

La formule moléculaire du premier hydrocarbure est par conséquent C^2H^4. C'est de l'éthylène, qui a formé avec le brome du bromure d'éthylène analogue à la liqueur des Hollandais.

En résumé, le mélange total peut être représenté par



$$C^2H^4 + 2CH^4$$
$$2\text{ vol.} + 4\text{ vol.} = 6\text{ vol.}$$

[Ont résolu la même question : MM. R. Henry ; D. Lwow, à Piatra ; A. Meynier, à Sciez ; M. Royer ; H. Varennes, à Deux-Chaises.]

CONCOURS DE 1900 *(Suite)*.

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES

Section des Sciences mathématiques.

Arithmétique et Algèbre.

I. — Indiquer une méthode permettant de former tous les diviseurs entiers d'un nombre entier. — Nombre de ces diviseurs.

II. — **4891**. On considère la fraction

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + bx + a},$$

dans laquelle a, b, c sont des constantes et x une quantité variable.

Trouver la relation qui lie les coefficients a, b, c :

1° Quand cette fraction n'admet ni *maximum* ni *minimum* ;

2° Quand elle admet un *maximum* et un *minimum*.

3° On pose

$$a = X^2 + 2X, \qquad c = Y^2 + 2Y, \qquad b = 2X + 2Y + 4,$$

X, Y désignant les coordonnées d'un point M par rapport à deux axes de coordonnées rectangulaires OX, OY.

Indiquer les régions du plan XOY où se trouve le point M quand la fraction y n'a ni *maximum* ni *minimum* et celles où se trouve le même point quand cette fraction admet un *maximum* et un *minimum*.

4° Chercher la forme que prend la fraction y quand le point M est situé sur les lignes qui séparent les régions précédentes.

(Durée : 4 heures.)

« *Géométrie et Cosmographie.* »

4892. — On donne deux axes *rectangulaires*, ox, oy, deux points A, A' situés sur l'axe ox, et un point B situé sur l'axe oy :

1° Soit M un point quelconque de l'axe ox ; on demande de former les équations des circonférences de cercles circonscrites l'une au triangle ABM, l'autre au triangle A'BM.

2° Calculer les coordonnées des centres C, C' de ces circonférences, leurs rayons R, R' et la distance CC' de leurs centres.

3° Le point M se déplaçant sur l'axe ox, montrer que les centres C, C' décrivent chacun une droite ; que le rapport des rayons R, R' reste constant et que le triangle BCC' reste semblable au triangle BAA'.

Trouver pour quelle position du point M les rayons R, R' ont une valeur minimum.

4° Former l'équation de la droite joignant les centres C et C', et chercher le nombre des droites CC' qui passent par un point P donné dans le plan xoy.

Indiquer la position des droites CC' par rapport à la courbe qui sépare les régions du plan xoy où se trouve le point P suivant qu'il existe des droites CC' passant par ce point ou qu'il n'en existe pas.

On représentera par a, a' les abscisses des points A, A', par b l'ordonnée du point B et par m l'abscisse variable du point M.

Nota. — Le problème précédent peut être résolu par les méthodes de la géométrie élémentaire ; il sera tenu compte des solutions géométriques qui pourront être données.

(Durée : 4 heures.)

Section des Sciences physiques et naturelles.

Physique.

I. — La loupe et le microscope.

II. — **4893**. Une masse d'eau m, en surfusion à une température t inférieure à zéro, étant placée dans un vase de masse négligeable, on y laisse tomber, d'une certaine hauteur, une masse M de plomb à 0°. Une fois l'équilibre de température établi, on constate qu'il s'est formé une certaine masse m' de glace. — Expliquer ce qui s'est produit.

En supposant $M = 1000^{gr}$, $m = 100^{gr}$, $t = -20°$, on demande quelle devrait être la hauteur de chute x, pour que la masse de glace formée fût $m' = 20^{gr},915$.

Chaleur de fusion de la glace, $l = 80$; chaleur spécifique de la glace, $c = 0,5$; équivalent mécanique de la petite calorie, en joules, $E = 4,17$; intensité de la pesanteur, en unités C. G. S., dans le lieu de l'expérience, $g = 981$.

(Durée : 4 heures.)

Sciences naturelles.

I. — Squelette des membres chez les Mammifères ongulés et chez les Vertébrés ovipares. — Principaux types d'Ongulés fossiles.

II. — Appareil sécréteur des végétaux. — Principaux produits de sécrétion. — Exemples de localisation de l'appareil sécréteur.

(Durée : 4 heures.)

ÉCOLE NORMALE PRIMAIRE SUPÉRIEURE DE SAINT-CLOUD

Mathématiques.

I. — **4894**. n étant un nombre entier, trouver : 1° pour quelles valeurs de n la fraction $\frac{n+8}{2n-5}$ est un nombre entier ; 2° pour quelles valeurs de n cette fraction est irréductible ; 3° si la fraction n'est pas irréductible, quels peuvent être les facteurs communs aux deux termes de cette fraction.

II. — **4895**. Sur une demi-circonférence décrite sur AB comme diamètre, déterminer un point M tel que le double de l'aire du triangle AMB, augmenté de l'aire du carré construit sur AM, soit dans un rapport donné m avec l'aire du carré construit sur AB. Discuter.

III. — **4896**. Construire un triangle ABC, connaissant le côté $BC = a$, la somme m des longueurs des deux médianes issues des sommets B et C, et une hauteur h.

(*25 juin, de 8 h. à midi.*)

Physique, Chimie et Histoire naturelle.

I. — 1° Principe de Watt ou de la paroi froide. — Ses principales applications.

4897. — 2° Deux vases cylindriques verticaux A et B communiquent par un tube inférieur et contiennent de l'eau qui s'élève primitivement à la même hauteur dans chacun d'eux.

On introduit dans le cylindre A un piston qui le ferme exactement, mais peut glisser sans frottement appréciable. On constate alors qu'il s'établit entre les deux niveaux du liquide une différence h.

Puis on charge le piston d'un poids P : la différence des niveaux augmente de h'.

On demande quelle est la section du cylindre A, sachant que celle de B est de 3 centimètres carrés, et quel est le poids du piston.

Application numérique :

$$h = 12^{cm}; \qquad h' = 40^{cm}; \qquad P = 2^{kg},5.$$

II. — 1° Extraction industrielle du gaz ammoniac ; préparation de laboratoire du gaz et de sa solution aqueuse.

2° Action de cette solution sur les sels métalliques.

3° Différents modes d'action de l'ammoniaque en chimie organique.

III. — 1° L'appareil circulatoire chez l'Homme ; ses principales modifications chez les Vertébrés.

2° Les formes des feuilles ; les modifications qu'elles subissent avec la position des feuilles sur la tige et avec les fonctions de ces organes.

(*27 juin, de 8 h. à midi.*)

ÉCOLE NORMALE PRIMAIRE SUPÉRIEURE DE FONTENAY-AUX-ROSES

Mathématiques.

I. — Dans quel cas un nombre entier divisible par plusieurs autres est-il nécessairement divisible par leur produit ? Énoncer et démontrer le théorème correspondant.

II. — **4898**. Soient pq, $p'q'$ deux cordes variables d'un même cercle. On suppose que pq passe par un point fixe a, et que les droites pp', qq' sont parallèles à une même droite donnée. Lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point a sur $p'q'$.

III. — **4899**. Soient ad, be, cf les hauteurs d'un triangle abc. On prolonge ad d'une longueur égale da' ; be, d'une longueur égale eb', et cf, d'une longueur égale fc'. Prouver que les cercles circonscrits aux trois triangles bca', cab', abc' ont un point commun h.

(*25 juin, de 8 h. à midi.*)

Physique, Chimie et Histoire naturelle.

I. — De l'électroscope à feuilles d'or : principe, description, théorie, divers modes d'emploi — Comment, avec cet appareil, peut-on mettre en évidence les deux qualités de l'électricité : le potentiel et la quantité ?

II. — Acide chlorhydrique.

III. — Les reptiles ; principaux traits de leur organisation ; caractères comparés des divers ordres de reptiles ; notion sur les reptiles fossiles.

(*27 juin, de 8 h. à midi.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4900. — Si n est un nombre entier non multiple de 7, l'expression

$$(3^{2n}.4^{2n} + 5^2.2^{3n} - 2^{3n}.3^{2n} - 5^2.4^{2n})(n^6 - 1)$$

est divisible par 448.

(A. Modugno, institut technique de Bari.)

4901. — Résoudre l'équation $x^2 = (x-1)^2(x^2+1)$.

4902. — Soient α et β les racines, supposées distinctes, de l'équation

$$x^2 + px + q = 0.$$

On pose

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \qquad V_n = \alpha^n + \beta^n.$$

On demande d'exprimer :

1° U_n au moyen de U_{n-1}, U_{n-2}, p et q ;

2° V_n au moyen de V_{n-1}, V_{n-2}, p et q ;

3° U_{n+k} au moyen de U_n, U_k, V_n, V_k.

4903. — Sur les côtés AB, AC d'un triangle on prend deux points variables B′, C′ tels que

$$AB.AB' + AC.AC' = 2k^2,$$

k^2 étant une constante. Lieu du centre du cercle AB′C′.

Même question en remplaçant devant AC.AC′ le signe + par signe —.

(Bourrjenne.)

4904. — Si A,B,C,D sont quatre sommets consécutifs d'un polygone régulier, on a

$$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = AB.AD.$$

4905. — On considère un triangle ABC dont l'orthocentre est H. La hauteur AH rencontre le cercle circonscrit à ABC en un second point A′ ; la droite qui joint le point H au milieu de BC rencontre le cercle en A″ et A‴. Montrer que l'une des deux droites A′A″, A′A‴ est parallèle au côté BC.

(E.-N. Barisien.)

4906. — Dans une cuvette de grandes dimensions se trouve, sous une certaine profondeur, du mercure de poids spécifique 13,6. A la surface de ce mercure flotte un cylindre de fer de poids spécifique 7,8, de hauteur h, et dont l'axe est vertical. On verse, à la surface du mercure, une couche d'eau de $0^m,25$; le cylindre va-t-il se déplacer dans le sens vertical ? Calculer la valeur de son déplacement en supposant que la partie supérieure du cylindre reste entièrement dans l'eau. Quelle devrait être la hauteur minima du cylindre pour que sa base supérieure émergeât hors de l'eau ?

(*Concours général de 1900 entre les élèves des institutions libres du Nord et du Pas-de-Calais*).

Le Redacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet, Facdouel, Dir.

25e Année. — No 3. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 1er Novembre 1900.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Abonnements.. Librairie **Nony** et Cie, Bouldd St-Germain, 63, PARIS.

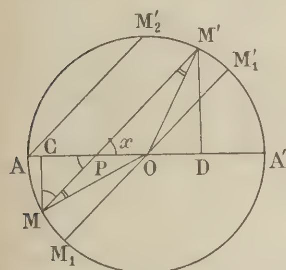
Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

CONCOURS GÉNÉRAL DE SECONDE MODERNE (1900)

Mathématiques (Paris et Départements).

Solutions par M. **Ch. Masson**, élève du collège Chaptal, lauréat du concours (1er prix).

4861. — *Étant donnés un cercle de rayon* R *et l'un de ses diamètres* AOA', *on trace une corde* MM' *qui rencontre en* P *ce diamètre ; trouver l'angle que doit faire cette corde avec* AA' *pour que la somme des carrés des segments* PM, PM' *soit indépendante de la position du point* P *sur le diamètre donné.*



Remarquons que lorsque la corde MM' passe par le centre, le point P se trouve en O et la somme des carrés des deux segments MP et M'P est alors égale à

$$\overline{M_1O}^2 + \overline{OM'_1}^2 = 2R^2.$$

Cette valeur est indépendante de l'angle x, de sorte que nous avons ainsi la valeur de la constante. Considérons la corde MM' dans une autre position particulière, à savoir quand le point P vient en A.

Le segment MP est alors nul. Or, on doit évidemment avoir

$$\overline{AM'_2}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PM'}^2 = 2R^2,$$

d'où

$$AM'_2 = R\sqrt{2}.$$

Nous voyons que la corde AM'_2 est le côté du carré inscrit dans le cercle de rayon R. Nous en déduisons pour la valeur de x, $x = \widehat{M'_2AO} = 45°$.

Il ne reste plus qu'à montrer que pour une corde quelconque MPM' faisant un angle de 45° avec le diamètre AA', on a la relation

$$\overline{MP}^2 + \overline{PM'}^2 = 2R^2.$$

Pour cela, abaissons des points M et M' les perpendiculaires MC, M'D sur le diamètre AA'. Joignons d'autre part M à O, M' à O.

Nous remarquons que les deux triangles rectangles MOC et M'OD sont égaux ; en effet

$$\widehat{M'OD} = 45° + \widehat{M'OM'_1} = 45° + \widehat{OM'M},$$

car $\widehat{M'OM'_1} = \widehat{OM'M}$ à cause du parallélisme de MM' et de $M_1M'_1$;

$$\widehat{CMO} = 45° + \widehat{OMM'}.$$

Or, $\widehat{OM'M} = \widehat{OMM'}$, car le triangle MOM' est isocèle ; donc on a bien $\widehat{CMO} = \widehat{DOM'}$.

Par suite les triangles rectangles MOC et M'OD, dans lesquels OM = OM' comme rayons et $\widehat{CMO} = \widehat{DOM'}$, sont égaux.

Dans le triangle rectangle isocèle PM'D on a $\overline{PM'}^2 = 2\overline{M'D}^2$; de même, $\overline{PM}^2 = 2\overline{CM}^2$. Donc $\overline{PM}^2 + \overline{PM'}^2 = 2(\overline{CM}^2 + \overline{M'D}^2)$.

Or, d'après l'égalité des triangles M'OD et CMO, on a M'D = CO.

Donc $$\overline{PM}^2 + \overline{PM'}^2 = 2(\overline{CM}^2 + \overline{CO}^2) = 2\overline{MO}^2 = 2R^2.$$

C.q.f.d.

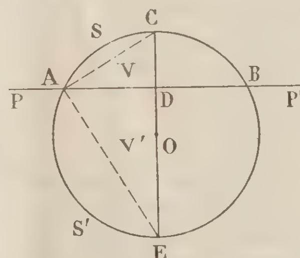
[On résolu la même question : MM. E. Anzemberger, lycée de Lyon ; V. Barol, timonier breveté, instructeur sur la *Couronne* ; L. Bordron ; A. Bottin, collège de Cambrai ; Galletti, collège de Saint-Germain, lauréat du concours général ; Hiernaux, école normale de Châlons ; M. Laurence ; A. Legros ; J. Lehmann ; Noël ; L. Ollié ; J. Pendariès, lycée d'Agen ; M. Petit ; H. Pitrat ; R. Rives, instituteur à Bagnères ; P. Zlatco, lycée de Bucarest ; J. Guéret.]

4862. — *Un plan* P *partage le volume d'une sphère en deux parties* V, V', *et détermine sur la surface deux calottes sphériques* S, S' (S *correspond à* V) :

1° *On donne le rapport* k *de* S *à* S', *et l'on propose d'évaluer le rapport* h *de* V *à* V' ;

2° *Comparer* h *à* k.

1° Soit O le centre de la sphère. Prenons comme plan de la figure, le plan d'un grand cercle de la sphère perpendiculaire au plan donné P. Ces deux plans se coupent suivant une droite indéfinie PP' rencontrant elle-même la sphère aux points A et B.



Traçons le diamètre CE perpendiculaire à AB.

Les volumes V et V' sont donnés par les formules

$$V = \frac{\pi}{6} CD(\overline{CD}^2 + 3\overline{AD}^2),$$

$$V' = \frac{\pi}{6} DE(\overline{DE}^2 + 3\overline{AD}^2) ;$$

le rapport h est donc égal à $\dfrac{CD(\overline{CD}^2 + 3\overline{AD}^2)}{DE(\overline{DE}^2 + 3\overline{AD}^2)}$.

D'autre part, les surfaces des calottes S et S' sont représentées par les formules

$$S = 2\pi R.CD,$$
$$S' = 2\pi R.DE ;$$

le rapport donné k vaut donc

$$k = \frac{S}{S'} = \frac{CD}{DE}.$$

Dans le rapport h, nous pouvons déjà remplacer $\dfrac{CD}{DE}$ par k ; il vient

$$h = k \times \frac{\overline{CD}^2 + 3\overline{AD}^2}{\overline{DE}^2 + 3\overline{AD}^2}.$$

Or, le triangle CAE est rectangle en A comme étant inscrit

dans un demi-cercle ; donc on peut écrire $\overline{AD}^2 = CD \times DE$.

En portant cette valeur dans h, il vient

$$h = k \times \frac{\overline{CD}^2 + 3CD \times DE}{\overline{DE}^2 + 3CD \times DE},$$

$$h = k \times \frac{CD(CD + 3DE)}{DE(DE + 3CD)},$$

ou

$$h = k^2 \times \frac{\frac{CD}{DE} + 3}{1 + \frac{3CD}{DE}},$$

et

$$h = k^2 \times \frac{k+3}{1+3k}.$$

Tel est le rapport demandé.

2° Appelons CD, x et étudions la variation du rapport $\frac{h}{k}$ quand x varie de 0 à 2R.

Quand x varie de 0 à 2R, k varie de 0 à $+\infty$ en passant par la valeur 1, atteinte quand D est en O. De même, h passe par cette valeur en même temps que k et varie également de 0 à $+\infty$:

x	0		R		2R
k	0	croît	1	croît	$+\infty$
h	0	croît	1	croît	$+\infty$

Étudions la variation du rapport $\frac{h}{k} = \frac{k^2 + 3k}{1 + 3k}$.

Posons $\frac{k^2 + 3k}{1 + 3k} = y$.

Chassons le dénominateur, il vient

$$k^2 + 3k = y(1 + 3k),$$

$$k^2 + 3k(1 - y) - y = 0.$$

Pour que cette équation ait des racines, il faut avoir $b^2 - 4ac \geqslant 0$, c'est-à-dire

$$9(1 - y)^2 + 4y \geqslant 0,$$

$$9(1 + y^2 - 2y) + 4y \geqslant 0,$$

$$9 + 9y^2 - 14y \geqslant 0,$$

$$9y^2 - 14y + 9 \geqslant 0.$$

Le trinome du premier membre doit être positif, c'est-à-dire de même signe que son premier terme. Or ce trinome égalé à 0 n'a pas de racines, $b'^2 - ac$ étant négatif ; donc il sera toujours de même signe que son premier terme, c'est-à-dire positif. Il n'y a donc pas de condition de grandeur pour y, et le rapport $\frac{h}{k}$, qui reste fini lorsque k varie en ne prenant que des valeurs positives, varie aussi de 0 à $+\infty$, autrement dit il prend une fois et une seule toute valeur positive.

[Ont résolu la même question : MM. H. Belbenoit, à Arras ; Galletti, collège de Saint-Germain, lauréat du Concours général ; Hiernaux, école normale de Châlons ; M. Laurence ; J. Lehmann, à Boufarik ; L. Ollié ; M. Petit ; P. Zlatco.]

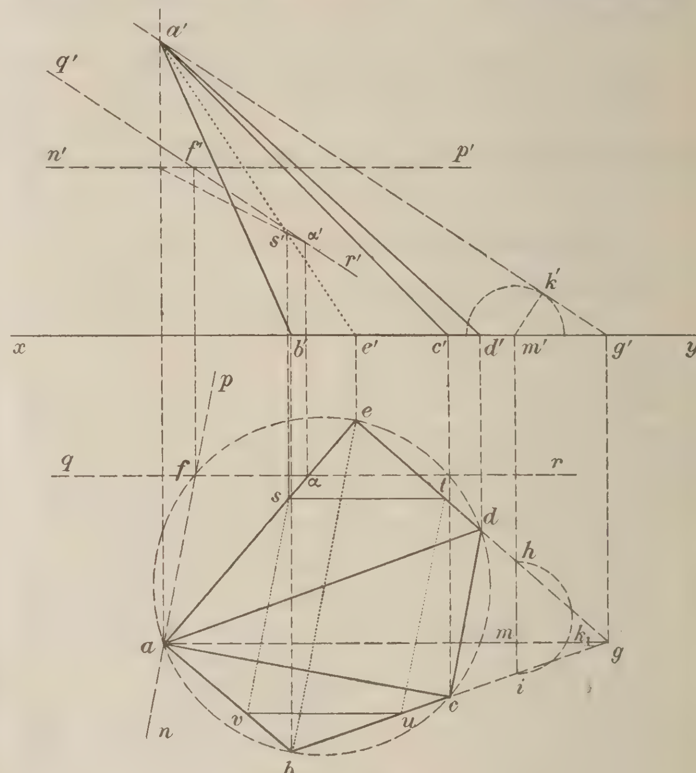
4863. — *On donne un hexagone régulier dont les sommets successifs sont a, b, c, d, e, f, quand on parcourt le polygone toujours dans le même sens ; le quadrilatère bcde est la base d'une pyramide située dans le plan de figure ; a est la projection sur ce plan du sommet A de la pyramide :*

1° Construire la cote du sommet A, sachant que les deux faces Ade, Abc sont perpendiculaires entre elles ;

2° Construire la projection, sur le plan de figure, de la section du solide par le plan passant par le point F, projeté en f et dont la cote est le rayon de l'hexagone, et tel que la section soit un parallélogramme.

Soit g le point de rencontre des côtés bc et ed. Nous plaçons l'hexagone $abcdef$ de manière que la droite ag soit parallèle à la ligne de terre xy.

L'arête du dièdre formé par les faces Ade et Abc est la droite Ag, donc ag est la projection horizontale de cette arête. Ce dièdre doit être droit puisque les faces Ade et Abc sont perpendiculaires ; si nous construisons le rectiligne du dièdre Ag et que nous le rabattions sur le plan horizontal, nous devons obtenir un angle droit.



Construisons le rectiligne du dièdre Ag. Nous savons qu'il faut mener hi perpendiculaire à ag. Cette perpendiculaire est la trace horizontale d'un plan auxiliaire mené par un point K de l'arête Ag perpendiculairement à cette arête et destiné à donner par ses droites d'intersection Kh, Ki avec les faces Aeg, Abg, le rectiligne du dièdre Ag.

Nous rabattons ensuite le triangle hKi sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de hi comme charnière. L'angle hKi étant rectangle, le dièdre Ag devant être droit, le triangle hKi se rabat en hk_1i, le point k_1 étant l'intersection de ag avec la demi-circonférence décrite sur hi comme diamètre. Nous avons en mk_1 la vraie grandeur de mK. Mais nous avons placé la droite ag parallèle à xy ; donc le plan projetant horizontalement l'arête Ag, plan qui contient le point K et qui a pour trace ag, est un plan parallèle au plan vertical, et la droite mK se projette en vraie grandeur sur le plan vertical. Nous aurons un premier lieu du point K en décrivant de m' comme centre, avec mk_1 pour rayon, une demi-circonférence. Mais d'ailleurs, nous savons que Ag est perpendiculaire à mK ; donc nous mènerons la tangente $g'k'$ à la circonférence de centre m' et nous aurons la projection verticale k' et par suite la projection horizontale du point k (l'angle droit mKg ayant ses côtés parallèles au plan vertical, se projette en effet sur ce plan en vraie grandeur).

Nous connaissons maintenant deux lieux de la projection a' du point A. Le point a' se trouve en effet sur $g'k'$ prolongée et sur la ligne de rappel du point a.

Pour achever la pyramide, il suffit de joindre a' aux points b', c', d', e', et a aux points b, c, d, e. La ponctuation se déduit facilement.

2° Pour avoir la projection verticale f' du point F, il suffit de porter sur la ligne de rappel du point f, une longueur $\delta f'$ égale au rayon de l'hexagone.

Le plan de section doit passer par F et déterminer un parallélogramme par ses intersections avec les quatre faces de la pyramide. Le point F étant connu, il reste à déterminer la direction du plan de section. Or nous remarquons que tout plan parallèle à l'arête Ag coupera les deux faces Ade, Acb suivant deux droites parallèles à Ag et par conséquent parallèles entre elles.

L'intersection des deux faces Aeb, $bcde$ se fait suivant la droite be ; les faces Aeb, Adc se coupent aussi suivant une parallèle à be.

Tout plan parallèle à be déterminera dans les faces Aeb, $bcde$ et Adc des droites parallèles. Le plan de section est donc complètement déterminé : il doit passer par F et être parallèle à deux directions données (problème de cours).

Nous obtenons ce plan déterminé par les deux droites NP et QR parallèles respectivement aux directions be et Ag. Pour obtenir la section, il suffit de trouver l'intersection S d'une arête, Ae par exemple, de la pyramide, avec le plan NPQR et de mener par ce point (en projection horizontale) des parallèles à Ag et be. On a ainsi la section qui est un parallélogramme $stuv$. (Pour trouver l'intersection de Ae avec le plan NPQR, on a pris le plan projetant horizontalement la droite Ae). Les parties vs et ut de la section sont cachées.

Remarque — En prenant la ligne de terre xy parallèle à ac, M. Galletti, lauréat du concours général (Départements), obtient une épure un peu plus simple par suite de ce que le plan mené par F parallèlement à ag et be occupe la position de bout par rapport au nouveau plan vertical choisi. Dans une épure où le choix des plans de projection n'est pas imposé, il est important de déterminer ce choix de façon à faciliter l'épure ; cela est d'autant plus important qu'une méthode générale — celle des changements de plan — consiste précisément à choisir un nouveau plan de projection plus commode que le plan primitivement pris.

(Ont envoyé des épures exactes : MM. Chessin, lycée Janson ; Galletti ; Rives.)

ARITHMÉTIQUE

4872. — *Trouver combien il y a de fractions irréductibles inférieures à 1 pouvant donner naissance à une fraction périodique mixte ayant un chiffre irrégulier et deux chiffres périodiques.*

Première solution. — Les fractions considérées, réduites en décimales, sont de la forme

$$0,\ \alpha.\beta\gamma.\beta\gamma.\beta\gamma\ldots,$$

en supposant α et β différents de γ, sans quoi la fraction périodique serait simple ou bien n'aurait qu'un seul chiffre à la période.

Le nombre de ces fractions est donc égal à celui des nombres de la forme $\alpha\beta\gamma$ diminué des nombres de nombres de l'une des formes $\gamma\beta\gamma$ ou $\alpha\gamma\gamma$. La forme $\alpha\beta\gamma$ comprend 999 nombres y compris les 9 nombres de la forme $\gamma\gamma\gamma$; les formes $\gamma\beta\gamma$ et $\alpha\gamma\gamma$ comprennent chacune 99 nombres y compris les 9 nombres de la forme $\gamma\gamma\gamma$. Le nombre cherché est donc

$$999 - 9 + 99 - 9 + 99 - 9 = 810.$$

(H. Belbenoit, à Arras.)

Seconde solution. — Le dénominateur de toutes ces fractions irréductibles sera de la forme

$$2^\alpha \times 5^\beta \times B',$$

B' étant premier avec 10 et l'un des nombres α ou β étant égal à 1 et l'autre à 0 ou 1. La période n'ayant que 2 chiffres, $\overline{10}^2$ divisé par B' donne pour reste 1 ; donc

$$100 = m.B' + 1,$$

ou

$$99 = m.B'.$$

B' est donc un diviseur de 99.

Les diviseurs de 99 sont 1, 3, 9, 11, 33, 99. D'ailleurs B' ne peut être 1, 3 ou 9, car ces nombres divisés par 10 donnant pour reste 1 ou 0, la fraction irréductible aurait alors 1 seul chiffre à la période ou serait exactement convertible en décimales.

B' ne peut donc être que 11, 33 ou 99 ; $2^\alpha \times 5^\beta$ ne peut être que 2, 5 ou $2 \times 5 = 10$.

Il en résulte qu'on formera le dénominateur de toutes ces fractions, en associant chacune des valeurs de B' avec chacune des valeurs de $2^\alpha \times 5^\beta$. Ces dénominateurs seront donc

22, 55, 110,
66, 165, 330,
198, 495, 990,

et on formera toutes les fractions irréductibles inférieures à 1 ayant les nombres précédents pour dénominateurs en cherchant les entiers inférieurs à chacun d'eux et premiers avec eux.

En appliquant la formule

$$N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots,$$

on trouve qu'il y a 10 nombres entiers inférieurs à 22 et premiers avec lui.

Pour 55, il y a 40 nombres jouissant de cette propriété ;
— 110, il y en a 40 ;
— 66 — 20 ;
— 165 — 80 ;
— 330 — 80 ;
— 198 — 60 ;
— 495 — 240 ;
— 990 — 240.

Le nombre des fractions demandées est donc 810.

(Durand, instituteur à Salernes.)

(Ont résolu la même question : Mlles A. Madonne, à Bordeaux ; A. Saleilles ; MM. D. Laurent, lycée de Saint-Étienne ; L. Saunier, à Montceau-les-Mines.)

ALGÈBRE

4874. — *Vérifier que le polynome*

$$x^3 + px - q$$

devient nul quand on remplace x par

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Posons
$$\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = y^3,$$
$$\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = z^3;$$

la valeur de x devient

$$x = y + z,$$

et son cube,

$$x^3 = y^3 + z^3 + 3yz(y + z).$$

Or, en ajoutant ou multipliant entre elles les valeurs de y^3 et z^3, on a

$$y^3 + z^3 = q$$

et

$$yz = \sqrt[3]{-\left(\frac{p}{3}\right)^3} = -\frac{p}{3}.$$

Par suite

$$x^3 = q - p(y + z),$$

ou

$$x^3 + px - q = 0. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

(NABON, à Ségrie.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Anzemberger ; L. Barberot ; V. Barol ; H. Belbenoit ; A. Bottin ; Durand ; E. Hiernaux ; E. Hugonnier-Ginet ; D. Kœnig ; M. Laurence ; D. Laurent ; A. Legros ; Noël ; L. Ollié ; M. Petit ; H. Pitrat ; R. Rives ; V. Thébault ; P. Valentin ; H. Varennes ; P. Zlatco.]

4875. — *Déterminer a et b de façon que*

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + 8x + 4$$

soit un carré.

Le polynome considéré étant du 4e degré et carré, doit être le développement du carré d'un trinome du second degré de la forme $x^2 + px + q$. Ce développement s'écrit

$$x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)x^2 + 2pqx + q^2 = 0.$$

Pour identifier les deux polynomes, égalons les coefficients des puissances semblables ; il vient

$$a = 2p, \qquad b = p^2 + 2q, \qquad 8 = 2pq, \qquad 4 = q^2.$$

De la dernière égalité, on déduit

$$q = \pm\sqrt{4} = \pm 2,$$

puis successivement en prenant

$$q = +2, \qquad p = \frac{4}{q} = +2, \qquad a = 4, \qquad b = 8;$$

$$q = -2, \qquad p = \frac{4}{q} = -2, \qquad a = -4, \qquad b = 0.$$

Ces deux solutions fournissent les identités suivantes, faciles à vérifier,

$$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4 = (x^2 + 2x + 2)^2,$$
$$x^4 - 4x^3 + 8x + 4 = (x^2 - 2x - 2)^2.$$

(L. BARBEROT, au Valdoie.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Bottin. collège de Cambrai ; L. Colombey, C. Gougneaud et H. Varennes ; V. Herzenberg, lycée de Jassy ; E. Hugonnier-Ginet ; D. Kœnig ; M. Laurence ; A. Legros ; Naboulet ; L. Perino ; A. Pichon ; H. Pitrat ; V. Thébault ; P. Thonet.]

4876. — *Soient x' et x'' les racines de l'équation*

$$x^2 + px + q = 0.$$

Former et discuter l'équation qui a pour racines $x'(1 - x')$, $x''(1 - x'')$.

On sait que si l'équation

$$x^2 + px + q = 0$$

a pour racines x' et x'', on a

$$-p = x' + x'' \qquad \text{et} \qquad q = x'x''. \qquad (1)$$

De même, l'équation

$$X^2 + PX + Q = 0$$

admet pour racines $x'(1 - x')$ et $x''(1 - x'')$ lorsque

$$-P = x'(1 - x') + x''(1 - x''),$$
$$Q = x'(1 - x') \times x''(1 - x'').$$

Il reste à éliminer x' et x'' de P et Q au moyen des équations (1). On a successivement

$$-P = x' + x'' - (x'^2 + x''^2) = -p - (p^2 - 2q),$$
$$Q = x'x''(1 - x' - x'' + x'x'') = q(1 + p + q).$$

L'équation cherchée est donc

$$X^2 + (p^2 + p - 2q)X + q(1 + p + q) = 0.$$

Discussion. — Pour connaître la nature et les signes des racines $X' = x'(1 - x')$ et $X'' = x''(1 - x'')$ de l'équation précédente, il suffit de remarquer qu'elles sont réelles en même temps que x' et x'' (*) et que leur signe dépend de la grandeur de x' et x'' par rapport aux nombres 0 et 1. On est ainsi conduit à comparer 0 et 1 aux racines x' et x'' de l'équation

$$f(x) = x^2 + px + q = 0.$$

Les racines x' et x'' sont réelles lorsque

$$p^2 - 4q \geqslant 0 \qquad \text{ou} \qquad q \leqslant \frac{p^2}{4}.$$

On a d'ailleurs

$$f(0) = q, \qquad f(1) = 1 + p + q.$$

En classant les trois valeurs remarquables $\frac{p^2}{4}$, 0 et $-(1+p)$ de q, on obtient :

$$\text{pour} \quad p < -1, \qquad 0 < -(1 + p) < \frac{p^2}{4};$$

$$\text{pour} \quad p > -1, \qquad -(1 + p) < 0 < \frac{p^2}{4}.$$

On peut alors dresser les deux tableaux suivants, qui résument toute la discussion.

I. $p < -1$.

q	$f(0)$	$f(+1)$	Classement de 0, 1, x', x''.	Signe de X'	Signe de X''
$-\infty$					
	$-$	$-$	$x' < 0 < 1 < x''$	$-$	$-$
0	—	. . .		. . .	. . .
	$+$	$-$	$0 < x' < 1 < x''$	$+$	$-$
$-(1+p)$	. . .	—		. . .	. . .
	$+$	$+$	x' et x'' sont comprises ou non entre 0 et 1 en même temps que leur demi-somme, $-\frac{p}{2}$:		
			si $p < -2$, $0 < 1 < x' < x''$;	$-$	$-$
$\frac{p^2}{4}$			si $p > -2$, $0 < x' < x'' < 1$.	$+$	$+$

(*) Si l'on forme directement la condition de réalité des racines de l'équation en X, on a

$$(p^2 + p - 2q)^2 - 4q(1 + p + q) > 0;$$

le premier membre peut s'écrire

$$(p^2 - 4q)(p + 1)^2 \geqslant 0.$$

On voit alors que si $p = -1$, l'équation en X a ses deux racines égales entre elles et ayant pour valeur commune q, q étant d'ailleurs quelconque.

Cela tient à ce que l'équation $x^2 + px + q = 0$, qui est alors $x^2 - x + q = 0$, peut s'écrire

$$q = x(1 - x).$$

II. $p > -1$.

q	$f(0)$	$f(+1)$	Classement de 0, 1, x', x''	Signe de X'	Signe de X''
$-\infty$					
	$-$	$-$	$x' < 0 < 1 < x''$	$-$	$-$
$-(1+p)$	. . .	—		. . .	. . .
	$-$	$+$	$x' < 0 < x'' < 1$	$-$	$+$
0	—	. . .		. . .	. . .
	$+$	$+$	Voir le dernier intervalle du Tableau I.		
			Si $p<0$, $0 < x' < x'' < 1$;	$+$	$+$
$\frac{p^2}{4}$			si $p>0$, $x' < x'' < 0 < 1$.	$-$	$-$

(E. HIERNAUX, école normale de Châlons-sur-Marne.)

[Ont résolu la même question : MM. Durand, instituteur à Salernes ; D. Kœnig, à Budapest ; M. Laurence ; A. Legros ; J. Lehmann ; A. Meynier, à Sciez.]

4878. — *Résoudre l'équation*

$$\frac{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{x-b}} = \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}.$$

Chassons les dénominateurs, il vient

$$\sqrt{(a-x)(x-b)} + x - b = a - x - \sqrt{(a-x)(x-b)},$$

ou

$$2\sqrt{(a-x)(x-b)} = a + b - 2x. \qquad (1)$$

Elevons au carré les deux membres de cette dernière équation ; nous obtenons l'équation plus générale

$$4(a-x)(x-b) = (a+b-2x)^2,$$

ou

$$8x^2 - 8(a+b)x + a^2 + b^2 + 6ab = 0.$$

En résolvant cette équation, on a

$$x = \frac{4(a+b) \pm \sqrt{16(a+b)^2 - 8(a^2+b^2+6ab)}}{8},$$

ou

$$x = \frac{2(a+b) \pm (a-b)\sqrt{2}}{4}.$$

Pour que l'une de ces deux valeurs convienne à l'équation proposée, il faut et il suffit qu'elle rende positif le second membre de l'équation (1), c'est-à-dire soit inférieure à $\frac{a+b}{2}$. La seule valeur acceptable est donc

$$x = \frac{2(a+b) - (a-b)\sqrt{2}}{4}.$$

On voit facilement que l'autre valeur résout l'équation

$$\frac{\sqrt{a-x}-\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}} = -\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}.$$

(ÉMILE HIERNAUX, école normale de Châlons-sur-Marne.)

[Ont résolu la même question: MM. E. Anzemberger, lycée de Lyon; V. Barol, instructeur sur la *Couronne* ; Durand, instituteur à Salernes ; Filliol, école d'hydrographie de Saint-Tropez ; L. Geoffroy, à Blénod-les-Toul ; J. Guéret, à Pamiers ; M. Laurence ; P. Saintin ; G. Salaun.]

4880. — *Soient r le rayon du cercle inscrit dans un triangle rectangle ABC, r' le rayon du cercle tangent à l'hypoténuse et aux prolongements des côtés de l'angle droit.*

Etant donnés l'hypoténuse $BC = a$, le rapport $m = \frac{r'}{r}$ de ces deux rayons, calculer les deux côtés de l'angle droit. — Discuter.

On a

$$2S = (b+c+a)r = (b+c-a)r' ;$$

on tire de là

$$\frac{b+c+a}{b+c-a} = \frac{r'}{r} = m,$$

ou

$$\frac{b+c+a}{m} = \frac{b+c-a}{1} = \frac{2a}{m-1} = \frac{2(b+c)}{m+1},$$

d'où

$$b + c = \frac{a(m+1)}{m-1}. \qquad (1)$$

D'autre part, on a

$$b^2 + c^2 = a^2 ; \qquad (2)$$

il vient

$$(b+c)^2 - (b^2+c^2) = 2bc = \frac{a^2(m+1)^2}{(m-1)^2} - a^2,$$

ou

$$bc = \frac{2ma^2}{(m-1)^2}.$$

Connaissant $b+c$ et bc, b et c sont racines de l'équation

$$X^2 - \frac{a(m+1)}{m-1}X + \frac{2ma^2}{(m-1)^2} = 0.$$

Discussion. — L'équation précédente ne fournit pour b et c de valeurs acceptables qu'autant que celles-ci sont réelles, positives et inférieures à a.

La condition de réalité est

$$\frac{a^2(m+1)^2}{(m-1)^2} - \frac{8ma^2}{(m-1)^2} \geqslant 0,$$

ou

$$m^2 - 6m + 1 \geqslant 0,$$

inégalité vérifiée :

soit pour $m < 3 - 2\sqrt{2}$,

soit pour $m > 3 + 2\sqrt{2}$.

Les deux racines ayant leur produit positif sont positives en même temps que leur somme $\frac{a(m+1)}{m-1}$, ce qui entraîne la condition évidente $m > 1$.

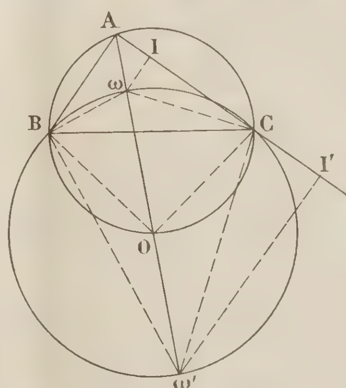
Par suite, les deux valeurs de b et c sont réelles et positives lorsque

$$m \geqslant 3 + 2\sqrt{2} ;$$

elles sont en outre inférieures à a d'après la relation (2). Dans ce cas, le problème admet une solution.

Pour $m = 3 + 2\sqrt{2}$, $b = c + a\sqrt{2}$; on a un triangle rectangle isocèle.

Solution géométrique. — Soient ω et ω' les centres des cercles inscrit et exinscrit dans l'angle A. Les angles $\omega B \omega'$, $\omega C \omega'$ étant droits, le cercle de diamètre $\omega\omega'$ passe par B et C et a son centre O sur le cercle de diamètre BC qui passe par A ; son rayon, égal au côté OB du triangle rectangle isocèle BOC, est



$$OB = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

La corde BC et le cercle O étant connus, tout revient à mener le diamètre $\omega\omega'$ de manière que

$$\frac{A\omega'}{A\omega} = \frac{\omega' I}{\omega I} = m.$$

Or

$$A\omega' = OA + O\omega' = OA + \frac{a}{\sqrt{2}},$$

$$A\omega = OA - O\omega = OA - \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Par suite

$$OA + \frac{a}{\sqrt{2}} = m\left(OA - \frac{a}{\sqrt{2}}\right),$$

d'où
$$OA = \frac{(m+1)a\sqrt{2}}{2(m-1)}.$$

Le sommet A est alors à l'intersection du cercle de diamètre BC avec un cercle de centre O et de rayon connu ; on obtient ainsi deux points A symétriques par rapport à la perpendiculaire élevée au milieu de BC. Ces deux points correspondent à deux triangles égaux.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que le point A existe, c'est-à-dire qu'on ait

$$OA = \frac{(m+1)a\sqrt{2}}{2(m-1)} \leqslant a,$$

d'où l'on déduit

$$m \geqslant 3 + 2\sqrt{2}.$$

(L. OLLIÉ, à Auch.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Anzemberger ; E. Barbé ; P. Bily ; J. Bourrec ; L. Colombey ; Daure ; H. Dobryzniak ; Durand ; L. Geoffroy ; E. Hiernaux ; E. Hugonnier-Ginet ; Jouart ; D. Kœnig ; A. Legros ; J. Lehmann ; J. Maury ; J. Ménéchal ; A. Meynier ; M. Petit ; L. Raynaud ; G. Réveillon ; H. Richier ; P. Saintin ; P. Valentin ; H. Varennes ; Ventre ; P. Zlatco.]

GÉOMÉTRIE

4882. — *Dans un triangle* ABC, *mener une sécante* DE *rencontrant les côtés* AB *et* AC *respectivement en* D *et* E, *telle que l'on ait*

$$\frac{BD}{m} = \frac{DE}{n} = \frac{EC}{k}.$$

Supposons le problème résolu. Prenons sur BD le point D' tel que BD' = m ; par D' menons D'E' parallèle à DE et limitée à BE, puis par E' la parallèle E'K' à EC limitée à BC. A cause de la similitude, on a successivement

$$\frac{BD}{BD'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{BE}{BE'} = \frac{EC}{E'C'}.$$

La condition imposée revient donc à

$$\frac{BD'}{m} = \frac{D'E'}{n} = \frac{E'C'}{k},$$

d'où, puisque par hypothèse $BD' = m$,

$$D'E' = n, \qquad E'C' = k.$$

Il résulte de là que le point E' se trouve à l'intersection d'un cercle de centre D' et de rayon n avec la parallèle à BC menée par le point K du côté AC, situé à une distance k de C. Le point E' étant connu, la construction s'achève en prenant l'intersection E de BE' avec AC, puis en menant ED parallèle à E'D'.

Comme il existe deux points K à chacun desquels correspondent deux points E', le problème comporte généralement quatre solutions.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que la parallèle E'K à BC soit comprise entre les deux tangentes M_1K_1, M_2K_2 au cercle D' menées parallèlement à BC.

Dans le cas de la figure, le cercle D' coupe le côté BC ; le problème admet alors quatre ou deux solutions suivant que k est inférieur à CK_2 ou bien compris entre CK_2 et CK_1 ; pour toute autre valeur de k, il n'y a aucune solution.

Lorsque le cercle D' ne rencontre pas BC, le problème n'admet que deux solutions pour toute valeur de k comprise entre CK_2 et CK_1. Il est impossible pour toute autre valeur de k.

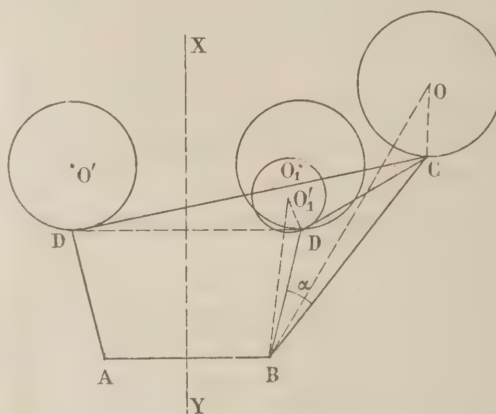
Remarque. — On pourrait exprimer algébriquement en fonction de m, n et de certains éléments du triangle, la condition pour que le cercle D' coupe ou non BC, ainsi que les limites CK_1 et CK_2 de k. Ce calcul, d'ailleurs très simple, n'offrirait ici aucun intérêt.

(L. OLLIÉ, à Auch.)

[Ont résolu la même question : MM. H. Belbenoit, à Arras ; J. Guéret, à Pamiers ; R. Rives, à Bagnères ; A. Pichon, lycée de Niort ; P. Thonet ; P. Zlatco, à Bucarest.]

4884. — *Construire un quadrilatère* ABCD *connaissant les sommets* A *et* B, *la différence des angles en* A *et* B, *le rapport* $\frac{AD}{BC}$, *et sachant en outre que les sommets* C *et* D *se trouvent sur deux cercles donnés.*

Supposons le problème résolu : soit ABCD un quadrilatère dans lequel on connaît $\widehat{B} - \widehat{A} = \alpha$, $\frac{BC}{AD} = k$, les sommets A, B et les cercles O, O' sur lesquels se trouvent C et D.



Prenons le symétrique D' de D par rapport à la perpendiculaire XY élevée au milieu de AB et joignons D' à B et C. Un premier lieu de D' est le cercle O_1 symétrique de O' par rapport à XY. Pour obtenir un second lieu de D', on remarque que dans le triangle BCD' on connaît l'angle $CBD' = \alpha$ et le rapport $\frac{BC}{BD'} = k$; de sorte que lorsque C décrit le cercle O, D' décrit une certaine circonférence O_1 obtenue en faisant tourner de l'angle α une circonférence homothétique à la circonférence O, B étant le centre et $\frac{1}{k}$ le rapport d'homothétie.

Le point D' est ainsi à l'intersection des deux cercles O_1 et O'. La construction s'achève en prenant le symétrique D de D' par rapport à XY, puis en menant la droite BC qui fait un angle α avec BD' et en prenant $BC = k \times BD'$.

Suivant que les deux cercles O_1 et O_1' ont deux, un ou zéro points communs, le problème admet deux, une ou zéro solutions.

(E. HIERNAUX, école normale de Châlons-sur-Marne.)

[Ont résolu la même question : MM. H. Belbenoit, à Arras ; J. Guéret, à Pamiers ; J. Lehmann, instituteur à Boufarik ; L. Ollié, à Auch ; P. Thonet ; P. Zlatco, à Bucarest.]

4886. — *Des extrémités* A *et* B *du diamètre d'une demi-circonférence, on mène deux cordes* AC, BD *se coupant en un point* I. *Démontrer* : 1° *que la somme* AC.AI + BD.BI *est constante quelles que soient les cordes ;* 2° *que si* K *est le pied de la perpendiculaire abaissée de* I *sur* AB, IK *est bissectrice de l'angle* CKD.

Première solution. — 1° Le quadrilatère BCIK ayant les angles en C et K droits tous deux est inscriptible et l'on a

$$AC.AI = AB.AK\,; \qquad (1)$$

de même, en considérant le quadrilatère inscriptible ADIK, on a

$$BD.BI = AB.BK. \qquad (2)$$

Ajoutons membre à membre les égalités (1) et (2), il vient

$$AC.AI + BD.BI = AB(AK + BK) = \overline{AB}^2 = \text{const.}$$

2° Les angles IKC et IBC sont égaux comme inscrits dans le cercle circonscrit au quadrilatère inscriptible BCIK ; de même, $\widehat{IKD} = \widehat{IAD}$. Or $\widehat{IBC} = \widehat{IAD}$ (même mesure) ; donc

$$\widehat{IKC} = \widehat{IKD}.$$

C. q. f. d.

(Mlle ANNE MADONNE, à Bordeaux.)

Remarque. — La démonstration subsiste aussi bien lorsque le point I tombe en dehors du demi-cercle.

Seconde solution. — 1° On a

$$AC = AI + IC, \qquad BD = BI + ID\,;$$

on en déduit

$$AC.AI + BD.BI = \overline{AI}^2 + AI.IC + \overline{BI}^2 + BI.ID,$$

ou, comme $\quad AI.IC = BI.ID,$

$$AC.AI + BD.BI = \overline{AI}^2 + \overline{BI}^2 + 2BI.ID.$$

Or, dans le triangle ABI, la hauteur AD donne, en vertu d'un théorème connu,

$$\overline{AI}^2 + \overline{BI}^2 + 2BI.ID = \overline{AB}^2\,;$$

donc $\quad AC.AI + BD.BI = \overline{AB}^2 = \text{const.}$

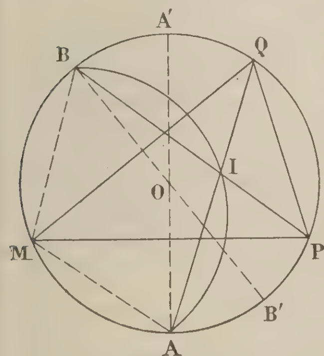
2° D'après une propriété connue, la hauteur IK du triangle ABI est bissectrice de l'angle CKD des droites joignant le pied de cette hauteur aux pieds C et D des deux autres hauteurs.

(M. ROYER, instituteur à Privas.)

[Ont résolu la même question ; Mlle A. Saleilles ; MM. E. Anzemberger ; E. Barbé ; V. Barol ; H. Belbenoit ; P. Bily ; L. Bordron ; Durand ; J. Guéret ; H. Guillaud ; E. Hiernaux ; A. Jouart ; D. Koenig ; A. Lardy ; A. Legros ; J. Lehmann ; E. Licope ; A. Meynier ; Naboulet ; Noël ; L. Ollié ; H. de la Perrelle ; M. Petitjean ; H. Pitrat ; H. Richier ; R. Rives ; G. Salaun ; E. Sautreau ; J. Tastet ; V. Thébault ; D. Tuïssuzian ; P. Valentin ; H. Varennes ; Ventre ; P. Zlateo.]

4888. — *On donne un cercle fixe et un point* M *du cercle ; on mène des droites* MP, MQ *parallèles à des directions fixes. Trouver le lieu des centres des cercles inscrits dans les triangles* MPQ *lorsque* M *décrit le cercle donné.*

Les cordes MP, MQ étant parallèles à deux directions fixes sont perpendiculaires à deux diamètres fixes AA′, BB′ du cercle fixe O. Les droites PB, PB′, QA, QA′ sont les bissectrices des angles en P et Q du triangle MPQ. Soit I le point de rencontre de PB, QA.



L'angle AIB a même mesure que

$$\frac{\widehat{AMB} + \widehat{PQ}}{2} = \frac{\widehat{AM} + \widehat{MB} + \widehat{PQ}}{2} = \frac{\widehat{AP} + \widehat{PQ} + \widehat{QB}}{2} = \frac{\widehat{APB}}{2}\,;$$

cet angle est donc égal à l'angle constant AMB. Par suite, lorsque M décrit l'arc AB, le lieu de I est un arc symétrique par rapport à AB.

On verrait de même que lorsque M décrit l'un des trois autres arcs BA′, A′B′, B′A, le point I décrit trois autres arcs respectivement symétriques par rapport aux cordes BA′, A′B′, B′A.

Le lieu total du point I se compose donc de quatre segments de cercles ayant même rayon que le cercle O et construits sur les côtés du rectangle ABA′B′ comme cordes.

On reconnaît facilement que les portions extérieures au cercle O des quatre cercles précédents correspondent au lieu des centres des trois cercles exinscrits au triangle MPQ.

(Ed. BARBÉ, à Mazamet.)

Autre solution. — Menons la bissectrice MN de l'angle PMQ en la limitant au cercle O. On sait que le centre I du cercle inscrit dans le triangle est un point de MN tel que

$$NI = NP = NQ.$$

Or les directions MP, MQ étant fixes, les bissectrices conservent des directions invariables ; soit MN l'une d'elles. La corde PN est constante comme sous-tendant un angle constant.

On est ainsi ramené à chercher le lieu de l'extrémité I d'un segment de droite constant NI qui se déplace parallèlement à lui-même, l'autre extrémité N décrivant le cercle O.

Ce lieu est un cercle de même rayon que le cercle O et dont le centre O_1 s'obtient en menant OO_1 égal et parallèle à NI ; on peut prendre OO_1 dans les deux sens, on a ainsi deux cercles égaux, et en considérant la corde PN répondant à la seconde bissectrice de l'angle M (qui est bissectrice extérieure ou intérieure suivant les positions de M), on trouve deux nouveaux cercles. Comme en s'en rend aisément compte, ces quatre cercles se coupent deux à deux sur la circonférence O, et les arcs intérieurs s'appliquent seuls au lieu du point I.

(Eugène LICOPE, à Mons.)

[Ont résolu la même question : MM. H. Belbenoit, à Arras ; Durand, instituteur à Salernes ; J. Guéret ; E. Hiernaux, école normale de Châlons ; L. Ollié, à Auch.]

PHYSIQUE

4854. — *Combien de temps faut-il à un corps tombant dans le vide, à partir de l'instant où il est abandonné, pour qu'il ait une vitesse de 20m par seconde, en supposant qu'à l'endroit où se produit cette chute le pendule simple qui effectue une oscillation simple par seconde ait une longueur de 99cm ?*

(*Bacc. lettres-math., Dijon, mars 1900.*)

Calculons l'accélération due à la pesanteur à l'endroit où se produit la chute. On a, en appliquant la formule du pendule,

$$1 = 3{,}1416\sqrt{\frac{99}{g}},$$

d'où $\quad g = 99 \times \overline{3{,}1416}^2 = 977^{\text{cm}},09,$

La vitesse d'un corps qui tombe librement dans le vide étant proportionnelle au temps, on a

$$2\,000 = gt,$$

d'où $\quad t = \dfrac{2\,000}{977{,}09} = 2^{\text{sec}},04.$

(P. SAINTIN.)

[Ont résolu la même question : Mlle M. D. P. ; MM. Anzemberger ; H. Belbenoit ; F. Clabault ; E. Licope ; Dobryzniak ; G. Foucry ; L. Guilhem ; J. Haag ; Hugonnier ; de Jarny ; G. Lallier ; A. Legros ; Limouzi ; A Lecoutour ; D. Lwow ; A. Meynier ; J. Ménéchal ; R. Mouzon ; Nabon ; Noël ; M. Royer ; Sinoquet ; C. Tourneux ; P. Valentin ; Varennes ; A. Vannier.

4855. — *Un courant électrique traverse un voltamètre contenant de l'eau acidulée de densité d ; au bout de n secondes, le volume de l'hydrogène recueilli dans l'éprouvette est V à la température t°. La hauteur du liquide acidulé dans l'éprouvette est h. H étant la pression atmosphérique et T la tension de la vapeur d'eau au-dessus de l'eau acidulée, quelle est en ampères l'intensité I du courant ? On sait d'ailleurs qu'un coulomb libère une quantité d'hydrogène à 0°, sous la pression 76^{cm}, égale à 0^{cc},1158.*

Application : $V = 25^{cc},8$, $t = 13°,5$, $H = 762^{mm}$, $h = 75^{mm}$, $n = 35^m 10^s$, $d = 1,1$, $T = 11^{mm},5$.

(*Bacc. lettres-sciences, Lille, novembre 1899.*)

Cherchons d'abord le volume de l'hydrogène mesuré sec à 0° et sous la pression de 760^{mm}. Il suffit d'appliquer la formule qui réunit les lois de Mariotte et de Gay-Lussac :

$$V_0 H_0 = \frac{VH}{1+\alpha t}.$$

La force élastique de l'hydrogène contenu dans l'éprouvette est $H - \frac{hd}{13,6} - T$. On a donc

$$V_0 \times 760 = \frac{V\left(H - \frac{hd}{13,6} - T\right)}{1+\alpha t},$$

d'où

$$V_0 = V\,\frac{\left(H - \frac{hd}{13,6} - T\right)}{(1+\alpha t)760}.$$

Tel est le volume de l'hydrogène dégagé en n secondes ; le volume dégagé en 1 seconde a pour valeur $\frac{V_0}{n}$.

D'un autre côté, un coulomb libérant 0^{cc},1158 d'hydrogène à 0° et 76^{cm}, un courant d'un ampère dégage par seconde 0^{cc},1158 d'hydrogène. D'après cela, l'intensité I du courant exprimée en ampères a pour valeur

$$I = \frac{V\left(H - \frac{hd}{13,6} - T\right)}{(1+\alpha t)760 \times n \times 0,1158}.$$

Application :

$$I = \frac{25,8\left(762 - \frac{75 \times 1,1}{13,6} - 11,5\right)}{(1 + 13,5 \times 0,00367)760 \times 2110 \times 0,1158} = 0^{amp},098.$$

(J. HAAG.)

[Ont résolu la même question : MM. Bouzy ; G. Foucry ; R. Henry ; Hugonnier-Ginet ; A. Lecoutour ; A. Legros ; D. Lwow, Licope ; Limouzy ; M. Royer ; A. Vannier ; Varennes.]

CONCOURS DE 1900 (*Suite*).

ÉCOLE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES DE PARIS

Mathématiques.

ARITHMÉTIQUE

I. — Que devient le rapport $\frac{a}{b}$ quand on ajoute un même nombre à ses deux termes ?

II. — Le nombre c divise le produit $a \times b$; il est premier avec a, montrer qu'il divise b.

ALGÈBRE

4907. — Déterminer λ de manière que l'équation

$$(\lambda + 2)x^2 - (7\lambda + 23)x + 22\lambda - 26 = 0$$

ait ses deux racines dans le rapport de 1 à 2.

GÉOMÉTRIE

4908. — On donne un triangle rectangle BAC. Le cercle inscrit touche l'hypoténuse BC en D.

Montrer que l'on a

$$2\left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{AC}\right) = \frac{1}{BD} - \frac{1}{CD}.$$

Physique.

I. — Machines pneumatiques.

II. — **4909**. Une sphère métallique est suspendue par un fil très fin sous le plateau d'une balance. La balance est en équilibre dans l'air pour une masse de 10^{gr} placée dans l'autre plateau. La densité du métal de la sphère est égale à 8,8 à 0°, son coefficient de dilatation linéaire à 0,000017.

On plonge la sphère métallique dans un liquide à la température de 0° ; il faut alors une masse de 8^{gr},640 dans l'autre plateau pour établir l'équilibre. On chauffe ensuite le liquide et on trouve qu'à la température de 20°, il faut 8^{gr},664 dans le deuxième plateau pour établir l'équilibre. On demande :

1° Quelle est la densité du liquide à 0° ;

2° Quel est le coefficient de dilatation moyen de 0 à 20° du liquide.

3° Traiter les mêmes questions en tenant compte de ce que les pesées sont faites dans l'air à la pression astmosphérique normale et à la température de 20°.

Chimie.

I. — De la composition et des propriétés de l'air.

II. — **4910**. 27^{gr} de phosphore absorbent du chlore pour faire du perchlorure PCl^5. Quelle est la quantité de chlore nécessaire ? Combien faut-il d'eau pour convertir le perchlorure en acide phosphorique normal PO^4H^3 ? Ecrire l'équation.

Poids atomiques : H = 1, Cl = 35,5, P = 31, O = 16.

QUESTIONS PROPOSÉES

4911. — Si A est un nombre impair, premier avec 5, le produit

$$(A^2 - 1)(A^2 - 9)(A^2 - 49)$$

est divisible par 23040.

(*Examens oraux de l'école polytechnique.*)

4912. — Résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^5 - x^3 = y^3 z,$$

où y et z sont deux nombres premiers. (A. SAINTE-LAGUE, à Agen.)

4913. — Résoudre et construire un triangle ABC connaissant les pieds des bissectrices de l'angle A et les distances de ces pieds aux côtés de l'angle.

4914. — On considère un angle XAY et deux droites BC et DE comprises entre les côtés de l'angle et se coupant en un point intérieur O.

1° Démontrer que la droite AO divise les deux triangles ABC, ADE en quatre parties telles que

$$\frac{1}{AOB} + \frac{1}{AOC} = \frac{2}{AOD} + \frac{1}{AOE}.$$

2° Quelle modification subit cette relation lorsque le point O est extérieur à l'angle XAY ?

(A. VERGNOLE, lycée de Limoges.)

4915. — Soient M un point pris à l'intérieur d'un triangle ABC et MA', MB', MC' les perpendiculaires menées de ce point aux côtés BC, AC, AB du triangle. Si des sommets A, B, C on abaisse des perpendiculaires respectivement sur B'C', A'C', A'B', ces trois perpendiculaires sont concourantes.

(H. PITRAT, à Givors.)

4916 — Dans un récipient dont le volume intérieur est invariable et égal à 25^{lit} se trouve une masse d'air de 39^{gr}.

1° Calculer la pression que cet air exerce sur les parois à 0°.

2° On demande à quelle température cette pression deviendrait égale à 2 atmosphères, le volume du récipient restant fixe.

Calcul et raisonnement.

Masse du litre d'air à 0° et à la pression 760, 1^{gr},3.

Coefficient de dilatation des gaz, $\frac{1}{273}$.

(*Bacc. lettres-math., Rennes, mars 1900.*)

Le Redacteur-Gerant : HENRY VUIBERT.

Bar-le Duc. — Imp. Comte-Jacquet, FACDOUEL, Dir.

25e Année. — N° 4 JOURNAL Paris, le 15 Novembre 1900.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Abonnements.. Librairie Nony et Cie, Boulḍ St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

NOTE SUR LES ÉQUATIONS RATIONNELLES

par M. **A. Goulard**, professeur au lycée de Marseille.

1. Considérons une équation rationnelle à une inconnue

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} + \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} + \frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)} + \ldots\ldots = 0, \qquad (1)$$

dans laquelle $f(x)$, $f_1(x)$, ..., $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., sont des polynomes entiers.

Désignons par $F(x)$ le plus petit dénominateur commun, c'est-à-dire le polynome de moindre degré qui est divisible par $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, ... En multipliant tous les termes de l'équation (1) par $F(x)$, on obtient l'équation *entière*

$$f(x)\frac{F(x)}{\varphi(x)} + f_1(x)\frac{F(x)}{\varphi_1(x)} + f_2(x)\frac{F(x)}{\varphi_2(x)} + \ldots\ldots = 0. \quad (2)$$

Il est clair que toute solution de l'équation (1) vérifie l'équation (2).

Réciproquement, soit $x = \alpha$ une solution de l'équation (2). Supposons qu'elle n'annule aucun des polynomes $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., et, par suite, qu'elle n'annule pas $F(x)$. On a identiquement

$$f(\alpha)\frac{F(\alpha)}{\varphi(\alpha)} + f_1(\alpha)\frac{F(\alpha)}{\varphi_1(\alpha)} + f_2(\alpha)\frac{F(\alpha)}{\varphi_2(\alpha)} + \ldots\ldots = 0.$$

En divisant par $F(\alpha)$ qui est différent de zéro, il vient

$$\frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)} + \frac{f_1(\alpha)}{\varphi_1(\alpha)} + \frac{f_2(\alpha)}{\varphi_2(\alpha)} + \ldots\ldots = 0,$$

ce qui montre que $x = \alpha$ est une solution de l'équation (1). Ainsi, *si une solution de l'équation* (2) *n'annule aucun des dénominateurs de l'équation* (1), *cette solution vérifie l'équation* (1).

Je me propose de rechercher dans quelles conditions une valeur de x qui annule l'un des dénominateurs de l'équation (1) peut satisfaire à l'équation (2).

2. Nous supposerons qu'on a simplifié, s'il y a lieu, toutes les fractions qui figurent dans l'équation (1), en sorte que $f(x)$ et $\varphi(x)$, par exemple, n'ont pas de facteur commun.

Soit alors $x - a$ un facteur contenu dans $\varphi(x)$ avec l'exposant m. Supposons que ce facteur ne se trouve dans aucun des autres dénominateurs $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., ou qu'il s'y trouve avec des exposants inférieurs à m. Il sera contenu dans $F(x)$ avec l'exposant m ; mais il disparaîtra du quotient $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$, tandis qu'il subsistera dans les quotients $\frac{F(x)}{\varphi_1(x)}$, $\frac{F(x)}{\varphi_2(x)}$, ...

Comme, par hypothèse, $f(x)$ ne contient pas le facteur $x - a$, on voit que le premier terme de l'équation (2) ne s'annule pas pour $x = a$, tandis que tous les termes suivants s'annulent. Donc l'équation (2) n'admet pas la solution $x = a$.

Par conséquent, *pour que l'équation* (2) *admette la solution* $x = a$, *qui annule l'un des dénominateurs de l'équation* (1), *il faut que le facteur* $x - a$ *soit commun à plusieurs de ces dénominateurs, et que l'exposant maximum de ce facteur soit le même dans deux au moins de ces dénominateurs.*

3. Supposons, pour fixer les idées, que le facteur $x - a$ se trouve avec l'exposant maximum dans $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ seulement. Tous les termes de l'équation (2), à partir du troisième, contiendront le facteur $x - a$. Donc, pour que l'équation (2) admette la solution $x = a$, il faut et il suffit que la somme des deux premiers termes s'annule pour $x = a$. Cette somme sera alors divisible par $x - a$, et on pourra débarrasser l'équation (2) de la solution $x = a$ en divisant par $x - a$.

Considérons, par exemple, l'équation

$$\frac{3}{(x+2)(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x(x-3)}. \qquad (1)$$

En multipliant par $(x+2)(x-1)^2x(x-3)$, on obtient l'équation

$$3x(x-3) - (x+2)(x-3) = (x+2)(x-1)^2. \qquad (2)$$

Conformément à la théorie précédente, on voit que l'équation (2) n'admet ni la solution $x = -2$, ni la solution $x = 3$. On vérifie facilement qu'elle n'admet pas la solution $x = 0$; mais elle admet la solution $x = 1$. On l'écrit alors sous la forme

$$2(x-1)(x-3) = (x+2)(x-1)^2 ;$$

et, après avoir divisé par $x - 1$, il reste l'équation du second degré

$$2(x-3) = (x+2)(x-1),$$

dont les deux racines satisfont à l'équation (1).

L'exemple indiqué par M. Goulard montre bien nettement que la condition générale trouvée est nécessaire, mais pas suffisante puisque la racine $x = 0$ n'appartient pas à la dernière équation bien que x se trouve dans deux dénominateurs de l'équation primitive avec le même exposant. On arrive donc à cette conclusion pratique qu'il est très rare qu'en chassant des dénominateurs on trouve une équation ayant des solutions qui ne conviendraient pas à l'équation de forme fractionnaire.

(N. d. l. R.)

ÉCOLE NORMALE DE SÈVRES (1900)

4866. — *Déterminer tous les entiers dont le carré a 5 chiffres et est divisible par 54.*

Soit n^2 un des carrés de 5 chiffres divisible par 54. On a par hypothèse

$$10000 \leqslant n^2 < 100000,$$

ou, en extrayant les racines carrées de chaque membre,

$$100 \leqslant n < 317.$$

D'ailleurs, n^2 étant multiple de $54 = 2 \times 3^3$, est de la forme

$$n^2 = k \times 2 \times 3^3 ;$$

comme le carré n^2 ne peut contenir que des puissances paires de 2 et 3, il en résulte que k doit contenir l'un des nombres 2 et 3 en facteurs, de sorte que n^2 est multiple de $2^2 \times 3^4$, et n multiple de $2 \times 3^2 = 18$.

Tous les multiples de 18 compris entre 100 et 317 répondent donc à la question; ces multiples, au nombre de $\frac{317-101}{18} = 12$, sont

108, 126, 144, 162, 180, 198, 216, 234, 252, 270, 288, 306.

(H. PITRAT, à Givors.)

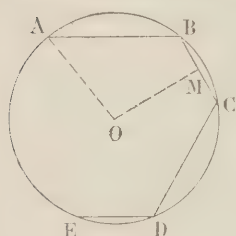
[Ont résolu la même question : Mlle A. Saleilles ; MM. P. Bancillon, école normale de Montbrison ; E. Barbé ; P. Bily ; L. Bordron, à Chantonnay ; Daure, à Cinq-Toulza ; E. Hugonnier-Ginet ; J. Lehmann ; M. Laurence ; A. Meynier ; Noël ; L. Ollié, à Auch ; M. Petit ; H. Varennes.]

4867. — *On construit un polygone convexe de* 2n *côtés dont tous les angles sont égaux et dont tous les côtés de rang impair sont égaux ainsi que les côtés de rang pair.*

1° *Démontrer qu'un tel polygone est inscriptible dans une circonférence.*

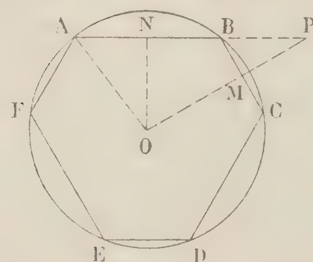
2° *Étant donnée la valeur* a *des côtés de rang pair et la valeur* b *des côtés de rang impair, calculer, en supposant l'entier* n *égal à* 3, *le rayon de la circonférence circonscrite.*

1° Je dis que la circonférence O qui passe par les trois sommets consécutifs A, B, C passe aussi par le sommet suivant, D.



En effet, si l'on fait tourner l'angle ABM autour de la perpendiculaire OM à BC, cet angle vient se superposer à l'angle DCM, puisque par hypothèse $\widehat{ABM} = \widehat{MCD}$, $BM = MC$ et $AB = CD$.

En étendant cette remarque à quatre sommets consécutifs quelconques, on en conclut de proche en proche que le cercle O contient les autres sommets E, F,... du polygone considéré.



2° Considérons maintenant l'hexagone inscrit ABCDEF dans lequel $AB = CD = EF = a$ et $BC = DE = FA = b$.

Menons les perpendiculaires ON, OM à AB, BC, la seconde coupant AB prolongé en P. On a

$$\overline{OA}^2 = \frac{a^2}{4} + \overline{ON}^2.$$

L'angle au centre MON ayant même mesure que $\frac{1}{2}$ (arc AB+arc BC), ou $\frac{1}{2}$ arc AC, et l'arc AC étant $\frac{1}{3}$ de circonférence,

$$\widehat{MON} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ.$$

Par suite, $\widehat{OPN} = 30^\circ$ et $BP = b$. On a dans le triangle ONP

$$\overline{NP}^2 = 4\overline{ON}^2 - \overline{ON}^2,$$

ou

$$\left(\frac{a}{2} + b\right)^2 = 3\overline{ON}^2,$$

d'où

$$\overline{ON}^2 = \frac{(a+2b)^2}{12}$$

et

$$\overline{OA}^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{(a+2b)^2}{12} = \frac{a^2+b^2+ab}{3}.$$

Remarque. — Le rayon $OA = R$ peut aussi s'obtenir plus rapidement comme il suit : Dans le triangle ABC, AC, côté du triangle équilatéral ACE, est opposé à un angle B de 120°, de sorte que la projection de BC sur AB est égale à $\frac{b}{2}$; donc

$$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 + 2a.\frac{b}{2},$$

d'où

$$R^2 = \frac{\overline{AC}^2}{3} = \frac{a^2+b^2+ab}{3}.$$

(P. BILY, à Saint-Gilles-Pligeaux.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Anzemberger, lycée de Lyon ; H. Belbenoit, à Arras; J. Guéret ; E. Hiernaux, école normale de Châlons-sur-Marne; E. Hugonnier-Ginet ; J. Lehmann; J. Meynier, à Sciez ; Noël ; H. Pitrat, à Givors ; R. Rives ; H. Varennes.]

4868. — *Déterminer dans l'espace le lieu des points tels que les carrés de leurs distances à trois points donnés* A, B, C *aient des différences données.*

Soit M un point de l'espace tel que

$$\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = m^2 \quad \text{et} \quad \overline{MA}^2 - \overline{MC}^2 = n^2.$$

Cherchons d'abord le lieu des points satisfaisant à la première condition. Si dans le plan MAB on mène MP perpendiculaire à AB, la condition $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = m^2$ peut s'écrire

$$\overline{MP}^2 + \overline{PA}^2 - (\overline{MP}^2 + \overline{PB}^2) = m^2,$$

ou

$$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = m^2.$$

Le point P, ainsi par suite que tous les points M du plan perpendiculaire en P à AB, vérifient donc la condition considérée (*) On peut d'ailleurs déterminer facilement le point P par sa distance au milieu I de AB ; on a en effet

$$PA - PB = 2IP, \qquad PA + PB = AB,$$

ou, en multipliant membre à membre,

$$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 2AB.\,IP,$$

d'où

$$IP = \frac{m^2}{2AB}.$$

On verrait de même que le lieu des points M tels que $\overline{MA}^2 - \overline{MC}^2 = n^2$ est un plan perpendiculaire à AC en un point Q tel que

$$KQ = \frac{n^2}{2AC} \qquad \text{(K, milieu de AC).}$$

La droite d'intersection de ces deux plans répond au lieu cherché ; cette droite perce le plan ABC au point d'intersection m des perpendiculaires élevées en P, Q à AB, AC.

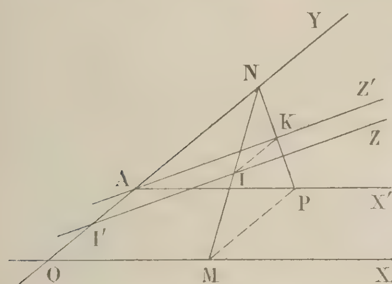
(EMILE HIERNAUX, école normale de Châlons-sur-Marne).

[Ont résolu la même question : MM. J. Hébré ; E. Hugonnier-Ginet ; M. Laurence ; J. Lehmann ; Noël; L. Ollié ; R. Rives ; P. Zlatco.]

(*) On sait que le lieu des points d'un plan passant par AB et tels que $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 =$ constante, est une perpendiculaire à AB. Si le plan tourne, cette perpendiculaire décrit un plan.

4869. — *Deux points mobiles se meuvent respectivement sur deux droites concourantes. Leurs mouvements sont uniformes, mais accomplis avec des vitesses qui ne sont pas nécessairement égales. Lieu du milieu de la droite qui joint à chaque instant les deux mobiles.*

Soient M et N les positions des mobiles sur OX, OY, à un instant quelconque, et A la position du mobile N lorsque le mobile M est en O.



Le mouvement étant uniforme, les espaces parcourus OM, AN entre deux instants quelconques sont dans un rapport constant. Tout revient donc à trouver le lieu du milieu I de la droite MN joignant les extrémités de deux segments OM, AN lorsque le rapport $\frac{OM}{AN}$ est égal à une constante k.

Menons AP égal et parallèle à OM ; le point P décrit la parallèle AX' à OX. D'ailleurs, le rapport $\frac{AP}{AN}$ étant égal au rapport $\frac{OM}{AN} = k$, le triangle ANP reste semblable à lui-même, et par suite le côté NP a une direction fixe ; le milieu K de ce côté décrit donc une droite fixe AZ'.

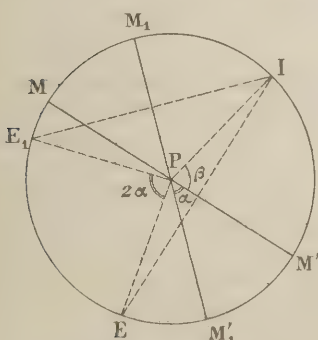
Dans le triangle MNP, la droite IK joignant les milieux de deux côtés est parallèle au troisième MP et égale à sa moitié ; comme MP est égal et parallèle à OA, il en résulte que IK est parallèle à OA et égal à sa moitié, de sorte que le lieu du point I est une parallèle à AZ' menée par le milieu I' de OA.

(H. PITRAT, à Givors.)

[Ont résolu la même question ; MM. J. Guéret ; E. Hiernaux ; M. Laurence ; R. Rives.]

4870. — *Un miroir plan est appliqué contre un axe qui repose sur des coussinets fixes ; le miroir et son axe sont parallèles à la ligne des pôles. Un moteur fait tourner le système avec une vitesse uniforme d'un tour en quarante-huit heures dans le sens du mouvement des étoiles.*

Démontrer que l'image d'une étoile quelconque dans le miroir est fixe. On sait que toutes les étoiles paraissent décrire en vingt-quatre heures des circonférences dont les plans sont perpendiculaires à la ligne des pôles, et les centres sont sur cette ligne.



La distance de l'axe du miroir à la ligne des pôles étant négligeable par rapport à la distance aux étoiles, ces deux droites coïncident sensiblement.

Le plan du miroir est donc perpendiculaire à celui du cercle de l'étoile et leur intersection est un diamètre MM' de ce cercle. L'image d'une étoile E est par suite le symétrique I de E par rapport à MM'.

D'après l'énoncé, l'étoile tourne deux fois plus vite autour du pôle que le miroir autour de l'axe. Si donc E décrit un arc de 2α degrés et vient en E_1, le miroir et par suite la droite MM' tournent de α degrés. En appelant β l'angle $IPM' = M'PE$, on a

$$\widehat{IPM'_1} = \beta + \alpha.$$

D'autre part $\widehat{E_1PM'_1} = 2\alpha + \widehat{EPM'} = 2\alpha + \beta - \alpha = \alpha + \beta.$

Par suite $\widehat{IPM'_1} = \widehat{E_1PM'_1}.$

I est le symétrique de E_1 par rapport à $M_1M'_1$. L'image de l'étoile est donc encore en I.

(PAUL THONET, athénée royal d'Anvers.)

[Ont résolu la même question ; MM. A. Meynier, à Sciez, et L. Ollié, à Auch.]

ARITHMÉTIQUE

4900. — *Si n est un nombre entier non multiple de 7, l'expression*

$$(3^{2n}.4^{2n} + 5^2.2^{3n} - 2^{3n}.3^{2n} - 5^2.4^{2n})(n^6 - 1)$$

est divisible par 448.

Remarquons d'abord que l'expression prend successivement l'une des formes

$$[3^{2n}(4^{2n} - 2^{3n}) - 5^2(4^{2n} - 2^{3n})](n^6 - 1)$$

ou
$$(2^{4n} - 2^{3n})(3^{2n} - 5^2)(n^6 - 1)$$

ou
$$2^{3n}(2^n - 1)(3^{2n} - 5^2)(n^6 - 1).$$

Il s'agit de montrer que ce dernier produit est divisible par $448 = 2^6 \times 7$, c'est-à-dire séparément par l'un des facteurs 2^6 et 7, premiers entre eux.

Divisibilité par 2^6. — Comme $n > 1$ à cause du facteur $n^6 - 1$ qui ne peut être nul, on a $n \geqslant 2$; donc le facteur 2^{3n}, et par suite l'expression donnée, est au moins divisible par $2^{3\times 2}$ ou 2^6 (*).

Divisibilité par 7. — n n'étant pas multiple de 7, le facteur $n^6 - 1 = n^{7-1} - 1$ est divisible par 7 en vertu du théorème de Fermat. On peut d'ailleurs le voir directement en remplaçant dans ce facteur n par l'une des formes

$$m.7 \pm 1, \qquad m.7 \pm 2, \qquad m.7 \pm 3.$$

(LOUIS RICHARD, à Dieulefit.)

[Ont résolu la même question ; Mlles E. Lazare ; A. Salcilles ; MM. L. Bannerot ; L. Barberot ; V. Barol ; H. Belbenoit ; P. Bonnefoy ; P. Bonnet ; A. Bottin ; J. Bourrec ; R. Cattin ; L. Colombey ; Daure ; Delhotel ; G. de France ; G. Demoès ; A. Duittoz ; E. Durand ; V. Enescu ; F. Filliol ; G. Foucry ; A. Foy ; J. Franceschini ; F. Gérard ; G. Guinand ; A. Hardy ; R. Henry ; C. Huard ; Hugonnier-Ginet ; A. James ; D. Kœnig ; A. Laroq ; D. Laurent ; M. Laurence ; A. Lecoutour ; L. Lemmet ; M. B., instituteur à I ; L. Minjoz ; A. Modugnof ; D. Montel ; A. Neef ; Noël ; L. Patin ; L. Pelletier ; A. Pernin ; M. Petit ; P. Plisson ; P. Quintescu ; R. Rives ; M. Royer ; V. Thébault ; C. Vallot ; H. Varennes.]

ALGÈBRE

4860. — *Former, résoudre, puis discuter suivant les valeurs de m l'équation qui donne les valeurs de x qui satisfont aux trois équations aux trois inconnues x, y, z :*

$$y + 2z = (m+1)x - 4m, \qquad (1)$$

$$y + z = mx - 2m - 1, \qquad (2)$$

$$y^2 - 2z^2 + 2xy - xz - x - 2y + 8m^2 - 8m - 2 = 0 ; \qquad (3)$$

mettre tous les calculs.

(*École des Beaux-Arts, 1900, section d'Architecture.*)

(*) On peut observer en outre que $3^{2n} - 5^2$ ou $(3^n + 5)(3^n - 5)$ est un produit de deux facteurs pairs, et même que l'un des deux est divisible par 4, de sorte que le produit n'est pas divisible seulement par 2^6, mais par 2^9.

Retranchons l'équation (2) de l'équation (1) ; on a

$$z = x - 2m + 1 ;$$

de même en retranchant l'équation (1) de l'équation (2) préalablement multipliée par 2, on obtient

$$y = (m - 1)x - 2.$$

Portons ces valeurs de z et y dans l'équation (3); nous aurons

$$[(m-1)x-2]^2 - 2(x-2m+1)^2 + 2(m-1)x^2 - 4x - x$$
$$- 2(m-1)x + 4 + 8m^2 - 8m - 2 = 0$$

ou, en ordonnant et réduisant,

$$(m^2-4)x^2 - 4(1-m)x + 4 = 0.$$

Discussion. — La condition de réalité est

$$4(1-m)^2 - 4(m^2-4) \geqslant 0$$

ou $$5 - 2m \geqslant 0$$

ou $$m \leqslant \frac{5}{2}.$$

Le signe des racines dépend de celui de leur produit et de leur somme :

$$P = \frac{4}{m^2-4}, \qquad S = \frac{4(1-m)}{m^2-4}.$$

Les valeurs remarquables de m sont $\frac{5}{2}$, -2, $+2$ et 1 ou, par ordre de grandeur croissante,

$$-2, \quad 1, \quad 2, \quad \frac{5}{2}.$$

La discussion se trouve résumée dans le tableau suivant.

m	P	S	Conclusion.
$-\infty$			
	+	+	Deux racines positives.
-2	∞	∞	Une racine infinie, l'autre égale à $\frac{1}{3}$.
	—	—	Une racine positive *inférieure* en valeur absolue à la racine négative.
1	......	0	
	—	+	Une racine positive *supérieure* en valeur absolue à la racine négative.
2	∞	∞	Une racine infinie, l'autre égale à -1.
	+	—	Deux racines négatives.
$\frac{5}{2}$			
			Racines imaginaires.
$+\infty$			

En résolvant l'équation, on obtient comme expression des racines :

$$x = \frac{2(1 - m \pm \sqrt{5-2m})}{m^2-4}.$$

(L. OLLIÉ, à Auch.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Anzemberger ; P. Bancillon ; L. Colombey; Hébré: E. Hugonnier-Ginet; A. Legros; P. Saintin; H. Varennes.]

4901. — *Résoudre l'équation* $x^2 = (x-1)^2(x^2+1)$.

Première solution. — L'équation développée s'écrit (*)

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0.$$

(*) Il n'est pas nécessaire de développer l'équation ; si on divise les deux termes par x^2, en divisant par x chacune des parenthèses du second membre, l'équation devient

$$1 = \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

ou, en posant $x + \frac{1}{x} = y$, $\qquad 1 = (y-2)y$.

Pour résoudre cette équation réciproque du quatrième degré, associons deux à deux les termes extrêmes et les termes moyens, puis divisons les deux membres par x^2; il vient

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0.$$

Si l'on pose alors

$$x + \frac{1}{x} = y, \quad \text{on en déduit} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2,$$

et l'équation précédente devient

$$y^2 - 2y - 1 = 0,$$

d'où l'on tire $$y = 1 \pm \sqrt{2}.$$

On est ainsi ramené à résoudre les deux équations

$$x + \frac{1}{x} = 1 + \sqrt{2}, \qquad x + \frac{1}{x} = 1 - \sqrt{2},$$

ou $$x^2 - (1+\sqrt{2})x + 1 = 0, \qquad x^2 - (1-\sqrt{2})x + 1 = 0.$$

En résolvant ces équations, on obtient, pour la première, les deux racines réelles

$$x = \frac{1 + \sqrt{2} \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2},$$

et pour la seconde, les deux racines imaginaires,

$$x = \frac{1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{-(2\sqrt{2}+1)}}{2}.$$

(Henri PITRAT.)

Seconde solution. — En développant $(x-1)^2$, l'équation peut s'écrire

$$x^2 = (x^2+1)^2 - 2x(x^2+1).$$

Sous cette forme, on remarque que le second membre représente le carré développé du binome $(x^2+1) - x$ moins le terme x^2 ; par suite en ajoutant x^2 de part et d'autre, il vient

$$2x^2 = (x^2 + 1 - x)^2$$

ou, en extrayant les racines carrées de chaque membre,

$$\pm x\sqrt{2} = x^2 + 1 - x,$$

et en prenant séparément les signes + ou —,

$$x^2 - (1+\sqrt{2})x + 1 = 0, \qquad x^2 - (1-\sqrt{2})x + 1 = 0,$$

équations identiques à celles trouvées plus haut.

(L. LESTOCARD, collège de Compiègne.)

[Ont résolu la même question : MM. M. Antoine ; E. Anzemberger ; L. Bannerot ; E. Barbé ; L. Barberot ; V. Barol ; M. Bernard ; M. Beyney ; A. Bottin ; J. Bourrec ; Butruille ; R. Cattin ; L. Chaix ; C. Chessin ; Daure ; Delhotel ; M. del Valle ; H. Dobryzniak ; A. Drocourt ; A. Duiltoz ; E. Durand ; V. Enescu ; G. Foucry ; A. Foy ; E. Garagnon ; F. Gérard ; M. Gondran ; J. Guéret ; G. Guinand ; H. Guillaud ; A. Hardy ; R. Henry ; V. Herzenberg; C. Huard ; E. Hugonnier-Ginet ; E. Laroche ; M. Laurence ; D. Laurent ; Lazar ; A. Legros ; G. Le Sage ; E. Licope ; L. Limmet ; Mars ; A. Meynier; J. Motte ; A. Neef ; L. Patin ; L. Pelletier ; L. Perino ; A. Pernin ; M. Petit ; P. Petit ; P. Plisson ; P. Quintescu ; M. Royer ; G. Salaun ; E. Serres ; J. Tastet ; V. Thébault ; P. Thonet ; M. Turpain ; P. Valentin ; C. Vallot ; A. Vannier ; H. Varennes.]

GÉOMÉTRIE

4859. — *Étant donné un hexagone régulier* ABCDEF *inscrit dans une circonférence de rayon* R, *du sommet* C *comme centre, avec* CE *pour rayon, on décrit l'arc de cercle* AE, *et on considère la portion du plan limitée par l'arc* AE *et les côtés* AB, BC, CD, DE *(partie ombrée).* 1° *Trouver l'aire s de la partie ombrée.* 2° *Trouver le volume* V *et l'aire* S *du solide engendré par la partie ombrée en tournant autour de* CD. 3° *Calculer par logarithmes le rayon* R *sachant que* V = 7[lit],2758 ; *mettre tous les calculs.*

(*École des Beaux-Arts, 1900, section d'Architecture.*)

1° La surface à évaluer se compose de deux triangles égaux ABC, CDE et du secteur circulaire ACE dont l'angle est de 60°.

On a :

$$\text{Surf. CDE} = \frac{1}{2}\,\text{CD} \times \text{EE}'$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{R}.\frac{\text{R}\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{R}^2\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{Surf. CAE} = \frac{1}{6}\ \text{cercle CE}$$

$$= \frac{\pi}{6}\overline{\text{CE}}^2 = \frac{\pi}{6}\,3\text{R}^2 = \frac{\pi\text{R}^2}{2}.$$

La surface à évaluer est donc

$$\text{S} = 2\ \ \text{Surf. CDE} + \text{Surf. CAE} = \frac{\text{R}^2\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi\text{R}^2}{2} = \frac{\text{R}^2}{2}(\sqrt{3}+\pi).$$

2° Le volume V est la somme de trois volumes qu'on peut évaluer, savoir :

(I) le volume engendré par CDE, qui a pour expression

$$\frac{1}{3}\,\pi\overline{\text{EE}'}^2 \times \text{CD} = \frac{1}{3}\pi.\frac{3\text{R}^2}{4} \times \text{R} = \frac{\pi\text{R}^3}{4};$$

(II) le volume engendré par ABC, qui est la différence entre le volume du tronc de cône engendré par ABB′C et celui du cône engendré par BB′C,

$$\frac{1}{3}\pi\text{CB}'(\overline{\text{AC}}^2 + \text{AC} \times \text{BB}' + \overline{\text{BB}'}^2) - \frac{1}{3}\pi\text{CB}' \times \overline{\text{BB}'}^2$$

ou

$$\frac{1}{3}\pi\text{CB}' \times \text{AC}(\text{AC}+\text{BB}')$$

ou enfin

$$\frac{1}{3}\pi.\frac{\text{R}}{2} \times \text{R}\sqrt{3}\left(\text{R}\sqrt{3} + \frac{\text{R}\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi\text{R}^3}{12} \times 9 = \frac{3\pi\text{R}^3}{4}\ (^*);$$

(III) le volume engendré par le secteur ACE,

$$\frac{2}{3}\,\pi\overline{\text{CE}}^2 \times \text{CE}' = \frac{2}{3}\pi.\,3\text{R}^2 \times \frac{3\text{R}}{2} = 3\pi\text{R}^3.$$

Donc

$$\text{V} = \frac{\pi\text{R}^3}{4} + \frac{3\pi\text{R}^3}{4} + 3\pi\text{R}^3 = 4\pi\text{R}^3.$$

La surface S se compose de même d'une somme de surfaces :

$$\text{S} = \text{Surf. DE} + \text{Surf. zone AE} + \text{Surf. AB} + \text{Surf. BC}.$$

Or on a facilement

$$\text{Surf. DE} = \text{Surf. BC} = \pi\text{BC} \times \text{BB}' = \pi\text{R}\frac{\text{R}\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{Surf. AB} = \pi\text{AB}(\text{BB}' + \text{AC}) = 3\pi\text{AB}.\text{BB}' = 3\pi\text{R}\,\frac{\text{R}\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{Surf. zone AE} = 2\pi\text{CE} \times \text{CE}' = 2\pi\text{R}\sqrt{3} \times \frac{3\text{R}}{2} = 3\pi\text{R}^2\sqrt{3}.$$

Donc

$$\text{S} = \pi\text{R}^2\sqrt{3} + 3\pi\text{R}^2\sqrt{3} + \frac{3\pi\text{R}^2\sqrt{3}}{2} = \frac{11\pi\text{R}^2\sqrt{3}}{2}.$$

3° Si on suppose $\text{V} = 7^{\text{lit}},2758$ on a, en supposant R exprimé en décimètres,

$$4\pi\text{R}^3 = 7{,}2758, \qquad \text{R}^3 = \frac{7{,}2758}{4\pi} = \frac{3{,}6379}{2\pi},$$

d'où

$$\log \text{R} = \frac{1}{3}(\log 3{,}6379 + \text{c}^{\text{t}}\log 2 + \text{c}^{\text{t}}\log \pi),$$

$$\begin{aligned}
\log 3{,}6379 &= 0{,}5608508\\
\text{c}^{\text{t}}\log 2 &= \bar{1}{,}6989700\\
\text{c}^{\text{t}}\log \pi &= \bar{1}{,}5028501\\
\hline
3\log \text{R} &= \bar{1}{,}7626709,\\
\log \text{R} &= \bar{1}{,}9208903 = \log 0{,}83347;
\end{aligned}$$

donc

$$\text{R} = 83^{\text{mm}},347.$$

(HUGONNIER-GINET.)

(*) On peut remarquer que

Vol. ABC = Surf. ABC × circonf. décrite par le centre de gravité; or le centre de gravité est sur BE ; on a donc

$$\text{Vol. ABC} = \frac{\text{R}^2\sqrt{3}}{4} \times 2\pi\frac{\text{R}\sqrt{3}}{2} = \frac{3\pi\text{R}^3}{4}.$$

[Ont résolu la même question : MM. E. Anzemberger ; V. Barol ; H. Dobryzniak ; J. Hébré ; E. Hiernaux ; M. Laurence ; J. Lehmann ; J. Ménéchal ; A. Meynier ; Noël ; R. Rives ; M. Royer ; P. Saintin ; P. Valentin ; P. Zlatco.]

4905. — *On considère un triangle* ABC *dont l'orthocentre est* H. *La hauteur* AH *rencontre le cercle circonscrit à* ABC *en un second point* A′ ; *la droite qui joint le point* H *au milieu de* BC *rencontre le cercle en* A″ *et* A‴. *Montrer que l'une des deux droites* A′A″, A′A‴ *est parallèle au côté* BC.

Joignons le centre O du cercle circonscrit au milieu D de BC. On sait que OD est parallèle au segment AH et égal à sa moitié ; par suite HD coupe AO prolongé en un point α tel que Oα = OA, c'est-à-dire au point A″ où HD rencontre le cercle O.

La corde AA″ est donc un diamètre du cercle O et est vue du point A′ sous un angle droit.

Dès lors la droite A′A″ est bien parallèle à BC, puisque AH est une perpendiculaire commune à ces deux droites.

Lorsque l'un des angles B ou C est obtus, le point α tombe sur l'arc BAC et se confond alors avec A‴ ; dans ce cas, la droite A′A‴ est parallèle à BC comme on peut le voir en faisant la figure.

(Emile SERRES, lycée de Pau.)

[Ont résolu la même question ; Mlle Degand ; MM. E. Anzemberger ; A. Beckerich ; H. Belbenoit ; L. Bannerot ; Bonnet ; R. Cattin ; Duittoz ; E. Durand ; J. Guéret ; H. Guillaud ; A. Hardy ; L. Hostier ; C. Huard ; Hugonnier-Ginet ; M. Laurence ; A. Le Gent ; E. Licope ; R. Manen ; C. Marie ; D. Montel ; Naboulet ; A. Neef ; L. Pelletier ; A. Pernin ; P. Plisson ; R. Rives ; Saint-Mare ; G. Salaun ; F. Thibier ; P. Valentin ; P. Zlatco.]

PHYSIQUE

4857. — *Un corps de pompe reçoit de la vapeur d'eau à la température de 200° et à la pression de onze atmosphères. Sur la face opposée du piston s'exerce la pression atmosphérique.*

Le travail résultant d'un coup de piston est de 10 000 kilogrammètres.

Quel est le volume du corps de pompe ?

Quelle masse de vapeur reçoit-il à chaque coup de piston ?

Densité de la vapeur d'eau par rapport à l'air, 0,622. Masse normale du litre d'air, $1^{\text{gr}},293$.

Coefficient de dilatation des gaz, $\frac{1}{273}$.

Densité du mercure, 13,6.

(*Bacc. lettres-sciences, Paris, juillet 1900.*)

Appelons S la section du corps de pompe en mètres carrés, h sa hauteur en mètres. La pression correspondant à une atmosphère a pour valeur sur un centimètre carré : $76 \times 13{,}6 = 1033^{\text{gr}},6$ ou $1^{\text{kg}},0336$, et sur un mètre carré : $1{,}0336 \times 10000^{\text{kg}}$. Le travail résultant d'un coup de piston étant égal au produit de la force par le chemin parcouru, on a

$$1{,}0336 \times 10000(11-1)\text{S} \times h = 10000,$$

d'où

$$\text{S}h = 0^{\text{mc}},09675.$$

La masse de vapeur que reçoit le corps de pompe à chaque coup de piston est donnée par la formule

$$\text{M} = 96{,}75 \times 1{,}293 \times 0{,}622 \times 11 \times \frac{1}{1+\frac{200}{273}}.$$

On a donc $M = 494^{gr},01$.

(A. MEYNIER, à Sciez.)

[Ont résolu la même question : Mlle Saleilles ; MM. Belbenoit ; J. Hébré ; J. Ménéchal ; A. Meynier.]

4889. — *Un vase en verre est pesé dans les deux conditions suivantes :*

1° Après qu'on l'a rempli d'air sec à 0° ;

2° Après qu'on l'a rempli d'une certaine vapeur à 200° et sous la même pression que précédemment.

On constate que son poids n'a pas changé. Quelle est la densité de la vapeur par rapport à l'air ?

Coefficient de dilatation cubique du verre, 0,000025.

— — — *des gaz,* 0,003665.

(*Bacc. lettres-math., Poitiers, mars 1899.*)

La pression étant la même dans les deux pesées, il n'y a pas lieu d'en tenir compte.

Soient donc V le volume du vase à 0°, d la densité de la vapeur par rapport à l'air. Le poids de l'air sec étant égal au poids de la vapeur, on peut écrire

$$V \times 1,293 = V(1+200\times 0,000025)\times 1,293 \times d \times \frac{1}{1+200\times 0,003665},$$

d'où l'on tire

$$d = \frac{1,733}{1,005} = 1,724.$$

(E. BAUDOUIN.)

[Ont résolu la même question : Mlles Madonne ; Saleilles ; MM. Anzenberger ; H. Cazaux ; Dobryzniak ; Durand ; Hugonnier ; D. Laurent ; J. Lehmann ; Mabon ; J. Ménéchal ; A. Meynier ; Noël ; M. Popescu ; V. Saintin ; H. Varennes.]

4890. — *On donne un prisme triangulaire* ABCA'B'C' *en verre, dont la face latérale* AA'BB' *est perpendiculaire à la face latérale* AA'CC' *tandis qu'elle fait un angle de 60° avec la troisième face* BB'CC' ; *l'indice de réfraction du verre est égal à* $\sqrt{2}$. *Un rayon lumineux perpendiculaire à la face* AA'BB', *pénètre à l'intérieur du prisme en traversant cette face ; déterminer sa marche ultérieure et calculer sa déviation après sa sortie du prisme.*

(*Bacc. lettres-math., Caen, juillet 1900.*)

Soit ABC la section droite du prisme qui se confond avec le plan d'incidence du rayon lumineux SI. Les angles B et i étant égaux, comme ayant les côtés perpendiculaires, l'angle i a pour valeur 60°.

L'angle limite λ est défini dans le cas présent par la relation

$$\sin \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

d'où

$$\lambda = 45°.$$

Comme $i > \lambda$, il y a réflexion totale et le rayon SI se réfléchit suivant IH. Soit HM la normale au point H ; on a

$$i' = \widehat{HMC} - \widehat{IHM} = 60° - 30° = 30°.$$

Par suite

$$\sin r' = n \sin i' = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

d'où

$$r' = 45°.$$

Le rayon lumineux émerge de la face AC suivant HR.

La déviation D est l'angle de la droite HR avec SI ou avec AC qui est parallèle à SI. Par suite,

$$D = 90° - r' = 45°.$$

(H. DE LA PERRELLE.)

[Ont résolu la même question : MM. P. Bancillon ; Belbenoit ; Charpentier ; Durand ; H. Mabon ; J. Ménéchal ; A. Meynier ; J. Motte ; M. Petitjean ; Noël ; L. Raymond ; P. Saintin ; Ventre.]

VARIÉTÉ

Sur l'enseignement de la Géométrie.

Les auteurs des traités de géométrie les plus répandus en France ne se sont pas asservis à suivre l'ordre des *Éléments* d'Euclide. Ils ont soulevé et résolu diverses questions pédagogiques intéressantes, et apporté de notables perfectionnements à l'enseignement de la géométrie. Il peut être intéressant de donner ici quelques détails historiques relativement à une innovation qu'on discute dans divers pays, je veux parler de la fusion de la géométrie plane et de la géométrie de l'espace. Comme le fait remarquer très justement M. Ripert dans un article de l'*Enseignement mathématique* (15 septembre 1900), si cette innovation est adoptée elle modifiera profondément les méthodes d'enseignement. C'est pourquoi il est à propos de signaler les discussions entamées à ce sujet.

C'est en Italie surtout que la question a été abordée dans ces derniers temps, soit dans diverses publications, soit dans des congrès pédagogiques. Elle a été mise à l'ordre du jour en 1884 par M. le professeur de Paolis qui publia des éléments de géométrie précédés d'une préface dans laquelle l'auteur indiquait les raisons de l'innovation dont il donnait un exemple.

Mais l'ouvrage de M. de Paolis ne pouvait pas être utilisé dans les lycées italiens dont le plan d'études est très analogue à celui en vigueur dans nos lycées français. Cependant l'initiative de M. de Paolis ne fut pas sans résultat. En 1886, M. Lazzeri, professeur à l'Académie navale de Livourne, décida le directeur de l'Académie et ses collègues à adopter le principe de la fusion. Le cours de M. Lazzeri lithographié en 1887 et 1889 fut imprimé en 1891 et une nouvelle édition a paru en 1898.

En même temps l'Association *Mathesis*, — association de professeurs de mathématiques appartenant à l'enseignement secondaire, soit public, soit privé, et qui a pour objet l'amélioration et le perfectionnement des professeurs, au point de vue scientifique et didactique, — discuta la question de la fusion. Par l'organe de son président M. le professeur Betazzi, du lycée Cavour à Turin, l'association fit parvenir au ministère de l'Instruction publique un vœu invitant le ministère à étudier la question.

Au congrès tenu en septembre 1898, l'Association Mathesis vota à l'unanimité l'ordre du jour suivant :

« Il convient d'apporter, s'il est possible, des modifications aux programmes, de façon que le professeur soit libre de choisir entre la méthode séparatiste et la méthode fusioniste. »

Il résulte de la lecture des Bulletins de *Mathesis* que la fusion a un nombre toujours croissant de partisans ardents. Cependant l'Association n'a pas voulu faire suivre le vœu que je viens de citer d'un projet de plan d'études pour ne pas discuter trop à la hâte des questions délicates.

Dans d'autres pays, en Allemagne notamment, on s'est occupé de la question de la fusion. Je ne veux pas la discuter ici, mais seulement la signaler à nos lecteurs qu'elle ne peut manquer d'intéresser. Mais je crois devoir rappeler que la question a déjà

été soulevée en France. M. Ripert a signalé un ouvrage de M. Mahistre, autorisé par le conseil supérieur de l'Instruction publique en 1844, dans lequel 261 pages sont consacrées à une exposition de la géométrie plane et ses analogies avec la géométrie de l'espace, et 9 pages seulement à la géométrie de l'espace, partie indépendante.

On peut faire observer aussi qu'en 1884, en même temps que l'ouvrage de M. de Paolis paraissait en Italie, M. Charles Méray, l'éminent professeur de l'Université de Dijon, publiait à la librairie Savy des éléments de géométrie où la géométrie de l'espace était étudiée en même temps que la géométrie plane, et M. Méray citait dans sa préface les lignes suivantes de Gergonne, qui prouvent que l'idée de la fusion n'était pas absolument nouvelle en France lors de la publication du livre de M. Mahistre :

« Il est donc raisonnablement permis de se demander si notre manière de diviser la géométrie en *géométrie plane* et *géométrie de l'espace* est aussi naturelle et aussi exactement conforme à l'essence des choses, que vingt siècles d'habitude ont pu nous le persuader. Toujours du moins demeure-t-il vrai qu'en y renonçant on parviendrait, en ne revenant pour ainsi dire qu'à la simple intuition, à pousser assez avant dans la géométrie des commençants que l'étude du calcul, présentée dès l'entrée, ne rebute que trop souvent, et qui peut-être s'y livreraient plus tard avec beaucoup moins de répugnance, lorsque leur intelligence se serait agrandie et fortifiée par l'étude d'une série plus ou moins prolongée de propriétés de l'étendue (*Annales de mathématiques*, t. XVI, p. 209.) »

Le traité de M. Méray semble avoir passé inaperçu ; il semble à propos de rappeler l'attention sur les idées qui y sont émises. Car quelle que soit la conclusion à laquelle on puisse être conduit par la discussion de ces idées, cette discussion ne peut manquer d'être suggestive.

CH. BIOCHE.

CONCOURS DE 1900 *(Suite)*.

CERTIFICAT D'APTITUDE AU PROFESSORAT DES ÉCOLES NORMALES ET DES ÉCOLES PRIMAIRES SUPÉRIEURES

Aspirants.

Mathématiques.

I. — Comment peut-on trouver la plus petite fraction qui soit divisible par plusieurs fractions données ? (On dit qu'une fraction est divisible par une autre, quand la première fraction est égale au produit de la seconde par un nombre entier.)

Application au cas où les fractions données sont $\frac{24}{13}$, $\frac{35}{126}$, $\frac{147}{14}$.

II. — Énoncer les théorèmes qui conduisent à la mesure du volume de la sphère et du segment sphérique.

Démontrer le théorème relatif au volume engendré par un segment de cercle tournant autour d'un diamètre du cercle, extérieur au segment.

III. — **4917**. Dans un triangle rectangle ABC, on appelle r le rayon du cercle inscrit à ce triangle et r' le rayon du cercle tangent à l'hypoténuse BC et aux prolongements des deux côtés de l'angle droit (cercle exinscrit).

On donne l'hypoténuse $BC = a$, ainsi que le rapport m du rayon r' au rayon r.

1° Calculer les deux côtés de l'angle droit de ce triangle rectangle. Discussion par rapport à m.

2° Pour chaque valeur convenable de m, on trouve un triangle rectangle ABC répondant à la question. On appelle M le milieu de son hypoténuse et O et O' les centres des cercles inscrit et exinscrit dont le rayons ont été désignés précédemment par r et r'.

Calculer, en fonction de m et de a, l'expression z du rapport de la différence des carrés des distances du point M aux points O' et O à la somme des carrés de ces mêmes distances, soit

$$z = \frac{\overline{MO'}^2 - \overline{MO}^2}{\overline{MO'}^2 + \overline{MO}^2}.$$

Variations de cette expression suivant les diverses valeurs attribuées à m.

Application. — Dans les deux parties du problème, examiner le cas particulier de $m = 3 + 2\sqrt{2}$ et dire ce qui arrive lorsque m croît au delà de toute limite.

(18 juin, de 8 h. à midi.)

Physique et Chimie.

I. — Évaporation des corps solides et liquides. — Lois du phénomène. — Applications diverses.

II. — Propriétés des bases minérales solubles. Indiquer leurs modes de préparation. Signaler et expliquer leurs applications industrielles et agricoles.

(19 juin, de 9 h. à midi.)

Sciences naturelles.

I. — Faire connaître les divers mécanismes respiratoires des animaux vivant dans l'eau et signaler les adaptations de ces mécanismes à la vie aérienne.

II. — Roches détritiques ou de dépôt. Procédés qui transforment ces roches meubles en roches compactes. Modifications apportées dans ces roches aux points de vue physique et chimique par les eaux d'infiltration. Influence de ces modifications sur la pureté des sources.

(19 juin, de 3 h. à 5 h.)

Aspirantes.

Mathématiques.

I. — Établir que le plus petit commun multiple de deux nombres entiers est égal au quotient de leur produit par leur plus grand commun diviseur.

Propriétés des quotients de ce plus petit commun multiple par chacun des deux nombres.

II. — On donne le plus petit commun multiple de deux nombres égal à 48 et l'un de ces nombres égal à 6. Trouver toutes les valeurs que peut prendre l'autre.

III. — **4918**. On donne un cercle de centre O et de rayon R, un point I dans le plan tel que $OI = 3R$.

1° Déterminer par une construction géométrique sur le diamètre OI deux points M et N, tels que le point I soit le milieu du segment MN et que le produit $OM \times ON$ soit égal à R^2. Calculer OM et ON.

2° Montrer que les rapports $\frac{CM}{CN}$ et $\frac{DM}{DN}$ sont égaux (C et D sont les extrémités du diamètre OI), et calculer la valeur numérique commune de ces rapports.

3° Déterminer par une construction géométrique sur le cercle O un point P tel que

$$\overline{PM}^2 + \overline{PN}^2 = 2l^2,$$

l désignant une longueur donnée.

Entre quelles limites doit être contenue cette longueur l pour que le problème soit possible ?

(18 juin, de 8 h. à midi.)

Physique et Chimie.

I. — Vapeur d'eau dans l'atmosphère. Décrire ses transformations en insistant sur les lois ou faits généraux qui y président. Indiquer des expériences propres à mettre ces faits généraux en évidence ou à reproduire artificiellement les phénomènes décrits.

II. — Exposer les circonstances de production de l'ammoniaque, sans donner la description des appareils producteurs.

Quels sont les corps dont les propriétés ont de l'analogie avec celles de l'ammoniaque ? Expliquer ces analogies.

(19 juin, de 9 h. à midi.)

Sciences naturelles.

I. — Les Graminées : Graminées utiles et Graminées nuisibles.

II. — Le sang chez l'Homme : rôle de ses différentes parties. (Ne pas parler de la circulation.)

(*19 juin, de 3 h. à 5 h.*)

BACCALAURÉATS

SESSION DE NOVEMBRE 1900

PARIS

Lettres-Mathématiques.

Mathématiques.

I. — **4919**. Inscrire dans une sphère donnée, de rayon R, un cylindre dont la surface totale soit égale au produit de la longueur d'une des circonférences de base du cylindre par une longueur donnée a. — Discussion.

II. — *1er sujet*. — Couple. Un couple n'a pas de résultante.

II. — *2e sujet*. — Conditions d'équilibre d'un corps solide mobile autour d'un point fixe.

II. — *3e sujet*. — Equilibre de la poulie mobile. Moufles.

Physique.

I. — Une masse de plomb tombe, à Paris, d'une hauteur de 300^m sans vitesse initiale, sur un sol parfaitement élastique ; elle ne rebondit pas. On demande :

1° Quelle vitesse cette masse possède en arrivant au sol ;

2° A quelle température elle sera portée aussitôt après le choc, en admettant qu'elle renferme à ce moment toute la chaleur développée par le choc.

On ne tient pas compte de la résistance de l'air. L'expérience est faite à la température de 25°.

La chaleur spécifique du plomb est de 0,031.

L'accélération terrestre à Paris est 981 C. G. S. L'équivalent mécanique de la calorie est $4{,}18 \cdot 10^7$ C. G. S.

II. — *1er sujet*. — Spectres des diverses sources lumineuses. — Comment faut-il disposer l'expérience pour observer les raies du spectre solaire, et comment explique-t-on l'existence de ces raies ?

II. — *2e sujet*. — Réflexion et transmission de la chaleur rayonnante. Pouvoir réflecteur et pouvoir diathermane ; applications.

II. — *3e sujet*. — Réflexion totale. — Prisme à réflexion totale.

Lettres-Sciences.

Mathématiques.

I. — **4920**. Une parabole et une ellipse ont un foyer commun, et le sommet de la parabole coïncide avec le centre de l'ellipse. L'ellipse est définie par son grand axe $2a$ et sa distance focale $2c$.

Calculer, en fonction des quantités a et c :

1° la distance du foyer commun à l'un des points d'intersection, M, de l'ellipse et de la parabole ;

2° la distance de ce même foyer au point où la tangente en M à l'ellipse rencontre le grand axe ;

3° la distance de ce foyer au point où la tangente en M à la parabole rencontre le grand axe.

II. — *1er sujet*. — Ombre au soleil d'une sphère, d'un cône circulaire droit et d'un cylindre circulaire droit, ces derniers reposant par la base sur le plan horizontal de projection.

II. — *2e sujet*. — Principe de la méthode des plans côtés. Intersection de deux droites, de deux plans, dans le cas général. Angle de deux droites, et angle de deux plans.

II. — *3e sujet*. — Perspective d'un carrelage hexagonal reposant sur le plan géométral.

Physique.

I. — Quelle doit être la capacité d'un vase contenant 10^{gr} d'air pour que, à la température de zéro degré, cet air exerce par centimètre carré une pression égale au poids de $2^{kg},500$. La densité du mercure sera prise égale à 13,6. Masse du litre d'air normal : $1^{gr},293$.

Densité du mercure : 13,6.

II. — *1er sujet*. — Spectroscope ; spectres des diverses sources lumineuses ; analyse spectrale.

II. — *2e sujet*. — Poids spécifiques des solides et des liquides : méthodes pour leur détermination.

II. — *3e sujet*. — Machine pneumatique.

QUESTIONS PROPOSÉES

4921. — Trouver un nombre de deux chiffres, sachant qu'il est égal à m fois le produit de ses chiffres, m étant un nombre entier donné.

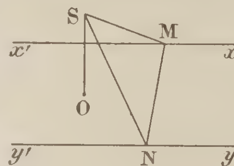
Quelles valeurs peut-on attribuer à m ?

4922. — Soient n points fixes $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Trouver le lieu des points M tels que la somme des carrés des distances du point M aux divers points fixes ait une valeur déterminée k^2 :

$$\overline{MP_1}^2 + \overline{MP_2}^2 + \ldots + \overline{MP_n}^2 = k^2.$$

(*Bacc. lettres-math., Bordeaux, juillet 1900.*)

4923. — On donne deux droites parallèles $x'x$, $y'y$ et un point O de leur plan situé à une distance d de ces deux droites. Par le point O on mène une perpendiculaire OS au plan de ces deux droites, $OS = h$. On demande de déterminer un point M sur $x'x$ et un point N sur $y'y$ de telle sorte que l'angle MSN soit droit et que le triangle MSN ait une aire donnée m^2. — Discussion.



(*Bacc. lettres-math., Clermont, juillet 1900.*)

4924. — Un trapèze isocèle (c'est-à-dire dont les côtés opposés non parallèles sont égaux) est à la fois inscrit dans un cercle de rayon R et circonscrit à un cercle de rayon r. Soient :

d, la distance des centres de ces deux cercles ;

2α, l'angle formé par les prolongements des côtés non parallèles du trapèze.

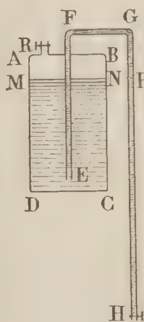
On demande :

1° de calculer R et d en fonction de α et de r ;

2° d'éliminer α entre les deux expressions obtenues, et de former ainsi la relation qui lie les trois quantités R, r, d.

(*Bacc. lettres-math., Montpellier, juillet 1900.*)

4925. — Un récipient cylindrique vertical, ABCD, porte sur sa paroi supérieure AB un robinet R actuellement ouvert. A cette même paroi se trouve soudée la courte branche EF d'un siphon EFGH, muni à son extrémité H d'un robinet R' actuellement fermé.

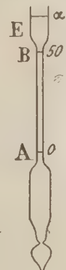


Le siphon est plein d'eau et ce liquide s'élève dans le récipient jusqu'au plan horizontal MN situé à une distance $AM = 10^{cm}$ de la paroi AB, et à une distance verticale $PH = 1^m$ de l'extrémité du siphon.

On ferme le robinet R et on ouvre le robinet R', et on demande de calculer le poids d'eau qui s'écoulera sachant que la hauteur du baromètre est de 740^{mm} et que la section de l'espace annulaire compris entre les parois du récipient et la petite branche du siphon est de 120^{cq}.

(*Bacc. lettres-math., Clermont, juillet 1900.*)

4926. — La tige d'un aréomètre est surmontée d'un entonnoir E muni d'un trait de repère α, qui limite une capacité de 5^{cc} ; l'instrument affleure dans l'eau au bas de la tige, en A, où l'on a marqué 0° ; un poids de 5^{gr} placé dans l'entonnoir fait affleurer l'aréomètre en B, où l'on marque 50 ; l'intervalle AB est divisé en 50 parties égales. — On verse en E, jusqu'au trait α, un liquide de densité inconnue, et on trouve que l'instrument affleure dans l'eau à la division 44. On demande la densité du liquide. Plus généralement, quelle est la densité du liquide qui déterminerait l'affleurement à la division n ?



(*Bacc lettres-sciences, Clermont, juillet 1900.*)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet, FACDOUEL, Dir.

25e Année. — N° 5 JOURNAL Paris, le 1er Décembre 1900.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0'30	0'35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Abonnements.. Librairie Nony et Cie, Boulᵈ St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1900)

Mathématiques élémentaires.

4843. — *O et O′ étant les points d'intersection des côtés opposés d'un quadrilatère Q, on considère le quadrilatère Q′ formé par les bissectrices des angles du quadrilatère Q, de telle sorte que deux côtés opposés de Q′ soient les bissectrices de deux angles opposés de Q.*

1° *Soit I le point d'intersection des diagonales du quadrilatère Q′ ; quel est le lieu géométrique du point I lorsque le quadrilatère Q se déforme de façon que, O et O′ restant fixes, deux sommets opposés de ce quadrilatère décrivent, respectivement, deux cercles fixes passant chacun par les deux points O et O′ ?*

2° *Les trois points O, O′ et I restant fixes, et l'un des sommets du quadrilatère Q décrivant une droite Δ, quels sont les lieux géométriques décrits par les trois autres sommets de ce quadrilatère ?*

Discuter la nature de chacun de ces lieux suivant la position de la droite Δ dans le plan.

3° *Calculer les angles et les côtés du quadrilatère Q′, connaissant les angles et les côtés du quadrilatère Q.*

Montrer que si l'on désigne par A, B, C, D les angles du quadrilatère Q, et par a′, b′, c′, d′ les longueurs des côtés de Q′ qui sont, respectivement, les bissectrices de ces angles, on a la relation

$$a' \sin \frac{A}{2} + c' \sin \frac{C}{2} = b' \sin \frac{B}{2} + d' \sin \frac{D}{2} .$$

I. — J'indiquerai d'abord une solution de la première partie en considérant un quadrilatère convexe Q ; je formerai le quadrilatère Q′ au moyen des bissectrices intérieures des angles de Q, et j'emploierai les raisonnements de la géométrie ordinaire. J'indiquerai ensuite une méthode générale, fondée sur la considération des droites dirigées dans le plan [1], permettant de traiter d'un seul coup tous les cas possibles de figure.

Soit ABCD (*fig.* 1) le quadrilatère donné Q dont les côtés opposés se coupent en O et O′ ; soit A′B′C′D′ le quadrilatère Q′ formé par les bissectrices intérieures des angles A, B, C, D, et I le point de rencontre des diagonales A′C′ et B′D′. Je vais montrer que le point I est le point de rencontre des bissectrices des angles O et O′.

Le point A′ est en effet le centre du cercle inscrit dans le triangle AOB, comme point de rencontre des bissectrices intérieures des angles A et B ; de même C′ est le centre du cercle exinscrit dans l'angle O du triangle COD, par suite A′C′ est la bissectrice de l'angle O.

(1) Voir Fontené, *Géométrie dirigée*.

On voit de la même manière que D′ est le centre du cercle inscrit dans le triangle ADO′, que B′ est le centre du cercle exinscrit dans l'angle O′ du triangle BCO′, et par suite que B′D′ est la bissectrice de l'angle O′.

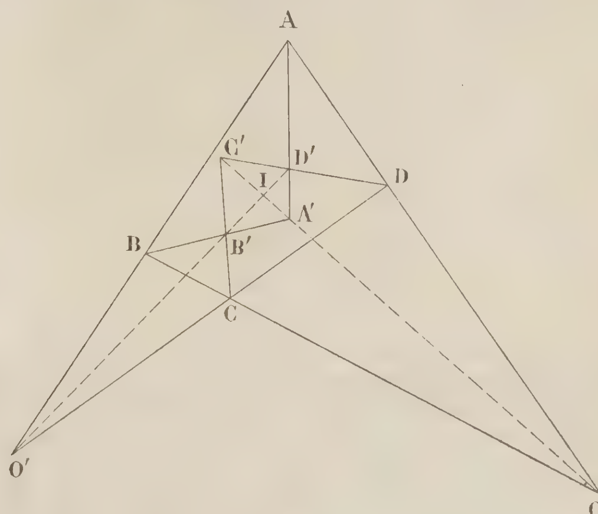


Fig. 1.

Si O et O′ sont fixes, et si A et C par exemple se déplacent sur des circonférences passant par O et O′, les angles A et C sont constants ; mais on a

$$\widehat{OCO'} = \widehat{OIO'} + \widehat{IOC} + \widehat{IO'C},$$

$$\widehat{OIO'} = \widehat{OAO'} + \widehat{AOI} + \widehat{AO'I},$$

et l'on en tire

$$2\,\widehat{OIO'} = \widehat{OCO'} + \widehat{OAO'} ;$$

par suite l'angle OIO′ est constant, et le point I est sur une circonférence fixe passant par O et O′.

Remarque I. — Le quadrilatère Q′ pourrait ne pas exister; c'est ce qui arriverait si deux sommets opposés venaient à se confondre. Si A′ et C′ étaient confondus, le cercle inscrit dans le triangle AOB et le cercle exinscrit au triangle COD seraient identiques, et le quadrilatère ABCD serait circonscrit à ce cercle. Mais alors les deux autres sommets B′ et D′ seraient aussi confondus avec A′ et C′, et le quadrilatère Q′ serait formé de quatre droites issues du centre du cercle inscrit dans le quadrilatère Q ; le point I se confondrait aussi avec ce point, et les raisonnements que nous avons faits subsisteraient entièrement.

Remarque II. — Lorsque les points A et C se déplacent sur les circonférences données passant par O et O′, le quadrilatère ABCD peut cesser d'être convexe, et il peut être nécessaire de substituer à une ou plusieurs bissectrices intérieures des angles

de Q les bissectrices extérieures pour passer par continuité de la première figure à celles que l'on obtient ensuite. Je n'entreprendrai pas l'examen de ces différentes formes de la figure, bien qu'il soit nécessaire de le faire si l'on veut montrer complètement que le lieu du point I est une circonférence entière et une seule ; la méthode générale que j'emploierai plus loin dispense de cette discussion.

Remarque III. — Rien ne serait modifié dans les raisonnements précédents si, pour former le quadrilatère Q', on prenait les bissectrices extérieures des angles de Q au lieu des bissectrices intérieures, comme le montre la figure 2 ; le point de rencontre des

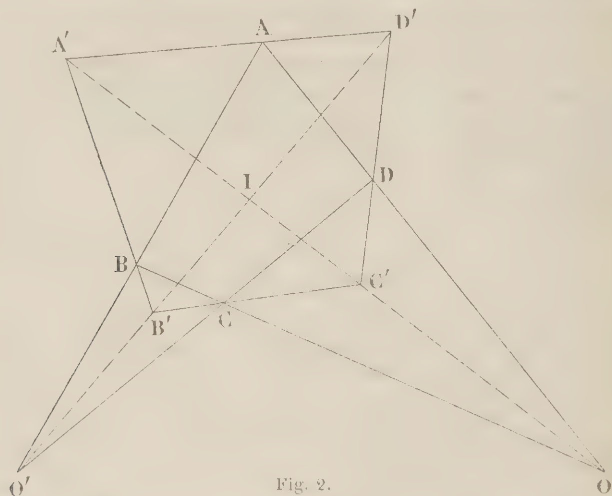


Fig. 2.

diagonales du quadrilatère Q' ainsi formé est encore le point commun aux bissectrices des angles O et O'.

On peut aussi remplacer une ou plusieurs bissectrices intérieures de Q par des bissectrices extérieures ; on a de cette façon 16 manières de former un quadrilatère Q'. De ces 16 manières, 8 seulement sont acceptables, en ce sens qu'elles donnent lieu à un point I analogue à celui des figures 1 et 2 ; ces 8 quadrilatères Q' forment 4 groupes de 2 associés ; pour chaque groupe, le point I est à l'intersection d'une bissectrice intérieure ou extérieure de l'angle O et d'une bissectrice intérieure ou extérieure de l'angle O'. Comme ces bissectrices se coupent deux à deux en quatre points, on trouve bien de cette façon quatre positions du point I. Les 8 autres manières sont à rejeter ; par exemple celle qui consisterait à prendre trois bissectrices intérieures et une extérieure du quadrilatère Q conduirait à tracer des lignes $A'C'$ et $B'D'$ ne passant pas par O et O', et le problème proposé n'existerait plus.

II. — Pour raisonner d'une façon générale et traiter tous les cas d'un seul coup, nous opérerons de la façon suivante : nous considérons deux points O et O' et par chacun d'eux deux droites dirigées Ox, Oy, $O'x'$, $O'y'$; elles forment un quadrilatère complet ABCDOO' (*fig.* 3) ; nous désignerons par α, β, α', β', les angles formés, à un multiple près de 2π, par les quatre droites avec un axe quelconque, par exemple avec $O'O$.

Je rappelle qu'un cycle est une circonférence sur laquelle est choisi un sens déterminé, et c'est ce sens que l'on choisit sur les tangentes au cycle ; il existe une seule série de cycles tangents à deux droites dirigées, et leurs centres sont sur une seule des deux bissectrices de l'angle qu'elles forment. Je considérerai désormais cette seule bissectrice à l'exclusion de l'autre ; si par exemple α et α' sont les angles de deux droites avec un axe, la bissectrice que je choisirai fait avec cet axe l'angle

$$\frac{\alpha' + \alpha}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi\,;$$

je rappelle enfin qu'il existe un seul cycle tangent à trois droites dirigées.

Avec la disposition de la figure 3, les bissectrices que l'on considère, et qui servent à former le quadrilatère Q', sont les mêmes que dans la figure 1 ; en changeant le sens de Ox et Oy, on obtient la figure 2. En changeant ainsi le sens d'une ou de plusieurs des 4 droites, on obtient 16 dispositions, mais elles donnent lieu seulement à 8 quadrilatères Q', car en remplaçant

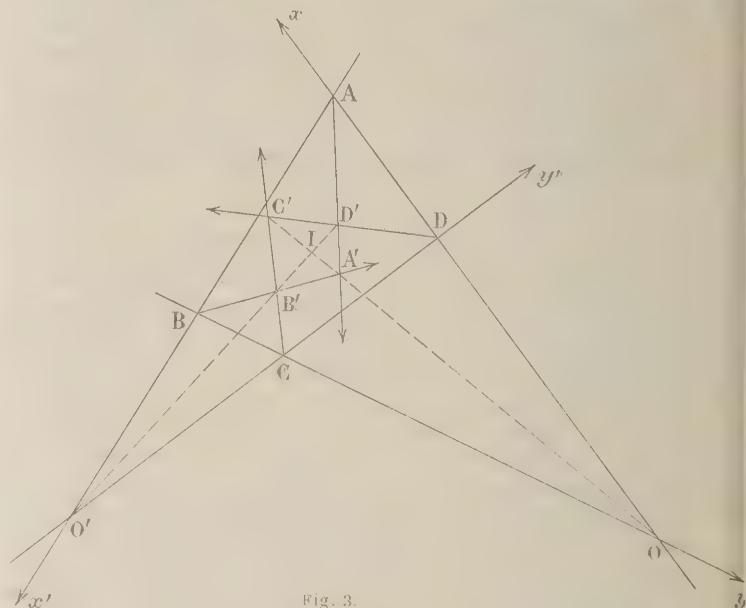


Fig. 3.

toutes les directions par celles qui leur sont opposées, on n'altère pas les bissectrices. Les 8 quadrilatères Q' sont précisément ceux dont nous avons parlé ; il suffira dans la suite de considérer l'un d'eux, celui de la figure 3 par exemple ; le raisonnement s'appliquera à l'un quelconque des autres.

Considérons alors la figure 3 ; A' et C' sont les centres des cycles uniques tangents aux triangles dirigés ABO et COD ; par suite $A'C'$ est la bissectrice (unique à notre point de vue) de l'angle O ; pour la même raison $B'D'$ est la bissectrice de l'angle O'.

Les bissectrices OI et O'I font avec l'axe de repère des angles ayant pour valeurs

$$\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad \frac{\alpha' + \beta'}{2} + \frac{\pi}{2} + k'\pi\,;$$

par suite l'angle qu'elles font entre elles est égal à la différence de ces deux quantités, c'est-à-dire à

$$\frac{\alpha - \alpha'}{2} + \frac{\beta - \beta'}{2} + (k - k')\pi.$$

Si A et C se déplacent sur des circonférences passant par O et O', les différences $\alpha - \alpha'$ et $\beta - \beta'$ sont constantes, par suite l'angle $(O'I, OI)$ est aussi constant, et le lieu de I est la totalité d'une circonférence unique passant par O et O'.

Cette circonférence peut être rejetée à l'infini si $\alpha - \alpha'$ et $\beta - \beta'$ ont des valeurs égales et de signes contraires, à un multiple près de π ; les droites OI et O'I sont alors constamment parallèles, à moins qu'elles ne soient confondues suivant la droite OO' ; cette droite fait alors partie du lieu.

Nous remarquerons qu'au quadrilatère complet ABCD formé par les quatre droites données correspond le quadrangle $A'B'C'D'$ dont les sommets sont les centres des quatre cycles tangents aux droites prises trois à trois ; les six côtés du quadrangle sont les bissectrices des six sommets du quadrilatère. Les quatre som-

mets du quadrangle sont confondus si les quatre côtés du quadrilatère sont tangents à un même cycle.

III. — Nous allons traiter la troisième partie du problème, en déterminant les éléments du quadrilatère Q′ ; on peut le faire soit par la géométrie ordinaire, en considérant la figure 1, soit par la géométrie dirigée en considérant la figure 3 ; dans le premier cas, on raisonne sur les valeurs absolues des éléments de la figure, dans le second, on introduit leurs valeurs algébriques. Pour plus de généralité, nous emploierons la seconde méthode ; les raisonnements sont au fond identiques dans les deux cas.

Nous appelons a, b, c, d les valeurs algébriques des segments AB, BC, CD, DA comptés sur les droites dirigées qui les portent ; nous désignons par A, B, C, D, O et O′ les angles du quadrilatère ; nous les prenons, par définition, égaux aux suppléments des angles formés par les droites dirigées qui constituent leurs côtés, de sorte que nous posons

$$\begin{aligned} A &= \pi - (Ox, O'x') = \pi - (\alpha' - \alpha),\\ B &= \pi - (O'x', Oy) = \pi - (\beta - \alpha'),\\ C &= \pi - (Oy, O'y') = \pi - (\beta' - \beta),\\ D &= \pi - (O'y', Ox) = \pi - (\alpha - \beta'),\\ O &= \pi - (Ox, Oy) = \pi - (\beta - \alpha),\\ O' &= \pi - (O'x', O'y') = \pi - (\beta' - \alpha'). \end{aligned}$$

Les bissectrices AA′, BB′, CC′, DD′ ne sont pas dirigées, car les angles qu'elles font avec l'axe de repère ne sont définis qu'à un multiple près de π ; nous prenons cependant sur ces bissectrices des directions déterminées, en convenant de prendre les angles qu'elles font avec l'axe de repère respectivement égaux à

$$\frac{\alpha+\alpha'}{2}+\frac{\pi}{2},\qquad \frac{\alpha'+\beta}{2}+\frac{\pi}{2},\qquad \frac{\beta+\beta'}{2}+\frac{\pi}{2},\qquad \frac{\beta'+\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}.$$

Nous prenons alors pour valeurs algébriques des angles A′, B′, C′, D′ du quadrilatère Q′ les suppléments des angles formés respectivement par les droites dirigées qui constituent leurs côtés ; nous écrivons

$$A' = \pi - (AA', BA'),\qquad B' = \pi - (BB', CB'),$$
$$C' = \pi - (CC', DC'),\qquad D' = \pi - (DD', AD').$$

Nous avons de cette façon

$$A' = \pi - \left[\frac{\alpha'+\beta}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\alpha'}{2}-\frac{\pi}{2}\right] = \pi - \frac{\beta-\alpha}{2},$$

ce qui est égal à $\frac{\pi}{2}+\frac{O}{2}$; un calcul analogue relatif à C′, B et D′ nous montre que l'on a

$$A' = C' = \frac{\pi}{2}+\frac{O}{2},\qquad B' = D' = \frac{\pi}{2}+\frac{O'}{2}.$$

Nous en concluons que le quadrilatère A′B′C′D′ est inscriptible, car les angles formés en A′ et C′ par les droites dirigées qui y passent étant identiques, ces points sont sur une même circonférence avec B′ et D′.

Un raisonnement géométrique élémentaire fait sur la figure 1 aurait donné pour les angles B′A′D′ et B′C′D′ les valeurs absolues $\frac{\pi}{2}+\frac{O}{2}$ et $\frac{\pi}{2}-\frac{O}{2}$, et pour les deux autres angles les valeurs absolues $\frac{\pi}{2}+\frac{O'}{2}$ et $\frac{\pi}{2}-\frac{O'}{2}$.

Pour évaluer les côtés a', b', c', d' situés respectivement sur les bissectrices des angles A, B, C, D, nous conviendrons d'appeler valeurs algébriques de ces côtés celles des segments

$$a' = D'A' = AA' - AD',\qquad b' = A'B' = BB' - BA',$$
$$c' = B'C' = CC' - CB',\qquad d' = C'D' = DD - DC',$$

évalués sur les droites dirigées qui les portent. Le triangle ABA′ donne toujours

$$\frac{AB}{\sin(A'A, A'B)} = \frac{BA'}{\sin(AB, AA')} = \frac{A'A}{\sin(BA', BA)},$$

les numérateurs étant évalués algébriquement, et les angles des dénominateurs étant ceux que forment les droites dirigées portant les côtés ; en évaluant ces angles au moyen de α, α', β, β', puis des angles de Q et Q′, et en changeant les signes des deux termes du dernier rapport, on obtient les relations

$$\frac{a}{\sin A'} = \frac{BA'}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{AA'}{\sin\frac{B}{2}}.$$

Les triangles BCB′, CDC′, DAD′ donnent de même

$$\frac{b}{\sin B'} = \frac{CB'}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{BB'}{\sin\frac{C}{2}},$$

$$\frac{c}{\sin C'} = \frac{DC'}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{CC'}{\sin\frac{D}{2}},$$

$$\frac{d}{\sin D'} = \frac{AD'}{\sin\frac{D}{2}} = \frac{DD'}{\sin\frac{A}{2}};$$

on en déduit, en formant les différences telles que AA′ — AD′, les valeurs algébriques des côtés du quadrilatère Q′

$$a' = \frac{a\sin\frac{B}{2}}{\sin A'} - \frac{d\sin\frac{D}{2}}{\sin D'},$$

$$b' = \frac{b\sin\frac{C}{2}}{\sin B'} - \frac{a\sin\frac{A}{2}}{\sin A'},$$

$$c' = \frac{c\sin\frac{D}{2}}{\sin C'} - \frac{b\sin\frac{B}{2}}{\sin B'},$$

$$d' = \frac{d\sin\frac{A}{2}}{\sin D'} - \frac{c\sin\frac{C}{2}}{\sin C'}.$$

Ces valeurs algébriques satisfont identiquement à la relation

$$a'\sin\frac{A}{2} + b'\sin\frac{B}{2} + c'\sin\frac{C}{2} + d'\sin\frac{D}{2} = 0;$$

Si l'on remarque que dans le cas des figures 1 et 3, a' et c' sont des nombres positifs, tandis que b' et d' sont négatifs, on voit qu'entre les valeurs absolues des côtés du quadrilatère Q′ existe bien la relation indiquée dans l'énoncé.

IV. — La question posée dans la deuxième partie est la suivante : on donne trois points fixes O, O′, I (*fig.* 4), et un point variable A se déplaçant sur une droite Δ ; les symétriques de OA par rapport à OI et de O′A par rapport à O′I forment avec OA et O′A un quadrilatère ABCD dont on demande le lieu des sommets.

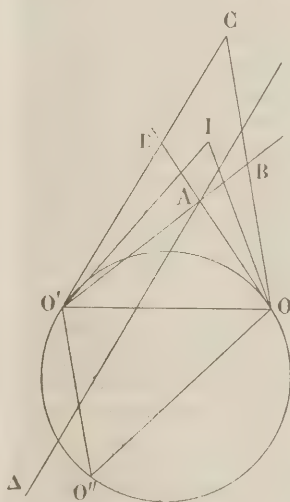


Fig. 4.

Si l'on remarque que les rayons mobiles issus de O et O′ décrivent des faisceaux deux à deux homographiques, on voit que les lieux des points B, C, D sont des coniques passant par O et O′ ; nous allons discuter leur nature.

Considérons d'abord le point C, et cherchons si ce point peut s'éloigner à l'infini ; il faut et il suffit que OC et O′C deviennent parallèles.

Dans le cas de la figure, on a

$$\widehat{OAO'} + \widehat{OCO'} = 2\widehat{OIO'},$$

de sorte que si $\widehat{OCO'}$ devient nul, $\widehat{OAO'}$ a une valeur déterminée égale au double de $\widehat{OIO'}$, et le point A se trouve sur une circonférence passant par O et O' ; les raisonnements que nous avons faits au n° II en partant de droites dirigées fourniraient une conclusion analogue, et valable pour tous les cas de figure. Suivant que Δ coupe la circonférence que nous venons de trouver en deux points distincts, lui est tangente ou ne la coupe pas, le lieu de C présente deux directions asymptotiques, une seule ou aucune, c'est-à-dire est une hyperbole, une parabole ou une ellipse.

Il existe un triangle OO'O'' ayant pour base OO' et dont le point I est le centre d'un cercle inscrit ou exinscrit ; la circonférence que nous avons trouvée est précisément la circonférence circonscrite à ce triangle ; les points A et C sont du reste des points que l'on appelle souvent points *inverses* l'un de l'autre par rapport à OO'O''. Il est facile de voir que pour que le lieu du point C se décompose en deux droites, il faut et il suffit que Δ passe par un des sommets du triangle OO'O''.

Considérons maintenant le lieu du point B (*fig.* 5) et cherchons s'il peut avoir des points à l'infini, c'est-à-dire si OB et O'B peuvent devenir parallèles. Supposons que l'on fasse varier inversement les droites OB et O'B de façon qu'elles restent parallèles, comme le sont OB et O'B_1 dans la figure 5, et qu'on cherche le lieu du point A correspondant ; ce point, que nous désignons par A_1 dans ce cas particulier, décrit une conique H passant par O et O', et déduite de la droite de l'infini comme le lieu de B était déduit de Δ. Cette conique H est une hyperbole équilatère, car si l'on prend le point B à l'infini sur OI ou sur la perpendiculaire à OI, le point A_1 se trouvera aussi à l'infini dans la même direction.

Fig. 5.

Si l'on recherche les tangentes à H aux points O et O', on constate qu'elles sont parallèles entre elles ; leur direction est celle de la symétrique de OO' par rapport à OI, c'est-à-dire la direction OO'' ; on en conclut que le centre de H est le milieu de OO' ; la conique H est donc complètement déterminée puisqu'on connaît son centre, ses directions asymptotiques et deux points. Suivant que A coupe H, lui est tangente ou ne la coupe pas, le lieu de B est une hyperbole, une parabole ou une ellipse.

On voit du reste que ce lieu se décompose lorsque Δ passe par O ou que OI est perpendiculaire à OO'

Le lieu de D est une conique analogue à la précédente ; sa nature dépend de la position de Δ par rapport à une conique H' analogue à H, et nous n'insisterons pas sur ce point, car il suffirait de répéter ce que nous avons dit, en changeant le rôle de O et O'.

H. V.

M. Ollié, à Auch, nous a envoyé une bonne solution de cette question.

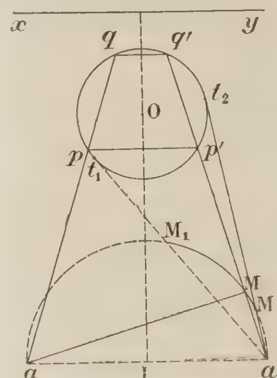
M. Broutin (lycée Saint-Louis) et M. Pitral à Gisors ont résolu convenablement la première et la troisième partie.

M. Rech, professeur au lycée de Lons-le-Saunier, nous a envoyé une excellente solution, à peu près identique à celle qui vient d'être développée, et l'a fait précéder d'intéressantes considérations géométriques sur lesquelles nous aurons l'occasion de revenir.

ÉCOLE NORMALE PRIMAIRE SUPÉRIEURE DE FONTENAY-AUX-ROSES (1900)

4898. — *Soient pq, p'q' deux cordes variables d'un même cercle : On suppose que pq passe par un point fixe a, et que les droites pp', qq' sont parallèles à une même droite donnée. Lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point a sur p'q'.*

Les cordes pp' et qq' étant parallèles à une droite donnée xy sont perpendiculaires à un diamètre fixe OI du cercle O. Par suite la corde $p'q'$ est symétrique de pq par rapport à OI ; cette corde passe donc par le point fixe a' symétrique de a par rapport à OI. Le lieu du pied M de la perpendiculaire abaissée de a sur $p'q'$ est dès lors une circonférence de diamètre aa'.



Pour qu'un point quelconque M de cette circonférence fasse partie du lieu, il faut et il suffit que la droite Ma' coupe le cercle O, c'est-à-dire soit comprise dans l'angle $t_1a't_2$ formé par les deux tangentes au cercle O issues de a'. Il en résulte que lorsque a' ou a est extérieur au cercle O, la portion utile du lieu est limitée à l'arc M_1M_2 compris dans l'angle $t_1a't_2$.

Lorsque le point a est sur le cercle O ou à l'intérieur de ce cercle, la droite Ma' rencontre toujours le cercle O, et le lieu de M comprend alors toute la circonférence I.

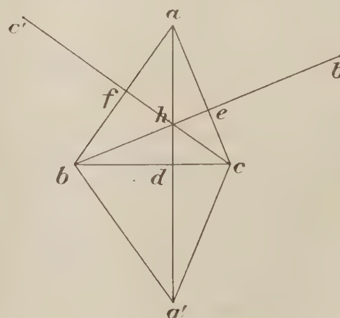
(T. MILLET, à Orléans.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Durand ; F. Pégorier ; R. Petit Ph. Plisson ; H. Varennes.]

4899. — *Soient ad, be, cf les hauteurs d'un triangle abc. On prolonge ad d'une longueur égale da' ; be, d'une longueur égale eb', et cf, d'une longueur égale fc'. Prouver que les cercles circonscrits aux trois triangles bca', cab', abc' ont un point commun h.*

Je dis que le point commun h n'est autre que le point de concours des hauteurs ad, be, cf.

En effet, les triangles $ba'c$, bac ayant un côté commun et deux côtés égaux par construction sont égaux ; donc



$$\widehat{ba'c} = \widehat{bac}.$$

Mais le quadrilatère $achf$ ayant les angles opposés e et f droits est inscriptible ; l'angle fhe ou bhc est donc supplémentaire de l'angle bac ou $ba'c$, de sorte que h appartient au cercle circonscrit au triangle bca'.

Le même raisonnement montre que h se trouve également sur les cercles circonscrits aux triangles cab' et abc'.

(VICTOR BAROL, timonier breveté, instructeur sur la *Couronne*.)

[Ont résolu la même question : Mlle A. Saleilles ; MM. E. Anzemberger ; M. Bernard ; L. Bordrois ; I. Bourrec ; J. Cassan ; R. Cattin ; David ; H. Dobryzniak ; E. Durand ; G. Foucry ; E. Garagnon ; Gérard ; J. Guéret ; H. Guillaud ; A. Hardy ; V. Herzenberg ; E. Hiernaux ; L. Hostier ; Ch. Huard ; E. Hugonnier-Ginet ; A. Jouart ; D. Kœnig ; M. Laurence ; A. Lecoutour ; A. Legros ; J. Ménéchal ; A. Meynier ; T. Millet ; L. Minjoz ; Naboulet ; Noël ; L. Ollié ; L. Patin ; F. Pégorier ; L. Pelletier ; L. Périno ; M. Petit ; P. Petit ; R. Petit ; Raynaud ; R. Rives ; M. Royer ; G. Salaun ; A. Séclet ; E. Serres ; Sinoquet ; F. Sol ; J. Tastet ; V. Thébault ; P. Valentin ; A. Vannier ; H. Varennes ; P. Zlatco.]

ARITHMÉTIQUE

4911. — *Si A est un nombre impair, premier avec 5, le produit*

$$(A^2-1)(A^2-9)(A^2-49)$$

est divisible par 23040.

(*Examens oraux de l'école polytechnique.*)

Le diviseur 23040, décomposé en ses facteurs premiers, est égal à $2^9 \times 3^2 \times 5$. Tout revient donc à démontrer que l'expression est divisible séparément par 2^9, 3^2 et 5 lorsque A est un nombre impair non multiple de 5.

Divisibilité par 2^9. — On sait que tout carré impair A^2 est $m.8+1$; donc

$$(A^2-1)(A^2-9)(A^2-49) = m.8(m.8-8)(m.8-48) = m.2^9.$$

Divisibilité par 3^2. — A peut être $m.3$ ou $m.3 \pm 1$.

Si $A = m.3$, le facteur A^2-9 de l'expression est divisible par 3^2.

Si $A = m.3 \pm 1$, $A^2 = m.3+1$, et chacun des deux facteurs A^2-1 et A^2-49 est divisible par 3.

Divisibilité par 5. — A, premier avec 5, est de l'une des formes $m.5 \pm 1$ ou $m.5 \pm 2$.

Par suite A^2 est de l'une des formes $m.5+1$ ou $m.5+4$, de sorte que l'un des facteurs A^2-1 ou A^2-9 de l'expression est divisible par 5.

(A. DROCOURT, instituteur-adjoint, à Dourdan.)

[Ont résolu la même question : MM. P. Bancillon ; E. Barbé ; L. Barberot ; R. Cattin ; L. Creplet ; H. Damoiseau ; Delhotel ; G. Desmoës ; C. Dupas ; Durand ; G. de France ; F. Gérard ; E. Hugonnier-Ginet ; P. Jolibois ; A. Lardy-Pleumartin ; M. Laurence ; E. Millet ; J. Permann ; M. Royer ; C. Vallot ; Mlles Degand ; Anne Madonne ; A. Saleilles ; MM. A. Arcizet ; L. Bannerot ; V. Barol ; A. Bernardeau ; L. Bordrois ; A. Bottin ; I. Bourrec ; L. David ; Delâge ; Duittoz ; V. Enescu ; F. Filiol ; E. de Geoffroy ; L. Geoffroy ; Ch. Godard ; M. Gondran ; H. Guillaud ; P. Guillemin ; P. Gury ; A. Hardy ; J. Hébré ; R. Henry ; A. James ; D. Kœnig ; A. Larcher ; E. Laroche ; A. Lecoutour ; P. Mayet ; M. B., instituteur à I ; J. Ménéchal ; A. Meynier ; L. Minjoz ; A. Mourès ; R. Mouzon ; Noël ; L. Ollié ; Ch. Passeron ; L. Patin ; F. Pégorier ; E. Périnet ; Pernin ; M. Petit ; Ph. Plisson ; R. Rieus ; J. Rigal ; R. Rives ; A. Rousseau ; A. de Saint-Gabriel ; E. Serres ; F. Sol ; F. Thibier ; P. Thonet ; A. Vannier ; P. Zlatco ; Bournisien ; Daure.]

ALGÈBRE

4902. — *Soient* α *et* β *les racines, supposées distinctes, de l'équation*

$$x^2+px+q=0.$$

On pose

$$U_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}, \qquad V_n = \alpha^n+\beta^n.$$

On demande d'exprimer :

1° U_n *au moyen de* U_{n-1}, U_{n-2}, p *et* q ;

2° V_n *au moyen de* V_{n-1}, V_{n-2}, p *et* q ;

3° U_{n+k} *au moyen de* U_n, U_k, V_n, V_k.

On a par hypothèse

$$\alpha^2+p\alpha+q=0,$$

ou, en multipliant par α^{n-2},

$$\alpha^n+p\alpha^{n-1}+q\alpha^{n-2}=0 ; \qquad (1)$$

de même

$$\beta^n+p\beta^{n-1}+q\beta^{n-2}=0. \qquad (2)$$

1° Retranchons membre à membre (2) de (1) ; il vient

$$\alpha^n-\beta^n+p(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})+q(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2})=0$$

ou, en tenant compte des notations de l'énoncé,

$$U_n(\alpha-\beta)+pU_{n-1}(\alpha-\beta)+qU_{n-2}(\alpha-\beta)=0,$$

d'où, en supprimant le facteur commun $\alpha-\beta$ (différent de zéro, puisque $\alpha \neq \beta$),

$$U_n = -(pU_{n-1}+qU_{n-2}).$$

2° En ajoutant (1) et (2), on obtiendrait de même,

$$V_n = -(pV_{n-1}+qV_{n-2}).$$

3° On a

$$U_{n+k} = \frac{\alpha^{n+k}-\beta^{n+k}}{\alpha-\beta}.$$

Or des équations

$$U_n(\alpha-\beta) = \alpha^n-\beta^n, \qquad V_n = \alpha^n+\beta^n,$$

on déduit, par addition et soustraction,

$$2\alpha^n = U_n(\alpha-\beta)+V_n, \qquad -2\beta^n = U_n(\alpha-\beta)-V_n.$$

Par suite

$$4\alpha^{n+k} = [U_n(\alpha-\beta)+V_n][U_k(\alpha-\beta)+V_k]$$

ou

$$4\alpha^{n+k} = U_nU_k(\alpha-\beta)^2+(U_nV_k+U_kV_n)(\alpha-\beta)+V_nV_k ;$$

de même

$$4\beta^{n+k} = U_nU_k(\alpha-\beta)^2-(U_nV_k+U_kV_n)(\alpha-\beta)+V_nV_k.$$

Donc

$$U_{n+k} = \frac{U_nV_k+U_kV_n}{2}.$$

(R. PETIT, lycée d'Angoulême.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Barbé ; P. Bonnel ; R. Cattin ; G. de France ; F. Filliol ; A. Hardy ; R. Henry ; C. Huard ; D. Kœnig ; M. Laurence ; D. Laurent ; L. Lazar ; A. Legros ; Lemmet ; E. Licope ; P. Thonet ; C. Vannier ; P. Zlatco.]

4912. — *Résoudre en nombres entiers l'équation*

$$x^5-x^3=y^3z,$$

où y *et* z *sont deux nombres premiers.*

L'équation proposée peut s'écrire

$$x^3(x^2-1)=y^3z.$$

Remarquons que x^3 et x^2-1 sont premiers entre eux ; car tout diviseur premier qui leur est commun divise x^2 et x^2-1, donc il divise leur différence 1 ; x^3 et x^2-1 n'ont donc pas de diviseur premier autre que 1.

Le facteur premier y ne peut par suite appartenir qu'à un seul des nombres x^3 ou x^2-1 ; y^3 doit diviser l'un de ces nombres et être premier avec l'autre.

Si x^3 était premier avec y^3, il devrait diviser z, ce qui est impossible z étant supposé premier et x étant évidemment différent de 1 ; donc c'est x^2-1 qui est premier avec y^3. Or $x^2-1=(x+1)(x-1)$ doit diviser z, et, puisque z étant premier ne peut être divisible par le produit $(x+1)(x-1)$ que si $x-1=1$, il s'ensuit que $z=x+1$, ce qui donne $x=2$, $z=3$ et

$$2^3\times 3 = y^3 \times 3, \qquad \text{d'où} \qquad y=2.$$

(G. FOUCRY, section normale de Châlons-sur-Marne.)

[Ont résolu la même question : MM. D. Antonescu ; G. Desnoës ; A. Ste-Laguë ; C. Vallot ; A. Arcizet ; M. Bégué ; H. Belbenoit ; Ph. Bonnefoy ; L. Bordrois ; A. Bottin ; I. Bourrec ; Duittoz ; Ch. Godard ; E. Gernez ; P. Guerrier ; M. Gondran ; H. Guillaud ; Hardy ; J. Hébré ; R. Henry ; Hostier ; A. Jamet ; D. Kœnig ; A. Legros ; M. B., instituteur à I ; H. Martin ; P. Mayet ; F. Mestre ; A. Meynier ; L. Minjoz ; Montel ; R. Mouzon ; L. Ollié ; L. Périno ; M. Petit ; Ch. Passeron ; L. Patin ; Ph. Plisson ; R. Rieus ; R. Rives ; A. de Saint-Gabriel ; E. Serres ; F. Sol ; P. Valentin ; P. Zlatco ; Daure.]

GÉOMÉTRIE

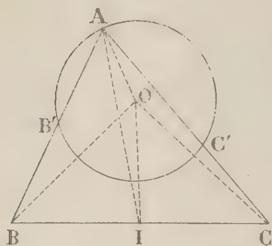
4903. — *Sur les côtés* AB, AC *d'un triangle on prend deux points variables* B′, C′ *tels que*

$$AB.AB' + AC.AC' = 2k^2,$$

k^2 *étant une constante. Lieu du centre du cercle* AB′C′.

Même question en remplaçant devant AC.AC′ *le signe* + *par le signe* —.

Joignons le centre O du cercle AB′C′ aux sommets A, B, C, et au milieu I de BC. On a successivement



$$AB.AB' = AB(AB - B'B) = \overline{AB}^2 - AB.B'B$$

ou, en remarquant que BA.BB′ est la puissance de B par rapport au cercle O,

$$AB.AB' = \overline{AB}^2 - (\overline{OB}^2 - \overline{OA}^2);$$

de même

$$AC.AC' = \overline{AC}^2 - (\overline{OC}^2 - \overline{OA}^2).$$

La relation énoncée devient donc

$$(\overline{AB}^2 - \overline{OB}^2 + \overline{OA}^2) + (\overline{AC}^2 - \overline{OC}^2 + \overline{OA}^2) = 2k^2 \qquad (1)$$

ou, en observant que

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AI}^2 + 2\overline{BI}^2 \qquad \text{et} \qquad \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 = 2\overline{OI}^2 + 2\overline{BI}^2,$$

$$\overline{AI}^2 + \overline{BI}^2 - \overline{OI}^2 - \overline{BI}^2 + \overline{OA}^2 = k^2$$

ou

$$\overline{OA}^2 - \overline{OI}^2 = k^2 - \overline{AI}^2.$$

Cette relation montre que le lieu du point O est le même que le lieu des points dont la différence des carrés des distances aux points fixes A et I est constante. Ce lieu est donc une perpendiculaire à la médiane AI, facile à déterminer.

Lorsqu'on prend AC.AC′ avec le signe — au lieu du signe +, la relation (1) s'écrit alors

$$\overline{AB}^2 - \overline{OB}^2 + \overline{OA}^2 - (\overline{AC}^2 - \overline{OC}^2 + \overline{OA}^2) = 2k^2$$

ou

$$\overline{OC}^2 - \overline{OB}^2 = 2k^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2.$$

Dans ce cas, le lieu du point O est le même que le lieu des points dont la différence des carrés des distances aux points fixes B et C est constante, c'est-à-dire une perpendiculaire au côté BC.

(BOURRIENNE.)

[Ont résolu la même question : MM. L. Ollié ; F. Thibier ; P. Thonet.]

4904. — *Si* A, B, C, D *sont quatre sommets consécutifs d'un polygone régulier, on a*

$$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = AB.\,AD.$$

Tirons les diagonales AD, AC, BD, ces deux dernières se coupant en M.

Les angles inscrits BAC et CAD soustendant des cordes ou arcs égaux sont égaux ; par suite les triangles isocèles ABC, AMD sont semblables, et donnent

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AD}$$

ou

$$AB.AD = AC.AM$$

ou, en remplaçant AM par AC — MC,

$$AB.AD = \overline{AC}^2 - AC.MC.$$

Or en considérant les triangles isocèles semblables ABC, BMC, on a

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{MC} \qquad \text{ou} \qquad AC.MC = \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2.$$

Donc

$$AB.AD = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2.$$

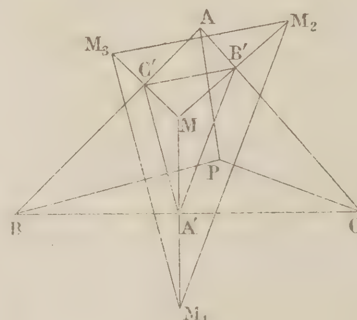
Remarque. — La relation précédente n'est qu'un cas particulier du théorème de Ptolémée appliqué au quadrilatère inscriptible ABCD ; en outre elle n'exige pas que l'arc AB soit une partie aliquote de la circonférence.

(Ed. BARBÉ, à Mazamet.)

[Ont résolu la même question : Mlles Degand ; L. Gautier ; Anne Madonne ; Geneviève Oddos ; A. Saleilles ; MM. E. Anzemberger ; L. Bannerot ; V. Barol ; H. Belbenoit ; F. Belay ; M. Bernard ; M. Beney ; P. Bonnefoy ; F. Bonnet ; L. Bordron ; J. Bourrec ; Butruille ; Caen ; J. Cassan ; R. Cattin ; L. Colombey ; Delhotel ; H. Dobryzniak ; E. Durand ; A. Foy ; J. Franceschini ; E. Garagnon ; R. Gilles ; Gondran ; J. Guéret ; H. Guillaud ; H. Guinand ; A. Hardy ; R. Henry ; E. Hiernaux ; L. Hostier ; Ch. Huard ; Hugonnier-Ginet ; D. Kœnig ; A. Lardy ; E. Laroche ; M. Laurence ; D. Laurent ; L. Lazar ; A. Lecoutour ; A. Legros ; A. Lestocart ; E. Licope ; L. Limmet ; M. B., instituteur à I. ; R. Manen ; C. Marie ; J. Maury ; A. Meynier ; L. Minjoz ; D. Montel ; J. Motte ; Naboulay ; A. Neef ; Noël ; L. Ollié ; L. Patin ; F. Pégorier ; L. Pelletier ; E. Périnet ; L. Pernio ; M. Petit ; P. Petit ; H. Pitrat ; P. Plisson ; M. Popescu ; C. Quantin ; P. Quintescu ; Raynaud ; A. Reversat ; R. Rives ; M. Royer ; A. Seilet ; E. Serres ; J. Tastet ; V. Thibault ; H. Thibier ; M. Turpain ; P. Valentin ; H. Varennes ; P. Zlatco.]

4915. — *Soient* M *un point pris à l'intérieur d'un triangle* ABC *et* MA′, MB′, MC′ *les perpendiculaires menées de ce point aux côtés* BC, AC, AB *du triangle. Si des sommets* A, B, C *on abaisse des perpendiculaires respectivement sur* B′C′, A′C′, A′B′, *ces trois perpendiculaires sont concourantes.*

Première solution. — Prenons les symétriques M_1, M_2, M_3 du point M par rapport aux points A′, B′, C′. Dans le triangle MM_1M_2, la droite A′B′ joignant les milieux de deux côtés est parallèle au troisième M_1M_2 ; de même B′C′ et C′A′ sont respectivement parallèles à M_2M_3 et M_3M_1. Il suffit donc de démontrer que les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur les côtés M_2M_3, M_3M_1, M_1M_2 sont concourantes.



En effet, le point A étant équidistant de M et M_3 d'une part et de M et M_2 d'autre part, est équidistant de M_2 et M_3 ; donc la perpendiculaire élevée au milieu de M_2M_3 passe par A ; on verrait de même que les perpendiculaires élevées aux milieux de M_3M_1 et M_1M_2 passent respectivement par B et C. Comme ces trois perpendiculaires concourent d'ailleurs au centre P du cercle circonscrit au triangle $M_1M_2M_3$, la propriété énoncée devient évidente.

(H. PITRAT, à Givors.)

Seconde solution(*). — Prolongeons les perpendiculaires issues de A, B, C jusqu'à leurs rencontres en α, β, γ avec les côtés du triangle ABC. D'après la réciproque du théorème de Céva, ces perpendiculaires seront concourantes si l'on a

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -1.$$

Pour avoir une expression du rapport $\dfrac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}$, prolongeons la

(*) Voir troisième solution : *Journal*, 7e année, p. 44, n° 42.

droite A′M jusqu'à sa rencontre A″ avec B′C′. Les triangles ABα, C′MA″ ayant les trois côtés perpendiculaires chacun à chacun sont semblables ; en observant que les côtés homologues se succèdent dans un même sens de rotation, on peut donc écrire

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha A}} = \frac{\overline{A''M}}{\overline{A''C'}} ;$$

les triangles semblables ACα, B′MA″ donnent de même

$$\frac{\overline{\alpha C}}{\overline{\alpha A}} = \frac{\overline{A''M}}{\overline{A''B'}} .$$

En divisant ces égalités membre à membre, on en déduit

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{\overline{A''B'}}{\overline{A''C'}} .$$

On obtiendrait de même

$$\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} = \frac{\overline{B''C'}}{\overline{B''A'}}, \qquad \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = \frac{\overline{C''A'}}{\overline{C''B'}} .$$

Multiplions membre à membre les trois égalités précédentes, il vient

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = \frac{\overline{A''B'}}{\overline{A''C'}} \cdot \frac{\overline{B''C'}}{\overline{B''A'}} \cdot \frac{\overline{C''A'}}{\overline{C''B'}} .$$

Or, dans cette dernière égalité, le second membre se réduit à — 1, en vertu du théorème de Céva appliqué aux droites concourantes A′A″, B′B″, C′C″.

C. Q. F. D.

(R. CATTIN, à Mont-de-Marsan.)

[Ont résolu la même question : Mlle Anne Madonne ; MM. L. Bannerot ; V. Barol ; H. Belbenoit ; A. Bottin ; P. Cassan ; J. Chapron ; Delâge ; G. Foucry ; J. Guéret ; Jacquet ; L. Lefèvre ; A. Legros ; E. Licope ; A. Mourès ; L. Ollié ; C. Quantin ; Ribourt ; A. de Saint-Gabriel ; F. Serres ; P. Thonet ; P. Valentin ; P. Zlatco.]

PHYSIQUE

4906. — *Dans une cuvette de grandes dimensions se trouve, sous une certaine profondeur, du mercure de poids spécifique 13,6. A la surface de ce mercure flotte un cylindre de fer de poids spécifique 7,8, de hauteur h, et dont l'axe est vertical.*

On verse, à la surface du mercure, une couche d'eau de $0^m,25$; le cylindre va-t-il se déplacer dans le sens vertical ? Calculer la valeur de son déplacement en supposant que la partie supérieure du cylindre reste entièrement dans l'eau. Quelle devrait être la hauteur minima du cylindre pour que sa base émergeât hors de l'eau ?

(Concours général de 1900 entre les élèves des institutions libres du Nord et du Pas-de-Calais.)

Appelons s la section droite du cylindre de fer, x la hauteur de la portion du cylindre qui plonge dans le mercure avant qu'on ait versé de l'eau dans la cuvette. On a, en écrivant que le poids du corps flottant est égal au poids du liquide déplacé,

$$x \times s \times 13,6 = h \times s \times 7,8,$$

d'où

$$x = \frac{h \times 7,8}{13,6} .$$

Lorsqu'on verse une couche d'eau de $0^m,25$ à la surface du mercure, le cylindre de fer subit une nouvelle poussée de bas en haut égale au poids du volume d'eau qu'il déplace. Donc le cylindre se déplacera dans le sens vertical.

Calculons la valeur de ce déplacement.

Soit x' la hauteur de la portion du cylindre qui plonge dans le mercure quand on a versé de l'eau dans la cuvette. On a la relation

$$x' \times 13,6 \times s + (h - x')s \times 1 = h \times s \times 7,8,$$

d'où

$$x' = \frac{6,8\,h}{12,6} .$$

La valeur du déplacement du cylindre est exprimée par la différence

$$x - x' = \frac{145\,h}{4284} .$$

La hauteur minima du cylindre pour que sa base supérieure émerge hors de l'eau est donnée par l'équation

$$h - x' = 0^m,25 .$$

Remplaçant x' par sa valeur, il vient

$$h - \frac{6,8\,h}{12,6} = 0^m,25,$$

d'où

$$h = \frac{3.15}{5,8} = 0^m,543$$

(J. MAURY.)

[Ont résolu la même question : Mlles Madonne ; A. Saleilles ; MM. Bernard ; Beyney ; Delhotel ; Dobryzniak ; Durand ; J. Franceschini ; Foucry ; Le Gent ; Guéret ; R. Henry ; Hugonnier ; Laurent ; Max ; Meynier ; Noël ; Patin ; Petit ; Périno ; Popesou ; Rives ; Royer ; A. de Saint-Gabriel ; Valentin ; Vannier.]

4916. — *Dans un récipient dont le volume intérieur est invariable et égal à 25^{lit} se trouve une masse d'air de 39^{gr}.*

1° Calculer la pression que cet air exerce sur les parois à 0°.

2° On demande à quelle température cette pression deviendrait égale à 2 atmosphères, le volume du récipient restant fixe.

Calcul et raisonnement.

Masse du litre d'air à 0° et à la pression 760, $1^{gr},3$.

Coefficient de dilatation des gaz, $\frac{1}{273}$.

(Bacc. lettres-math., Rennes, mars 1900.)

1° Il résulte de la loi de Mariotte que la masse d'un gaz à 0° est directement proportionnelle à la pression qu'il supporte. Par suite, si l'on désigne par V le volume de l'air, par x la pression cherchée, la masse de cet air sera donnée par la formule

$$M = V \times 1,3 \times \frac{x}{76},$$

d'où

$$x = \frac{76 \times 39}{25 \times 1,3} = 91^{cm},2$$

2° Désignons par H la force élastique à $t°$, par H_0 la force élastique à 0°. On a la relation

$$H = H_0(1 + \alpha t),$$

le volume du récipient restant fixe ; on en tire

$$t = \frac{H - H_0}{H^0\alpha} = \frac{152 - 91,2}{91,2 \times \frac{1}{273}} = 182° .$$

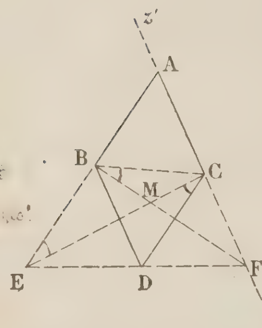
(E. GERNEZ, à Roubaix.)

[Ont résolu la même question : Mlles Degand ; Madonne ; MM. Arcizet ; P. Bancillon ; Barberot ; Bernard ; Bernardeau ; Boivin ; Bomast ; C. Bourveau ; Creplet ; Cognet ; Desnois ; Dobryzniak ; Drocourt ; Duittoz ; Durand ; G. Foucry ; Guéret ; Guillemin ; Guerrier ; Gury ; Hardy ; Henry ; Hugonnier ; Jarnes ; A. Lapresle ; Laurent ; Lecoutour ; Lefèvre ; A. Legros ; Limouzi ; A. Mabon ; Marne ; Mayet ; Montel ; Moreau ; H. Martin ; Meynier ; Millet ; Michaud ; G. Moreau ; Mouzon ; Passeron ; M. Petit ; Pernin ; Poircuitte ; Ponescu ; Rieus ; Riboux ; Robert ; Royer ; A. de Saint-Gabriel ; P. Saintin ; V. Thébault ; P. Valentin ; Vannier ; Vige.]

CONCOURS DE 1900 *(Suite)*.

CERTIFICAT D'APTITUDE A L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES

Mathématiques.



4927. — On donne un losange ABCD formé par deux triangles équilatéraux ABC, DBC ayant un côté commun BC.

Par le sommet D on mène une sécante rencontrant aux points E, F les droites AB, AC supposées indéfinies, puis l'on joint le sommet C au point E et le sommet B au point F. Les deux droites BF, CE se coupent en un point M.

1° Démontrer que les triangles BCE, CBF sont semblables.

2° Déduire du résultat précédent que l'angle BMC et le produit EB × CF restent constants quand la sécante EF tourne autour du point D.

Construire le lieu que décrit alors le point M.

On indiquera, sur ce lieu, les arcs décrits par le point M quand le point F est situé sur la *demi-droite* Cz, sur le segment CA ou sur la *demi-droite* Az'.

3° Soient O, O' les centres des circonférences de cercles circonscrites aux triangles variables BME, CMF, et R, R' leurs rayons.

Démontrer que les centres O et O' décrivent chacun une droite perpendiculaire à BC et que le produit des rayons R, R' reste constant.

(*9 juillet, de 8 h. à midi.*)

Physique et Chimie.

I. — 1° Exposer une méthode de détermination de la pression maxima de la vapeur d'eau, permettant d'opérer de 60° à 200°. — Représenter par une courbe les résultats suivants :

Températures :	60°	80°	100°	120°	140°	160°	180°	200°
Pressions.... :	$0^{at},2$	0,45	1^{at}	1,95	3,55	6,1	9,9	15,4

2° Donner des exemples de transformations chimiques dont l'étude a conduit à tracer des courbes analogues. — Indiquer les caractères communs à toutes ces transformations.

II. — Définir en s'appuyant sur des expériences :

1° Les expressions : acide tartrique *droit, gauche, racémique, inactif indédoublable.*

2° Les fonctions chimiques de cet acide.

(*10 juillet, de 8 h. à midi.*)

Histoire naturelle.

I. — Conformation et fonctions de l'estomac de l'Homme. Principales modifications de cet organe chez les Vertébrés ovipares et chez les Articulés.

II. — Fonctions de la feuille.

(*11 juillet, de 8 h à midi.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4928. — Démontrer que la moyenne arithmétique de n nombres est plus grande que leur moyenne harmonique.

On appelle *moyenne arithmétique* de n nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ le nombre x tel que

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

et *moyenne harmonique* le nombre y tel que

$$\frac{n}{y} = \left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

(*Examens oraux de l'école polytechnique, 1900.*)

4929. — Démontrer que le plus petit commun multiple des nombres $1, 2, 3, \ldots, 2n$, est le même que le plus petit commun multiple des nombres $n+1, n+2, \ldots, 2n$.

4930. — Étant donnée l'équation

$$+\sqrt{4x^2 + \sqrt{15x^2 + 7x + 3}} = 2x + 1,$$

on propose de ramener sa résolution à celle d'une équation ordinaire du second degré, et de rechercher si les deux racines de cette nouvelle équation conviennent à la proposée.

(*Bacc. lettres-sciences, Aix, juillet 1900.*)

4931. — Construire un triangle ABC connaissant le côté $BC = a$, la hauteur correspondante h et sachant que la bissectrice de l'angle A est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur le côté BC.

Calculer les côtés b et c.

Établir la condition de possibilité en la déduisant du calcul et de la construction.

4932. — On considère un cercle (C) de centre O et de rayon R, et un diamètre fixe Ox de ce cercle.

Une droite AB dont la longueur est constante et égale au rayon R du cercle (C) se meut de façon que l'une de ses extrémités, A, décrive la droite Ox et que l'autre extrémité, B, décrive la circonférence du cercle (C).

1° Trouver le lieu géométrique du point I où la perpendiculaire à Ox menée par A rencontre le prolongement du rayon OB.

2° Soit M un point de AB, situé à une distance constante, b, de l'extrémité A, et soient P et M_1 les points où la perpendiculaire à Ox menée par M rencontre respectivement les droites Ox et OB. Démontrer que le rapport $\frac{PM}{PM_1}$ reste constant quand la droite AB se meut de la façon indiquée au commencement de l'énoncé.

3° Trouver le lieu (E) du point M et construire la tangente en M à ce lieu (E).

(*Bacc. lettres-sciences, Nancy, juillet 1900.*)

4933. — Résoudre et discuter *géométriquement* le problème suivant :

Inscrire dans un demi-cercle donné un rectangle connaissant la somme de sa base et de sa hauteur.

(C. Billionnet.)

4934. — Un point lumineux S se trouve sur l'axe principal d'une lentille convergente, à 1^m du centre optique. La lentille a $0^m,50$ de distance focale. De l'autre côté de la lentille, à une distance de 1^m, se trouve un miroir plan M normal à l'axe principal.

1° Où se forme l'image définitive de S ?

2° Qu'arrive-t-il si l'on incline le miroir ?

3° Que se passerait-il si le miroir M, au lieu d'être plan, était concave ou convexe ?

(*Bacc. lettres-math., Aix, novembre 1899.*)

4935. — Un ballon en verre plein d'acide carbonique sec à la pression $0^m,76$ est suspendu à l'un des plateaux d'une balance dans de l'air également sec à la pression $0^m,78$. On en fait la tare. On fait ensuite le vide dans le ballon de telle sorte que la pression du gaz qu'il contient soit réduite à 2^{cm}. Pendant ce temps, la pression extérieure a varié de 10^{mm}. On trouve alors que, pour rétablir l'équilibre, il faut ajouter sur le plateau de la balance un poids de 15^{gr}. On demande de calculer le volume du ballon.

Pendant toute la durée de l'expérience la température est restée égale à 0°.

On ne tiendra pas compte de l'épaisseur du verre du ballon.

Densité de l'acide carbonique 1,52.

(*Bacc. lettres-sciences, Nancy, juillet 1899.*)

Erratum : N° du 15 novembre 1900, page 31, variété : *Sur l'enseignement de la Géométrie.*

Les nouveaux Éléments de Géométrie de M. Méray ont été publiés en *1874* et non en 1884 ; ils ont donc précédé de dix ans le livre de M. de Paolis.

Ch. B.

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet, Facdouel, Dir.

25e Année. — N° 6 **JOURNAL** PARIS, le 15 Décembre 1900.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Abonnements .. **Librairie Nony et Cie**, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

NON-SENS A ÉVITER DANS LES OPÉRATIONS SUR LES GRANDEURS

par M. **L. Tripard**, professeur à l'école nationale professionnelle d'Armentières.

On sait qu'on appelle *rapport* d'une grandeur A à une grandeur B, de même espèce, le nombre qui exprime la mesure de A quand on prend B pour unité ; ce rapport se représente par la notation $\frac{A}{B}$.

Or il faut bien observer :

1° Que $\frac{A}{B}$ est un nombre ;

2° Que A et B ne sont pas des nombres, mais des grandeurs. Il en résulte qu'on ne doit pas considérer $\frac{A}{B}$ comme un rapport entre nombres, c'est-à-dire comme une fraction dont le numérateur serait un nombre A et le dénominateur un nombre B ; par suite, tout calcul qui se base sur une telle confusion est un non-sens.

On trouve cependant des fautes de ce genre dans les exemples suivants que propagent trop de manuels et de professeurs.

1er exemple.

Théorème. — *La mesure d'une grandeur A au moyen d'une unité a' est égale au produit du nombre qui exprime la mesure de A au moyen d'une unité a, par le nombre qui exprime la mesure de a au moyen de a'.*

Soit n' le nombre qui exprime la mesure de A quand on prend a' pour unité ; on a

$$n' = \frac{A}{a'}.$$

Soit n le nombre qui exprime la mesure de A quand on prend a pour unité ; on a

$$n = \frac{A}{a}.$$

Divisant membre à membre ces deux égalités, il vient

$$\frac{n'}{n} = \frac{A}{a'} \times \frac{a}{A} = \frac{A \times a}{a' \times A},$$

ou, en simplifiant le dernier membre,

$$\frac{n'}{n} = \frac{a}{a'},$$

d'où enfin $$n' = n \times \frac{a}{a'}.$$

Observation. — A, a, a' n'étant pas des nombres, la démonstration précédente n'a pas de sens.

Rectification. — Voici comment on peut présenter la démonstration de ce théorème important qui permet de changer d'unité.

La définition du rapport de deux grandeurs étant donnée, on démontre les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Le rapport de deux grandeurs de même espèce s'exprime par le quotient exact (ou le rapport) des nombres qui expriment les mesures de ces grandeurs évaluées au moyen de la même unité.*

Démonstration habituelle.

Théorème II. — *Étant données trois grandeurs A, B, C de même espèce, le nombre qui mesure A quand on prend C pour unité est le produit du nombre qui mesure A quand on prend B pour unité par le nombre qui mesure B quand on prend C pour unité.*

Autrement dit : $\frac{A}{C} = \frac{A}{B} \times \frac{B}{C}$.

Soit a le rapport de A à B ; on a

$$\frac{A}{B} = a.$$

Mesurons A et B avec C ; soient a' et b les nombres obtenus, de sorte qu'on a

$$\frac{A}{C} = a', \qquad \frac{B}{C} = b.$$

D'après le théorème I, on a

$$a = \frac{a'}{b}$$

ou

$$a' = a \times b.$$

Si on emploie la notation des rapports, cette égalité peut s'écrire

$$\frac{A}{C} = \frac{A}{B} \times \frac{B}{C}.$$

Le second membre est le produit de deux nombres $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{C}$.

(D'après l'arithmétique de M. J. Tannery.)

2e exemple.

Théorème. — *Les surfaces de deux rectangles sont entre elles comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs.*

Soit R la surface d'un rectangle de base a et de hauteur b.
Soit R' — — a' — b'.

Construisons un troisième rectangle de surface R'' dont la base soit a' et la hauteur b. En comparant R et R'', on a

$$\frac{R}{R''} = \frac{a}{a'};$$

en comparant R'' et R', on a

$$\frac{R''}{R'} = \frac{b}{b'}.$$

En multipliant membre à membre les deux égalités, on a

$$\frac{R \times R''}{R'' \times R'} = \frac{a \times b}{a' \times b'},$$

d'où, en divisant haut et bas dans le premier membre par R″,

$$\frac{R}{R'} = \frac{a \times b}{a' \times b'}.$$

Observations. — 1° R, R′, R″ n'étant pas des nombres, la démonstration précédente n'a pas de sens. 2° Si a, b, a', b' sont des nombres, les opérations effectuées dans le second membre sont correctes, mais dans le cas contraire elles sont aussi dépourvues de sens que celles qui sont effectuées dans le premier membre.

Rectification. — Voici comment on peut arriver correctement à la mesure du rectangle.

Théorème I. — *Le rapport des surfaces de deux rectangles qui ont une dimension commune est égal au rapport de leurs dimensions non communes.*

Démonstration habituelle.

Théorème II. — *Le rapport des surfaces de deux rectangles est égal au produit du rapport de leurs bases par le rapport de leurs hauteurs.*

D'après le théorème précédent on a, comme dans la démonstration rappelée plus haut, si on conserve les mêmes notations,

$$\frac{R}{R''} = \frac{a}{a'}, \qquad \frac{R''}{R'} = \frac{b}{b'}.$$

D'après le théorème II donné à propos du 1er exemple,

$$\frac{R}{R''} \times \frac{R''}{R'} = \frac{R}{R'};$$

on a par suite

$$\frac{R}{R'} = \frac{a}{a'} \times \frac{b}{b'}$$

Théorème III. — *L'unité de surface étant le carré construit sur l'unité de longueur, le nombre qui exprime la mesure d'un rectangle est le produit des nombres qui expriment les mesures de ses côtés.*

Car si $a' = b' =$ unité de longueur, la surface de R′ est par définition l'unité de surface, et $\frac{R}{R'}$ est le nombre qui exprime la mesure de R ; de même $\frac{a}{a'}$ et $\frac{b}{b'}$, rapports des longueurs a et b à l'unité de surface, sont les nombres qui mesurent ces longueurs ; on a donc

Mesure R = mesure $a \times$ mesure b.

Remarque. — Des observations et rectifications toutes semblables doivent être faites au sujet des théorèmes qui conduisent à la mesure du parallélépipède rectangle.

INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE (1900)

4838. — *Déterminer toutes les valeurs de x qui vérifient l'inégalité*

$$\frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 5x + 6} > 2.$$

L'inégalité s'écrit

$$\frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 5x + 6} - 2 > 0$$

ou

$$\frac{x^2 + 6x - 11}{x^2 - 5x + 6} > 0.$$

La fraction du premier membre ne peut être positive qu'autant que ses deux termes sont de même signe.

Or le numérateur

$$x^2 + 6x - 11$$

s'annule pour les valeurs $x = -3 \pm 2\sqrt{5}$; il est donc négatif lorsque x est compris entre $-3 - 2\sqrt{5}$ et $-3 + 2\sqrt{5}$, et positif pour toute autre valeur; de même le dénominateur

$$x^2 - 5x + 6$$

s'annulant pour les valeurs $x = 2$ et $x = 3$ est négatif lorsque x est compris entre 2 et 3, et positif dans le cas contraire.

Les valeurs de x rendant le numérateur et le dénominateur de même signe sont donc communes aux deux intervalles

$$(-3 - 2\sqrt{5}, \ -3 + 2\sqrt{5}) \qquad \text{et} \qquad (2, 3),$$

ou bien extérieures à ces mêmes intervalles.

Comme $-3 + 2\sqrt{5} < 2$, il ne peut y avoir de valeur de x commune à la fois aux deux intervalles (ceci indique que le numérateur et le dénominateur ne peuvent jamais être négatifs en même temps). En considérant alors les valeurs de x extérieures aux deux intervalles, on obtient comme solutions de l'inégalité proposée, $-\infty < x < -3 - 2\sqrt{5}$,

$$-3 + 2\sqrt{5} < x < 2,$$

$$3 < x < +\infty.$$

(LOUIS DE PRANEUF, lycée de Toulon.)

Remarque. — On peut ranger par ordre de grandeur les valeurs pour lesquelles l'un des termes de la fraction

$$\frac{x^2 + 6x - 11}{x^2 - 5x + 6}$$

change de signe ; il est facile de voir que 2 et 3, racines du dénominateur, rendant positif le numérateur sont supérieures aux racines de celui-ci ; les différentes racines déterminent donc les intervalles indiqués ci-dessous :

$$-\infty \qquad -3 - 2\sqrt{5} \qquad -3 + 2\sqrt{5} \qquad 2 \qquad 3 \qquad +\infty \quad .$$

La fraction étant positive dans le dernier intervalle, on a de proche en proche les signes dans les intervalles précédents ; il suffit de changer de signe lorsqu'on passe de l'un à l'autre, on a ainsi

$-\infty$		$-3 - 2\sqrt{5}$		$-3 + 2\sqrt{5}$		2		3		$+\infty$
	+		−		+		−		+	

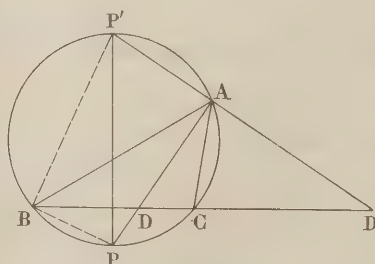
L'inégalité est vérifiée quand x se trouve compris dans un des intervalles extrêmes ou dans celui du milieu.

[Ont résolu la même question : MM. E. Anzemberger ; P. Bancillon ; H. Belbenoit ; G. Boissonnet ; Bouzy ; F. Clabault ; L. Galland ; L. Guilhem ; H. Guillaud ; J. Haag ; J. Hébré ; R. Henry ; E. Hugonnier-Ginet ; de Jarny ; D. Kœnig ; A. Legros ; J. Lehmann ; D. Lword ; R. Mouzon ; Noël ; P. Saintin ; E. Sautreau ; H. Tellier ; P. Valentin ; A. Vannier ; H. Varennes ; N. Vaslin ; P. Bonnet.]

4839. — *Soient ABC un triangle et P le point où la bissectrice intérieure de l'angle A rencontre la perpendiculaire élevée sur BC en son milieu; démontrer que le rapport $\frac{PA}{PB}$ est égal au rapport $\frac{AB + AC}{BC}$.*

Comment doit-on modifier cette proposition lorsque l'on remplace P par le point P′ d'intersection de la bissectrice extérieure de l'angle A avec la perpendiculaire élevée sur BC en son milieu?

Le point P appartient comme on sait au cercle circonscrit au triangle. Tirons BP, et soit D le point de rencontre de AP avec BC ; les deux triangles PAB, PBD ayant un angle commun et les angles A, B égaux comme ayant même mesure sont semblables ; donc



$$\frac{PA}{PB} = \frac{AB}{BD}.$$

Or, d'après une propriété de la bissectrice,

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} = \frac{AB + AC}{BD + DC}.$$

Donc

$$\frac{PA}{PB} = \frac{AB + AC}{BC}.$$

En considérant la bissectrice extérieure AD' qui coupe en P' la perpendiculaire au milieu de BC, on aurait de même

$$\frac{P'A}{P'B} = \frac{AB}{BD'} = \frac{AC}{CD'} = \frac{AB - AC}{BC}.$$

$AB + AC$ se trouve alors remplacé par $AB - AC$.

(G. FOUCRY, école normale de Châlons-sur-Marne.)

On peut aussi obtenir immédiatement l'une des deux relations ci-dessus en appliquant le théorème de Ptolémée à l'un des quadrilatères inscriptibles ABPC ou AP'BC, et en remarquant que $PB = PC$.

(G. DELAHAYE, à Roye.)

[Ont résolu la même question: MM. E. Anzemberger; H. Belbenoit; G. Boissonnet; Bouzy; R. Cattin; F. Clabault; M. Degand; L. Guilhem; H. Guillaud; G. Guinand; J. Haag; J. Hébré; R. Henry; E. Hugonnier-Ginet; H. Janois; D. Kœnig; A. Lecoutour; A. Legros; J. Lehmann; E. Licope; D. Lword; A. Meynier; L. Minjoz; R. Mouzon; Noël; L. Ollié; L. Patin; J. Pendariès; H. Pitrat; E. Sautreau; G. Sinoquet; H. Tellier; P. Valentin; H. Varennes; V. Vaslin; P. Zlatco; P. Bonnet.]

4840. — *Dans une presse hydraulique, on exerce une pression totale de 50^{kg} sur le petit piston, qui a un diamètre de 25^{mm}; quel diamètre faut-il donner au grand piston, en millimètres, pour qu'il exerce une pression totale de $2\,500^{kg}$?*

Désignons par x le diamètre du grand piston. Les pressions exercées par les pistons étant proportionnelles à leurs sections, et ces sections étant entre elles comme les carrés de leurs rayons ou de leurs diamètres respectifs, on a

$$\frac{2\,500}{50} = \frac{x^2}{(25)^2},$$

d'où $\qquad x^2 = 50 \times (25)^2 \qquad$ et $\qquad x = 176^{mm},7.$

(P. SAINTIN, à Versailles.)

[Ont résolu la même question: MM. Anzemberger; H. Belbenoit; R. Cattin; F. Clabault; G. Dicop; H. Dobryzniak; E. Foucry; J. Haag; R. Henry; E. Hugonnier-Ginet; G. Lallier; A. Lecoutour; A. Legros; David Lwow; J. Ménéchal; R. Mouzon; L. Patin; de Praneuf; J. Pendariès; M. Royer; Sinoquet; G. Tourneur; V. Vaslin; P. Valentin; H. Varennes.]

4841. — *La ligne de terre xy est le petit axe de la feuille, x étant à gauche. Dans le plan horizontal se trouve un triangle isocèle $\alpha\beta\gamma$, dont le sommet α est sur le grand axe de la feuille, à 10^{cm} en avant de xy, et dont la base $\beta\gamma$ coïncide avec xy, β étant à gauche.*

La droite $\alpha\beta$ est la trace horizontale d'un plan P dont la partie supérieure fait un angle de $30°$ avec la partie du plan horizontal qui contient γ.

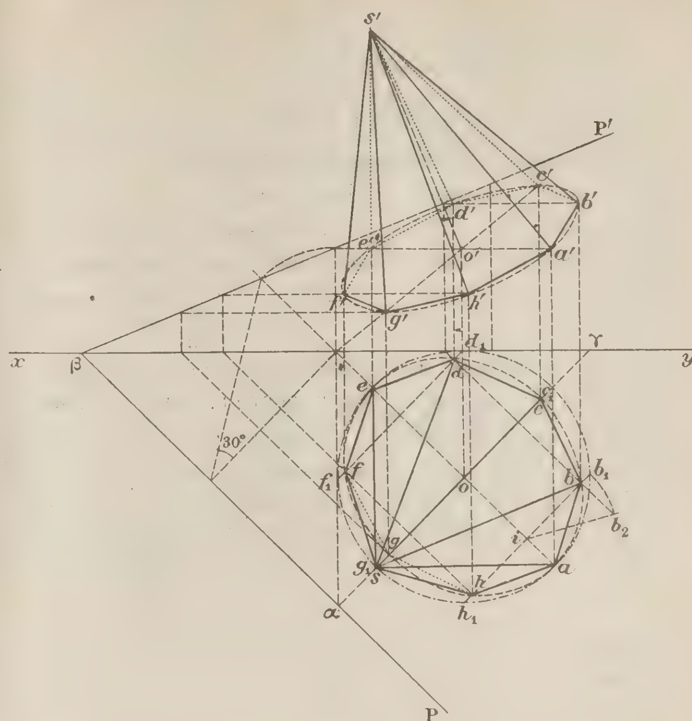
Dans le plan P se trouve un octogone régulier de 5^{cm} de rayon, dont le centre se projette horizontalement au point milieu de $\alpha\gamma$; de plus l'une des diagonales qui passent par deux sommets opposés de cet octogone est horizontale. Cet octogone est la base d'une pyramide régulière située au-dessus du plan P, ayant 10^{cm} de hauteur.

Représenter cette pyramide par ses deux projections, ainsi que la circonférence circonscrite à l'octogone de base.

On fera la distinction des parties vues et cachées en supposant la pyramide pleine et opaque.

Le triangle isocèle $\alpha\beta\gamma$ n'étant défini que par sa hauteur issue de α nous pouvons le supposer rectangle en α, de sorte que la diagonale de l'octogone perpendiculaire à la diagonale horizontale sera projetée horizontalement suivant $\alpha\gamma$.

Du milieu O de $\alpha\gamma$ comme centre décrivons un cercle de rayon 5^{cm}; ce cercle sera le rabattement du cercle circonscrit à l'octogone autour de la diagonale horizontale $(ae, a'e')$, parallèle à $\alpha\beta$.



Inscrivons dans ce cercle l'octogone $ab_1c_1d_1ef_1g_1h_1$, puis relevons ses divers sommets dans le plan $P\alpha P'$ qui fait avec le plan horizontal un angle de $30°$. (On détermine par exemple b en traçant un arc de $30°$, b_1b_2, ayant son centre i à l'intersection i de ae et b_1h_1).

On obtient ainsi la projection horizontale $abcdefgh$ de l'octogone; la projection verticale s'en déduit au moyen d'horizontales du plan $P\alpha P'$.

Pour obtenir la projection du sommet S de la pyramide, on peut remarquer que sa hauteur SO étant perpendiculaire au plan $P\alpha P'$ fait avec le plan horizontal un angle complémentaire de l'angle de $30°$, c'est-à-dire un angle de $60°$; de sorte que cette hauteur SO se projette horizontalement sur $\alpha\gamma$ suivant une longueur $\quad os = \frac{OS}{2} = 5^{cm}, \quad$ autrement dit s se confond avec g_1; on en déduit ensuite s' en menant la ligne de rappel de s jusqu'à sa rencontre avec la perpendiculaire à $\beta P'$ issue de o'.

Le cercle circonscrit à l'octogone de base se projette horizontalement suivant une ellipse d'axes ae et cg, et verticalement suivant une ellipse définie par les diamètres conjugués $a'e'$ et $c'g'$. Ces ellipses n'appartenant pas à la pyramide ont été figurées en trait de construction.

(G. FOUCRY, école normale de Châlons-sur-Marne.)

[Ont résolu la même question: MM. Bouzy; J. Haag; J. Pendariès; P. Valentin.]

ÉCOLE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES DE PARIS (1900)

4907. — *Déterminer λ de manière que l'équation*

$$(\lambda + 2)x^2 - (7\lambda + 23)x + 22\lambda - 26 = 0$$

ait ses deux racines dans le rapport de 1 à 2.

On peut représenter les racines par α et 2α. Écrivons que la

somme 3α et le produit $2\alpha^2$ de ces racines sont égaux à la somme et au produit des racines de l'équation considérée ; il vient

$$3\alpha = \frac{7\lambda + 23}{\lambda + 2}, \qquad 2\alpha^2 = \frac{22\lambda - 26}{\lambda + 2}.$$

En éliminant α, on en déduit

$$\left[\frac{7\lambda + 23}{3(\lambda + 2)}\right]^2 = \frac{11\lambda - 13}{\lambda + 2},$$

ou, en chassant les dénominateurs et simplifiant,

$$50\lambda^2 - 241\lambda - 763 = 0,$$

d'où l'on tire $\lambda' = 7, \qquad \lambda'' = -2,18.$

Les valeurs de α qui correspondent à ces deux valeurs de λ sont

$$\alpha' = \frac{8}{3}, \qquad \alpha'' = -\frac{43}{3}.$$

(H. DAMOISEAU, école primaire supérieure de Bar-sur-Seine.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Barbé ; L. Barberot ; M. Bernard ; P. Bonnefoy ; P. Bonnot ; L. Bordron ; A. Bottin ; R. Cattin ; E. Clotteau ; L. Colombey ; L. David ; Delhotel ; J. Dubar ; C. Dupas ; G. Foucry ; L. Geoffroy ; F. Gérard ; E. Gernez - Pfanmatter ; P. Givry ; C. Godard ; R. Grenouillot ; H. Guillaud ; P. Guillemin ; R. Henry ; E. Hugonnier ; D. Kœnig ; A. Legros ; E. Licope ; M. B., instituteur à I. ; C. Marie ; H. Marx ; P. Mayet ; F. Mestre ; A. Meynier ; P. Michaud ; A. Mourès ; Noël ; L. Ollié ; L. Patin ; L. Périno ; M. Petit ; M. Petitjean ; P. Plisson ; J. Reynaud ; R. Rives ; A. de Saint-Gabriel ; P. Saintin ; E. Serres ; J. Tastet ; V. Thébault ; P. Valentin ; A. Vannier ; H. Varennes ; P. Zlatco.]

4908. — *On donne un triangle rectangle* BAC, *le cercle inscrit touche l'hypoténuse* BC *en* D.

Montrer que l'on a

$$2\left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{AC}\right) = \frac{1}{BD} - \frac{1}{CD}.$$

Soient E et F les points de contact de AC, AB avec le cercle inscrit O, de rayon r. On a

$$AC = AE + EC = r + CD,$$
$$AB = AF + FB = r + BD,$$

On déduit de là

$$AC - AB = CD - BD \qquad (1)$$

et $AC.AB = r^2 + r(CD + BD) + CD.BD.$

Or $r^2 + r.CD + r.BD$ représente la somme du carré AEOF et des deux quadrilatères ODCE, ODBF ; cette quantité est donc égale à l'aire du triangle, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}AC.AB$; donc

$$AC.AB = \frac{1}{2}AC.AB + CD.BD$$

ou

$$\frac{1}{2}AC.AB = CD.BD. \qquad (2)$$

En divisant les égalités (1) et (2) membre à membre, il vient

$$\frac{2(AC - AB)}{AC.AB} = \frac{CD - BD}{CD.BD}$$

ou

$$2\left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{AC}\right) = \frac{1}{BD} - \frac{1}{CD}.$$

(DELHOTEL, à Vaucouleurs.)

Autre solution. — On sait que

$$BD = p - b = \frac{c + a - b}{2},$$

$$CD = p - c = \frac{a + b - c}{2}.$$

On déduit de là

$$\frac{1}{BD} - \frac{1}{CD} = \frac{2}{c + a - b} - \frac{2}{a + b - c}$$

$$= \frac{4(b - c)}{(a - b + c)(a + b - c)}$$

$$= \frac{4(b - c)}{a^2 - (b - c)^2},$$

et, en remplaçant a^2 par $b^2 + c^2$,

$$\frac{1}{BD} - \frac{1}{CD} = \frac{4(b - c)}{2bc} = 2\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right).$$

(P. BILY.)

Remarque. — On peut déduire de la seconde solution que la relation donnée n'existe que dans un triangle rectangle ou un triangle isocèle, car l'égalité

$$\frac{4(b - c)}{a^2 - (b - c)^2} = 2\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)$$

peut s'écrire

$$2(b - c)bc = (b - c)[a^2 - (b - c)^2].$$

Cette égalité est vérifiée si $b = c$; dans le cas où $b \neq c$, on peut supprimer le facteur $b - c$, et il reste

$$2bc = a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$$

ou

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

égalité caractéristique, qui montre que ABC est rectangle en A.

[Ont résolu la même question : M[lles] A. Madonne ; A. Saleilles ; MM. A. Arcizet ; P. Bancillon ; L. Bannerot ; E. Barbé ; L. Barberot ; V. Barol ; H. Belbenoît ; M. Bernard ; A. Bernardeau ; P. Bonnefoy ; C. Bourvéau ; A. Bottin ; L. Bordron ; I. Bourrec ; R. Cattin ; L. Colombey ; H. Damoiseau ; L. David ; A. Drocourt ; C. Dupas ; Durand ; G. Foucry ; L. Geoffroy ; F. Gérard ; E. Gernez-Pfanmatter ; P. Givry ; A. Gondran ; E. Gouault ; R. Grenouillot ; H. Guillaud ; A. Hardy ; J. Hébré ; R. Henry ; E. Hugonnier ; A. James ; D. Kœnig ; Lamarre ; A. Laurence ; A. Lecoutour ; A. Legros ; E. Licope ; C. Marie ; P. Mayet ; F. Mestre ; A. Meynier ; T. Millet ; L. Minjoz ; D. Montel ; R. Mouzon ; Noël ; L. Ollié ; C. Passeron ; L. Patin ; F. Pégorier ; M. Petit ; P. Plisson ; A. Reversat ; J. Rigal ; R. Rives ; Roncin ; A. Rousseau ; M. Royer ; A. de Saint-Gabriel ; E. Serres ; Sinoquet ; Tastet ; V. Thébault ; F. Thibùr ; P. Valentin ; C. Vallot ; A. Vannier ; H. Varennes ; L. Viallet ; P. Zlatco.]

4909. — *Une sphère métallique est suspendue par un fil très fin sous le plateau d'une balance. La balance est en équilibre dans l'air pour une masse de* 10^{gr} *placée dans l'autre plateau. La densité du métal de la sphère est égale à* 8,8 *à* 0°, *son coefficient de dilatation linéaire à* 0,000017

On plonge la sphère métallique dans un liquide à la température de 0° ; *il faut alors une masse de* $8^{gr},640$ *dans l'autre plateau pour établir l'équilibre. On chauffe ensuite le liquide et on trouve qu'à la température de* 20°, *il faut* $8^{gr},664$ *dans le deuxième plateau pour établir l'équilibre. On demande :*

1° *Quelle est la densité du liquide à* 0° ;

2° *Quel est le coefficient de dilatation moyen de* 0° *à* 20° *du liquide.*

3° *Traiter les mêmes questions en tenant compte de ce que les pesées sont faites dans l'air à la pression atmosphérique normale et à la température de* 20°.

1° Appelons V le volume de la sphère, x la densité du liquide à 0°. En ne tenant pas compte de la poussée exercée par l'air sur la sphère et sur les poids marqués, on a

$$V \times 8,8 = 10 \qquad (1)$$

et

$$V \times 8,8 - Vx = 8,64. \qquad (2)$$

Divisant ces deux équations l'une par l'autre, il vient

$$x = 1,1968.$$

Telle est la densité du liquide à 0°.

2° A 20° la densité du liquide devient $\frac{x}{1 + 20\delta}$, δ désignant le coefficient de dilatation moyen de 0° à 20° du liquide. L'équation d'équilibre devient

$$V \times 8,8 - \frac{V(1 + 3 \times 0,000017 \times 20)x}{1 + 20\delta} = 8,664. \qquad (3)$$

Divisant l'une par l'autre les équations (1) et (3), il vient

$$\frac{8,8}{8,8 - \frac{1,00102 \times 1,1968}{1 + 20\delta}} = \frac{10}{8,664},$$

d'où l'on tire $\delta = 0,00095.$

3° Si l'on tient compte de ce que les pesées sont faites dans l'air à 20°, les équations (1) et (2) deviennent, en désignant par Δ la densité des poids marqués,

$$V \times 8,8 - V(1 + 3 \times 0,000017 \times 20)0,001293 \times \frac{1}{1 + \alpha t}$$

$$= 10\left(1 - \frac{0,001293 \times \frac{1}{1 + \alpha t}}{\Delta}\right), \quad (4)$$

$$V \times 8,8 - Vx = 8,64\left(1 - \frac{0,001293 \times \frac{1}{1 + \alpha t}}{\Delta}\right). \quad (5)$$

Divisant l'une par l'autre ces deux équations, il vient

$$\frac{8,8 - 1,00102 \times 0,001293 \times \frac{1}{1 + \frac{20}{273}}}{8,8 - x} = \frac{10}{8,64},$$

d'où $x = 1,1969.$

Telle est alors la densité du liquide à 0°.

Si le liquide est chauffé à 20°, l'équation d'équilibre est

$$V \times 8,8 - \frac{V(1 + 3 \times 0,000017 \times 20)x}{1 + 20\delta}$$

$$= 8,664\left(1 - \frac{0,001293 \times \frac{1}{1 + \alpha t}}{\Delta}\right). \quad (6)$$

Divisant l'une par l'autre les équations (4) et (6), il vient

$$\frac{8,8 - 1,00102 \times 0,001293 \times \frac{1}{1 + \frac{20}{273}}}{8,8 - \frac{1,00102 \times 1,1969}{1 + 20\delta}} = \frac{10}{8,664},$$

d'où $\delta = 0,000909.$

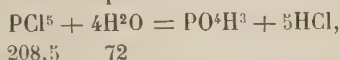
[Ont résolu une partie de la question : Mlle Madone ; MM. Belbenoit ; Beyney ; Foucry ; Gernez ; Guillemin ; Mayet ; Merle ; Millet ; Reyer ; de Saint-Gabriel.]

4910. — 27^{gr} *de phosphore absorbent du chlore pour faire du perchlorure* PCl^5. *Quelle est la quantité de chlore nécessaire ? Combien faut-il d'eau pour convertir le perchlorure en acide phosphorique normal* PO^4H^3 ? *Écrire l'équation.*

Poids atomiques : $H = 1$, $Cl = 35,5$, $P = 31$, $O = 16$.

1° 31^{gr} de phosphore absorbant $35,5 \times 5 = 177^{gr},5$ de chlore pour former $177,5 + 31 = 208^{gr},5$ de perchlorure PCl^5, 27^{gr} de phosphore absorberont $\frac{177,5 \times 27}{31} = 154^{gr},6$ de chlore pour former $154,6 + 27 = 181^{gr},6$ de perchlorure.

2° Le perchlorure de phosphore mis en présence d'un excès d'eau froide donne de l'acide orthophosphorique et de l'acide chlorhydrique suivant l'équation



$$PCl^5 + 4H^2O = PO^4H^3 + 5HCl,$$
$$208,5 \qquad 72$$

d'après laquelle $208^{gr},5$ de perchlorure s'unissent à 72^{gr} d'eau. Pour convertir $181^{gr},6$ de perchlorure en acide phosphorique normal, il faudra donc

$$\frac{72 \times 181,6}{208,5} = 62^{gr},71 \text{ d'eau.}$$

(P. SAINTIN, à Versailles.)

[Ont résolu la même question : Mlles Madonne ; Saleilles ; MM. Arcizet ; Belbenoit ; Bernardeau ; Cattin ; Delhôtel ; Drocourt ; Dupas ; Gernez ; Guerrier ; Giery ; Guillemin ; Heury ; Hostier ; Hugonnier ; A. Lapresle ; Laurent ; Lefèvre ; Legros ; Lecoutour ; Mayet ; Martin ; Ménéchal ; Meynier ; Michaud ; Mouzon ; Patin ; Petit ; Pernin ; Poircuitte ; Reynaud ; L. Richard ; Rives ; Robert ; Roncin ; Royer ; A. de Saint-Gabriel ; Vannier ; H. Varennes ; Vige ; Wermann.]

ALGÈBRE

4489. — *Former et résoudre l'équation qui donne les valeurs de* x *qui satisfont aux deux équations aux deux inconnues* x *et* y,

$$5x^2 - 12xy + 9y^2 - 6y + 4 = 0,$$
$$mx - y = 3m - 2;$$

puis chercher pour quelles valeurs de m *les valeurs de* x *existent ; mettre tous les calculs.*

(*École des Beaux-Arts, section d'architecture.*)

De la seconde équation on tire

$$y = mx - 3m + 2;$$

en portant cette valeur de y dans la première équation, il vient

$$5x^2 - 12x(mx - 3m + 2) + 9(mx - 3m + 2)^2 - 6(mx - 3m + 2) + 4 = 0,$$

ou, en effectuant et ordonnant par rapport à x,

$$(9m^2 - 12m + 5)x^2 - 6(9m^2 - 11m + 4)x + 81m^2 - 90m + 28 = 0.$$

Pour que les deux valeurs de x fournies par cette équation soient réelles, il faut et il suffit que l'on ait

$$9(9m^2 - 11m + 4)^2 - (9m^2 - 12m + 5)(81m^2 - 90m + 28) \geqslant 0,$$

ou, après avoir simplifié le premier membre,

$$-6m + 4 \geqslant 0,$$

d'où $m \leqslant \frac{2}{3}.$

Pour $m = \frac{2}{3}$, $x = 2$ et $y = \frac{4}{3}$.

Dans le cas général, les deux valeurs de x ont pour expression

$$x = \frac{3(9m^2 - 11m + 4) \pm \sqrt{4 - 6m}}{9m^2 - 12m + 5}.$$

(L. BARBEROT, au Valdoie.)

Remarque. — On peut interpréter géométriquement les équations données : la première représente une ellipse, et la seconde une droite qui passe par un point fixe ($x = 3$, $y = 2$) ; il s'agit de trouver les points d'intersection de la droite et de l'ellipse, et de chercher pour quelles valeurs de m (m est le coefficient angulaire de la droite) l'ellipse est coupée.

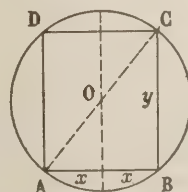
(A. THORIN, à Tours.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Arcizet ; E. Ardin-Delteil ; F. Bellec ; B. Carrière ; L. Curt ; P. Delolme ; R. Depasse ; J. Fiton ; E. Gernez-Pfannatter ; R. Henry ; H. Janois ; M. Jousset ; Tr. Lalescu ; A. Lecoutour ; E. Le Maigre ; Lescure ; P. Marion ; G. Nazare ; A. Popescu ; A. Texonnière ; Vien.]

4919. — *Inscrire dans une sphère donnée, de rayon* R, *un cylindre dont la surface totale soit égale au produit de la longueur d'une des circonférences de base du cylindre par une longueur donnée* a. — *Discussion.*

(*Bacc. lettres-math., Paris, novembre 1900.*)

Désignons par x le rayon de base du cylindre et par y sa hauteur BC. La condition imposée s'écrit



$$2\pi x^2 + 2\pi xy = 2\pi x . a$$

ou, en supprimant le facteur commun $2\pi x$,

$$x + y = a. \quad (1)$$

D'ailleurs le triangle rectangle ABC donne

$$4x^2 + y^2 = 4R^2. \quad (2)$$

Éliminons y entre (1) et (2) ; il vient

$$4x^2 + (a - x)^2 = 4R^2$$

ou

$$5x^2 - 2ax + a^2 - 4R^2 = 0. \quad (3)$$

Discussion. — Pour qu'une valeur de x convienne au problème, il faut et il suffit qu'elle soit réelle, positive et inférieure à a, d'après l'équation (1). Une telle valeur est d'ailleurs inférieure à R, puisque l'équation (2) entraîne

$$4x^2 < 4R^2 \quad \text{ou} \quad x < R.$$

Réalité. — La condition de réalité est

$$a^2 - 5(a^2 - 4R^2) \geqslant 0$$

ou

$$a \leqslant R\sqrt{5}.$$

Signe. — Si $a < 2R$, le produit des racines, $\frac{a^2 - 4R^2}{5}$, est négatif ; les deux racines sont de signes contraires.

Si $a > 2R$, ce produit est positif, et les racines prennent toutes deux le signe de leur somme, $\frac{2a}{5}$, c'est-à-dire sont positives.

Grandeur. — Pour comparer a aux deux racines, substituons a à x dans le premier membre de (3) ; il vient

$$f(a) = 4(a^2 - R^2).$$

Si $a < R$, ce résultat est négatif ou de signe contraire au premier terme de l'équation (3) ; a sépare alors les deux racines.

Si $a > R$, le résultat précédent est positif ; a est extérieur aux racines et supérieur à la plus grande, puisque a surpasse leur demi-somme, $\frac{a}{5}$.

Suivant la grandeur de a par rapport aux repères R, 2R et $R\sqrt{5}$, les résultats précédents se résument ainsi :

$0 < a < R$, une racine positive supérieure à a ; pas de solution.

$R < a < 2R$, une racine positive inférieure à a ; une solution.

$2R < a \leqslant R\sqrt{5}$, deux racines positives inférieures à a ; deux solutions, confondues en une seule pour $a = R\sqrt{5}$.

$a > R\sqrt{5}$, deux racines imaginaires ; aucune solution.

(Léon BARBEROT.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Bernardeau ; M. Beyney ; C. Bourvéaux ; L. Chaix ; H. Dobrzyniak ; C. Dupas ; Durand ; F. Filliol ; E. Gernez-Pfanmatter ; J. Guérel ; G. Guillaume ; R. Henry ; M. Laurence ; F. Mestre ; R. Mouzon ; Ch. Passeron ; M. Petit ; A. Pernin ; G. Rabaté ; G. Reveillon ; R. Rives ; E. Serres ; J. Tastet ; D. Montel.]

4921. — *Trouver un nombre de deux chiffres, sachant qu'il est égal à m fois le produit de ses chiffres, m étant un nombre entier donné.*

Quelles valeurs peut-on attribuer à m ?

Soient x le chiffre des dizaines et y le chiffre des unités du nombre cherché. On doit avoir

$$10x + y = mxy$$

ou

$$y = \frac{10x}{mx - 1}.$$

Cette valeur de y n'est entière qu'autant que $mx - 1$ divise $10x$ ou simplement 10, puisque les nombres $mx - 1$ et x n'admettent d'autre facteur commun que 1. Par suite $mx - 1$ est égal à l'un des diviseurs de 10 autre que 1 (y devant être inférieur à 10) ; on est donc conduit à examiner les trois hypothèses

$$mx - 1 = 2, \qquad mx - 1 = 5, \qquad mx - 1 = 10,$$

ou

$$mx = 3, \qquad mx = 6, \qquad mx = 11.$$

De plus, y devant être inférieur à 10, on doit avoir

$$mx - 1 > x$$

ou

$$(m - 1)x > 1 ;$$

donc $m > 1$. Par suite on ne peut attribuer à m d'autres valeurs que 2, 3, 6, 11.

1° Supposons $m = 2$. On ne peut alors attribuer à x que la valeur 3 ; il en résulte pour y la valeur 6 ; ce nombre 36 donne une solution.

2° Supposons $m = 3$. On peut attribuer à x l'une des valeurs 1 ou 2 :

si $x = 1$, $y = 5$, on trouve le nombre 15 ;

si $x = 2$, $y = 4$, on trouve le nombre 24.

3° Supposons $m = 6$. On ne peut attribuer à x que la valeur 1 ; alors $y = 2$, on trouve le nombre 12.

4° Supposons $m = 11$. On ne peut attribuer à x que la valeur 1, alors $y = 1$, on trouve le nombre 11.

(E. GERNEZ-PFANMATTER, à Roubaix.)

[Ont résolu la même question : Mlles A. Madonne ; A. Saleilles ; M. D. P. ; MM. E. Barbé ; M. Bégué ; H. Belbenoit ; A. Bernardeau ; P. Bonnot ; R. Cattin ; J. Cougnoux ; Delhotel ; G. Desnoës ; Durand ; J. Franceschini ; F. Grenier ; P. Guillemin ; P. Hamon ; R. Henry ; D. Koenig ; M. Laurence ; L. Lemmet ; G. Liégeois ; L. Minjoz ; L. Painvin ; E. Périnet ; J. Permann ; Poujol ; P. Quintescu ; R. Rives ; E. Roncaglia ; A. de Saint-Gabriel ; E. Serres ; Ch. Tapponnier ; J. Tastet ; Ch. Vallot ; Varognaux ; P. Zlatco ; A. Drocourt.]

GÉOMÉTRIE

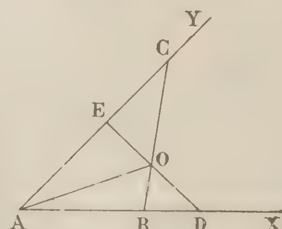
4914. — *On considère un angle XAY et deux droites BC et DE comprises entre les côtés de l'angle et se coupant en un point intérieur O.*

1° Démontrer que la droite AO divise les deux triangles ABC, ADE en quatre parties telles que

$$\frac{1}{AOB} + \frac{1}{AOC} = \frac{1}{AOD} + \frac{1}{AOE}.$$

2° Quelle modification subit cette relation lorsque le point O est extérieur à l'angle XAY ?

1° La relation à établir peut s'écrire



$$\frac{AOC + AOB}{AOB.AOC} = \frac{AOE + AOD}{AOD.AOE}$$

ou

$$\frac{ABC}{ADE} = \frac{AOB.AOC}{AOD.AOE}. \quad (1)$$

Les triangles ABC, ADE ayant un angle commun A, leurs surfaces sont entre elles comme les produits des côtés comprenant cet angle ; donc

$$\frac{ABC}{ADE} = \frac{AB.AC}{AD.AE}.$$

Les triangles AOB, AOD ayant une hauteur commune sont entre eux comme les bases correspondantes :

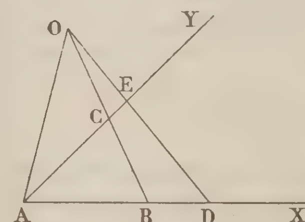
$$\frac{AOB}{AOD} = \frac{AB}{AD} ;$$

de même

$$\frac{AOC}{AOE} = \frac{AC}{AE}.$$

Ces trois valeurs transforment la relation (1) en une identité.

Lorsque le point O est extérieur à l'angle XAY, la relation (1) subsiste encore, mais dans ce cas, ABC et ADE sont représentés par AOB — AOC et AOD — AOE de sorte que l'on a



$$\frac{AOB - AOC}{AOB.AOC} = \frac{AOD - AOE}{AOD.AOE}$$

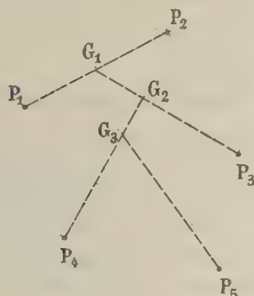
ou

$$\frac{1}{AOC} - \frac{1}{AOB} = \frac{1}{AOE} - \frac{1}{AOD}.$$

(Ed. BARBÉ, à Mazamet.)

[Ont résolu la même question : MM. P. Bancillon ; F. Belay ; R. Cattin ; Delhotel ; G. Foucry ; A. Lardy-Pleumartin ; Laurence ; L. Maubeck ; C. Quantin ; M. Royer ; A. Vergnole ; Mlles Degand ; Anne Madonne ; MM. Hardy ; L. Lefèvre ; A. Legros ; A. Mourès ; L. Ollié ; F. Pégorier ; L. Périno ; M. Petit ; R. Rives ; A. de Saint-Gabriel ; P. Thouet ; P. Zlatco.]

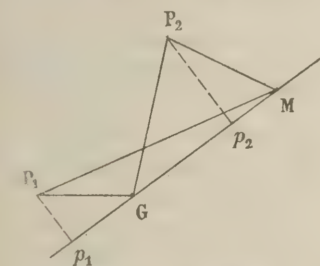
4922. — *Soient n points fixes $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Trouver le lieu des points M tels que la somme des carrés des distances du point M aux divers points fixes ait une valeur déterminée k^2 :*



$$\overline{MP_1}^2 + \overline{MP_2}^2 + \ldots + \overline{MP_n}^2 = k^2.$$

(*Bacc. lettres-math., Bordeaux, juillet 1900.*)

On sait que si l'on prend le milieu G_1 de P_1P_2, puis successivement, sur G_1P_3, le point G_2 tel que $G_1G_2 = \frac{1}{3} G_1P_3$, sur G_2P_4, le point G_3 tel que $G_2G_3 = \frac{1}{4} G_2P_4$, ..., on obtient finalement un point G, appelé centre des moyennes distances, et jouissant de cette propriété que si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont les projections des points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sur une droite quelconque passant par G, la somme algébrique



$$\overline{Gp_1} + \overline{Gp_2} + \ldots, \overline{Gp_n}$$

est nulle.

Ceci rappelé, projetons les points de l'espace $P_1, P_2, \ldots, P_n$ en $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sur la droite GM qui joint leur centre des moyennes distances à un point quelconque M du lieu.

En considérant GM comme sens positif des divers segments $Gp_1, Gp_2, \ldots$, les triangles MGP_1, MGP_2, ... donnent

$$\overline{MP}_1^2 = \overline{MG}^2 + \overline{GP}_1^2 - 2\overline{GM}.\overline{Gp_1},$$
$$\overline{MP}_2^2 = \overline{MG}^2 + \overline{GP}_2^2 - 2\overline{GM}.\overline{Gp_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\overline{MP}_n^2 = \overline{MG}^2 + \overline{GP}_n^2 - 2\overline{GM}.\overline{Gp_n}.$$

Ajoutons ces égalités membre à membre ; il vient, en tenant compte de l'hypothèse et de la propriété du point G,

$$k^2 = n\overline{MG}^2 + \Sigma_1^n \overline{GP}_n^2,$$

d'où
$$MG = \sqrt{\frac{k^2 - \Sigma_1^n \overline{GP}_n^2}{n}} = \text{constante}.$$

Le lieu du point M est donc une sphère de centre G. Cette sphère n'existe qu'autant qu'on a

$$k^2 > \Sigma_1^n \overline{GP}_n^2.$$

Lorsque $k^2 = \Sigma_1^n \overline{GP}_n^2$, le lieu se réduit au point G.

Remarque. — Le lieu précédent est un cas particulier du lieu des points M pour lesquels on a

$$p_1\overline{MP}_1^2 + p_2\overline{MP}_2^2 + \ldots + p_n\overline{MP}_n^2 = k^2,$$

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ désignant des coefficients numériques positifs ou négatifs donnés. Par un raisonnement analogue au précédent, on démontre que ce dernier lieu est une sphère ayant pour centre le centre des *distances proportionnelles* des points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ affectés respectivement des coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_n$

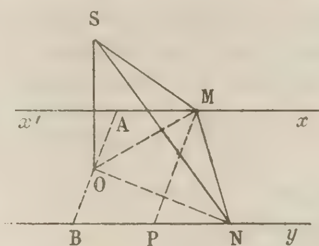
(PAUL THONET, athénée royal d'Anvers.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Anzemberger ; P. Bily ; Durand ; Ch. Faugère ; G. Foucry ; E. Gernez-Pfanmatter ; J. Guéret ; G. Guillaume ; L. Minjoz ; Noël ; G. Rabaté ; E. Serres ; P. Thonet ; P. Valot ; L. Ventre ; P. Zlatco.]

4923. — *On donne deux droites parallèles x'x, y'y et un point O de leur plan situé à une distance d de ces deux droites. Par le point O on mène une perpendiculaire OS au plan de ces deux droites, OS = h. On demande de déterminer un point M sur x'x et un point N sur y'y de telle sorte que l'angle MSN soit droit et que le triangle MSN ait une aire donnée m^2. — Discussion.*

(*Bacc. lettres-math., Clermont, juillet 1900.*)

Menons par le point O la perpendiculaire commune AB aux deux parallèles $x'x$ et $y'y$; posons $AM = x$ et $BN = y$.



Le triangle MSN sera rectangle en S et aura pour surface m^2, si l'on a

$$\overline{SM}^2 + \overline{SN}^2 = \overline{MN}^2$$
et
$$SM.SN = 2m^2.$$

Or en considérant les triangles rectangles SOM et OAM, on a

$$\overline{SM}^2 = h^2 + \overline{OM}^2 = h^2 + d^2 + x^2 ;$$

de même,
$$\overline{SN}^2 = h^2 + d^2 + y^2.$$

D'ailleurs, en menant MP parallèle à AB, le triangle MNP, rectangle en P, donne

$$\overline{MN}^2 = 4d^2 + (y - x)^2.$$

Les équations du problème sont donc

$$2(h^2 + d^2) + x^2 + y^2 = 4d^2 + (y - x)^2,$$
$$(h^2 + d^2 + x^2)(h^2 + d^2 + y^2) = 4m^4,$$

ou, en effectuant et réduisant,

$$xy = d^2 - h^2, \qquad (1)$$
$$(h^2 + d^2)^2 + (h^2 + d^2)(x^2 + y^2) + x^2y^2 = 4m^4. \qquad (2)$$

De l'équation (2), on déduit, en remplaçant xy par sa valeur (1),

$$x^2 + y^2 = \frac{4m^4 - 2(h^4 + d^4)}{h^2 + d^2},$$

puis, en remarquant que $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$,

$$(x + y)^2 = \frac{4m^4 - 2(h^4 + d^4)}{h^2 + d^2} + 2(d^2 - h^2),$$
$$= \frac{4(m^4 - h^4)}{d^2 + h^2}.$$

x et y sont ainsi racines de l'équation

$$X^2 - 2\sqrt{\frac{m^4 - h^4}{d^2 + h^2}}\cdot X + d^2 - h^2 = 0. \qquad (3)$$

La mise en équation suppose les points M et N situés sur Ax et By ; si ces points étaient sur Ax' ou By', il suffirait de prendre x ou y négativement.

Discussion. — Pour que les racines x et y de l'équation précédente fournissent une solution, il faut et il suffit qu'elles soient réelles.

Pour cela, il faut d'abord que le coefficient de X soit réel, ce qui suppose

$$m > h ;$$

d'autre part, la condition de réalité des valeurs de x et y,

$$\frac{m^4 - h^4}{d^2 + h^2} - (d^2 - h^2) \geqslant 0,$$

revient à
$$m^4 - d^4 \geqslant 0$$
ou à
$$m \geqslant d.$$

Ainsi, lorsque $m \geqslant h$ et d, les valeurs de x et y sont réelles. Elles sont d'ailleurs positives en même temps que leur produit $d^2 - h^2$, c'est-à-dire lorsque $d > h$; dans le cas contraire, elles sont de signes contraires. Il résulte de là que les points M et N sont d'un même côté de AB lorsque $m > d > h$, et de part et d'autre, lorsque $m > h > d$.

Comme on peut prendre pour x l'une ou l'autre des deux racines de l'équation (3), ces racines déterminent deux triangles SMN symétriques par rapport au plan perpendiculaire à AB.

Cas particuliers remarquables :

1° $m = d > h$. On a $x = y = \sqrt{d^2 - h^2}$; MN est parallèle à AB.

2° $m = h > d$. On a $x + y = 0$, ou $x = -y = \sqrt{h^2 - d^2}$; MN passe par le point O.

3° $d = h$. On a x ou $y = 0$; l'un des points M ou N se confond avec A ou B.

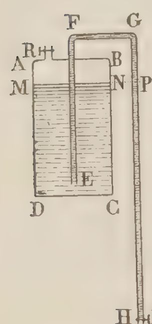
4° $m = d = h$. Ce cas rentrant dans chacun des deux premiers, SMN se confond avec le triangle rectangle isocèle SAB.

(C. BOURVÉAU, instituteur à Quimperlé.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Barbé; V. Barol; A. Bernardeau; P. Bonnet; P. Brousset; L. Cazaux; Durand; Gérard; G. Godfroy; J. Guéret; H. Guillaud; M. Guyot; R. Henry; A. Legros; L. Lemmet; A. Meynier; D. Montel; Noël; H. Palustran; M. Petit; G. Rabaté; Roncin; E. Serres].

PHYSIQUE

4925. — *Un récipient cylindrique vertical,* ABCD, *porte sur sa paroi supérieure* AB *un robinet* R *actuellement ouvert. A cette même paroi se trouve soudée la courte branche* EF *d'un siphon* EFGH, *muni à son extrémité* H *d'un robinet* R' *actuellement fermé.*



Le siphon est plein d'eau et ce liquide s'élève dans le récipient jusqu'au plan horizontal MN *situé à une distance* AM = 10cm *de la paroi* AB, *et à une distance verticale* PH = 1m *de l'extrémité du siphon.*

On ferme le robinet R *et on ouvre le robinet* R', *et on demande de calculer le poids d'eau qui s'écoulera sachant que la hauteur du baromètre est de* 740mm *et que la section de l'espace annulaire compris entre les parois du récipient et la petite branche du siphon est de* 120cq.

(*Bacc. lettres-math., Clermont, juillet 1900.*)

Soit x la distance de AB à la surface libre du liquide lorsque celui-ci cesse de couler.

L'air qui se trouve au-dessus de la surface libre du liquide dans le récipient a un volume égal à $s \times 10$ avant l'écoulement (s désignant la section de l'espace annulaire), et à $s \times x$ après l'écoulement. Appliquons la loi de Mariotte :

$$s \times 10 \times 74 = s \times x \times F,$$

F désignant la force élastique de l'air après l'écoulement.

On en tire
$$F \times x = 740. \qquad (1)$$

Il faut maintenant déterminer F. Lorsque le liquide cesse de couler, une surface s', par exemple, prise dans la branche horizontale du siphon, supporte de part et d'autre des pressions égales. Appelons y la distance entre AB et la branche horizontale du siphon. On a

$$F - \frac{x + y}{13,6} = 74 - \frac{(100 + 10 + y)}{13,6},$$

d'où
$$F = \frac{896,4 + x}{13,6}.$$

En portant cette valeur dans l'équation (1), il vient

$$x^2 + 896,4x - 10\,064 = 0,$$

d'où
$$x = 11^{cm},085.$$

La masse d'eau qui s'écoulera sera égale à

$$120(11,085 - 10) = 130^{gr},2.$$

(H. MARTIN).

[Ont résolu la même question : MM. Barberot; F. Bavin; Bernard; P. Bonnot; Drocourt; Durand; Giery; Guerrier; R. Henry; O. Jacquet; A. Lapresle; Mabon; Marx; Millet; Mestre; Michaut; Mourès; Petit; Poujol; Ponescu; Rabaté; Royer; de Saint-Gabriel; Vautrey.]

QUESTIONS PROPOSÉES

4936. — Démontrer que si a et b sont des entiers et si $\frac{ab}{a+b}$ est entier, les nombres a et b peuvent se représenter par

$$ma'(a' + b'), \qquad mb'(a' + b'),$$

a' et b' étant premiers entre eux et m étant entier.

(ACCOLAS-MASSAY, école normale de Châteauroux.)

4937. — On considère l'équation du second degré

$$ax^2 = bx + c,$$

où a, b, c désignent trois entiers donnés. Démontrer que, si cette équation admet pour racine la fraction irréductible $\frac{s}{t}$, le dénominateur t divise nécessairement le coefficient a. En déduire que, si a est égal à 1, l'équation ne peut admettre d'autres racines commensurables que des nombres entiers.

(*Bacc. lettres-math., Caen, juillet 1900.*)

4938. — Démontrer que dans le système de base 10 le logarithme d'un nombre commensurable autre qu'une puissance entière de 10 est incommensurable.

Qu'arriverait-il si la base était un nombre entier autre que 10 ?

4939. — On considère sur le cercle trigonométrique les deux points H et H' qui sont les extrémités des divers arcs ayant pour cosinus un nombre donné m. On désignera par H celui de ces deux points qui est sur la demi-circonférence ABA'.

1° Etablir les formules permettant de calculer tous les arcs x dont l'extrémité P est telle que le rapport $\frac{PH}{PH'}$ des cordes joignant le point P aux points H et H' soit égal à un nombre donné k.

2° Les extrémités de tous ces arcs sont en deux points P_1 et P_2 du cercle trigonométrique. Calculer la distance du centre O de ce cercle au point où la droite P_1P_2 rencontre le diamètre AA'.

3° On considère le cercle C qui passe par les points P_1 et P_2, et dont le centre G est sur la droite HH'. En quels points coupe-t-il la droite HH' ?

4° Démontrer que les droites GP_1 et GP_2 sont tangentes au cercle trigonométrique donné, et que les droites OP_1 et OP_2 sont tangentes au cercle C.

(*Bacc. lettres-math., Lyon, juillet 1900.*)

4940. — Etant donné un triangle ABC, on représente par A', B', C' les centres de chacun des systèmes de trois forces parallèles $-\alpha, \beta, \gamma$; $\alpha, -\beta, \gamma$; $\alpha, \beta, -\gamma$ appliquées aux sommets.

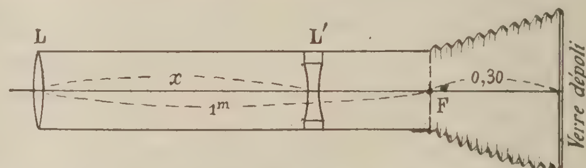
Démontrer que AA', BB', CC' sont concourantes et que le triangle ABC a ses sommets sur les côtés du triangle A'B'C'.

(T. C.)

4941. — Un corps pesant 50gr tombe sous l'action de la pesanteur d'une certaine hauteur avec une vitesse initiale de 200m par seconde. La force vive acquise au bas de la chute étant égale à 1550joules,675, trouver cette hauteur en mètres, sachant que l'accélération au lieu considéré est $g = 9^m,81$.

(*Bacc. lettres-sciences, Rennes, juillet 1900.*)

4942. — Pour photographier le soleil on dispose d'une lunette astronomique dont l'objectif a 1m de distance focale. On enlève l'oculaire et on met dans le plan focal de l'objectif un verre dépoli. Quel est le diamètre de l'image du soleil ? — L'observateur la trouvant trop petite veut la grossir 10 fois en disposant : 1° à l'intérieur du tube de la



lunette une lentille divergente ; 2° une chambre noire photographique à la place de l'oculaire, allongeant ainsi l'instrument. La nouvelle distance du verre dépoli à l'objectif est de 1m,30. Quelles doivent être la position et la distance focale de la lentille divergente, pour que l'image soit au point sur le fond de la chambre noire ?

Le diamètre apparent du soleil est de 32 minutes.

(*Bacc. lettres-math., Besançon, juillet 1900.*)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet, FACDOUEL, Dir.

25e Année. — N° 7. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 1er Janvier 1901.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Abonnements.. Librairie **Nony** et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

NOTE SUR UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE

par M. **J. Monsallut**, professeur au lycée de Limoges.

Pour démontrer le théorème :

Si trois droites, issues des sommets d'un triangle, sont concourantes en un même point du plan de ce triangle, elles déterminent sur les côtés, ou sur leurs prolongements, six segments tels que le produit de trois de ces segments non consécutifs est, en valeur absolue, égal au produit des trois autres,

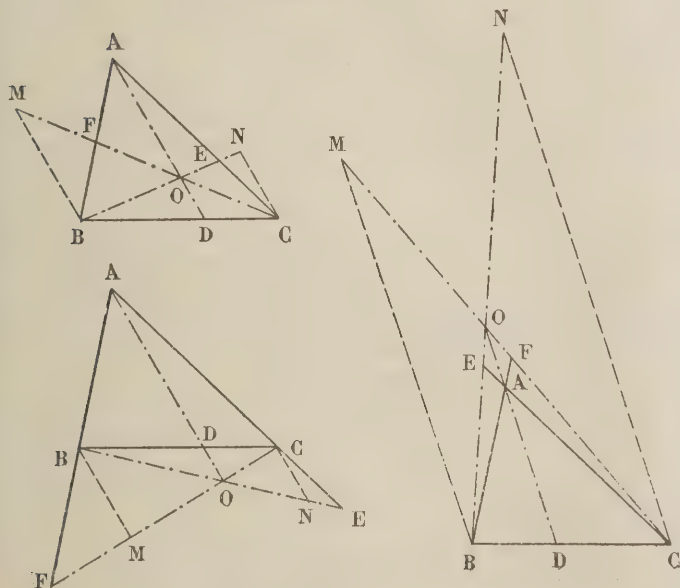
on s'appuie habituellement sur le théorème dit « de la transversale ». La démonstration qui suit est indépendante de ce dernier théorème :

Menons à la droite AOD les parallèles BM, CN. On a (théorème fondamental du IIIe Livre) les quatre proportions :

$$\frac{DB}{DC}=\frac{OM}{OC},\quad \frac{OM}{OC}=\frac{BM}{NC},\quad \frac{EC}{EA}=\frac{NC}{OA},\quad \frac{FA}{FB}=\frac{OA}{MB},$$

desquelles on déduit, en multipliant :

$$\frac{DB.EC.FA}{DC.EA.FB}=1.$$



De cette façon on peut placer le théorème en question *à côté* du théorème de la transversale, au lieu de le mettre *après* comme une conséquence de ce théorème.

ÉCOLE NORMALE PRIMAIRE SUPÉRIEURE DE SAINT-CLOUD (1900)

4894. — *n étant un nombre entier, trouver : 1° pour quelles valeurs de n la fraction $\frac{n+8}{2n-5}$ est un nombre entier; 2° pour quelles valeurs de n cette fraction est irréductible ; 3° si la fraction n'est pas irréductible, quels peuvent être les facteurs communs aux deux termes de cette fraction.*

1° Pour que $2n-5$ divise $n+8$, il faut et il suffit qu'il divise

$$2(n+8)-(2n-5)=21, \qquad (1)$$

car si $2n-5$ divise $n+8$ il divise les deux parties de la différence qui est dans le premier membre; d'autre part, si $2n-5$ divise 21, il divise $2(n+8)$, et, comme il est premier avec 2, il divise $n+8$.

Donc, puisque la fraction considérée est un nombre entier, il faut et il suffit que $2n-5$ soit l'un des diviseurs de 21 ; ces diviseurs sont 1, 3, 7, 21. On est donc conduit aux hypothèses suivantes :

$$2n-5=1,\quad \text{d'où}\quad n=3\quad \text{et}\quad \frac{n+8}{2n-5}=11,$$
$$2n-5=3,\quad \text{d'où}\quad n=4\quad \text{et}\quad \frac{n+8}{2n-5}=4,$$
$$2n-5=7,\quad \text{d'où}\quad n=6\quad \text{et}\quad \frac{n+8}{2n-5}=2,$$
$$2n-5=21,\quad \text{d'où}\quad n=13\quad \text{et}\quad \frac{n+8}{2n-5}=1.$$

2° La fraction considérée est irréductible quand ses deux termes $n+8$ et $2n-5$ sont des nombres premiers entre eux. Or d'après l'égalité (1), si ces deux termes admettent un facteur premier commun, ce facteur ne peut être que l'un des facteurs premiers 3 ou 7 de 21. Il faut et il suffit donc, pour que la fraction soit irréductible, que $n+8$ ne soit divisible ni par 3, ni par 7, autrement dit que n ne soit pas de l'une des formes

$$m.3+1 \qquad \text{ou} \qquad m.7-1.$$

Le nombre n ne peut donc recevoir que les valeurs entières non comprises dans l'une des deux progressions arithmétiques suivantes :

1, 4, 7, 10, 13, 16, ...

et

6, 13, 20, 27, 34, 41, ...

3° Il résulte clairement de ce qui précède que lorsque la fraction $\frac{n+8}{2n-5}$ n'est pas irréductible, les seuls facteurs premiers communs à ses deux termes sont 3 ou 7.

(Émile Serres, lycée de Pau.)

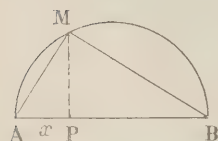
(Ont résolu la même question : Mlle A. Saleilles; MM. A. Arcizet; E. Barbé; L. Bordron; E. Durand; G. Foucry; E. Garagnou; J. Gaulhier; E. Gernez-

Pfanmatter; Hardy; R. Henry; E. Hugonnier-Ginet; A. James; H. Lacape; A. Lardy-Pleumartin; M. Laurence; D. Laurent; L. Lazar; A. Lecoutour; M. B., instituteur à 1; J. Ménéchal; L. Minjoz; R. Mouzon; L. Ollié; M. Petit; P. Plisson; L. Richard; R. Rives; G. Salaun; E. Serres; H. Varennes; S. Viallet.]

4895. — *Sur une demi-circonférence décrite sur* AB *comme diamètre, déterminer un point* M *tel que le double de l'aire du triangle* AMB, *augmenté de l'aire du carré construit sur* AM, *soit dans un rapport donné* m *avec l'aire du carré construit sur* AB. *Discuter.*

Menons MP perpendiculaire sur AB. On doit avoir

$$\mathrm{MP}.\mathrm{AB} + \overline{\mathrm{MA}}^2 = m\overline{\mathrm{AB}}^2$$



ou, comme $\overline{\mathrm{MA}}^2 = \mathrm{AP} \times \mathrm{AB}$,

$$\mathrm{MP} + \mathrm{AP} = m\mathrm{AB}.$$

Si on prend pour inconnue $\mathrm{AP} = x$, on a $\overline{\mathrm{MP}}^2 = x(2\mathrm{R} - x)$, et l'équation du problème peut s'écrire

$$\sqrt{x(2\mathrm{R} - x)} + x = 2\mathrm{R}m$$

ou $$\sqrt{x(2\mathrm{R} - x)} = 2\mathrm{R}m - x. \qquad (1)$$

Élevons les deux membres de l'équation (1) au carré ; nous aurons

$$x(2\mathrm{R} - x) = 4\mathrm{R}^2m^2 - 4\mathrm{R}mx + x^2$$

ou $$x^2 - (2m + 1)\mathrm{R}x + 2\mathrm{R}^2m^2 = 0.$$

Discussion. — Pour qu'une valeur de x convienne au problème, il faut et il suffit qu'elle soit réelle, positive et inférieure à $2\mathrm{R}m$, afin que le second membre de l'équation (1) soit positif. Une telle valeur est d'ailleurs inférieure à 2R, puisque, d'après l'équation (1), le produit $x(2\mathrm{R} - x)$ est positif.

Réalité. — La condition de réalité est

$$(2m + 1)^2\mathrm{R}^2 - 8m^2\mathrm{R}^2 \geqslant 0$$

ou $$4m^2 - 4m - 1 \leqslant 0.$$

Le premier membre de cette inégalité s'annule pour les deux valeurs de signes contraires :

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2};$$

donc ce premier membre est négatif ou de signe contraire à son premier terme pour toute valeur positive de m inférieure à la racine positive :

$$m \leqslant \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

Signe. — Les racines ayant leur somme $(2m + 1)\mathrm{R}$ et leur produit $2\mathrm{R}^2m^2$ positifs sont toutes deux positives.

Grandeur. — En remplaçant x par $2\mathrm{R}m$ dans le premier membre de l'équation, on obtient

$$4\mathrm{R}^2m^2 - 2(2m + 1)\mathrm{R}^2m + 2\mathrm{R}^2m^2$$

ou $$2\mathrm{R}^2m(m - 1).$$

Si $m < 1$, ce résultat est de signe contraire au coefficient de x^2 ; $2\mathrm{R}m$ sépare les deux racines, et la plus petite convient seule.

Si $1 < m < \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$, le résultat est positif ; $2\mathrm{R}m$ est extérieur aux racines, et supérieur à ces racines, car, en comparant à la demi-somme, on a

$$2\mathrm{R}m > \frac{(2m + 1)\mathrm{R}}{2} \qquad \text{ou} \qquad m > \frac{1}{2}.$$

Donc, dans ce cas, deux solutions distinctes.

Cas particuliers. — 1° $m = 1$. $2\mathrm{R}m = 2\mathrm{R}$ est racine ; l'autre est $\frac{2\mathrm{R}^2}{2\mathrm{R}} = \mathrm{R}$. Un des points M est en B et l'autre au milieu de l'arc AB.

2° $m = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$. Les deux valeurs de x ont pour valeur commune

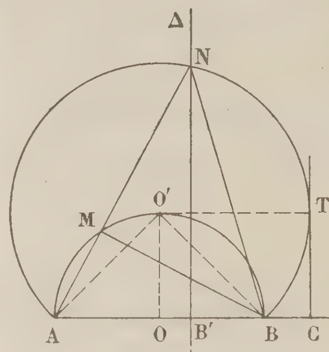
$$\frac{2m + 1}{2}\mathrm{R} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}\mathrm{R}.$$

Une seule solution. L'arc BM est alors un quart de circonférence.

Solution géométrique. — La condition énoncée

$$\mathrm{AM}.\mathrm{MB} + \overline{\mathrm{AM}}^2 = 4\mathrm{R}^2m$$

peut s'écrire $$\mathrm{AM}(\mathrm{MB} + \mathrm{AM}) = 4\mathrm{R}^2m$$



ou, en prolongeant AM d'une longueur MN = MB,

$$\mathrm{AM}.\mathrm{AN} = 4\mathrm{R}^2m.$$

Cette relation montre que le point N est l'inverse du point M par rapport à A. Par suite, comme M décrit le cercle de diamètre AB, N décrit une perpendiculaire Δ à AB en un point B', inverse de B, c'est-à-dire tel que

$$\mathrm{AB}'.\mathrm{AB} = 4\mathrm{R}^2m$$

ou $$\mathrm{AB}' = 2\mathrm{R}m.$$

D'ailleurs, le triangle MNB étant rectangle isocèle, l'angle ANB est de 45°, et le point N appartient à un segment capable de 45° construit sur AB comme base ; ce segment a son centre O' au milieu de l'arc du demi-cercle AB, puisque l'angle au centre AO'B = 90° est le double de l'angle inscrit ANB.

Le point N est ainsi l'intersection de la droite Δ avec le segment de centre O'.

Pour que ce point existe, il faut que Δ coupe le segment entre A et la tangente TC au cercle O' perpendiculaire à AB, ce qui entraîne

$$\mathrm{AB}' \leqslant \mathrm{AC}.$$

Or $$\mathrm{AB}' = 2\mathrm{R}m$$

et $$\mathrm{AC} = \mathrm{AO} + \mathrm{O'T} = \mathrm{R} + \mathrm{R}\sqrt{2}.$$

Donc $$2\mathrm{R}m \leqslant \mathrm{R} + \mathrm{R}\sqrt{2}$$

ou $$m \leqslant \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

D'autre part, suivant que $m <$ ou > 1, B' tombe à gauche ou à droite de B ; la droite Δ rencontre alors le segment O' en un ou deux points N fournissant respectivement une ou deux solutions.

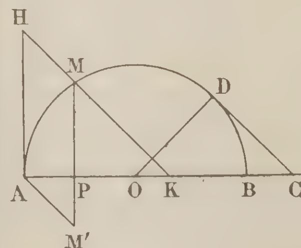
On retrouve ainsi les résultats déduits de la discussion algébrique.

(Charles HUARD, collège de Château-Thierry.)

Autre solution géométrique. — On a $\mathrm{MP} + \mathrm{AP} = 2\mathrm{R}m$. Si on prolonge MP d'une longueur PM' égale à AP, on a

$$\mathrm{MM}' = 2\mathrm{R}m.$$

L'angle $\mathrm{PAM}' = 45°$, de sorte que la parallèle menée par M à AM' détermine avec AB et la tangente en A un triangle rectangle isocèle dans lequel on a



$$\mathrm{AK} = \mathrm{AH} = 2\mathrm{R}m.$$

Il y a autant de solutions que HK a de points sur la demi-circonférence donnée.

Si $\mathrm{AK} < \mathrm{AB}$ ou $m < 1$, on a une solution.

Si $\mathrm{AK} > \mathrm{AB}$, on aura deux solutions tant que $\mathrm{AK} < \mathrm{AC}$, C étant le point du prolongement

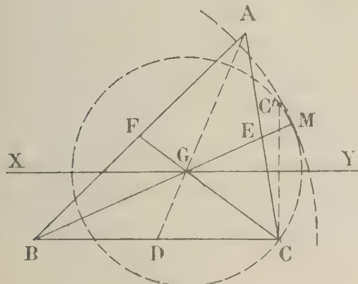
du diamètre d'où on peut mener une tangente CD parallèle à HK.

Le triangle OCD étant rectangle isocèle on a $OC = R\sqrt{2}$ et $AC = R(1+\sqrt{2})$. On retrouve les résultats déjà obtenus.

[Ont résolu la même question : MM. M. Bernard; H. Dobryzniak; E. Durand; J. Gauthier; H. Guillaud; E. Hugonnier-Ginet; A. Lecoutour; G. Le Sage; M. B., Instituteur à I; A. Meynier; R. Mouzon; M. Petit; Raynaud; G. Réveillon; L. Richard; R. Rives; M. del Valle.]

4896. — *Construire un triangle* ABC, *connaissant le côté* $BC = a$, *la somme* m *des longueurs des deux médianes issues des sommets* B *et* C, *et une hauteur* h.

Nous distinguerons deux cas suivant que la hauteur donnée h part du sommet A ou de l'un des sommets B, C.



1° Les trois médianes AD, BE, CF se coupent en un point G situé aux $\frac{2}{3}$ de leurs longueurs à partir des sommets.

Par suite, le point G se trouve sur une parallèle à BC menée à la distance $\frac{h}{3}$. D'autre part, comme

$$BG + GC = \frac{2}{3}(BE + CF) = \frac{2}{3}m,$$

le point G appartient également à une ellipse qui a pour foyers B, C et pour grand axe $\frac{2}{3}m$. On est ainsi ramené au problème connu de l'intersection d'une droite XY et d'une ellipse, problème qui se résout par la construction suivante :

On prolonge BG d'une longueur $GM = GC$: M se trouve sur le cercle de centre B et de rayon $\frac{2}{3}m$. D'autre part, comme le cercle décrit de G comme centre avec $GC = GB$ pour rayon passe par le symétrique C′ de C par rapport à la droite XY, tout revient à faire passer par les deux points connus C, C′ un cercle tangent en M au cercle B (on sait que le point M s'obtient comme point de contact d'une tangente au cercle B menée par le point de rencontre de CC′ avec la corde commune au cercle B et à un cercle quelconque passant par C, C′). Le point G une fois obtenu, on en déduit le sommet A en prolongeant DG d'une longueur $GA = 2DG$. Cette construction fournit deux triangles ABC symétriques par rapport à la perpendiculaire au milieu de BC.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que l'ellipse de foyers B, C existe, c'est-à-dire que $\frac{2}{3}m > a$, et que l'ellipse coupe la parallèle à l'axe focal menée à la distance $\frac{h}{3}$, c'est-à-dire que $\frac{h}{3}$ soit inférieur au petit axe de l'ellipse, ce qui donne la condition

$$\frac{h}{3} \leqslant \sqrt{\frac{m^2}{9} - \frac{a^2}{4}}$$

ou simplement $$m^2 \geqslant \frac{9a^2}{4} + h^2,$$

inégalité qui entraîne *a fortiori* l'inégalité $\frac{2}{3}m > a$.

2° Supposons maintenant que la hauteur h soit la hauteur issue de C par exemple.

Le triangle BCH dont on connaît l'hypoténuse a et un côté h détermine alors la direction BH du côté AB, et le point G se trouve ici sur une parallèle XY à BH menée à la distance $\frac{h}{3}$. La construction s'achève comme dans le premier cas, sauf que le point A doit être pris à l'intersection de BH avec DG. On obtient ainsi deux triangles ABC ayant les angles en B supplémentaires.

Le problème est toujours possible, pourvu que le triangle BCH et l'ellipse lieu de G existent, c'est-à-dire qu'on ait

$$h \leqslant a < \frac{2}{3}m.$$

(E. HUGONNIER-GINET, école nationale professionnelle de Voiron.)

[Ont résolu la même question : Mlle A. Saleilles. MM. A. Arcizet; H. Belbenoit; L. Bordron; R. Cattin; E. Durand, G. Foucry; E. Garagnon; E. Gernez-Pfanmatter; A. Hardy; A. Jouart; A. Lardy-Pleumartin; M. Laurence; A. Lecoutour; M. B., Instituteur à I; A. Meynier; T. Millet; L. Minjoz; L. Ollié; M. Petit; P. Petit; A. Pichon; P. Plisson; Raynaud; L. Richard; R. Rives; M. Royer; Sinoquet; A. Vannier; H. Varennes; S. Viallet.]

[Ont résolu partiellement cette question : MM. E. Barbé; J. Gauthier; J. Guéret; J. Hébré; L. Patin; G. Réveillon; A. Reversat; J. Tastet; V. Thébault; F. Thibier; C. Vallot; P. Zlatco.]

4897. — *Deux vases cylindriques verticaux* A *et* B *communiquent par un tube inférieur et contiennent de l'eau qui s'élève primitivement à la même hauteur dans chacun d'eux.*

On introduit dans le cylindre A *un piston qui le ferme exactement, mais peut glisser sans frottement appréciable. On constate alors qu'il s'établit entre les deux niveaux du liquide une différence* h.

Puis on charge le piston d'un poids P : *la différence des niveaux augmente de* h'.

On demande quelle est la section du cylindre A, *sachant que celle de* B *est de 3 centimètres carrés, et quel est le poids du piston.*

Application numérique :

$$h = 12^{cm}; \qquad h' = 40^{cm}, \qquad P = 2^{kg},5.$$

Le poids du piston équilibre un poids d'eau représenté par $3 \times h \times 1$ ou $3h$.

Le poids P équilibre à son tour un poids d'eau $3 \times h' \times 1$ ou $3h'$.

Or, les surfaces étant entre elles comme les pressions qu'elles supportent (principe de Pascal), on a d'abord, en appelant x la surface du piston,

$$\frac{x}{3} = \frac{p}{3h},$$

d'où $$p = hx. \qquad (1)$$

On a de plus, d'après le même principe,

$$\frac{x}{3} = \frac{P + hx}{3(h + h')},$$

d'où $$x = \frac{P}{h'}.$$

Remplaçant x par sa valeur dans l'équation (1), il vient

$$p = P \cdot \frac{h}{h'}.$$

Application numérique. — La section x du cylindre A est

$$x = \frac{2500}{40} = 62^{cq},50,$$

et, le poids p du piston,

$$p = 2500 \times \frac{12}{40} = 750^{gr}.$$

(V. THÉBAULT.)

[Ont résolu la même question : Mlles Oddos ; Saleilles ; MM. A. Arcizet ; Barberot ; Belbenoit ; Colombey ; Dobryzniak ; Durand ; Foucry ; Guéret ; Hardy ; Henry ; Hébré ; Huard ; Hugonnier ; James ; Jouart ; Lazar ; Laurent ; Lecoutour ; Marx ; Ménéchal ; Meynier ; Millet ; Patin ; Petit ; Raynaud ; Rives ; Richard ; Royer ; de Saint Gabriel ; Sol ; Toulza ; Valentin ; Vannier.]

ARITHMÉTIQUE

4928. — *Démontrer que la moyenne arithmétique de n nombres est plus grande que leur moyenne harmonique.*

(*Examens oraux de l'école polytechnique, 1900.*)

Pour que $x > y$, on doit avoir

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} > n : \left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$$

ou

$$\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) > n^2.$$

En développant le produit du premier membre de cette inégalité, il vient

$$\begin{array}{l} \frac{a_1}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \ldots + \frac{a_1}{a_n} \\ + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_2}{a_2} + \ldots + \frac{a_2}{a_n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ + \frac{a_n}{a_1} + \frac{a_n}{a_2} + \ldots + \frac{a_n}{a_n}. \end{array}$$

D'après la formation de ce tableau, on voit qu'il se compose de n^2 termes formant un carré dont une des diagonales comprend n termes égaux à 1 ; les autres termes, au nombre de $n^2 - n$, peuvent être groupés deux à deux en associant le terme de rang k sur la i^e ligne avec le terme de rang i sur la k^e colonne; on obtient ainsi $\frac{n^2 - n}{2}$ sommes de la forme

$$\frac{a_i}{a_k} + \frac{a_k}{a_i}.$$

Or, comme la somme d'une fraction et de son inverse surpasse 2 (propriété connue), il en résulte que la somme des n^2 termes du tableau précédent est supérieure à

$$n + \frac{n^2 - n}{2} \cdot 2 = n^2.$$

C. q. f. d.

(P. THONET, athénée royal d'Anvers.)

[Ont résolu la même question : Mlle A. Saleilles ; MM. A. Bottin ; E. Hugonnier ; M. Laurence ; F. Mestre ; C. Perroquin ; S. H. ; H. Varennes.]

4929. — *Démontrer que le plus petit commun multiple des nombres 1, 2, 3, ..., 2n, est le même que le plus petit commun multiple des nombres* $n+1$, $n+2$, ..., $2n$.

Tout multiple commun M des nombres 1, 2, 3, ..., $2n$ l'est aussi des nombres $n+1$, $n+2$, . ., $2n$, qui sont tous contenus dans la première suite. Inversement tout multiple commun M' des nombres $n+1$, $n+2$, ..., $2n$ est un multiple commun des nombres 1, 2, 3, . ., $2n$; en effet, sur les n nombres consécutifs $n+1$, $n+2$. ..., $2n$, il existe toujours au moins un multiple de chacun des n nombres 1, 2, ..., n, de sorte que M' est aussi multiple commun des nombres 1, 2, ..., n.

Les deux séries de nombres considérés admettent ainsi les mêmes multiples communs, et en particulier, le même plus petit commun multiple.

C.q.f.d.

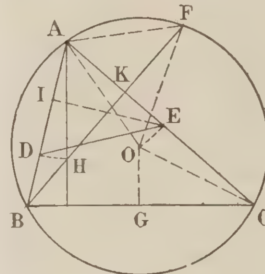
(C. SEURAT, école pratique d'industrie de Reims.)

[Ont résolu la même question : Mlles D. à P.; A. Saleilles ; MM. E. Anzemberger ; D. Antonescu ; P. Bancillon ; C. Barbe ; A. Bernardeau ; L. Bordron ; A. Bottin ; I. Bourrec ; R. Cattin ; V. Chosson ; L. David ; G. Desnoès ; E. Durand ; V. Enescu ; G. de France ; J. Guéret; G. Guillaume; P. Hamon ; J. Hébré ; R. Henry ; L. Hostier ; E. Hugonnier ; D. Kœnig ; A. Lardy-Pleumartin ; M. Laurence ; Lemmet ; F. Mestre ; A. Meynier ; D. Montel ; A. Naar ; M. Petit ; Poujol ; M. Royer ; E. Serres ; P. Thonet ; J. Trouillé ; P. Zlatco.]

GÉOMÉTRIE

4247. — *Soit* O *le centre du cercle circonscrit,* H *le point de concours des hauteurs d'un triangle* ABC ; *sur* AB *et sur* AC *on prend respectivement* AD = AH *et* AE = AO ; *démontrer que* DE *est égal au rayon du cercle circonscrit.*

En effet, soit F le point d'intersection de la hauteur BK avec le cercle circonscrit ; tirons AF, AO et OF. On sait que KF = KH ; donc AF = AH = AD.



Les angles OAE, BAH sont égaux, et par suite, les angles OAF et DAE. On voit alors que les deux triangles OAF, DAE sont égaux, de sorte que DE est égal au rayon OF.

Autre solution. — Soient OG perpendiculaire sur BC et EI médiane du triangle DEA. On voit facilement que les deux triangles IAE, GOC sont égaux, puisque OG est la moitié de AH. Donc l'angle AIE est droit, et, par suite, le triangle AED est isocèle. Donc DE = AE = AO.

(P. MASCARET.)

4927. — *On donne un losange* ABCD *formé par deux triangles équilatéraux* ABC, DBC *ayant un côté commun* BC.

Par le sommet D *on mène une sécante rencontrant aux points* E, F *les droites* AB, AC *supposées indéfinies, puis l'on joint le sommet* C *au point* E *et le sommet* B *au point* F. *Les deux droites* BF, CE *se coupent en un point* M.

1° *Démontrer que les triangles* BCE, CBF *sont semblables.*

2° *Déduire du résultat précédent que l'angle* BMC *et le produit* EB × CF *restent constants quand la sécante* EF *tourne autour du point* D.

Construire le lieu que décrit alors le point M.

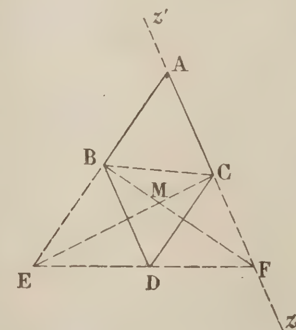
On indiquera, sur ce lieu, les arcs décrits par le point M *quand le point* F *est situé sur la* demi-droite Cz, *sur le segment* CA *ou sur la* demi-droite Az'.

3° *Soient* O, O' *les centres des circonférences de cercles circonscrites aux triangles variables* BME, CMF, *et* R, R' *leurs rayons.*

Démontrer que les centres O *et* O' *décrivent chacun une droite perpendiculaire à* BC *et que le produit des rayons* R, R' *reste constant.*

(*Certificat d'aptitude à l'enseignement secondaire des jeunes filles, 1900.*)

1° Les triangles BCE, BCF ont les angles EBC et BCF égaux à 120° ; d'ailleurs ces angles sont compris entre côtés proportionnels, puisque les triangles BED, CDF ayant leurs côtés parallèles sont semblables, et, par suite,



$$\frac{BE}{BD} = \frac{CD}{CF}$$

ou, comme BD = CD = BC,

$$\frac{BE}{BC} = \frac{BC}{CF}.$$

Les triangles BCE, CFB ayant ainsi deux angles égaux compris entre côtés proportionnels sont semblables.

2° De l'égalité précédente, on déduit

$$BE.CF = \overline{BC}^2, \qquad (1)$$

ce qui montre que le produit $EB \times CF$ est constant.

D'autre part, comme $\widehat{BEC} = \widehat{FBC}$, les triangles EBC, BMC ont un angle commun et deux angles égaux ; ils sont semblables et donnent

$$\widehat{BMC} = \widehat{EBC} = 120°.$$

Le lieu de M est donc un segment capable de 120° construit sur BC comme base ; l'angle A étant de 60°, ce segment appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

Lorsque F vient sur le segment AC, on trouve comme précédemment

$$\widehat{BMC} = \widehat{EBC} ;$$

mais alors $\widehat{EBC} = 60°$ et M décrit l'arc AC du cercle ABC. De même lorsque F est situé sur Az', M décrit l'arc restant AB de ce même cercle.

3° Par suite de la similitude des triangles BMC, EBC, on peut écrire

$$\frac{BC}{MC} = \frac{EC}{BC}$$

ou

$$\overline{BC}^2 = EC.MC.$$

Cette relation montre que le cercle O, circonscrit au triangle BME, est tangent en B à BC, de sorte que son centre O décrit la perpendiculaire élevée en B à BC. On verrait de même que le centre du cercle O' décrit la perpendiculaire en C à BC.

La corde BE soustendant un angle inscrit BME de 60° est le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle O ; donc

$$BE = R\sqrt{3}.$$

De même $\qquad CF = R'\sqrt{3}.$

Portant ces valeurs dans l'égalité (1), on en déduit

$$RR' = \frac{\overline{BC}^2}{3} = \text{constante}.$$

On reconnaît sans peine que les résultats précédents subsistent lorsque M décrit l'arc BAC.

(L. BARBEROT, au Valdoie.)

[Ont résolu la même question : Mlles D., à P. ; L. Gautier ; A. Saleilles ; MM. E. Anzemberger ; M. Antoine ; D. Antonescu ; A. Arcizet ; L. Bannerot ; C. Barbe ; E. Barbé ; A. Bernardeau ; P. Bonnet ; J. Bournisien ; R. Cattin ; A. Collet ; Collin-Laval ; I. Cougnoux ; H. Dobryzniak ; Duittoz ; E. Durand ; F. Filiol ; G. Foucry ; J. Franceschini ; J. Guéret ; J. Hébré ; R. Henry ; E. Hugonnier ; A. Lardy-Pleumartin ; E. Laroche ; A. Larroque ; M. Laurence ; A. Lecoutour ; A. Legros ; G. Lepoivre ; E. Licope ; J. Maury ; A. Meynier ; T. Millet ; A. Mourès ; R. Mouzon ; L. Ollié ; C. Passeron ; C. Perroquin ; M. Petit ; R. Petit ; Poujol ; R. Rives ; A. de Saint-Gabriel ; E. Serres ; J. Tastet ; V. Thébault ; C. Vallot ; H. Varennes ; G. Ybert ; P. Zlatco.]

4932. — *On considère un cercle* (C) *de centre* O *et de rayon* R, *et un diamètre fixe* Ox *de ce cercle.*

Une droite AB *dont la longueur est constante et égale au rayon* R *du cercle* (C) *se meut de façon que l'une de ses extrémités,* A, *décrive la droite* Ox *et que l'autre extrémité,* B, *décrive la circonférence du cercle* (C).

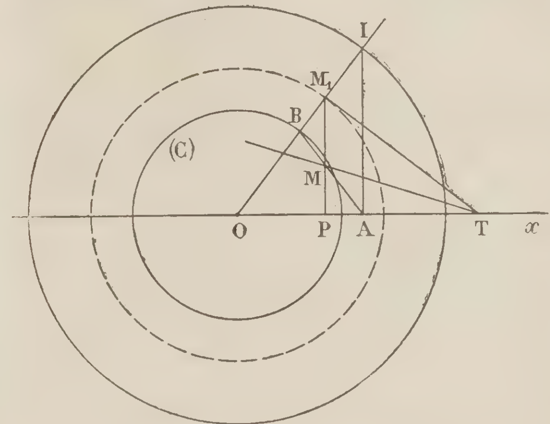
1° *Trouver le lieu géométrique du point* I *où la perpendiculaire à* Ox *menée par* A *rencontre le prolongement du rayon* OB.

2° *Soit* M *un point de* AB, *situé à une distance constante,* b, *de l'extrémité* A, *et soient* P *et* M_1 *les points où la perpendiculaire à* Ox *menée par* M *rencontre respectivement les droites* Ox *et* OB. *Démontrer que le rapport* $\frac{PM}{PM_1}$ *reste constant quand la droite* AB *se meut de la façon indiquée au commencement de l'énoncé.*

3° *Trouver le lieu* (E) *du point* M *et construire la tangente en* M *à ce lieu* (E).

(*Bacc. lettres-sciences, Nancy, juillet 1900.*)

1° Comme par hypothèse AB = OB, le triangle OAB est isocèle ; il en est de même du triangle ABI, dont les angles



A et I sont complémentaires des angles égaux A et O du triangle OAB. Donc

$$BI = BA = BO,$$

ce qui montre que le lieu du point I est une circonférence de centre O et de rayon 2R.

2° Les deux triangles rectangles PMA, PM_1O ayant les angles en A et O égaux sont semblables ; par suite

$$\frac{PM}{PM_1} = \frac{MA}{M_1O} = \frac{b}{M_1B + R}.$$

Or le triangle BMM_1 étant semblable au triangle isocèle BAI,

$$M_1B = BM = R - b.$$

Dès lors

$$\frac{PM}{PM_1} = \frac{b}{2R - b} = \text{constante}.$$

3° D'après ce qui précède, on a

$$OM_1 = 2R - b.$$

Il en résulte que le lieu de M_1 est la circonférence O de rayon $2R - b$, et par suite, celui de M une ellipse admettant cette circonférence pour cercle principal, le rapport $\frac{PM}{PM_1}$ des ordonnées étant constant et égal à $\frac{b}{2R - b}$.

D'ailleurs, pour $PM_1 = 2R - b$, $PM = b$, de sorte que l'ellipse a ses axes égaux à $2(2R - b)$ et $2b$.

Pour obtenir la tangente en M à l'ellipse, il suffit, d'après une propriété connue, de joindre M au point T où la tangente en M_1 au cercle principal O rencontre Ox.

(C. SEURAT, école pratique d'industrie de Reims.)

[Ont résolu la même question : Mlle A. Saleilles ; MM. E. Anzemberger ; A. Arcizet ; L. Bannerot ; E. Barbé ; V. Barol ; A. Bernardeau ; L. Beuret ; P. Bonnet ; A. Bottin ; R. Cattin ; Y. Collin ; G. Desnoës ; G. de France ; G. Foucry ; G., à Ajaccio ; J. Guéret ; G. Guillaume ; M. Guyot ; J. Hébré ; R. Henry ; E. Hugonnier ; Jacquet ; A. James ; A. Larroque ; A. Lardy ; A. Legros ; Lemmet ; E. Licope ; M. Marx ; J. Maury ; T. Millet ; L. Ollie ; F. Pégorier ; M. Petit ; R. Petit ; L. Pignier ; P. Quintescu ; R. Rives ; E. Ruchon ; A. de Saint-Gabriel ; P. Saisset ; P. Sauveau ; V. Thébault ; G. Trébla ; J. Trouillé ; P. Valentin ; H. Varennes.]

ALGÈBRE

4849. — *Si les angles d'un triangle sont en progression arithmétique et les hauteurs en progression géométrique, le triangle est équilatéral.*

Considérons un triangle dans lequel b représente le côté moyen. L'angle opposé B est alors l'angle moyen du triangle, et la première condition s'écrit

$$B - A = C - B,$$

ou

$$2B = A + C = 180^\circ - B,$$

d'où

$$B = 60^\circ.$$

D'ailleurs, les hauteurs du triangle étant proportionnelles aux inverses des côtés correspondants a, b, c, seront en progression géométrique lorsque

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c},$$

ou

$$b^2 = ac.$$

La relation générale

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

devient donc ici

$$a^2 + c^2 - 2ac = 0,$$

ou $(a - c)^2 = 0$, ou $a = c$.

Le triangle considéré ayant ainsi un angle de 60° compris entre deux côtés égaux est bien équilatéral.

(A. LEGROS.)

Remarque. — La relation donnée entre les hauteurs conduit à celle-ci :

$$\sin^2 B = \sin A . \sin C.$$

Or

$$2 \sin A . \sin C = \cos(A - C) - \cos(A + C) = \cos(A - C) + \cos B.$$

Comme $B = 60^\circ$, cette égalité devient

$$2 \times \frac{3}{4} = \cos(A - C) + \frac{1}{2},$$

d'où on déduit

$$\cos(A - C) = 1.$$

Donc

$$A = C.$$

[Ont résolu la même question : MM. H. Belbenoit, à Arras ; Bouzy ; F. Clabault, instituteur à Rosières ; G. Foucry, école normale de Châlons ; J. Haag, collège de Pont-à-Mousson ; R. Henry, instituteur à Troyes ; de Jarny ; D. Kœnig ; D. Lwow, à Piatra (Roumanie) ; R. Manen, petit séminaire de Massals ; R. Mouzon, collège de Fontenay ; Noël ; L. Ollié, à Auch ; L. de Praneuf, lycée de Toulon ; H. Tellier, lycée de Charleville ; P. Thonet, athénée royal d'Anvers ; H. Varennes, à Deux-Chaises ; P. Zlatco, à Bucarest ; G. Delahaye ; G. de France ; L. Guilhem ; G. Guinand ; E. Hugonnier-Ginet.]

4930. — *Étant donnée l'équation*

$$+\sqrt{4x^2 + \sqrt{15x^2 + 7x + 3}} = 2x + 1, \qquad (1)$$

on propose de ramener sa résolution à celle d'une équation ordinaire du second degré, et de rechercher si les deux racines de cette nouvelle équation conviennent à la proposée.

(*Bacc. lettres-sciences, Aix, juillet 1900.*)

Élevons les deux membres de l'équation proposée au carré ; elle devient, en isolant le second radical,

$$\sqrt{15x^2 + 7x + 3} = 4x + 1. \qquad (2)$$

Une nouvelle élévation au carré conduit à l'équation rationnelle

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

dont les racines sont 1 et — 2.

Pour que l'une de ces racines convienne, il faut et il suffit qu'elle rende positifs les seconds membres des équations (1) et (2). On reconnaît ainsi que la racine $x = 1$ vérifie seule l'équation (1) ; l'autre racine $x = -2$ provient de la double élévation au carré et vérifie l'équation

$$-\sqrt{4x^2 - \sqrt{15x^2 + 7x + 3}} = 2x + 1.$$

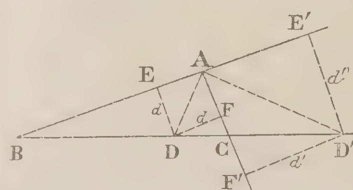
(René PETIT, lycée d'Angoulême.)

[Ont résolu la même question : MM. M. Antoine ; D. Antonescu ; E. Anzemberger ; A. Arcizet ; P. Bancillon ; L. Bannerot ; E. Barbé ; G. Barbier ; V. Barol ; A. Bellier ; L. Beuret ; M. Beyney ; F. Bittoré ; P. Bonnet ; L. Bordron ; A. Bottin ; R. Cattin ; V. Chosson ; D. Cognet ; L. David ; T Deslandes ; G. Desnoès ; Ducongé-Cabireau ; Duittoz ; C. Dupas ; E. Durand ; V. Enescu ; H. Faucillon ; G. Foucry ; F. Gérard ; A. Gheysens ; N. Gottlieb ; R. Grenouillot ; J. Guéret ; P. Guerrier ; H. Guillaud ; G. Guillaume ; M. Guyot ; P. Hamon ; R. Henry ; L. Hostier ; E. Hugonnier ; Jacquet ; D. Kœnig ; H. Lacape ; A. Lapresle ; E. Laroche ; A. Larroque ; R. Lautré ; A. Legros ; E. Lelarge ; L. Lemmet ; J. Lestable ; H. Martin ; M. Marx ; J. Maury ; C. Mercent ; J. Métais ; A. Meynier ; P. Michaud ; E. Milhaud ; D. Montel ; R. Mouzon ; A. Naar ; L. Ollié ; H. Palustran ; H. Pariselle ; C. Passeron ; J. Permann ; L. Pignier ; E. Poircuitte ; L. Popescu ; Poujol ; H. Pourtoy ; P. Quintescu ; J. Raymond ; L. Riaidwrand ; E. Robert ; E. Roncaglia ; M. Royer ; A. de Saint-Gabriel ; P. Saintin ; G. Sanpité ; E. Serres ; C. Seurat ; C. Tapponnier ; J. Tastet ; G. Trébla ; J. Trouillé ; P. Valentin ; C. Vallot ; H. Varennes ; P. Vercescoy ; G. Ybert ; P. Zlatco.]

TRIGONOMÉTRIE

4913. — *Résoudre et construire un triangle* ABC *connaissant les pieds des bissectrices de l'angle* A *et les distances de ces pieds aux côtés de l'angle.*

Considérons le triangle ABC déterminé par les pieds D, D' des deux bissectrices issues de A et les distances de ces pieds aux côtés AB, AC :



$$DE = DF = d, \quad D'E' = D'F' = d' ;$$

nous supposerons $d' > d$.

En posant $DD' = l$, les triangles semblables BDE, BD'E' donnent

$$\frac{BD}{d} = \frac{BD'}{d'} = \frac{BD' - BD}{d' - d}$$

d'où

$$BD = \frac{dl}{d' - d} ;$$

de même

$$\frac{DC}{d} = \frac{D'C}{d'} = \frac{DC + CD'}{d + d'},$$

d'où

$$DC = \frac{dl}{d + d'}.$$

Par suite

$$BC = BD + DC = dl\left(\frac{1}{d' - d} + \frac{1}{d + d'}\right) = \frac{2ldd'}{d'^2 - d^2}.$$

D'autre part, on a

$$\sin B = \frac{d}{BD} = \frac{d' - d}{l}, \qquad \sin C = \frac{d}{DC} = \frac{d + d'}{l}.$$

On est ramené à résoudre un triangle connaissant un côté et les deux angles adjacents, problème de cours.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que la valeur de BC soit positive et les valeurs de sin B, sin C comprises entre 0 et 1.

La valeur de BC est positive puisqu'on a supposé $d' > d$; cette condition remplie, les valeurs de sin B et sin C seront positives et au plus égales à 1, si l'on a

$$l \geqslant d + d'.$$

A la valeur de sin B correspond pour B les deux angles B' et 180° — B' ; de même sin C donne C' et 180° — C'. En supposant B' et C' aigus, on ne peut accepter que les deux solutions

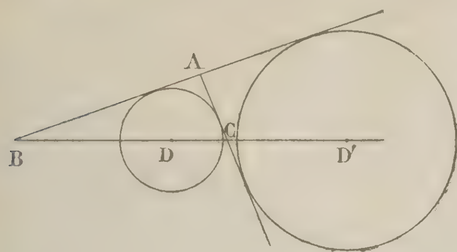
B' et C', ou B' et 180° — C',

car en associant 180° — B' avec C' ou 180° — C', la somme B + C surpasse 180°, puisque B' < C'.

Il y a donc deux triangles distincts répondant à la question.

Pour $l = d + d'$, $C' = 90^\circ = 180^\circ - C'$; les deux triangles se confondent en un seul, rectangle en C.

Construction géométrique du triangle. — En remarquant que les côtés AB, AC sont tangents à deux cercles de centres D, D′ et de rayons d, d', on voit que le problème se réduit à mener les tangentes communes, extérieure et intérieure, de deux cercles connus.



On obtient ainsi deux triangles distincts.

Pour que la tangente commune intérieure existe, il faut que les deux cercles soient extérieurs ou tangents extérieurement, ce qui suppose $l \geqslant d + d'$; d'ailleurs la tangente commune extérieure coupera la ligne des centres DD′ du même côté que D si $d < d'$. On retrouve ainsi les conditions de possibilité obtenues plus haut.

(G. Foucry, section normale de Châlons.)

[Ont résolu la même question : Mlles Anne Madonne ; Alice Saleilles ; MM. V. Barol ; M. Bernard ; A. Bernardeau ; L. Bordrois ; C. Bourvéau ; A. Bottin ; R. Cattin ; G. Desnoës ; Duittoz ; E. Gernez ; H. Guillaud ; P. Gury ; J. Hébré ; R. Henry ; E. Hugonnier ; Jacquet ; M. Laurence ; Le Bunetel ; A. Lecoutour ; A. Legros ; M. B., instituteur à I. ; P. Mayet ; A. Meynier ; L Minjoz ; L. Ollié ; P. Pégorier ; M. Petit ; M. Petitjean ; M. Popescu ; A. Rieus ; A. de Saint-Gabriel ; Samion ; A. Séclet ; Sinoquet ; P. Valentin ; S. Viallet ; P. Zlatco.]

4924. — *Un trapèze isocèle (c'est-à-dire dont les côtés opposés non parallèles sont égaux) est à la fois inscrit dans un cercle de rayon* R *et circonscrit à un cercle de rayon* r. *Soient :*

d, *la distance des centres de ces deux cercles ;*

2α, *l'angle formé par les prolongements des côtés non parallèles du trapèze.*

On demande :

1° *de calculer* R *et* d *en fonction de* α *et de* r ;

2° *d'éliminer* α *entre les deux expressions obtenues, et de former ainsi la relation qui lie les trois quantités* R, r, d.

(*Bacc. lettres-math., Montpellier, juillet 1900.*)

1° Soient ωI et OM les perpendiculaires abaissées des centres des cercles inscrit et circonscrit sur le côté AD. On a

$$R^2 = \overline{OD}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MD}^2.$$

Or, en remarquant que $\widehat{OM\omega} = \widehat{M\omega I} = \widehat{MPO}$ ou α (côtés perpendiculaires), on a

$$OM \cos\alpha = M\omega, \qquad M\omega \cos\alpha = r,$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$OM = \frac{r}{\cos^2\alpha} ;$$

d'ailleurs, M étant le milieu de l'hypoténuse du triangle AωD rectangle en ω (puisque Aω, Dω sont bissectrices d'angles adjacents),

$$MD = M\omega = \frac{r}{\cos\alpha}.$$

Donc
$$R^2 = \frac{r^2}{\cos^2\alpha}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} + 1\right).$$

D'autre part,

$$d = O\omega = OM \sin\alpha = \frac{r \sin\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

2° Des deux valeurs précédentes, on déduit

$$\frac{R^2}{d^2} = \frac{1 + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

ou

$$\frac{R^2}{d^2} = \frac{1 + \cos^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha}$$

et, en appliquant une propriété des rapports égaux,

$$\cos^2\alpha = \frac{R^2 - d^2}{R^2 + d^2}.$$

En portant cette valeur de $\cos^2\alpha$ dans celle de R^2, il vient

$$R^2 = \frac{r^2(R^2 + d^2)}{R^2 - d^2}\left(\frac{R^2 + d^2}{R^2 - d^2} + 1\right)$$

ou

$$(R^2 - d^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2).$$

(E. Gernez-Pfanmatter, à Roubaix.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Barbé ; R. Cattin ; C. Dupas ; E. Durand ; J. Guéret ; R. Henry ; A. Legros ; F. Mestre ; T. Millet ; F. Pégorier ; A. de Saint-Gabriel ; F. Thibier ; P. Thonet ; Varoquaux ; G. Ybert.)

PHYSIQUE

4935. — *Un ballon en verre plein d'acide carbonique sec à la pression* $0^m,76$ *est suspendu à l'un des plateaux d'une balance dans de l'air également sec à la pression* $0^m,78$. *On en fait la tare. On fait ensuite le vide dans le ballon de telle sorte que la pression du gaz qu'il contient soit réduite à* 2^{cm}. *Pendant ce temps, la pression extérieure a varié de* 10^{mm}. *On trouve alors que, pour rétablir l'équilibre, il faut ajouter sur le plateau de la balance un poids de* 15^{gr}. *On demande de calculer le volume du ballon.*

Pendant toute la durée de l'expérience la température est restée égale à 0°.

On ne tiendra pas compte de l'épaisseur du verre du ballon.

Densité de l'acide carbonique 1,52.

(*Bacc. lettres-sciences, Nancy, juillet 1899.*)

Appelons T la tare, V le volume du ballon. Dans la première opération, la tare fait équilibre au poids B du verre qui forme le ballon, augmenté du poids de gaz carbonique qu'il contient, et diminué de la poussée de l'air. On a donc

$$T = B + V \times 1{,}293 \times 1{,}52 - V \times 1{,}293 \times \frac{78}{76}.$$

Lorsqu'on a fait le vide dans le ballon, l'équation précédente devient

$$T = B + V \times 1{,}293 \times 1{,}52 \times \frac{2}{76} - V \times 1{,}293 \times \frac{77}{76} + 15.$$

Égalant ces deux équations, il vient

$$V \times 1{,}293 \times 1{,}52 - V \times 1{,}293 \times \frac{78}{76}$$
$$= V \times 1{,}293 \times 1{,}52 \times \frac{2}{76} - V \times 1{,}293 \times \frac{77}{76} + 15,$$

d'où l'on tire $\qquad V = 7^{lit},908.$

(C. Ybert.)

[Ont résolu la même question : MM. Bancillon ; Ballier ; Bernardeau ; Boivin ; Bottin ; Cattin ; Cognet ; Collet ; David ; Desnoès ; Ducongé ; Guerrier ; Guyot ; Henry ; Hugonnier ; Lapresle ; Limouzi ; Martin ; Marx ; Mélais ; Meynier ; Michaud ; Robert ; de Saint-Gabriel ; Trouillé.]

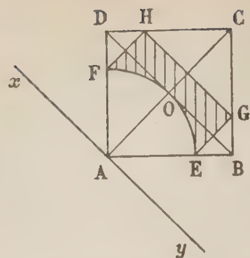
CONCOURS DE 1900 (*Suite*).

ÉCOLE NATIONALE ET SPÉCIALE DES BEAUX-ARTS

SECTION D'ARCHITECTURE

Mathématiques.

I. — **4943.** Étant donné un carré ABCD, du sommet A comme centre on décrit un arc de cercle tangent à la diagonale BD, qui coupe en E



et F les côtés AB et AD; des points E et F on abaisse les perpendiculaires sur la diagonale BD; soient G et H leurs intersections avec BC et CD. On considère la figure ombrée EGHFOE; a étant le côté du carré :

1° Trouver les expressions de l'aire S et du volume V du solide engendré par la figure ombrée en tournant autour de la parallèle xy menée par A à la diagonale BD;

2° Calculer par logarithmes le côté a, sachant que l'aire du cercle de rayon AE vaut $0^{mq},543072$; mettre tous les calculs.

II. — **4944**. Former l'équation du second degré qui donne les valeurs de x qui satisfont aux deux équations simultanées en x et y,

$$\begin{cases} 12y^2 - 8xy - 4x^2 + 12x + 12y + 3 = 0, \\ y - 2 = m(x - 3); \end{cases}$$

puis résoudre l'équation obtenue, et chercher quelles valeurs il faut donner à m pour que les racines soient réelles; mettre tous les calculs.

(*2e session, 23 octobre 1900. — Durée : 2 heures.*)

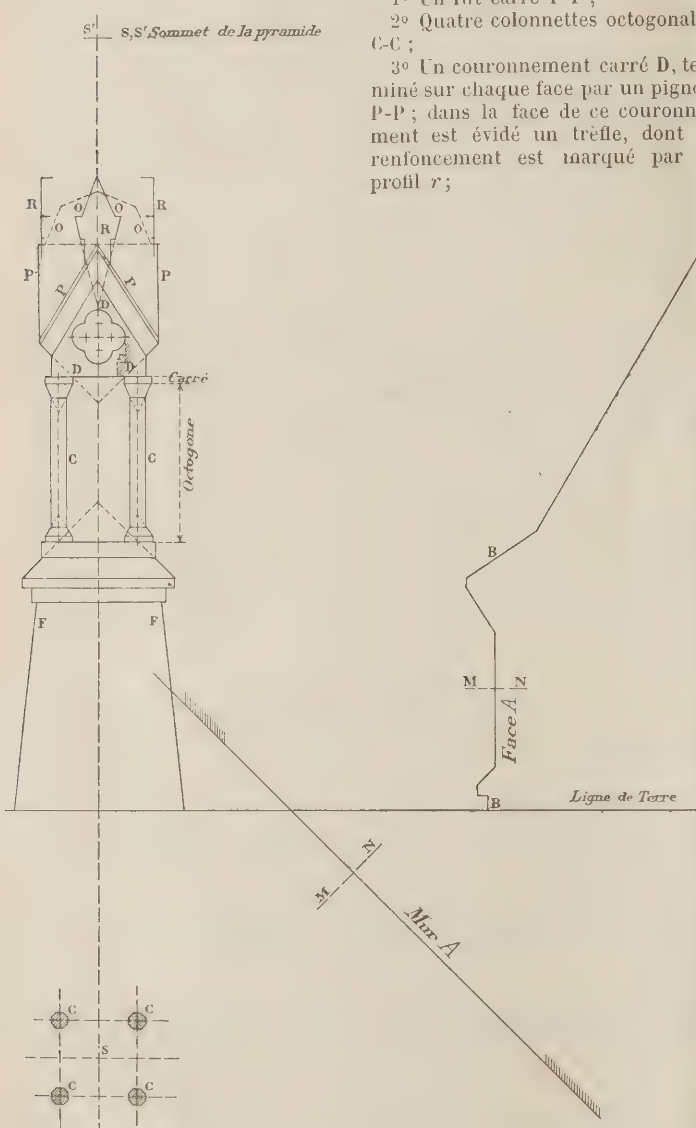
Géométrie descriptive.

On suppose un *pinacle* composé de :

1° Un fût carré F-F;

2° Quatre colonnettes octogonales C-C;

3° Un couronnement carré D, terminé sur chaque face par un pignon P-P; dans la face de ce couronnement est évidé un trèfle, dont le renfoncement est marqué par le profil r;



4° Une pyramide, dont les projections du sommet sont S-S', dont la section est un octogone régulier, dont quatre arêtes tombent sur les pointes du pignon et les quatre autres dans les noues que forment les rencontres des pignons; la section horizontale de cette pyramide, à la hauteur des pointes des pignons, est déterminée par l'octogone O-O;

5° Sur chaque pointe de pignon, et en retraite R-R, il est établi un épannelage d'ornement dont l'épaisseur se prolonge jusqu'à l'intersection avec la pyramide.

La ligne de terre étant donnée sur le dessin, on demande :

1° De compléter le tracé;

2° De tracer les ombres à 45° du pinacle;

3° De tracer les projections des ombres portées par le pinacle sur un mur, dont la projection horizontale est supposée en A, et dont le profil est exprimé en B en vraie grandeur; le profil B est donné en véritable hauteur par rapport au pinacle et à la ligne de terre.

Nota. — Les candidats sont invités *expressément* à tracer sur l'épure toutes les lignes de construction au moyen desquelles ils ont obtenu les projections et les ombres demandées. — Placer le pinacle à gauche de l'épure, comme sur le dessin donné.

(*2e session, 22 octobre 1900. — Durée : 8 heures.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4945. — Un nombre est représenté par a dans le système de base 10, et par b dans le système de base 6. On calcule $b - a$ en considérant a et b comme écrits dans le système décimal, et l'on trouve 10 544. Évaluer a, sachant qu'il est le plus grand possible.

(P. Tribier.)

4946. — Combien y a-t-il de nombres premiers avec 10 qui s'écrivent avec trois chiffres différents?

4947. — Montrer que la condition pour que les équations

$$x = by + cz + du, \qquad z = ax + by + du,$$
$$y = ax + cz + du, \qquad u = ax + by + cz$$

admettent d'autre solution que $x = y = z = u = 0$ est que a, b, c, d soient liées par la relation

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} + \frac{d}{d+1} = 1.$$

4948. — Construire un triangle ABC connaissant b, c, et sachant que la hauteur qui part de A est égale au côté a.

(R. Leullier, à Tours.)

4949. — Construire un carré connaissant son centre et deux points pris sur deux côtés consécutifs.

4950. — On donne, en géométrie descriptive, les projections de deux droites issues d'un même point O. Ces deux droites déterminent un plan P, dans lequel se trouve un point A dont on donne la projection horizontale. Trouver sa projection verticale et construire, en vraie grandeur, le triangle dont deux côtés sont dirigés suivant les deux droites données, et dont le troisième est dirigé suivant la droite de front menée du point A dans le plan P.

(*Bacc. lettres-sciences, Aix, juillet 1900.*)

4951. — Un réservoir communiquant avec un manomètre est rempli d'air sec à zéro sous la pression de 4 atmosphères. On élève sa température à 100°, et l'on demande quelle sera la nouvelle pression, le volume de l'air étant maintenu constant quelles que soient la température et la pression :

1° Si la totalité de l'air comprimé participe à l'élévation de température;

2° Si la fraction de la masse d'air participant à l'élévation de température est seulement les neuf dixièmes de la masse totale, le dixième étant maintenu à zéro dans les tubes de communication.

(*Bacc. lettres-math., Montpellier, juillet 1900.*)

4952. — La force électromotrice d'une dynamo est de 110^{volts}, sa résistance intérieure est $0^{ohm},1$. Elle alimente des lampes à incandescence placées en dérivation aux bornes de la dynamo. La résistance de chacune des lampes, à chaud, est de 120^{ohms}.

1° Quel est le nombre de lampes que peut alimenter la dynamo, sachant que le courant est de $0^{ampère},5$ dans chacune d'elles?

2° Combien faudrait-il employer d'accumulateurs en série pour alimenter le même nombre de lampes? La force électromotrice d'un accumulateur est 2^{volts} et sa résistance est $0^{ohm},1$.

(*Bacc. lettres-sciences, Nancy, juillet 1900.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet, Facdouel, Dir.

25e Année. — N° 8. JOURNAL PARIS, le 15 Janvier 1901

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Abonnements .. Librairie **Nony** et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

QUESTION D'EXAMEN POUVANT CONDUIRE A UNE ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ RÉDUCTIBLE AU SECOND DEGRÉ

par M. **A. Vacquant**, professeur au lycée de Nancy.

Résoudre l'équation

$$\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x + \text{séc}\, x + \text{coséc}\, x = a. \quad (1)$$

(*Examens oraux de l'école polytechnique.*)

Premier procédé (*). — On sait que toutes les lignes trigonométriques d'un arc x s'expriment rationnellement en fonction de $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Si on pose $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$,

l'équation à résoudre devient

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1-t^2} + \frac{1-t^2}{2t} + \frac{1+t^2}{1-t^2} + \frac{1+t^2}{2t} = a,$$

ou $$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1+t^2}{2t} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{1+t^2}{1-t^2} + \frac{2t}{1-t^2} + \frac{1-t^2}{2t} = a,$$

$$[(1+t^2)^2 + 4t^2](1-t^2) + 2(1+t^4)2t + (1+t^2)^3 = 2at(1-t^2)(1+t^2),$$

$$2(1+t^2)^2 + 4t^2(1-t^2) + 4t(1+t^4) = 2at(1-t^4),$$

$$1 - t^4 + 2t(1 + 2t + t^4) = at(1-t^4),$$

$$(1-t^4)(1+2t-at) + 4t^2(1+t^3) = 0.$$

On peut supprimer le facteur $1+t$ appartenant au dénominateur $2t(1-t^4)$ qui a été chassé, et on obtient l'équation du quatrième degré

$$(1+t^2)(1-t)(1+2t-at) + 4t^2(1-t+t^2) = 0. \quad (2)$$

L'équation donnée

$$f(x) - a = 0$$

est telle que $$f(x) \equiv f\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

il en résulte que si $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ est racine de l'équation (2), $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1-t}{1+t}$ est aussi racine de cette équation ; autrement dit, si

$$t_1 = t$$

est une racine quelconque de (2),

$$t_2 = \frac{1-t_1}{1+t_1}$$

en est une autre, et, entre ces deux racines, on a la relation involutive

$$t_1t_2 + t_1 + t_2 - 1 = 0.$$

L'existence d'une telle relation suffit pour ramener la résolution de l'équation du quatrième degré (2) à la résolution d'équations du second degré (fait déjà indiqué par M. Ch. Bioche dans un article précédent, *Journal*, n° du 15 octobre 1900).

Considérons en effet la fonction

$$\theta = 1 + t, \quad (3)$$

si on y remplace t par $\frac{1-t}{1+t}$, elle devient

$$1 + \frac{1-t}{1+t} = \frac{2}{1+t} = \frac{2}{\theta};$$

donc si dans la fonction θ on remplace successivement t par les quatre racines t_1, t_2, t_3, t_4 de l'équation (2), elle prendra les valeurs $\theta_1, \frac{2}{\theta_1}, \theta_3, \frac{2}{\theta_3}$. On a $\theta_1 \times \frac{2}{\theta_1} = \theta_3 \times \frac{2}{\theta_3} = 2$.

L'équation en θ obtenue en remplaçant t par $\theta - 1$ dans (2) aura donc ses quatre racines liées par les relations

$$\theta_1\theta_2 = 2, \qquad \theta_3\theta_4 = 2.$$

Cette équation en θ sera réciproque (sens général) et en posant

$$u = \theta + \frac{2}{\theta}, \quad (4)$$

l'équation en u, déduite de l'équation en θ, sera du second degré ; à une racine de l'équation en u correspondront deux racines de l'équation en θ données par l'équation (4) du second degré en θ, ou encore deux racines de l'équation (2) en t fournies par l'équation suivante du second degré en t:

$$u = 1 + t + \frac{2}{1+t}, \quad (4)$$

c'est-à-dire $$(1+t)^2 - (1+t)u + 2 = 0,$$

ou $$t^2 + (2-u)t + 3 - u = 0. \quad (5)$$

L'équation en θ s'écrit, après de faciles réductions,

$$(a+2)\theta^4 - (5a+11)\theta^3 + (24+10a)\theta^2 - 2(5a+11)\theta + 4(a+2) = 0$$

ou, en divisant tous ses termes par θ^2,

$$(a+2)\left(\theta^2 + \frac{4}{\theta^2}\right) - (5a+11)\left(\theta + \frac{2}{\theta}\right) + 24 + 10a = 0.$$

On a, d'après l'équation (4),

$$\theta^2 + \frac{4}{\theta^2} = u^2 - 4.$$

L'équation en u est donc

$$(a+2)(u^2-4) - (5a+11)u + 24 + 10a = 0,$$

ou $$(a+2)u^2 - (5a+11)u + 6a + 16 = 0. \quad (6)$$

En résumé, la résolution de l'équation (2) est ramenée à la résolution des équations du second degré (6) et (5). On trouvera ensuite toutes les racines de l'équation (1) en résolvant les quatre équations

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t.$$

(*) Voir *Journal*, 6e année, p. 61, n° 8.

Remarque. — La fonction de t

$$u = 1 + t + \frac{2}{1+t} \qquad (4)'$$

ne change pas quand on y remplace t par $\frac{1-t}{1+t}$, et, par suite, prend les mêmes valeurs pour deux racines correspondantes t_1 et $t_2 = \frac{1-t_1}{1+t_1}$ de l'équation (2) ; elle prend donc seulement *deux* valeurs quand on y remplace successivement t par les quatre racines t_1, t_2, t_3, t_4 de l'équation (2) ; on en conclut que l'équation en u, obtenue en éliminant t entre (2) et (4)′, sera du second degré. Cette élimination a été faite, en prenant pour intermédiaire la fonction θ, et on a obtenu l'équation (6).

La connaissance d'une telle fonction u de t, la relation qui la donne étant du second degré en t, permet donc de ramener au second degré la résolution de l'équation (2). Il existe plus d'une fonction u de t jouissant de cette propriété ; en effet le calcul suivant va nous en fournir une autre.

Deuxième procédé. — L'équation à résoudre (1) s'écrit successivement :

$$\sin x + \frac{1}{\sin x} + \cos x + \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = a,$$

$$\frac{\sin^2 x + 1}{\sin x} + \frac{\cos^2 x + 1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x} = a,$$

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x (\sin x + \cos x) + 1 = a \sin x \cos x. \quad (1)'$$

Posons

$$\sin x + \cos x = u = \sqrt{2} \, . \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\sin x \cos x = v.$$

La résolution de l'équation (1)′ est ramenée à celle du système

$$\begin{cases} u(1+v) + 1 = av, \\ u^2 = 1 + 2v. \end{cases}$$

L'équation en u est

$$(u-a)\frac{u^2-1}{2} + u + 1 = 0.$$

On peut supprimer le facteur $u+1$ donnant des solutions annulant le dénominateur $\sin x \cos x$ qui a été chassé, et on obtient l'équation du second degré

$$(u-a)(u-1) + 2 = 0,$$

ou

$$u^2 - (a+1)u + a + 2 = 0. \qquad (7)$$

La résolution de l'équation (1) est donc ramenée à la résolution de l'équation du second degré (7) et des deux équations trigonométriques

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{u}{\sqrt{2}}. \qquad (8)$$

Comme dans le premier procédé on obtiendra quatre séries de valeurs pour x. La discussion des équations simultanées (7) et (8) se fait aisément.

Remarque. — La fonction

$$u = \sin x + \cos x = \frac{2t + 1 - t^2}{1 + t^2}$$

ou

$$u = \frac{(1+t)^2 - 2t^2}{1+t^2} \qquad (9)$$

ne change pas quand on y remplace t par $\frac{1-t}{1+t}$, car elle devient

$$\frac{\left(\frac{2}{1+t}\right)^2 - 2\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2}{1 + \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2} = \frac{4 - 2(1 - 2t + t^2)}{2 + 2t^2} = \frac{1 + 2t - t^2}{1 + t^2}.$$

La fonction u de t, définie par l'équation (9), permet de ramener au second degré la résolution de l'équation du quatrième degré (2). On aura à résoudre successivement les équations du second degré (7) et (9).

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES (1900)

Section des Sciences mathématiques.

4891. — *On considère la fraction*

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + bx + a},$$

dans laquelle a, b, c *sont des constantes et* x *une quantité variable.*

Trouver la relation qui lie les coefficients a, b, c *:*

1° *Quand cette fraction n'admet ni* maximum *ni* minimum ;

2° *Quand elle admet un* maximum *et un* minimum.

3° *On pose*

$$a = X^2 + 2X, \qquad c = Y^2 + 2Y, \qquad b = 2X + 2Y + 4,$$

X, Y *désignant les coordonnées d'un point* M *par rapport à deux axes de coordonnées rectangulaires* OX, OY.

Indiquer les régions du plan XOY *où se trouve le point* M *quand la fraction* y *n'a ni* maximum *ni* minimum *et celles où se trouve le même point quand cette fraction admet un* maximum *et un* minimum.

4° *Chercher la forme que prend la fraction* y *quand le point* M *est situé sur les lignes qui séparent les régions précédentes.*

La dérivée de la fraction y est

$$y' = \frac{(cx^2 + bx + a)(2ax + b) - (ax^2 + bx + c)(2cx + b)}{(cx^2 + bx + a)^2},$$

ou

$$y' = \frac{(a-c)[bx^2 + 2x(a+c) + b]}{(cx^2 + bx + a)^2}.$$

Si $a - c$ est nul, y est égal à 1 ; nous écartons ce cas particulier.

Les maximums et minimums de la fonction correspondent aux valeurs de x qui annulent la dérivée, c'est-à-dire aux racines de l'équation

$$bx^2 + 2x(a+c) + b = 0. \qquad (1)$$

1° Pour que la fonction y n'ait ni *maximum* ni *minimum* il faut et il suffit que l'équation (1) n'ait pas de racines, c'est-à-dire que l'on ait

$$(a+c)^2 - b^2 < 0.$$

2° Pour que la fonction y ait un *maximum* et un *minimum* il faut et il suffit que l'équation (1) ait deux racines réelles et distinctes, ce qui donne la condition

$$(a+c)^2 - b^2 > 0.$$

3° Remplaçons a, c, b par leurs valeurs en fonction de X et Y ; la quantité $(a+c)^2 - b^2$ devient égale à

$$(X^2 + Y^2 + 2X + 2Y)^2 - (2X + 2Y + 4)^2$$

ou à

$$(X^2+Y^2+2X+2Y+2X+2Y+4)(X^2+Y^2+2X+2Y-2X-2Y-4)$$

ou encore à

$$(X^2 + Y^2 + 4X + 4Y + 4)(X^2 + Y^2 - 4)$$

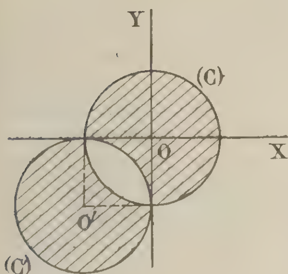
ou enfin à

$$[(X+2)^2 + (Y+2)^2 - 4][X^2 + Y^2 - 4].$$

Pour que la fonction y n'admette ni *maximum* ni *minimum*, il faut et il suffit que l'on ait

$$[(X+2)^2 + (Y+2)^2 - 4][X^2 + Y^2 - 4] < 0. \qquad (2)$$

Or l'équation $X^2 + Y^2 - 4 = 0$ représente un cercle (C) ayant pour centre l'origine et pour rayon 2. De plus la fonction $X^2 + Y^2 - 4$ est positive pour les coordonées de tout point extérieur au cercle, et négative pour les coordonnées de tout point intérieur.



Quant à l'équation
$$(X+2)^2 + (Y+2)^2 - 4 = 0,$$
elle représente aussi un cercle (C'), de rayon 2, ayant pour centre le point O' qui a pour coordonnées -2 et -2. Le premier membre de l'équation est positif pour les coordonnées de tout point extérieur au cercle, et négatif pour les coordonnées de tout point intérieur.

Il en résulte que pour que l'inégalité (1) soit vérifiée, il faut et il suffit que le point M (qui a pour coordonnées X et Y) soit extérieur à l'un des cercles et intérieur à l'autre. Par conséquent le point M doit se trouver dans la région du plan couverte de hachures.

Pour que la fonction y admette un *maximum* et un *minimum* il faut et il suffit que l'on ait
$$[(X+2)^2 + (Y+2)^2 - 4][X^2 + Y^2 - 4] > 0,$$
ce qui exprime que le point M doit être ou bien extérieur aux deux cercles, ou bien intérieur aux deux. Le point M doit donc se trouver dans la région du plan non couverte de hachures.

4° Si le point M est sur l'un des cercles, nous avons
$$(a+c)^2 - b^2 = 0, \qquad \text{ou} \qquad b = \pm(a+c).$$

Supposons d'abord $b = a + c$. La fonction y prend la forme
$$y = \frac{ax^2 + (a+c)x + c}{cx^2 + (a+c)x + a} = \frac{(ax+c)(x+1)}{(cx+a)(x+1)}$$
ou
$$y = \frac{ax+c}{cx+a}.$$

Si l'on a $b = -(a+c)$, y prend la forme
$$y = \frac{ax^2 - (a+c)x + c}{cx^2 - (a+c)x + a} = \frac{(ax-c)(x-1)}{(cx-a)(x-1)}$$
ou
$$y = \frac{ax-c}{cx-a}.$$

(M. LAURENCE, lycée de Bordeaux.)

[Ont résolu la même question : MM. Maurice Bernard ; G. Foucry ; Maxime Gondran ; de Jarny ; R. Manen ; L. Ollé ; L. Patin ; Marcel Petit ; A. Vannier.]

4892. — *On donne deux axes* rectangulaires, *ox, oy, deux points* A, A' *situés sur l'axe ox, et un point* B *situé sur l'axe oy :*

1° *Soit* M *un point quelconque de l'axe ox ; on demande de former les équations des circonférences de cercles circonscrites l'une au triangle* ABM, *l'autre au triangle* A'BM.

2° *Calculer les coordonnées des centres* C, C' *de ces circonférences, leurs rayons* R, R' *et la distance* CC' *de leurs centres.*

3° *Le point* M *se déplaçant sur l'axe ox, montrer que les centres* C, C' *décrivent chacun une droite ; que le rapport des rayons* R, R' *reste constant et que le triangle* BCC' *reste semblable au triangle* BAA'.

Trouver pour quelle position du point M *les rayons* R, R' *ont une valeur minimum.*

4° *Former l'équation de la droite joignant les centres* C *et* C', *et chercher le nombre des droites* CC' *qui passent par un point* P *donné dans le plan xoy.*

Indiquer la position des droites CC' *par rapport à la courbe qui sépare les régions du plan xoy où se trouve le point* P *suivant qu'il existe des droites* CC' *passant par ce point ou qu'il n'en existe pas.*

On représentera par a, a' les abscisses des points A, A', *par b l'ordonnée du point* B *et par m l'abscisse variable du point* M.

NOTA. — Le problème précédent peut être résolu par les méthodes de la géométrie élémentaire ; il sera tenu compte des solutions géométriques qui pourront être données.

Solution analytique. — 1° Soit $x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ l'équation du cercle circonscrit au triangle ABM. Pour exprimer que ce cercle passe par les points A et M, j'écris qu'en faisant $y = 0$ dans son équation, on obtient une équation du deuxième degré en x qui a pour racines a et m. Cette équation en x est $x^2 + 2Dx + F = 0$; pour que ses racines soient a et m il faut qu'on ait
$$2D = -(a+m), \qquad F = am.$$

Écrivons enfin que l'équation du cercle est vérifiée par les coordonnées 0, b du point B, nous avons
$$b^2 + 2Eb + F = 0,$$
d'où nous tirons $E = -\dfrac{b^2+F}{2b}$ ou $E = -\dfrac{b^2+am}{2b}$.

Par conséquent l'équation du cercle circonscrit au triangle ABM est
$$x^2 + y^2 - (a+m)x - \frac{b^2+am}{b}y + am = 0.$$

De même celle du cercle circonscrit au triangle A'BM est
$$x^2 + y^2 - (a'+m)x - \frac{b^2+a'm}{b}y + a'm = 0.$$

2° L'équation du premier cercle peut encore s'écrire
$$\left(x - \frac{a+m}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b^2+am}{2b}\right)^2 = \frac{(a+m)^2}{4} + \frac{(b^2+am)^2}{4b^2} - am,$$
et le second membre prend successivement les formes
$$\frac{b^2[(a+m)^2 - 4am] + (b^2+am)^2}{4b^2} \quad \text{ou} \quad \frac{b^4 + b^2(a^2+m^2) + a^2m^2}{4b^2}$$
ou encore
$$\frac{(b^2+a^2)(b^2+m^2)}{4b^2},$$
et par suite l'équation du cercle circonscrit au triangle ABM devient
$$\left(x - \frac{a+m}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b^2+am}{2b}\right)^2 = \frac{(b^2+a^2)(b^2+m^2)}{4b^2}.$$

Les coordonnées de son centre C sont alors
$$x = \frac{a+m}{2}, \qquad y = \frac{b^2+am}{2b},$$
et son rayon R est donné par la formule
$$R = \sqrt{\frac{(b^2+a^2)(b^2+m^2)}{4b^2}}.$$

De même les coordonnées du point C' sont
$$x = \frac{a'+m}{2}, \qquad y = \frac{b^2+a'm}{2b},$$
et l'on a
$$R' = \sqrt{\frac{(b^2+a'^2)(b^2+m^2)}{4b^2}}.$$

Enfin nous avons
$$\overline{CC'}^2 = \left(\frac{a+m}{2} - \frac{a'+m}{2}\right)^2 + \left(\frac{b^2+am}{2b} - \frac{b^2+a'm}{2b}\right)^2$$
ou
$$\overline{CC'}^2 = \frac{(a-a')}{4} + \frac{m^2(a-a')^2}{4b^2},$$

ou enfin $$\overline{CC'}^2 = \frac{(a-a')^2(b^2+m^2)}{4b^2}.$$

3° Nous obtiendrons le lieu du point C en éliminant m entre les équations
$$x = \frac{a+m}{2}, \qquad y = \frac{b^2+am}{2b}.$$

La première nous donne $m = 2x - a$, et en portant cette valeur de m dans la seconde nous avons
$$y = \frac{b^2 + a(2x-a)}{2b}$$
ou $$a(2x-a) - b(2y-b) = 0.$$

Telle est l'équation du lieu. Elle représente la droite menée par le milieu de AB et perpendiculaire à AB.

On voit de même que le lieu du point C′ est la perpendiculaire menée à A′B en son milieu.

D'autre part, en divisant les valeurs trouvées pour R et R′, nous avons
$$\frac{R}{R'} = \sqrt{\frac{b^2+a^2}{b^2+a'^2}},$$
ce rapport est indépendant de m.

Pour démontrer que le triangle BCC′ est semblable au triangle BAA′, nous allons démontrer que les côtés sont proportionnels, c'est-à-dire que l'on a
$$\frac{BC}{BA} = \frac{BC'}{BA'} = \frac{CC'}{AA'}$$
ou $$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{BA}^2} = \frac{\overline{BC'}^2}{\overline{BA'}^2} = \frac{\overline{CC'}^2}{\overline{AA'}^2}.$$

Or $$\overline{BC}^2 = R^2 = \frac{(b^2+a^2)(b^2+m^2)}{4b^2},$$
$$\overline{BC'}^2 = R'^2 = \frac{(b^2+a'^2)(b^2+m^2)}{4b^2},$$
$$\overline{BA}^2 = b^2+a^2, \quad \overline{BA'}^2 = b^2+a'^2, \quad \overline{CC'}^2 = \frac{(a-a')^2(b^2+m^2)}{4b^2},$$
$$\overline{AA'}^2 = (a-a')^2.$$

On voit ainsi que les trois rapports précédents sont égaux à $\frac{b^2+m^2}{4b^2}$.

Enfin pour que les rayons R et R′ soient minimum il faut que $m = 0$ c'est-à-dire que le point M soit au point O.

4° L'équation de la droite CC′ est
$$\frac{y - \frac{b^2+am}{2b}}{x - \frac{a+m}{2}} = \frac{\frac{b^2+a'm}{2b} - \frac{b^2+am}{2b}}{\frac{a'+m}{2} - \frac{a+m}{2}}$$
ou $$\frac{2by - (b^2+am)}{b[2x-(a+m)]} = \frac{(a'-a)m}{b(a'-a)}$$
ou $$2by - (b^2+am) = m[2x-(a+m)]$$
ou enfin $$2mx - 2by + b^2 - m^2 = 0.$$

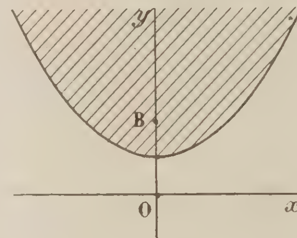
Soit P un point du plan ayant pour coordonnées x_0, y_0. Ecrivons que la droite CC′ passe par ce point, nous avons
$$2mx_0 - 2by_0 + b^2 - m^2 = 0,$$
ou $$m^2 - 2mx_0 + 2by_0 - b^2 = 0. \qquad (1)$$

Nous obtenons ainsi une équation du deuxième degré par rapport à m ; il existe donc deux droites CC′ passant par le point P.

Pour que ces deux droites soient réelles, il faut que l'équation (1) ait ses racines réelles, c'est-à-dire que l'on ait
$$x_0^2 - 2by_0 + b^2 > 0.$$

Cette inégalité exprime que le point P est dans la région positive de la courbe qui a pour équation
$$x^2 - 2by + b^2 = 0$$

Cette équation représente une parabole, et si on l'écrit
$$x^2 + (y - b^2) = y^2,$$
on reconnaît que cette parabole admet le point B pour foyer, et l'axe Ox pour directrice.



L'origine O est dans la région positive ; par conséquent cette région est la portion du plan non couverte de hachures.

Si le point P est dans cette région, par ce point passent deux droites CC′.

Si au contraire le point P est dans la région couverte de hachures, par ce point ne passe aucune droite CC′ réelle.

Enfin si le point P est sur la parabole, il passe par ce point deux droites CC′ confondues, car dans ce cas l'équation (1) a une racine double.

Tous ces résultats apparaîtront d'ailleurs très clairement quand nous aurons montré que les droites CC′ sont tangentes à la parabole P.

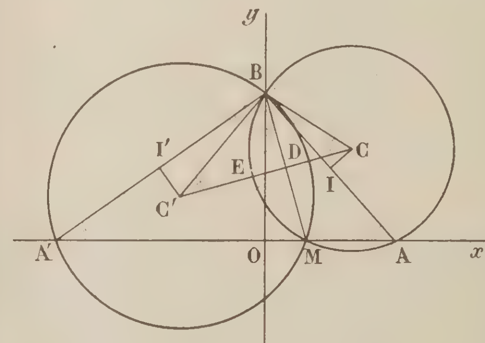
Cherchons par exemple l'équation aux abscisses des points de rencontre de la droite CC′ $(2mx - 2by + b^2 - m^2 = 0)$ et de la parabole $(x^2 - 2by + b^2 = 0)$.

Pour cela de l'équation de la droite nous tirons
$$2by = 2mx + b^2 - m^2,$$
et, en portant cette valeur dans l'équation de la parabole, nous obtenons $$(x-m)^2 = 0.$$

La droite CC′ rencontre donc la parabole en deux points confondus, elle est tangente à la parabole.

En conséquence les droites CC′ qui passent par le point P sont les tangentes menées du point P à la parabole. Elles n'existent donc que si le point P est dans la région du plan non couverte de hachures.

Solution géométrique. — Pour déterminer le centre C, nous menons la perpendiculaire à AB en son milieu I, et la perpendiculaire à BM en son milieu D. Ces deux perpendiculaires se coupent au point C. Construction analogue pour le point C′.



On voit alors que, quand le point M varie, le point C décrit la droite perpendiculaire menée à AB en son milieu I, et le point C′ la perpendiculaire à A′B en son milieu I′.

Dans le triangle ABM on a
$$2\,OB.BC = BM.BA,$$
d'où $$BC = R = \frac{BM.BA}{2OB};$$
de même $$R' = \frac{BM.BA'}{2OB},$$

et, par suite, $\dfrac{R}{R'} = \dfrac{BA}{BA'}$.

On voit ainsi que le rapport $\dfrac{R}{R'}$ est constant.

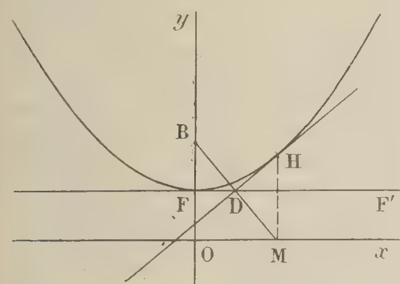
Le minimum de R correspond au minimum de BM. Or le minimum de BM est BO ; donc R est minimum quand le point M est au point O.

Je dis maintenant que les triangles BAA′ et BCC′ sont semblables.

En effet l'angle BAA′ a même mesure que la moitié de l'arc BEM. D'autre part l'angle au centre BCC′ a même mesure que l'arc BE ; comme l'arc BE est la moitié de l'arc BEM, on voit que l'angle BCC′ est égal à l'angle BAA′. On voit de même que $\widehat{BC'C} = \widehat{BA'A}$, par suite les deux triangles BCC′ et BAA′ sont semblables.

La droite CC′ est perpendiculaire à BM en son milieu D. Or, quand le point M décrit Ox, le point D décrit la parallèle FF′ à Ox passant par le milieu F de OB.

On en conclut que la droite CC′ est tangente à la parabole qui a pour foyer le point B et pour tangente au sommet FF′ (et par suite pour directrice Ox). Le point de contact H de la droite CC′ et de la parabole se projette sur Ox au point M, comme le montre d'ailleurs la solution analytique.



Par conséquent les droites CC′ qui passent par un point P du plan xOy sont les tangentes menées du point P à la parabole. Ces tangentes n'existent que si le point P est dans la région du plan qui ne contient pas le foyer.

(NABOULET, à Beaucaire.)

[Ont résolu la même question : MM. G. Foucry ; Jules Guéret ; J. Legros ; A. Lecoutour ; R. Manen ; L. Ollié ; G. Réveillon ; Paul Thonet.]

ARITHMÉTIQUE

4936. — *Démontrer que si* a *et* b *sont des entiers et si* $\dfrac{ab}{a+b}$ *est entier, les nombres* a *et* b *peuvent se représenter par*

$$ma'(a'+b'), \qquad mb'(a'+b'),$$

a' *et* b' *étant premiers entre eux et* m *étant entier.*

Soit q le plus grand commun diviseur de a et b.

On a $\qquad a = qa', \qquad b = qb',$

a' et b' étant premiers entre eux.

Si nous remplaçons a et b par ces expressions dans $\dfrac{ab}{a+b}$, nous aurons

$$\frac{q^2a'b'}{q(a'+b')} = \frac{qa'b'}{a'+b'} = C,$$

C étant un nombre entier.

Puisque a' et b' sont premiers entre eux, il en est de même de $a'b'$ et de $a'+b'$, de sorte que $a'+b'$ doit diviser q.

Donc $\qquad q = m(a'+b')$

et par suite $\qquad a = ma'(a'+b'),$

$\qquad b = mb'(a'+b').$ $\qquad$ C. q. f. d.

(G. DE FRANCE, à Versailles.)

[Ont résolu la même question : M[lles] D., à P. ; A. Madonne ; A. Saleilles ; MM. A. Arcizet ; E. Barbé ; L. Barberot ; H. Belbenoit ; A. Bernardeau ; L. Bordron ; A. Bottin ; Butruille ; R. Cattin ; J. Cougnoux ; L. David ; C. Dupas ; E. Durand ; V. Enescu ; E. Gernez-Pfanmatter ; A. Gheysens ; R. Henry ; E. Hiernaux ; A. James ; E. Kissel ; M. Laurence ; A. Lecoutour ; J. Maury ; A. Meynier ; R. Rives ; V. Thébault ; P. Thonet ; J. Trouillé.]

ALGÈBRE

4937. — *On considère l'équation du second degré*

$$ax^2 = bx + c,$$

où a, b, c *désignent trois entiers donnés. Démontrer que, si cette équation admet pour racine la fraction irréductible* $\dfrac{s}{t}$, *le dénominateur* t *divise nécessairement le coefficient* a. *En déduire que, si* a *est égal à* 1, *l'équation ne peut admettre d'autres racines commensurables que des nombres entiers.*

(*Bacc. lettres-math., Caen, juillet 1900.*)

Remplaçons x par $\dfrac{s}{t}$ dans l'équation considérée ; il vient

$$\frac{as^2}{t^2} = \frac{bs}{t} + c$$

ou

$$as^2 = t(bs + tc).$$

Cette égalité montre que as^2 est un multiple de t ; or comme t est premier avec s ou s^2, cette condition entraîne la divisibilité de a par t.

Il résulte de là que si l'on suppose $a = 1$, on doit avoir aussi $t = 1$, et l'équation admet alors pour racines les nombres entiers s et $b - s$.

(M. GUYOT, collège de Melun.)

[Ont résolu la même question : M[lle] A. Madonne ; MM. E. Anzemberger ; A. Arcizet ; E. Barbé ; L. Barberot ; H. Belbenoit ; A. Bernardeau ; L. Beuret ; H. Blanc ; A. Bottin ; Butruille ; R. Cattin ; G. Desnoës ; L. David ; H. Devaux ; R. Dubuisson ; E. Durand ; V. Enescu ; G. de France ; G., à G. ; E. Gernez-Pfanmatter ; J. Guéret ; P. Guerrier ; M. Guyot ; R. Henry ; V. Herzenberg ; E. Hiernaux ; E. Hugonnier ; A. James ; E. Kissel ; A. Lecoutour ; E. Licope ; J. Maury ; F. Mestre ; A. Meynier ; P. E., à Annonay ; L. Painvin ; L. Platrier ; R. Rives ; E. Roncaglia ; M. Royer ; P. Saintin ; V. Thébault ; J. Trouillé ; G. Ybert ; P. Zlatco.]

4938. — *Démontrer que dans le système de base* 10 *le logarithme d'un nombre commensurable autre qu'une puissance entière de* 10 *est incommensurable.*

Qu'arriverait-il si la base était un nombre entier autre que 10 ?

Première solution. — Considérons les deux progressions géométrique et arithmétique

$$\div\!\div \;\ldots : 10^{-1} : 1 : \quad 10 : \quad 10^2 : \ldots : 10^m : \ldots$$
$$\div \;\ldots .\; -1 \,.\, 0 \,.\quad 1 \,.\quad 2 \,.\ldots .\; m \;.\ldots$$

Les nombres de la première progression ont pour logarithmes, dans le système de base 10, les nombres de la seconde ; et il en est de même pour les termes des progressions que l'on déduit des précédentes en insérant un même nombre de moyens entre deux termes consécutifs des progressions données.

Tout nombre commensurable, $\dfrac{p}{q}$, peut s'obtenir comme moyen inséré dans la seconde progression ; il suffit d'insérer $q+1$ moyens entre deux termes consécutifs.

Le nombre dont $\dfrac{p}{q}$ est le logarithme serait $(\sqrt[q]{10})^p$ ou $\sqrt[q]{10^p}$; or, si q est premier avec p, 10^p n'est pas une puissance q^e exacte et $\sqrt[q]{10^p}$ est incommensurable. Comme à tout logarithme commensurable correspond un nombre incommensurable, à un nombre commensurable il ne peut correspondre qu'un logarithme incommensurable.

Si la base était un nombre A, le nombre ayant pour logarithme $\dfrac{p}{q}$ serait $\sqrt[q]{A^p}$; si on suppose encore p et q premiers entre eux, A^p n'est une puissance q^e exacte que si A est une puissance q^e exacte.

Si $A = \alpha^n$, α étant un nombre commensurable et n'étant pas une puissance des logarithmes de la forme $\frac{p}{n}$, p étant un entier premier ou non avec n correspondent à des nombres commensurables de la forme α^p.

Seconde solution. — Le logarithme d'un nombre X, dans le système de base 10, est le nombre x, tel que $X = 10^x$; si $x = \frac{p}{q}$, on a l'égalité

$$X = 10^{\frac{p}{q}} \quad \text{ou} \quad X^q = 10^p.$$

Le second membre n'admettant comme diviseurs premiers que 2 et 5, le premier membre ne doit admettre que ces diviseurs, et comme ils figurent avec les mêmes exposants dans 10^p ou son égal X^q, ils doivent figurer avec les mêmes exposants dans X qui est alors une puissance de 10.

Si la base est A, on est conduit à l'égalité

$$X^q = A^p$$

ou

$$X = \sqrt[q]{A^p};$$

donc A^p doit être une puissance p^e exacte, ce qui ne peut avoir lieu, p et q étant premiers entre eux (ce qu'on peut toujours supposer), que si A est une puissance q^e exacte.

Si $A = \alpha^n$, α n'étant pas une puissance, les seuls nombres à logarithmes commensurables sont les nombres de la forme α^p; leurs logarithmes sont de la forme $\frac{p}{n}$.

Par exemple, si la base était 8 ou 2^3, les puissances de 2 auraient des logarithmes commensurables à dénominateur 3.

[Ont complètement résolu la question : MM. C. Dupas ; M. Laurence ; M. Royer ; P. Zlatco.]

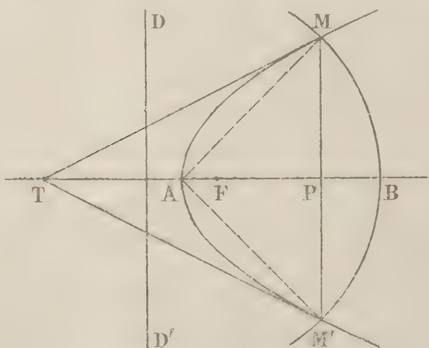
[Ont partiellement résolu la question : Mlle A. Madonne ; MM. E. Barbé ; H. Belbenoit ; P. Bonnefoy ; R. Cattin ; G. Desnoës ; V. Enescu ; E. Gernez-Pfanmatter ; A. Gheysens ; A. Lecoutour ; H. Pariselle ; J. Trouillé.]

GÉOMÉTRIE

4856. — *On donne une parabole de paramètre p. De son sommet A comme centre, avec un rayon égal à $2p\sqrt{2}$, on décrit une circonférence qui coupe la parabole en deux points M et M'. On demande d'exprimer en fonction de p la surface du segment commun à la parabole et au cercle, et de calculer le rapport de cette surface à celle du triangle MTM' obtenu en menant à la parabole les tangentes aux points M et M'. (On sait que la surface d'un segment de parabole, compris entre le sommet et une perpendiculaire à l'axe, vaut les $\frac{2}{3}$ du rectangle ayant pour dimensions cette corde et la distance de cette corde au sommet de la parabole.)*

(Bacc. lettres-sciences, Paris, juillet 1900.)

Si l'on désigne par x et y les coordonnées AP et PM du point M, on a



$$y^2 = 2px$$

et

$$x^2 + y^2 = (2p\sqrt{2})^2.$$

Eliminant y^2, il vient

$$x^2 + 2px - 8p^2 = 0,$$

d'où, en laissant de côté la racine négative,

$$x = -p + \sqrt{p^2 + 8p^2} = 2p;$$

puis, en portant dans $y^2 = 2px$,

$$y = \sqrt{4p^2} = 2p.$$

Calcul de la surface du segment MAM'B. — Cette surface est la somme du segment parabolique MAM' et du segment circulaire MBM'. Or

$$\text{Segment MAM}' = \frac{2}{3}x.2y = \frac{16}{3}p^2;$$

le segment circulaire MBM', différence du quadrant MAM' et du triangle MAM', a pour valeur

$$\frac{1}{4}\pi\overline{AM}^2 - xy = 2p^2(\pi - 2).$$

Donc

$$\text{Surface MAM'B} = \frac{16}{3}p^2 + 2p^2(\pi - 2) = \frac{2}{3}p^2(3\pi + 2).$$

D'ailleurs, A étant le milieu de la sous-tangente TP, on a

$$\text{Surface MTM}' = 2xy = 8p^2,$$

et, par suite,

$$\frac{\text{Surf. MAM'B}}{\text{Surf. MTM'}} = \frac{3\pi + 2}{12}.$$

(P. SAINTIN, lycée de Versailles.)

[Ont résolu la même question : MM. H. Belbenoit ; Daure ; E. Hugonnier-Ginet ; Jacquet ; M. Laurence ; J. Lehmann ; Noël ; J. Pendariès ; H. Pitrat ; E. Sautreau ; P. Valentin ; H. Varennes.]

4918. — *On donne un cercle de centre O et de rayon R, un point I dans le plan tel que* $OI = 3R$.

1° *Déterminer par une construction géométrique sur le diamètre OI deux points M et N, tels que le point I soit le milieu du segment MN et que le produit* $OM \times ON$ *soit égal à* R^2. *Calculer OM et ON.*

2° *Montrer que les rapports* $\frac{CM}{CN}$ *et* $\frac{DM}{DN}$ *sont égaux* (C *et* D *sont les extrémités du diamètre* OI), *et calculer la valeur numérique commune de ces rapports.*

3° *Déterminer par une construction géométrique sur le cercle O un point P tel que*

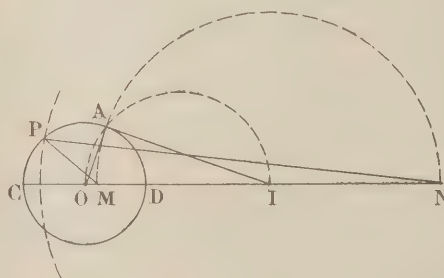
$$\overline{PM}^2 + \overline{PN}^2 = 2l^2,$$

l désignant une longueur donnée.

Entre quelles limites doit être contenue cette longueur l pour que le problème soit possible?

(Certificat d'aptitude au professorat des écoles normales, aspirantes, 1900.)

1° Supposons le problème résolu : traçons la circonférence de diamètre MN ayant son centre en I, et menons-lui la tangente OA.



Comme par hypothèse

$$R^2 = OM.ON = \overline{OA}^2,$$

le point de contact A appartient au cercle O; ce point se trouve aussi sur le cercle de diamètre OI, puisque l'angle OAI est droit.

Pour déterminer M et N, il suffit donc de décrire sur OI comme diamètre un demi-cercle qui coupe le cercle O en A, puis le cercle de centre I passant par A, qui rencontre OI en M et N.

Calcul de OM *et* ON. — On a

$$OM = OI - IM,$$
$$ON = OI + IN.$$

Or

$$OI = 3R$$

et

$$AI = \sqrt{\overline{OI}^2 - \overline{OA}^2} = \sqrt{9R^2 - R^2} = 2R\sqrt{2}.$$

Donc
$$OM = R(3 - 2\sqrt{2}),$$
$$ON = R(3 + 2\sqrt{2}).$$

2° On a
$$\frac{CM}{CN} = \frac{R + OM}{R + ON} = \frac{R + OM}{R + \frac{R^2}{OM}} = \frac{OM}{R} = 3 - 2\sqrt{2}\ ;$$
de même
$$\frac{DM}{DN} = \frac{R - OM}{ON - R} = \frac{R - OM}{\frac{R^2}{OM} - R} = \frac{OM}{R} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

3° Le point P est le point commun au cercle O et à la circonférence lieu des points tels que a somme des carrés de leurs distances aux points fixes M, N est constante et égale à $2l^2$.

On sait que cette circonférence a son centre au milieu I de MN ; son rayon, déduit de la relation connue
$$\overline{PM}^2 + \overline{PN}^2 = 2\overline{PI}^2 + 2\overline{IM}^2,$$
est
$$PI = \sqrt{l^2 - \overline{IM}^2} = \sqrt{l^2 - 8R^2},$$
valeur facile à construire géométriquement.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que le cercle I coupe le diamètre CD du cercle O entre C et D, ce qui s'exprime par
$$ID \leqslant IP \leqslant IC$$
ou
$$2R \leqslant \sqrt{l^2 - 8R^2} \leqslant 4R$$
ou, en élevant chaque membre au carré et résolvant par rapport à l,
$$2R\sqrt{3} \leqslant l \leqslant 2R\sqrt{6}.$$

Lorsque l atteint l'une de ses limites extrêmes $2R\sqrt{3}$ ou $2R\sqrt{6}$, le point P se confond avec l'un des points D ou C.

(P. BONNOT, instituteur-adjoint, à Montceau-les-Mines.)

Remarques. — 1° La relation $OM.ON = R^2$ montre que les points M et N sont conjugués sur le diamètre qui passe par I. Or on sait que si deux cercles sont orthogonaux, tout diamètre de l'un est divisé harmoniquement par l'autre ; comme on connaît le milieu I de MN, le cercle de centre I orthogonal au cercle donné coupe OI aux points demandés.

On a $OM + ON = 2OI = 6R$, $OM.ON = R^2$; donc OM et ON sont les racines de l'équation
$$x^2 - 6Rx + R^2 = 0,$$
d'où $x = 3R \pm 2R\sqrt{2}$.

2° M et N étant conjugués par rapport à C et D, C et D sont conjugués par rapport à M et N, et on a, en valeur absolue,
$$\frac{CM}{CN} = \frac{DM}{DN}.$$

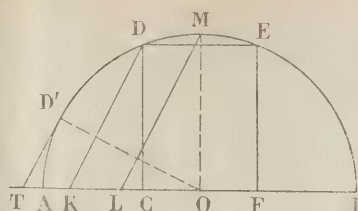
Si on remarque que $CM - DM = 2OM$, $CN - DN = 2R$, on a
$$\frac{CM}{CN} = \frac{DM}{DN} = \frac{OM}{R} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

[Ont résolu la même question : Mlles D., à P.; A. Madonne; A. Saleilles ; MM. E. Anzemberger ; E. Barbé ; L. Barberot ; V. Barol ; A. Bernardeau; P. Bily; P. Bonnefoy ; L. Bordron ; C. Bourion ; J. Bournisien ; I. Bourrec ; V. Chosson ; L. David ; H. Dobryzniak ; C. Dupas ; E. Durand ; G. Foucry ; J. Geoffroy ; E. Gernez-Pfannatter ; P. Givry ; J. Guéret ; P. Guerrier ; H. Guillaud ; G. Guillaume ; L. Hostier ; A. Lardy-Pleumartin; E. Laroche ; M. Laurence ; L. Lefèvre ; Lemmet ; T. Lemoyne ; M. B., instituteur à I ; R. Manen ; F. Mestre ; A. Meynier ; T. Millet ; Noël ; E. Périnet ; M. Petit ; L. Pignier ; Poujol ; G. Rabaté ; R. Rives ; M. Royer ; A. de Saint-Gabriel ; E. Serres ; V. Thébault ; H. Varennes ; P. Zlatco.]

4933. — *Résoudre et discuter* géométriquement *le problème suivant :*

Inscrire dans un demi-cercle donné un rectangle connaissant la somme de sa base et de sa hauteur.

Supposons le problème résolu : soit CDEF un rectangle inscrit dans le demi-cercle de diamètre AB et tel que



$$CF + CD = l.$$

Prolongeons FC d'une longueur $CK = \frac{CD}{2}$.

Si O est le milieu de CF ou AB, on a
$$OK = \frac{CF}{2} + \frac{CD}{2} = \frac{l}{2}.$$

D'ailleurs, en joignant le milieu L du rayon OA au milieu M de l'arc AB, on obtient des triangles rectangles KCD, LOM homothétiques comme ayant les côtés de l'angle droit parallèles et dans le même rapport 2 ; donc KD est parallèle à LM, ce qui conduit à la construction suivante :

Sur AO, on prend $OK = \frac{l}{2}$, et par K, on mène la parallèle KD à la droite LM qui joint le milieu de AO à l'extrémité du rayon OM perpendiculaire à AB. Il ne reste plus ensuite qu'à mener DC et DE respectivement perpendiculaire et parallèle à AB.

Discussion. — La droite KD ne coupe le demi-cercle qu'autant que le point K est compris entre le centre O et le point de rencontre T de la tangente TD' parallèle à LM. Pour obtenir la valeur de OT en fonction de R, remarquons que le triangle TD'O est égal au triangle LOM, de sorte que
$$OT = LM = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{5}}{2}.$$

Si $2R < l < R\sqrt{5}$, K est compris entre T et A ; la droite KD coupe le demi-cercle en deux points qui fournissent deux solutions.

Si $R < l < 2R$, K est situé sur AD, et il n'y a plus qu'une solution.

Si $l < R$, K est situé sur LO ; le point D vient alors sur l'arc MB, et le rectangle correspondant répond à un problème différent de celui posé, la condition $CF + CD = l$ devenant ici
$$-CF + CD = l.$$

(J. PERMANN, lycée de Limoges.)

[Ont résolu la même question : Mlle A. Saleilles ; MM. L. Bordron ; L. David ; J. Franceschini ; J. Guérel ; G., à Ajaccio ; H. Guillaud ; Hébré ; A. James ; M. Laurence ; L. Lemmet ; F. Pégorier ; L. Pignier ; C. Quantin; J. Trouillé.]

PHYSIQUE

4926. — *La tige d'un aréomètre est surmontée d'un entonnoir E muni d'un trait de repère α, qui limite une capacité de 5cc ; l'instrument affleure dans l'eau au bas de la tige, en A, où l'on a marqué 0° ; un poids de 5gr placé dans l'entonnoir fait affleurer l'aréomètre en B, où l'on marque 50 ; l'intervalle AB est divisé en 50 parties égales. — On verse en E, jusqu'au trait α, un liquide de densité inconnue, et on trouve que l'instrument affleure dans l'eau à la division 44. On demande la densité du liquide. Plus généralement, quelle est la densité du liquide qui déterminerait l'affleurement à la division n ?*

E α
B 50
A 0

(*Bacc. lettres-sciences, Clermont, juillet 1900.*)

Appelons V le volume de l'aréomètre depuis le bas jusqu'au zéro et v le volume d'une division.

Écrivons que dans tous les cas le poids du volume d'eau déplacée est égal au poids total de l'aréomètre ; il vient, P étant le poids de l'aréomètre vide,

$$P = V,$$
$$P + 5 = V + 50v$$
et
$$P + 5x = V + 44v,$$
x étant la densité inconnue du liquide.

On a donc $P = V = (V + 50v) - 5 = (V + 44v) - 5x.$

On en tire $50v = 5$

et $44v = 5x.$

Divisant membre à membre, il vient

$$x = \frac{44}{50} = 0,88.$$

En général, si n est la division d'affleurement produite par un liquide placé dans l'entonnoir jusqu'au trait de repère, sa densité sera donnée par la formule

$$d = \frac{n}{50}.$$

(C. YBERT.)

[Ont résolu la même question : Mlles Madonne ; Lauzanne ; A. Saleilles ; D., à P. ; MM. Ambard ; A. Arcizet ; L. Barberot ; J. Bernard ; Bernardeau ; Belbenoît ; Beyney ; F. Boivin ; Bottin ; Bourrec ; R. Cattin ; Croïet ; David ; Deslandes ; Desnoës ; Delhotel ; Dobryzniak ; Durand ; E. Gernez ; Gérard ; Giery ; Godfroy ; Guillemin ; S. Guerrier ; M. Guyot ; R. Henry ; Heyraud ; Hostier ; L. Lambert ; A. Lapresle ; A. Larcher ; Larrieu ; A. Lecoutour ; L. Lefèvre ; Legay ; Lepoivre ; Limouzi ; A. Mabon ; Martin ; Marx ; M. B., instituteur à V. ; J. Métais ; Mestre ; A. Meynier ; Michaud ; T. Millet ; Pallet ; Ch. Passeron ; A. Pernin ; M. Petit ; Poujol ; Popescu ; Rabaté ; L. Richard ; R. Rives ; Royer ; A. de Saint-Gabriel ; Serres ; Tapponnier ; Tastet ; V. Thébault ; F. Thibier ; Trébla ; Unger ; Valentin ; Vautrey.]

4934. — *Un point lumineux* S *se trouve sur l'axe principal d'une lentille convergente, à* 1^m *du centre optique. La lentille a* $0^m,50$ *de distance focale. De l'autre côté de la lentille, à une distance de* 1^m, *se trouve un miroir plan* M *normal à l'axe principal.*

1° *Où se forme l'image définitive de* S ?

2° *Qu'arrive-t-il si l'on incline le miroir ?*

3° *Que se passerait-il si le miroir* M, *au lieu d'être plan, était concave ou convexe ?*

(*Bacc. lettres-math., Aix, novembre 1899.*)

1° Considérons un rayon lumineux quelconque SI émanant du point lumineux S. En sortant de la lentille, il se réfracte et prend une direction IS_1 telle que l'on ait

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{OS_1} = \frac{1}{50},$$

d'où $OS_1 = 100.$

S'il n'y avait pas de miroir en S_1, le point S y formerait son image ; mais le rayon lumineux en tombant sur le miroir plan se réfléchit suivant S_1I' en faisant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Ce rayon subit à travers la lentille une seconde réfraction et va former finalement une image en un point S′.

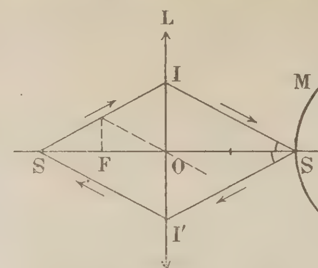
On a

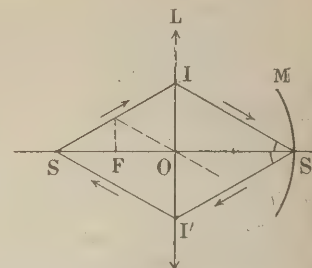
$$\frac{1}{100} + \frac{1}{OS'} = \frac{1}{50},$$

d'où $OS' = 100.$

Donc le point S′ se confond avec le point S.

2° Si le miroir forme un angle avec l'axe principal de la lentille, rien n'est changé dans la formation de l'image ; elle se confond toujours avec le point lumineux. Si le miroir, au lieu d'être plan, était concave ou convexe, l'image se superposerait toujours au point lumineux comme le montrent les constructions suivantes :





(J. E., à Orléans.)

[Ont résolu la même question : Mlle Saleilles ; MM. Antoine ; Belay ; Bernardeau ; Bellier ; Beurel ; Beyney ; Bottin ; Durand ; Guerrier ; Guyot ; Hébré ; Henry ; Hugonnier ; Lemmet ; Lestable ; Limouzi ; Martin ; Marx ; Meynier ; Petit ; Popescu ; Royer ; de Saint-Gabriel ; Ybert.]

QUESTIONS PROPOSÉES

4953. — Démontrer que si A et B ont leurs k derniers chiffres communs, A^n et B^n ont aussi leurs k derniers chiffres communs.

4954. — Résoudre et discuter le système

$$x + y + z = a,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2,$$
$$yz + zx - xy = 0.$$

4955. — Construire un triangle connaissant la hauteur AD, sachant que cette hauteur, les côtés AB, AC qui la comprennent et le troisième côté BC sont en progression géométrique.

(F. Pégorier, à Carcassonne.)

4956. — Construire un losange dont deux côtés opposés reposent sur deux parallèles données, chacun des deux autres côtés passant par un point donné.

4957. — Les angles ω et ω' étant assujettis à vérifier la relation

$$\frac{\sin\omega}{R\cos\omega + a} = \frac{\sin\omega'}{R\cos\omega' - a},$$

prouver que la différence

$$\frac{a^2 - R^2}{2}\left(\frac{1}{a\cos\omega' - R} - \frac{1}{a\cos\omega + R}\right)$$

conserve une valeur constante.

(X. Antomari.)

4958. — On donne la trace horizontale αP d'un plan. Déterminer sa trace verticale de façon que sur l'épure cette trace et son rabattement sur le plan horizontal soient en ligne droite.

4959. — On donne un triangle ABC dont les longueurs des côtés sont exprimées par a, b, c. On applique aux sommets A, B, C des forces parallèles ayant pour mesures algébriques $m + \lambda a$, $m + \lambda b$, $m + \lambda c$.

1° Trouver le lieu du centre de ces forces, en considérant λ comme un paramètre variable.

2° Intersection de ce lieu avec le côté AB. (T. C.)

4960. — On demande le volume d'un aérostat rempli d'hydrogène capable d'enlever $1\,250^{kg}$ avec une force ascensionnelle de 10^{kg}.

Le poids du litre d'air à 0° et sous la pression 76^{cm} de mercure est $1^{gr},293$.

La densité de l'hydrogène par rapport à l'air est 0,0693.

On négligera le volume de l'enveloppe et celui de la nacelle.

(*Bacc. lettres-math., Lyon, mars 1900.*)

4961. — On donne une corde AB de longueur l rendue immobile en un point C tel que l'on ait $\overline{AC}^2 = AB \times BC$. Trouver le rapport des hauteurs des deux sons que rendraient les deux segments vibrant transversalement. La corde tout entière rendant le *fa*♯ de la quatrième octave, trouver les hauteurs des sons des deux segments. On donne la tierce = 435 vibrations doubles.

A —— C —— B

(*Bacc. lettres-sciences, Rennes, juillet 1900.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet, Facdouel, Dir.

25e Année. — N° 9. JOURNAL Paris, le 1er Février 1901.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Abonnements.. Librairie Nony et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (1900)

Physique.

Solution de M. **André Boitel**, élève au lycée Lakanal, lauréat du concours (1er prix).

4842. — *Deux prismes de même angle* A *et d'indices* n *et* n' *sont placés à la suite l'un de l'autre de manière que les faces en regard soient parallèles et laissent entre elles une mince lame d'air.*

On fait tomber sur le premier prisme un rayon de lumière suivant la normale et on mesure la déviation totale e *qu'il a subie après avoir traversé les deux prismes.*

On demande de chercher l'expression de l'indice n *du premier prisme en fonction de l'indice* n' *du second et des deux angles* A *et* e.

Remarquons d'abord que la lame d'air interposée entre les deux prismes n'a pas d'influence sur le résultat observé, et qu'on peut par conséquent supposer les deux prismes en contact. En effet, c'est une lame à faces parallèles, et, par suite, elle ne peut dévier le rayon que latéralement, ce qui ne modifie pas l'angle d'émergence.

Cela posé, comme l'énoncé n'indique pas si les faces en regard des deux prismes sont de même sens ou de sens contraires, nous examinerons successivement ces deux cas.

Premier cas. — On peut avoir $n > n'$, ou $n' > n$.

1° $n < n'$. Le rayon SI arrive en I′ sans déviation et s'y réfracte : on a

$$n \sin i = n' \sin r.$$

Mais l'angle i est égal à l'angle A comme ayant les côtés perpendiculaires, et, comme $\widehat{r} < \widehat{i}$, on a $\widehat{r} < \widehat{A}$.

Le rayon I′I″ fait en I″ avec la normale un angle $r' = A - r$ auquel correspond un angle i' tel que

$$n' \sin r' = \sin i'.$$

Comme la normale en I″ est parallèle à SI (puisque $\widehat{A} = \widehat{A'}$), on a $\widehat{i'} = \widehat{e}$. On est donc amené à résoudre le système

$$\begin{cases} n \sin A = n' \sin r, \\ r + r' = A, \\ \sin e = n' \sin r'. \end{cases}$$

On a $n \sin A = n' \sin (A - r') = n' (\sin A \cos r' - \cos A \sin r')$,

d'où
$$n = n'\left(\cos r' - \frac{\sin r'}{\operatorname{tg} A}\right). \qquad (1)$$

L'équation
$$\sin e = n' \sin r'$$
donne
$$\sin r' = \frac{\sin e}{n'}.$$

On a donc
$$n = n'\sqrt{1 - \frac{\sin^2 e}{n'^2}} - \frac{\sin e}{\operatorname{tg} A},$$

ou enfin
$$n = \sqrt{n'^2 - \sin^2 e} - \frac{\sin e}{\operatorname{tg} A}. \qquad (2)$$

2° Si $n' < n$, on obtient les mêmes formules que précédemment, mais $r > A$; comme $A = r + r'$, r' est < 0. Il en résulte que la déviation a lieu en sens inverse. Si donc, dans ce cas, on compte la déviation comme négative, la formule (2) s'applique à condition de remarquer que $\sin e < 0$. Si l'on ne tient compte que des valeurs absolues, on aura

$$n = \sqrt{n'^2 - \sin^2 e} + \frac{\sin e}{\operatorname{tg} A}.$$

Deuxième cas. — Le rayon arrive en I′, se réfracte, et l'on a

$$\begin{cases} n \sin i = n' \sin r, \\ i = A, \\ A = r + r', \\ n' \sin r' = \sin i'. \end{cases}$$

Or on remarque qu'ici $\widehat{r}$ et $\widehat{r'}$ sont toujours de part et d'autre de I′I″ ; donc $r' < 0$, i' est < 0, et l'on a

$$e = i' + 2A.$$

Il vient alors

$$n \sin A = n' \sin (A - r') = n'(\sin A \cos r' - \cos A \sin r'),$$

ou
$$n = n'\left(\cos r' - \frac{\sin r'}{\operatorname{tg} A}\right). \qquad (3)$$

Mais la dernière équation donne

$$\sin r' = \frac{\sin i'}{n'} = \frac{\sin (e - 2A)}{n'}.$$

Remplaçant $\sin r'$ et $\cos r'$ par leurs valeurs dans l'équation (3) il vient
$$n = n'\left(\sqrt{1 - \frac{\sin^2 (e - 2A)}{n'^2}} - \frac{\sin (e - 2A)}{n' \operatorname{tg} A}\right)$$

ou, en simplifiant,
$$n = \sqrt{n'^2 - \sin (e - 2A)} - \frac{\sin (e - 2A)}{\operatorname{tg} A}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les rayons I'I'' et I''I₁ soient réels, c'est-à-dire que

$$\frac{n \sin i}{n'} < 1, \qquad n' \sin r' < 1.$$

Remarque. — Si A devient très petit, les formules se simplifient. Chaque prisme donne une dispersion constante

$$d = (n-1)A, \qquad d' = (n'-1)A.$$

Dans le premier cas, $e = d - d' = A(n - 1 - n' + 1) = A(n - n')$;

donc $$n = \frac{e}{A} + n'.$$

Dans le second cas,

$$e = d + d' = A(n - 1 + n' - 1) = A(n + n' - 2),$$

$$n = \frac{e}{A} - n' + 2.$$

[Ont résolu la même question : MM. Boissonnet ; Foucry ; de Jarny ; Lecoutour ; Tourneux.]

ARITHMÉTIQUE

4945. — *Un nombre est représenté par a dans le système de base 10, et par b dans le système de base 6. On calcule b — a en considérant a et b comme écrits dans le système décimal, et l'on trouve 10 544. Evaluer a, sachant qu'il est le plus grand possible.*

Soient $x, y, z, u, t, \ldots$ les chiffres à partir de la droite du nombre b exprimé dans le système de base 6. On a, dans le système décimal,

$$b = x + 10y + \overline{10}^2 z + \overline{10}^3 u + \overline{10}^4 t + \overline{10}^5 s + \cdots,$$
$$a = x + 6y + 6^2 z + 6^3 u + 6^4 t + 6^5 s + \cdots;$$

la condition $b - a = 10544$ revient donc à

$$4y + 64z + 784u + 8704t + 92224s + \ldots = 10544.$$

Pour que a atteigne la plus haute valeur possible, il suffit de donner successivement aux divers chiffres $\ldots, s, t, u, z, y, x$ de b la plus grande valeur entière positive compatible avec l'égalité précédente.

On voit d'abord qu'il faut qu'on ait

$$s = 0 \qquad \text{et} \qquad t = 1;$$

l'égalité devient alors

$$4y + 64z + 784u = 1840;$$

puis successivement en prenant

$$u = 2, \qquad 4y + 64z = 272;$$
$$z = 4, \qquad 4y = 16, \qquad \text{d'où} \qquad y = 4.$$

Le nombre cherché est donc $b = 12445$ dans le sytème de base 6, et

$$a = 12\,445 - 10\,544 = 1\,901$$

dans le système décimal.

(DURAND, à Salernes.)

Généralisation. — Soit b un nombre écrit dans le système de base β. Si $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont les n chiffres qui forment ce nombre, et énoncés dans l'ordre précédent en commençant par les unités d'ordres les plus élevés, le nombre d'unités contenues dans b sera

$$a = m_1\beta^{n-1} + m_2\beta^{n-2} + \cdots + m_{n-1}\beta + m_n, \qquad (1)$$

a étant écrit dans le système de base α.

Considérons le nombre b comme écrit dans le système de base α. On a

$$b = m_1\alpha^{n-1} + m_2\alpha^{n-2} + \cdots + m_{n-1}\alpha + m_n, \qquad (2)$$

et, si l'on pose $\alpha > \beta$, il vient, en retranchant (1) de (2) et en appelant d la différence,

$$d = m_1(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + m_2(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}) + \cdots + m_{n-1}(\alpha - \beta). \quad (3)$$

Si l'on se donne d, α, β et la condition que a soit le plus grand possible, m_1 est le quotient à moins d'une unité près par défaut de d par $(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})$. Si R est le reste de cette division, l'égalité (3) devient

$$R = m_2(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}) + \cdots + m_{n-1}(\alpha - \beta),$$

m_2 est le quotient à moins de une unité près par défaut de R par $(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2})$, et ainsi de suite.

m_n n'est pas ainsi déterminé, mais comme a est le plus grand possible, il doit lui-même être le plus grand possible, c'est-à-dire égal à la base de numération β diminuée de 1,

$$m_n = \beta - 1.$$

Nous avons ainsi déterminé les chiffres de b écrit dans le système de base β ; le nombre a sera égal à $b - d$, dans le système de base α.

(A. BERNARDEAU, instituteur à Surgères.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Barbé ; A. Bottin ; E. Durand ; G. Foucry ; E. Gernez-Pfanmatter ; R. Henry ; E. Hugonnier ; A. Larcher ; M. Laurence ; E. Lelarge ; P. Mayet ; F. Mestre ; M. Petit ; J. Trouillé.]

4946. — *Combien y a-t-il de nombres premiers avec 10 qui s'écrivent avec trois chiffres différents?*

Tout nombre premier avec $10 = 2 \times 5$ n'étant divisible ni par 2 ni par 5 est un nombre terminé par un chiffre impair autre que 5, c'est-à-dire par l'un des quatre chiffres 1, 3, 7 ou 9.

Pour former tous les nombres répondant à la question, il suffit d'évaluer combien il y a de nombres de l'une des formes

$$\alpha\beta1, \qquad \alpha\beta3, \qquad \alpha\beta7, \qquad \alpha\beta9,$$

composés de trois chiffres différents.

Les nombres de la forme $\alpha\beta1$ représentant tous les nombres de deux chiffres suivis de 1 sont au nombre de $100 - 10 = 90$; sur ces 90 nombres, il faut éliminer :

10 nombres de la forme $1\alpha1$,
9 — — $\alpha11$,
9 — — $\alpha\alpha1$;

en remarquant que ces trois formes ont en commun le nombre 111, qui se trouve ainsi éliminé 3 fois ou 2 fois en trop, il reste finalement

$$90 - 10 - 9 - 9 + 2 = 64$$

nombres de la forme $\alpha\beta1$ composés de trois chiffres distincts.

Le même raisonnement s'appliquant aussi bien aux nombres des trois autres formes $\alpha\beta3$, $\alpha\beta7$, $\alpha\beta9$, il en résulte qu'il existe

$$64 \times 4 = 256$$

nombres s'écrivant avec trois chiffres distincts et premiers avec 10.

Autre solution. — Il y a autant de nombres de la forme $\alpha\beta1$ où $\alpha \neq \beta \neq 1$ qu'on peut former d'arrangements avec les 9 chiffres 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 combinés deux à deux, moins les 8 arrangements commençant par 0.

On a donc

$$9 \times 8 - 8 = 64$$

nombres de la forme $\alpha\beta1$ où tous les chiffres sont différents. Donc...

(G. FOUCRY, section normale de Châlons.)

[Ont résolu la même question ; MM. P. Bancillon ; L. Baunerot ; H. Belbenoit ; A. Bernardeaux ; V. Chosson ; E. Hugonnier ; E. Kissel ; D. Koenig ; M. Laurence ; A. Legros ; E. Périnet ; M. Petit ; C. Tapponnier ; J. Trouillé ; Vautrey.]

ALGÈBRE

4920. — *Une parabole et une ellipse ont un foyer commun, et le sommet de la parabole coïncide avec le centre de l'ellipse. L'ellipse est définie par son grand axe 2a et sa distance focale 2c.*

Calculer, en fonction des quantités a et c :

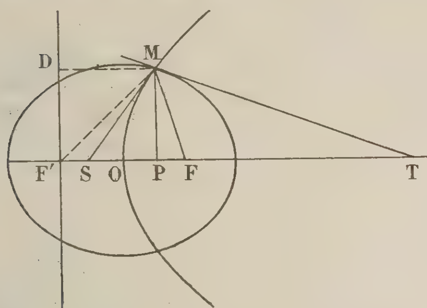
1° la distance du foyer commun à l'un des points d'intersection, M, de l'ellipse et de la parabole ;

2° la distance de ce même foyer au point où la tangente en M à l'ellipse rencontre le grand axe ;

3° la distance de ce foyer au point où la tangente en M à la parabole rencontre le grand axe.

(*Bacc. lettres-sciences, Paris, novembre 1900.*)

Soit F le foyer commun à la parabole et à l'ellipse. Le sommet de la parabole coïncidant avec le centre O de l'ellipse, la directrice est la perpendiculaire au grand axe menée par le second foyer F'.



1° Projetons M en P sur FF'. Dans le triangle MFF', MF étant opposé à un angle aigu, on peut écrire

$$\overline{MF}^2 = \overline{MF'}^2 + \overline{FF'}^2 - 2FF'.F'P.$$

Or, en posant $MF = x$, on a

$$MF' = 2a - x, \qquad FF' = 2c$$

et $$F'P = MD = MF \text{ ou } x.$$

Donc $$x^2 = (2a - x)^2 + 4c^2 - 4cx,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{a^2 + c^2}{a + c}.$$

2° La tangente MT à l'ellipse étant bissectrice extérieure du triangle MFF', on a

$$\frac{FT}{F'T} = \frac{MF}{MF'}$$

ou $$\frac{FT}{x} = \frac{F'T}{2a - x} = \frac{F'T - FT}{2(a - x)} = \frac{c}{a - x},$$

d'où $$FT = \frac{cx}{a - x} = \frac{c\left(\dfrac{a^2 + c^2}{a + c}\right)}{a - \dfrac{a^2 + c^2}{a + c}} = \frac{a^2 + c^2}{a - c}.$$

3° La tangente MS à la parabole étant bissectrice de l'angle FMD des rayons vecteurs, $\widehat{SMF} = \widehat{SMD} = \widehat{MSF}$, et le triangle MSF est isocèle ; donc

$$FS = FM \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{a^2 + c^2}{a + c}.$$

(L. COLOMBEY, école normale de Nancy.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Anzemberger ; L. Barberot ; V. Barol ; A. Bernardeau ; M. Beyney ; C. Bourvéau ; R. Cattin ; L. Colombey ; L. David ; A. Drocourt ; F. Filliol ; J. Franceschini ; E. Gernez-Pfanmatter ; J. Guéret ; R. Henry ; L. Lefèvre ; T. Lemoyne ; L. Licope ; T. Millet ; A. de Saint-Gabriel ; A. Séclet ; P. Thonet ; G. Trébla ; P. Valentin ; H. Varennes ; Varoquaux.]

4944. — *Former l'équation du second degré qui donne les valeurs de x qui satisfont aux deux équations simultanées en x et y,*

$$\begin{cases} 12y^2 - 8xy - 4x^2 + 12x + 12y + 3 = 0, \\ y - 2 = m(x - 3) ; \end{cases}$$

puis résoudre l'équation obtenue, et chercher quelles valeurs il faut donner à m pour que les racines soient réelles ; mettre tous les calculs.

(*École des Beaux-Arts, 1900, section d'Architecture.*)

La première équation peut s'écrire

$$y(12y - 8x + 12) - 4x^2 + 12x + 3 = 0.$$

Remplaçons maintenant y par sa valeur tirée de la seconde équation ; il vient

$$(mx - 3m + 2)[(12m - 8)x - 36(m - 1)] - 4x^2 + 12x + 3 = 0$$

ou, en développant et ordonnant par rapport à x,

$$4(3m^2 - 2m - 1)x^2 - 4(18m^2 - 21m + 1)x + 108m^2 - 180m + 75 = 0.$$

On tire de là

$$x = \frac{\left(\begin{array}{l}2(18m^2 - 21m + 1) \\ \pm\sqrt{4(18m^2 - 21m + 1)^2 - 4(3m^2 - 2m - 1)(108m^2 - 180m + 75)}\end{array}\right)}{4(3m^2 - 2m - 1)}$$

ou, après simplification du radical,

$$x = \frac{18m^2 - 21m + 1 \pm \sqrt{76 - 72m}}{6m^2 - 4m - 2}.$$

Pour que ces valeurs de x soient réelles, on doit avoir

$$76 - 72m \geqslant 0 \qquad \text{ou} \qquad m < \frac{19}{18}.$$

(P. GUERRIER, pensionnat Valbenoîte, Saint-Étienne.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Barbé ; H. Belbenoit ; D. Cognet ; L. Colombey ; H. Dobryzniak ; J. Dubar ; Duittoz ; E. Durand ; R. Grenouillot ; A. Haar ; V. Herzenberg ; E. Kissel ; A. Lapresle ; L. Lefèvre ; L. Lemmet ; J. Lestable ; P. Luquet ; H. Martin ; M. Marx ; A. Meynier ; P. Michaud ; M. Petit ; M. Petitjean ; J. Raymond ; E. Robert ; A. de Saint-Gabriel ; P. Saintin ; P. Valentin ; G. Ybert.]

4947. — *Montrer que la condition pour que les équations*

$$x = by + cz + du, \qquad z = ax + by + du,$$
$$y = ax + cz + du, \qquad u = ax + by + cz$$

admettent d'autre solution que $x = y = z = u = 0$ *est que a, b, c, d soient liées par la relation*

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} + \frac{d}{d+1} = 1.$$

Retranchons membre à membre la seconde équation de la première ; il vient

$$x - y = by - ax,$$

d'où $$y = \frac{(a+1)x}{b+1} ;$$

de même en retranchant successivement la troisième et la quatrième équations de la première, on obtient

$$z = \frac{(a+1)x}{c+1}$$

et $$u = \frac{(a+1)x}{d+1}.$$

Portons maintenant ces valeurs de y, z, u exprimées en fonction de x dans la première équation ; nous aurons

$$x = \frac{b(a+1)x}{b+1} + \frac{c(a+1)x}{c+1} + \frac{d(a+1)x}{d+1},$$

ce qui peut s'écrire

$$x\left[\frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} + \frac{d}{d+1} - \frac{1}{a+1}\right] = 0.$$

Lorsque le coefficient de x n'est pas nul, cette équation entraîne $x = 0$, et par suite $y = z = u = 0$. Le système proposé n'admet alors qu'une seule solution.

Lorsque le coefficient de x est nul, on peut donner à x une

valeur arbitraire α, et les valeurs correspondantes de y, z, u sont

$$y = \frac{(a+1)\alpha}{b+1}, \qquad z = \frac{(a+1)\alpha}{c+1}, \qquad u = \frac{(a+1)\alpha}{d+1}.$$

Ainsi quand la relation

$$\frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} + \frac{d}{d+1} - \frac{1}{a+1} = 0,$$

ou

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} + \frac{d}{d+1} = 1,$$

est vérifiée, le système d'équations admet pour x, y, z, u une infinité de solutions, autrement dit le système devient indéterminé.

(E. HUGONNIER, *école professionnelle de Voiron.*)

[Ont résolu cette question : MM. Andréis; E. Barbé; A. Bernardeau; P. Bonnet; A. Bottin; A. Clément; G. Desnoës; L. Didier; A. Duiltoz; E. Durand; E. Gernez-Pfanmatter; M. Guyot; A. Haar; J. Hébré; E. Kistel; M. Laurence; L. Minjoz; E. Périnet; R. Petit; M. Petitjean; Portalier; E. Serres; P. Thonet; J. Trouillé; F. Vallée; G. Ybert.]

GÉOMÉTRIE

4931. — *Construire un triangle* ABC *connaissant le côté* $BC = a$, *la hauteur correspondante* h *et sachant que la bissectrice de l'angle* A *est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur le côté* BC.

Calculer les côtés b *et* c.

Etablir la condition de possibilité en la déduisant du calcul et de la construction.

Supposons le problème résolu : soit ABC un triangle défini par le côté $BC = a$, la hauteur $AH = h$ et la relation

$$\overline{AD}^2 = BD.DC, \qquad (1)$$

AD étant la bissectrice de l'angle A.

Prolongeons AD jusqu'à sa rencontre en E avec le cercle circonscrit O ; on a

$$AD.DE = BD.DC$$

et, en comparant avec (1),

$$AD = DE.$$

Les triangles rectangles ADH, DEI ayant un angle égal et les hypoténuses égales sont égaux ; donc

$$IE = AH = h.$$

Le point E est donc connu, ce qui conduit à la construction suivante :

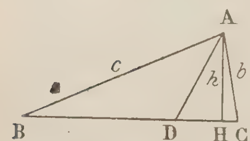
Au milieu I de BC on élève une perpendiculaire sur laquelle on prend $IE = h$; par les trois points B, C, E on fait passer une circonférence O, et parallèlement à BC, à une distance h, on mène la droite XY, qui coupe la circonférence O en deux points A, A′, correspondant à deux triangles symétriques par rapport à la perpendiculaire OE à BC.

Pour que le problème soit possible, il faut que XY rencontre le segment de cercle BE′C, c'est-à-dire qu'on ait

$$h \leqslant IE' \quad \text{ou} \quad h \leqslant \frac{a^2}{4h} \quad \text{ou} \quad a \geqslant 2h.$$

Si $a = 2h$, le triangle isocèle BE′C répond à la question.

Calcul des côtés b *et* c. — On a



$$bc = \overline{AD}^2 + BD.DC$$
$$= 2BD.DC$$
$$= 2\frac{ac}{b+c}\cdot\frac{ab}{b+c} = 2bc.\frac{a^2}{(b+c)^2},$$

d'où $\quad b + c = a\sqrt{2}.$

Ce qui montre que le point A est sur l'ellipse de foyers B et C et de grand axe $a\sqrt{2}$, c'est-à-dire telle que d'un sommet du petit axe on voie la distance focale sous un angle droit. On pourrait ainsi ramener ce problème à déterminer l'intersection d'une droite et d'une ellipse.

D'autre part, si R est le rayon du cercle O, on sait que

$$bc = 2Rh.$$

Or, d'après la première figure,

$$2R = EE' = h + IE'$$

et

$$IE' \times h = \overline{BI}^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Donc

$$bc = h^2 + \frac{a^2}{4}.$$

Connaissant $b + c$ et bc, b et c sont racines de l'équation

$$X^2 - a\sqrt{2}\,.\,X + h^2 + \frac{a^2}{4} = 0,$$

qui donne, en résolvant,

$$\left.\begin{matrix} b \\ c \end{matrix}\right\} = \frac{a\sqrt{2} \pm \sqrt{a^2 - 4h^2}}{2}.$$

Ces valeurs sont réelles lorsque $a \geqslant 2h$; elles sont d'ailleurs positives et applicables aux côtés d'un triangle, la double condition

$$b - c < a < b + c$$

ou

$$\sqrt{a^2 - 4h^2} < a < a\sqrt{2},$$

étant toujours remplie.

(G. FOUCRY, *école normale de Châlons-sur-Marne.*)

[Ont résolu la même question : MM. L. Bannerot; M. Bégué; A. Bernardeau; E. Barbé; L. Bordron; I. Bourrec; R. Cattin; L. Décaudin; M. Delage; Duiltoz; E. Durand; G. de France; G., à Ajaccio; R. Grenouillot; J. Guéret; H. Guillaud; M. Guyot; R. Henry; E. Hugonnier; A. Larroque; M. Laurence; A. Lecoutour; M. Marx; J. Maury; F. Mestre; A. Meynier; T. Millet; D. Montel; L. Ollié; F. Pégorier; M. Petit; Poujol; L. Richard; R. Rives; Samson; G. Serres-Tastet; G. Seurat; V. Thébault; P. Thonet; J. Trouillé; P. Valentin; C. Vallot.]

4943. — *Étant donné un carré* ABCD, *du sommet* A *comme centre on décrit un arc de cercle tangent à la diagonale* BD, *qui coupe en* E *et* F *les côtés* AB *et* AD ; *des points* E *et* F *on abaisse les perpendiculaires sur la diagonale* BD ; *soient* G *et* H *leurs intersections avec* BC *et* CD. *On considère la figure ombrée* EGHFOE ; a *étant le côté du carré :*

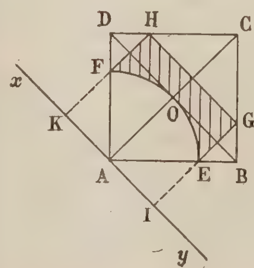
1° *Trouver les expressions de l'aire* S *et du volume* V *du solide engendré par la figure ombrée en tournant autour de la parallèle* xy *menée par* A *à la diagonale* BD ;

2° *Calculer par logarithmes le côté* a, *sachant que l'aire du cercle de rayon* AE *vaut* 0mq,543072 ; *mettre tous les calculs.*

(*École des Beaux-Arts, 1900, section d'Architecture.*)

1° On a

$$S = \text{Surf. HG} + 2\,\text{Surf. GE} + \text{Surf. EOF}.$$



Or $\quad$ Surf. cyl. HG $= 2\pi GI.IK$,

2 Surf. cour. GE $= 2\pi(\overline{GI}^2 - \overline{EI}^2)$,

Zone EOF $= 2\pi AE.IK$.

Par suite

$$S = 2\pi(GI.IK + \overline{GI}^2 - \overline{EI}^2 + AE.IK).$$

Calculons GI, IK, EI et AE en fonction de a.

On a d'abord

$$AE = AO = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

puis en considérant le triangle rectangle isocèle AEI,

$$EI = \frac{AE}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2},$$

$$IK = 2AI = 2EI = a;$$

d'ailleurs

$$GI = GE + EI = EB\sqrt{2} + \frac{a}{2}$$

ou, comme $EB = a - AE = a - \frac{a\sqrt{2}}{2}$,

$$GI = \frac{a}{2}(2\sqrt{2} - 1).$$

En remplaçant dans S, il vient

$$S = 2\pi\left[\frac{a^2}{2}(2\sqrt{2} - 1) + \frac{a^2}{4}(2\sqrt{2} - 1)^2 - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2\sqrt{2}}{2}\right]$$
$$= \pi a^2(2\sqrt{2} - 1 + 4 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2}) = \pi a^2(3 + \sqrt{2}).$$

On peut considérer le volume V comme la différence entre le volume du cylindre engendré par le rectangle GHKI et le segment sphérique à deux bases engendré par le segment circulaire IEOFK ; son expression est donc

$$V = \pi\overline{GI}^2.IK - \left(\frac{1}{6}\pi\overline{IK}^3 + \pi\overline{IE}^2.IK\right)$$
$$= \pi\frac{a^3}{4}(2\sqrt{2} - 1)^2 - \frac{1}{6}\pi a^3 - \pi\frac{a^3}{4}$$
$$= \pi a^3\left(\frac{9}{4} - \sqrt{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right)$$
$$= \pi a^3\left(2 - \frac{1}{6} - \sqrt{2}\right) = \frac{\pi a^3}{6}(11 - 6\sqrt{2}).$$

2° On doit avoir

$$\pi\overline{AE}^2 = \frac{\pi a^2}{2} = 0^{mq},543072,$$

d'où
$$a = \sqrt{\frac{1,086144}{\pi}}.$$

Le calcul de a par logarithmes donne

$$\log a = \frac{1}{2}(\log 1,086144 - \log 3,1416)$$
$$= \frac{1}{2}(0,03589 - 0,49715) = \bar{1},76937.$$

d'où
$$a = 0^m,5879.$$

(A. MEYNIER, à Thonon.)

[Ont résolu la même question : MM. H. Dobryzniak ; L. David ; R. Grenouillot ; R. Henry ; A. Larcher ; L. Lefèvre ; P. Luquet ; M. Marx ; E. Roncin ; J. Trouillé.]

4948. — *Construire un triangle* ABC *connaissant b, c, et sachant que la hauteur qui part de* A *est égale au côté a.*

Première solution. — Prenons une droite $AC = b$; si H est le pied de la hauteur issue de A, le lieu de ce point est la demi-circonférence décrite sur AC comme diamètre. Mais en remarquant que l'on doit avoir $CB = AH$, on voit qu'un premier lieu du sommet B est une circonférence de cercle dont le diamètre $CC' = b$ est perpendiculaire sur AC (car les triangles ACH, CBC' ont $AC = CC'$, $AH = CB$, $\widehat{CAH} = \widehat{C'CB}$).

Le point B sera donc l'intersection de cette circonférence O avec l'arc de cercle décrit de A comme centre avec un rayon égal à c.

Discussion. — Tirons AO qui coupe la circonférence O suivant le diamètre DOD'. Pour que la construction soit possible, il faut et il suffit que l'arc de cercle décrit de A comme centre avec un rayon égal à c coupe la circonférence O, c'est-à-dire que

$$AD \leqslant c \leqslant AD'.$$

Mais on a $AD \times AD' = \overline{AC}^2 = b^2$ et $AD' - AD = b$.

On en tire, en formant et résolvant l'équation du second degré dont AD et AD' sont les racines, ou encore en remarquant que AD et AD' sont les deux segments soustractifs d'une droite b divisée en moyenne et extrême raison,

$$AD = \frac{b}{2}(\sqrt{5} - 1) \qquad \text{et} \qquad AD' = \frac{b}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

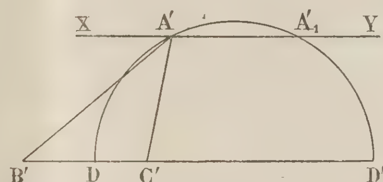
La condition de possibilité du problème est donc

$$\frac{b}{2}(\sqrt{5} - 1) \leqslant c \leqslant \frac{b}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

Lorsqu'elle est vérifiée, le problème a deux solutions différentes ; elles sont égales et confondues en une seule lorsqu'on a

$$c = \frac{b}{2}(\sqrt{5} - 1) \quad \text{ou} \quad c = \frac{b}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

Deuxième solution. — On peut construire un triangle A'B'C' semblable au triangle cherché ; pour cela, prenons pour homologue de CB une longueur arbitraire C'B'. Un premier lieu du point A' est la parallèle XY menée à B'C' à une distance égale à B'C'. Soient maintenant, sur B'C' et sur son prolongement, les deux points D et D', tels que



$$\frac{DB'}{DC'} = \frac{D'B'}{D'C'} = \frac{c}{b}.$$

Un deuxième lieu du sommet A' sera donc la demi-circonférence de diamètre DD' ; l'intersection de cette circonférence avec XY est le sommet A' cherché. La construction lorsqu'elle est possible donne deux solutions.

Discussion. — Le triangle A'B'C' étant semblable au triangle cherché ABC, le résultat de la discussion ne sera pas changé si nous supposons $B'C' = a$ et, par suite, $A'B' = c$ et $A'C' = b$.

On doit avoir $\frac{DD'}{2} \geqslant a$.

Or en supposant $c > b$, il vient

$$DD' = C'D + C'D' = \frac{ab}{b + c} + \frac{ac}{c - b} = \frac{2abc}{c^2 - b^2}.$$

La condition de possibilité est donc

$$\frac{abc}{c^2 - b^2} \geqslant 2a \qquad \text{ou} \qquad c^2 - bc - b^2 \leqslant 0$$

ou, puisque c doit être positif,

$$c \leqslant \frac{b}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

Si nous avions supposé $b > c$, nous aurions

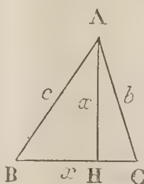
$$b \leqslant \frac{c}{2}(\sqrt{5} + 1) \qquad \text{ou} \qquad c \geqslant \frac{b}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

La condition de possibilité est donc comme précédemment

$$\frac{b}{2}(\sqrt{5} - 1) \leqslant c \leqslant \frac{b}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

(E. HUGONNIER, école professionnelle de Voiron.)

Solution algébrique. — Posons $BC = x$. Par hypothèse la hauteur AH doit être égale à x. On a donc



$$\overline{BH}^2 + x^2 = c^2, \qquad (1)$$
$$b^2 = c^2 + x^2 - 2x.BH. \qquad (2)$$

En portant dans (1) la valeur de BH tirée de (2), il vient

$$\left(\frac{x^2 + c^2 - b^2}{2x}\right)^2 + x^2 = c^2$$

ou

$$5x^4 - 2(b^2 + c^2)x^2 + (b^2 - c^2)^2 = 0.$$

Pour qu'une valeur de x^2 convienne, il faut et il suffit qu'elle soit réelle et comprise entre $(b - c)^2$ et $(b + c)^2$.

La condition de réalité est
$$(b^2+c^2)^2 - 5(b^2-c^2)^2 \geqslant 0$$
ou
$$b^4 - 3b^2c^2 + c^4 \leqslant 0.$$
Cette inégalité est vérifiée pour toutes les valeurs de b^2 comprises entre celles qui annulent son premier membre. On doit ainsi avoir
$$\frac{c^2}{2}(3-\sqrt{5}) \leqslant b^2 \leqslant \frac{c^2}{2}(3+\sqrt{5})$$
ou, en remarquant que $3 \pm \sqrt{5} = \dfrac{(\sqrt{5}\pm 1)^2}{2}$,
$$\frac{c}{2}(\sqrt{5}-1) \leqslant b \leqslant \frac{c}{2}(\sqrt{5}+1). \qquad (3)$$
Si l'on remplace successivement dans le premier membre de l'équation x par $(b-c)$ et $(b+c)$, on trouve
$$5(b-c)^4 - 2(b^2+c^2)(b-c)^2 + (b^2-c^2)^2 = 4(b-c)^4,$$
$$5(b+c)^4 - 2(b^2+c^2)(b+c)^2 + (b^2-c^2)^2 = 4(b+c)^4.$$
Ces résultats étant tous deux positifs ou du signe du terme en x^4, les deux valeurs de x^2 seront comprises entre $(b-c)^2$ et $(b+c)^2$ en même temps que leur demi-somme, c'est-à-dire si on a
$$(b-c)^2 < \frac{b^2+c^2}{5} < (b+c)^2.$$
La seconde inégalité est évidente ; la première revient à
$$4b^2 - 10bc + 4c^2 < 0$$
ou
$$4(b-2c)\left(b-\frac{c}{4}\right) < 0$$
ou
$$\frac{c}{4} < b < 2c,$$
inégalités qui rentrent dans les inégalités (3).

Le problème admet ainsi deux solutions pourvu que les inégalités (3) soient remplies.

Solution trigonométrique. — Pour calculer l'angle A, on a
$$bc \sin A = BC.\ AH = \overline{BC}^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
ou
$$bc \sin A + 2bc \cos A = b^2 + c^2.$$
On est ainsi ramené à résoudre une équation de la forme $m \sin x + n \cos x = p$. Pour cela, on pose $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{n}{m} = 2$, et l'équation s'écrit
$$bc\,\frac{\sin(A+\varphi)}{\cos\varphi} = b^2 + c^2,$$
d'où, en observant que $\cos \varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$,
$$\sin(A+\varphi) = \frac{b^2+c^2}{bc\sqrt{5}}.$$
Pour que cette valeur s'applique au sinus d'un arc réel α, il faut et il suffit qu'on ait
$$\sin(A+\varphi) \leqslant 1$$
ou
$$\frac{b^2+c^2}{bc\sqrt{5}} \leqslant 1,$$
ce qui revient à $b^2 + c^2 - bc\sqrt{5} \leqslant 0$

ou
$$\frac{c}{2}(\sqrt{5}-1) \leqslant b \leqslant \frac{c}{2}(\sqrt{5}+1).$$
Ces conditions remplies, on peut écrire
$$\sin(A+\varphi) = \sin\alpha\,;$$
on en déduit
$$A+\varphi = \alpha, \quad \text{d'où} \quad A = \alpha - \varphi$$
et
$$A+\varphi = \pi - \alpha, \quad \text{d'où} \quad A = \pi - \varphi - \alpha.$$
Ces deux solutions sont toujours acceptables ; en effet α est toujours compris entre les arcs supplémentaires φ et $\pi - \varphi$, car cette condition revient à poser
$$\sin\alpha > \sin\varphi$$
ou
$$\frac{b^2+c^2}{bc\sqrt{5}} > \frac{2}{\sqrt{5}}$$
ou
$$(b-c)^2 > 0,$$
inégalité évidente.

(L. COLOMBEY, école normale de Nancy.)

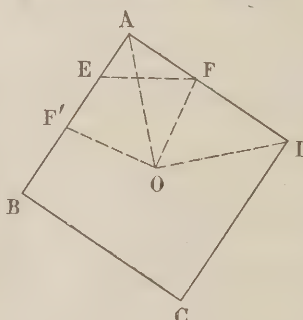
Remarque. — Si on pose $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} = x$, l'équation qui donne A conduit à la suivante :
$$(b+c)^2x^2 - 2bcx + (b-c)^2 = 0.$$
Pour qu'on ait une solution, il faut et il suffit qu'on trouve $0 < A < 90°$, c'est-à-dire $0 < \operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$. Le problème a donc autant de solutions que l'équation en x a de racines positives ; si les racines sont réelles, elles sont évidemment positives, et la condition de réalité s'exprime par l'inégalité
$$b^2c^2 - (b^2-c^2)^2 \geqslant 0$$
ou
$$b^4 - 3b^2c^2 + c^4 \leqslant 0,$$
condition déjà trouvée dans la solution algébrique.

[Ont résolu cette question : Mlle A. Saleilles; MM. F. Arnulf ; L. Barberot ; H. Belbenoit; A. Bernardeau; Beltçaguy ; C. Bourvéau; R. Cattin ; J. Dubar ; E. Durand; G. Foucry ; J. Franceschini; E. Gernez-Pfanmatter ; G. Grünfelder ; J. Guéret ; D. Koenig ; A. Larcher ; M. Laurence ; A. Lecoutour ; P. Legay ; Lemmet ; H. Martin ; F. Mestre ; A. Meynier ; Portalier ; C. Quantin ; E. Roncin ; J. Roux ; P. Thonet ; J. Trouillé.]

4949. — *Construire un carré connaissant son centre et deux points pris sur deux côtés consécutifs.*

Première solution. — Supposons le problème résolu : soit ABCD un carré dont on connaît le centre O et les points E, F des côtés consécutifs AB, AD.

Tirons les droites OA, OF, OD et élevons sur OF une perpendiculaire OF′ limitée au côté AB. Les triangles OAF′, ODF ayant les côtés OA, OD égaux, ainsi que les angles $\widehat{A} = 45° = \widehat{D}$ et $\widehat{AOF'} = \widehat{DOF}$ (côtés perpendiculaires), sont égaux. Donc $OF' = OF$, ce qui conduit à la construction suivante :



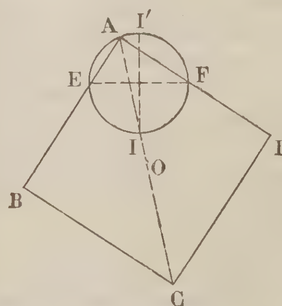
Sur une perpendiculaire à OF on prend le point F′ tel que $OF' = OF$; on mène la droite EF′ sur laquelle on abaisse la perpendiculaire FA. Le carré est alors complètement déterminé par son centre O et le sommet A.

Si l'on porte la longueur OF′ en sens contraire, on en déduit un second sommet A fournissant une seconde solution.

Lorsque E coïncide avec F′, la droite EF′ devient indéterminée, ainsi que la projection A de F sur cette droite ; il existe alors une infinité de solutions du problème.

(A. MEYNIER, à Thonon.)

Seconde solution. — L'angle EAF étant droit, le sommet A appartient à la circonférence de diamètre EF ; d'ailleurs la droite AO, bissectrice de cet angle, coupe cette circonférence en un second point I, milieu du demi-cercle EF.



Le sommet A est ainsi à l'intersection de la circonférence de diamètre EF avec la droite joignant le point O au milieu I du demi-cercle EF. En considérant la droite qui joint O au milieu I′ du demi-cercle EAF, on obtient un second point A correspondant à une seconde solution.

Lorsque le point O se confond avec I, la droite OI devient indéterminée, et le sommet A peut être pris en un point quelconque du cercle EF ; quant au carré fourni par I', il se réduit ici au centre O. Dans le cas particulier que nous venons d'examiner, on a OE = OF, ce qui montre que ce cas ne diffère pas au fond de celui de la première solution.

(CONSTANT PERROQUIN, lycée de Cherbourg.)

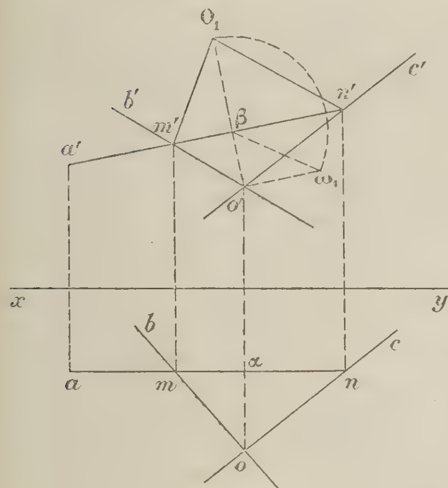
[Ont résolu cette question : Mlle A. Madonne; MM. L. Bannerot; L. Barberot; H. Belbenoit; Beltçaguy; A. Bernardeau; P. Bonnet; A. Bottin; C. Bourion; R. Cattin; Durand; G. Foucry; J. Franceschini; Garin; F. Gérard; J. Guéret; M. Guyot; J. Hébré; V. Herzenberg; E. Hiernaux; E. Hugonnier; P. Jouaire; E. Kissel; R. Larrieu; R. Lautré; A. Lecoutour; P. Legay; G. Lepoivre; C. Mercent; E. Milhaud; L. Painvin; F. Pégorier; E. Périnet J. Permann; R. Petit; M. Petitjean; Portarlier; A. Rousseau; M. Sondag; A. Sottoé; J. Tastet; Vautrey.]

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

4950. — *On donne, en géométrie descriptive, les projections de deux droites issues d'un même point O. Ces deux droites déterminent un plan P, dans lequel se trouve un point A dont on donne la projection horizontale. Trouver sa projection verticale et construire, en vraie grandeur, le triangle dont deux côtés sont dirigés suivant les deux droites données, et dont le troisième est dirigé suivant la droite de front menée du point A dans le plan P.*

(*Bacc. lettres-sciences, Aix, juillet 1900.*)

Soient (ob, ob') et (oc, oc') les deux droites qui déterminent le plan P et a la projection horizontale du point A.



La projection verticale a' de A s'obtient en menant par A une droite quelconque située dans le plan P, par exemple la droite de front $(amn, a'm'n')$.

Le triangle MON n'étant autre chose que le triangle considéré dans l'énoncé, on obtiendra sa vraie grandeur en rabattant ce triangle sur le plan de front passant par le côté MN ; pour cela, il suffit, d'après la construction connue, de mener par o' une parallèle à $m'n'$ sur laquelle on prend $o'\omega_1 = o\alpha$, puis de rabattre $\beta\omega_1$ en βO_1 sur la perpendiculaire $o'\beta$ à $m'n'$. Le triangle $O_1m'n'$ représente la vraie grandeur du triangle de l'espace OMN.

(P. SAINTIN, à Versailles.)

[Ont résolu cette question : MM. E. Barbé; Beckerich; Beltçaguy; A. Bernardeau; P. Bonnet; Bourdeaux; C. Chessin; V. Chosson; L. David; Desmoulins; G. Desnoës; J. Dubar; E. Durand; G. Foucry; Garin; F. Gérard; E. Gernez-Pfanmatter; F. Grenier; J. Guéret; P. Guerrier; O. Guittet; M. Guyot; P. Hamon; J. Hébré; E. Hiernaux; E. Hugonnier; E. Kissel; L. Lambert; A. Lapresle; L. Lefèvre; P. Legay; L. Lemmet; G. Lepoivre; M. Matheron; P. Mayet; M. Moreau; H. Palustran; H. Pourtoy; J. Raymond; E. Robert; A. Scottoé; J. Trouillé; P. Valentin; G. Ybert.]

PHYSIQUE

4941. — *Un corps pesant* 50gr *tombe sous l'action de la pesanteur d'une certaine hauteur avec une vitesse initiale de* 200m *par seconde. La force vive acquise au bas de la chute étant égale à* 1550joules,675, *trouver cette hauteur en mètres, sachant que l'accélération au lieu considéré est* $g = 9^m,81$.

(*Bacc. lettres-sciences, Rennes, juillet 1900.*)

Soient m la masse du corps, F la force vive et v la vitesse acquise par le corps au bas de la chute. On a

$$F = \frac{1}{2} mv^2. \qquad (1)$$

Les équations du mouvement uniformément accéléré sont

$$v = v_0 + gt$$

et

$$e = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2,$$

v_0 désignant la vitesse initiale, e la hauteur de chute et t la durée de la chute. Éliminant le temps entre ces deux équations, il vient

$$v^2 = v_0^2 + 2ge.$$

Remplaçons v^2 par cette valeur dans l'équation (1), on a

$$F = \frac{1}{2} m(v_0^2 + 2ge),$$

d'où

$$e = \frac{2F - mv_0^2}{2mg}.$$

Application. — On sait qu'un joule vaut 10^7 ergs ; donc

$$F = 1550,675 \times 10^7 ;$$

d'un autre côté, $m = 50$, $v_0 = 20000^{cm}$, $g = 981$.

On a donc

$$e = \frac{2 \times 1550,675 \times 10^7 - 50 \times 20000^2}{2 \times 50 \times 981} = 112268^{cm}.$$

La hauteur de chute exprimée en mètres est

$$1122^m,68.$$

(L. BARBEROT.)

[Ont résolu la même question : Mlle Saleilles ; MM. Belbenoit ; David ; Desnoës ; Devaux ; Durand ; P. F. ; P. Guerrier ; Kistel ; James ; J. Lestalle; Martin ; Maury ; Michaud ; Raymond ; Roncin ; Trouillé ; Ybert.]

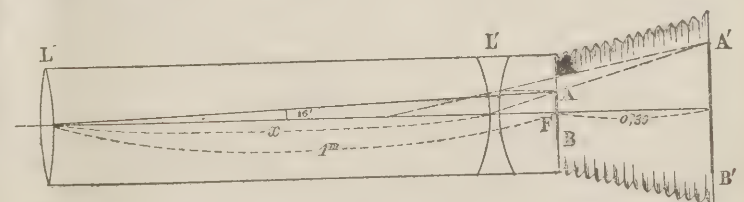
4942. — *Pour photographier le soleil on dispose d'une lunette astronomique dont l'objectif a* 1m *de distance focale. On enlève l'oculaire et on met dans le plan focal de l'objectif un verre dépoli. Quel est le diamètre de l'image du soleil ? — L'observateur la trouvant trop petite veut la grossir* 10 *fois en disposant :* 1° *à l'intérieur du tube de la lunette une lentille divergente ;* 2° *une chambre noire photographique à la place de l'oculaire, allongeant ainsi l'instrument. La nouvelle distance du verre dépoli à l'objectif est de* 1m,30. *Quelles doivent être la position et la distance focale de la lentille divergente pour que l'image soit au point sur le fond de la chambre noire ?*

Le diamètre apparent du soleil est de 32 *minutes.*

(*Bacc. lettres-math., Besançon, juillet 1900.*)

1° Avant l'interposition de la lentille divergente L', l'image du soleil se forme sur le verre dépoli.

Deux points diamétralement opposés du soleil envoient sur la



lentille L des rayons passant par son centre optique, et en admettant que l'axe optique de L, indéfiniment prolongé, passe par le centre du soleil, cet axe fait avec chacun de ces rayons un

angle de 16. Appelons d le diamètre de l'image AB du soleil ; on a

$$\frac{d}{2} = 100 \operatorname{tg} 16',$$

$$\log \frac{d}{2} = \log 100 + \log \operatorname{tg} 16',$$

d'où $$d = 0^{cm},9308.$$

2° Par suite de l'interposition de L', l'image AB ne se forme pas, mais joue par rapport à L' le rôle d'objet virtuel. Il en résulte une image réelle et agrandie A'B' ; cette image se formera sur le verre dépoli et sera 10 fois plus grande que AB.

On a $$\frac{s'}{s} = \frac{p'^2}{p^2},$$

d'où $$\sqrt{\frac{i}{o}} = \sqrt{10} = \frac{p'}{p} = \frac{130 - x}{100 - x},$$

d'où $$x = 86^{cm},12.$$

D'un autre côté, la formule des lentilles donne

$$-\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = -\frac{1}{f},$$

f désignant la distance focale de L'. Remplaçant p et p' par leur valeur, il vient $f = 20^{cm},30$.

(L. DAVID, lycée de Saint-Etienne.)

[Ont résolu la même question : MM. Bernardeau; Cattin; Durand; Gernez; Guyot; Henry; Marx; Meynier; Thonet; Ybert.]

CONCOURS DE 1900 *(Suite.)*

SECTION NORMALE ANNEXÉE A L'ÉCOLE NATIONALE D'ARTS ET MÉTIERS DE CHALONS

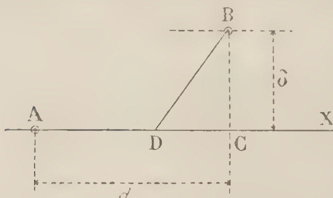
Composition d'Arithmétique ou d'Algèbre.

Résolution et discussion complète d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

(Durée : 2 heures.)

Problèmes d'Arithmétique et d'Algèbre.

I. — **4962**. Un marchand a acheté les 7/8 d'une pièce de drap à raison de 56fr,50 le mètre ; il cède les 0,9 de son achat à un de ses confrères qui lui donne en paiement un billet de 3 600fr payable dans un an, 4 mois et 20 jours. En escomptant ce billet à 3 600 chez un banquier, le marchand rentre dans ses déboursés et gagne 136fr sur son dernier marché, outre le drap qui lui reste. Trouver le nombre de mètres de la pièce de drap.



II. — **4963**. Un chemin de fer AX part d'une ville A et passe à une distance δ d'une autre ville B. En quel point D de AX faut-il établir une gare pour qu'en la reliant à la localité B par une route, le temps employé pour aller de A en B soit un minimum ? On connaît la distance $AC = d$, ainsi que la vitesse v du train et celle du parcours de la route BD.

(Durée : 2 heures.)

Composition de Géométrie.

. — Établir à l'aide du théorème des projections les formules donnant le sinus, le cosinus et la tangente de la somme algébrique de deux arcs.

II. — **4964**. Démontrer que $\frac{\pi}{4} = \text{arc cotg } 7 + 2 \text{ arc cotg } 3$.

(Durée : 2 heures.)

Problèmes de Géométrie.

I. — Étant donnés une circonférence et deux points A et B, sur un même diamètre, on joint respectivement à ces points les extrémités d'un diamètre mobile PQ. Les droites PA, QB, ainsi obtenues se coupent en un point M. On demande de trouver le lieu géométrique décrit par le point M quand on fait mouvoir le diamètre PQ.

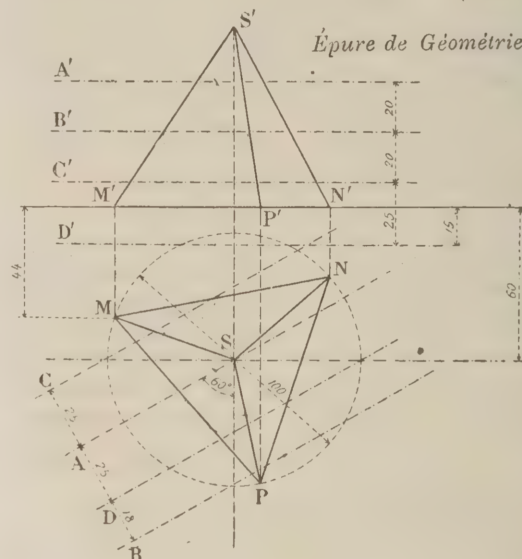
II. — **4965**. Étant donnée une sphère de rayon R, on construit sur un grand cercle comme base un cône droit équivalent à la moitié du volume de la sphère. On demande :

1° de trouver le rayon du petit cercle d'intersection ;

2° d'évaluer le volume de la portion du cône comprise entre la base et le plan du petit cercle.

(Durée : 2 heures.)

Épure de Géométrie descriptive.



4966. — Un tétraèdre régulier SMNP et un prisme horizontal dont les arêtes se projettent respectivement en A et A', B et B', C et C', D et D' sont dessinés sur la figure ci-contre. On demande de représenter le tétraèdre entaillé par le prisme.

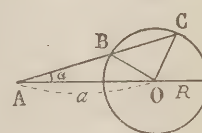
QUESTIONS PROPOSÉES

4967. — Soient A, B, C trois nombres entiers composés :
A, de $2m$ chiffres égaux à 1 ;
B, de $m+1$ chiffres égaux à 1 ;
C, de m chiffres égaux à 6.

Démontrer que $A + B + C + 8$ est un carré parfait.

(Lúis de ALBA, à Malaga.)

4968. — Par un point A dans le plan d'une circonférence de centre O et de rayon R, on mène une sécante ABC qui coupe la circonférence aux points B et C et fait avec AO un angle α. Considérant alors le triangle BOC, on demande :



1° l'expression de son aire en fonction de a, de R et de α ;

2° la valeur de α pour laquelle cette aire est maxima ;

3° la valeur correspondante de l'angle BOC ;

4° la construction géométrique qui en résulte pour la sécante.

(Bacc. lettres-math., Rennes, juillet 1900.)

4969. — On suppose que par trois points A, B, C on fait passer une corde sonore parfaitement flexible et également tendue sur toute sa longueur. Déterminer la forme de ce triangle de telle sorte que les trois côtés, quand on les fait vibrer, produisent l'accord parfait majeur.

(On se bornera à donner les valeurs des cosinus des trois angles, sous la forme de fractions ordinaires irréductibles.)

(Bacc. lettres-sciences, Montpellier, juillet 1900.)

4970. — Sur la face AB d'un prisme ABC d'angle x on fait tomber un rayon lumineux sous l'angle i. Si n désigne l'indice de réfraction du prisme par rapport à l'air, quelle est la valeur qu'il faut donner à l'angle x pour que le rayon sortant du prisme soit normal à la face AB

Cas particulier où $i = \frac{\pi}{6}$ et $n = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Bacc. lettres-math., Bordeaux, juillet 1900.)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le Duc. — Imp. Comte-Jacquet, FACDOUEL, Dir.

25e Année. — N° 10 JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 15 Février 1901

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Abonnements.. Librairie **Nony** et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

(Concours de 1900.)

4826. — *Un particulier achète un terrain à bâtir et un champ contigu, qui ont ensemble une superficie de 1 hectare 56 ares. Le terrain à bâtir coûte 4 800fr et le champ 3 500fr, et le prix d'un mètre carré du terrain surpasse de 2fr,75 le prix d'un mètre carré du champ. Quels sont les prix du mètre carré du terrain et de l'hectare du champ ?*

Désignons par x le prix d'un mètre carré du terrain. Ce terrain valant 4 800fr a pour superficie, en mètres carrés,

$$\frac{4\,800^{\text{fr}}}{x};$$

de même, le prix du mètre carré du champ est $x - 2{,}75$, et sa superficie,

$$\frac{3\,500}{x - 2{,}75}.$$

La superficie totale devant être de 1 hectare 56 ares ou 15 600mq, on a l'équation

$$\frac{4\,800}{x} + \frac{3\,500}{x - 2{,}75} = 15\,600$$

ou

$$39x^2 - 128x + 33 = 0,$$

d'où l'on tire

$$x' = 3, \qquad x'' = \frac{11}{39}.$$

Le prix du mètre carré du terrain valant au moins 2fr, 75, la première solution convient seule. Ainsi le mètre carré du terrain vaut 3fr, le mètre carré du champ $3 - 2{,}75 = 0^{\text{fr}},25$ et l'hectare de ce champ $0{,}25 \times 10\,000 = 2\,500^{\text{fr}}$.

Interprétation de la solution x''. — Cette solution vérifie l'équation

$$\frac{4\,800}{x''} + \frac{3\,500}{x'' - 2{,}75} = 15600,$$

ou, en mettant en évidence le signe du second terme,

$$\frac{4\,800}{x''} - \frac{3\,500}{2{,}75 - x''} = 15\,600.$$

Cette dernière équation s'applique au problème suivant :

La superficie d'un terrain surpasse de 1 hectare 56 ares celle d'un champ ; le terrain coûte 4 800fr et le champ 3 500fr, et la somme des prix du mètre carré du terrain et du champ vaut 2fr,75. Quels sont les prix du mètre carré du terrain et de l'hectare du champ ? Rép. : 0fr, 282 et 24 680fr.

(A. VANNIER, à Chaource.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Anzemberger ; E. Baudoin ; H. Belbenoit ; Bouzy ; F. Clabault ; A. Delaire ; L. Demogue ; J. Guéret ; G. Guinand ; J. Haag ; Hugonnier-Ginet ; A. Legros ; D. Lword ; R. Manen ; A. Meynier ; R. Mouzon ; Noël ; J. Pendariès , E. Roncaglia ; M. Royer ; E. Serres ; E. Szivessy ; P. Valentin ; H. Vincent ; P. Zlatco.]

4827. — *On donne deux demi-droites orthogonales AX et BY, dont $AB = 2a$ est, en position et en grandeur, la plus courte distance. On prend sur elles deux longueurs variables $AP = x$ et $BQ = y$, telles que $xy = k^2$, k^2 étant une constante donnée:*

1° *Quel est le minimum de PQ ?*

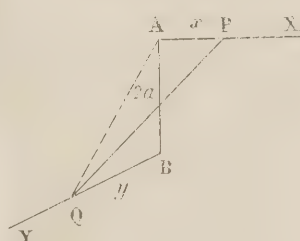
2° *Quelle valeur faut-il donner à k^2 pour que l'on ait, en outre, constamment*

$$x + y = PQ\,?$$

3° *Montrer que, lorsqu'il en est ainsi, PQ reste tangente à la sphère décrite sur AB comme diamètre.*

4° *Montrer que le lieu géométrique du point de contact de PQ et de cette sphère est la demi-circonférence de grand cercle située dans le plan bissecteur du dièdre XABY.*

1° AX étant perpendiculaire à AB et à BY, est perpendiculaire au plan ABY ; le triangle APQ est donc rectangle en A et donne $\overline{PQ}^2 = x^2 + \overline{AQ}^2 = x^2 + y^2 + 4a^2$.



Le minimum de PQ correspond à celui de la somme variable $x^2 + y^2$; cette somme étant composée de deux parties dont le produit $x^2y^2 = k^4$ est constant devient minimum lorsque $x^2 = y^2 = k^2$. On a alors

$$PQ = \sqrt{2k^2 + 4a^2}.$$

2° Pour que $x + y = PQ$, on doit avoir

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 4a^2$$

ou

$$2xy = 4a^2$$

ou

$$k^2 = 2a^2.$$

Dans ce cas, le minimum de PQ est

$$PQ = \sqrt{4a^2 + 4a^2} = 2a\sqrt{2}.$$

3° Abaissons du milieu O de AB la perpendiculaire OH sur PQ. Je dis que lorsque

$$PQ = x + y,$$

on a $OH = a$.

En effet, dans le triangle acutangle OPQ, on a

$$\overline{OQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PQ}^2 - 2PQ.\,PH$$

ou, comme

$$\overline{OQ}^2 = a^2 + y^2,$$

$$\overline{OP}^2 = a^2 + x^2$$

et $PQ = x + y$,

$$a^2 + y^2 = a^2 + x^2 + (x+y)^2 - 2(x+y)\mathrm{PH},$$

d'où
$$\mathrm{PH} = \frac{(x+y)^2 + x^2 - y^2}{2(x+y)} = x.$$

Par suite les triangles OPA, OPH ayant l'hypoténuse commune et deux côtés égaux sont égaux, et $\mathrm{OH} = \mathrm{OA} = a$, ce qui montre que PQ est tangente en H à la sphère de centre O et de rayon a.

4° Pour démontrer que H est situé dans le plan bissecteur du dièdre XABY, projetons la droite PHQ en P'H'Q sur le plan X'BY parallèle à AX.

Le rapport de deux segments de droite restant le même en projection, on peut écrire
$$\frac{\mathrm{QH'}}{\mathrm{H'P}} = \frac{\mathrm{QH}}{\mathrm{HP}}.$$

Mais, d'après ce qui précède, $\mathrm{HP} = x$ et $\mathrm{QH} = y$;

donc
$$\frac{\mathrm{QH'}}{\mathrm{H'P}} = \frac{y}{x} = \frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{BP'}}.$$

Ce dernier résultat montre que BH' est bissectrice de l'angle X'BY; comme cet angle est l'angle rectiligne du dièdre XABY, le plan ABH'H n'est autre que le plan bissecteur de ce dièdre. Le lieu de H est alors le grand cercle, intersection de la sphère de diamètre AB avec le plan bissecteur en question.

(NOËL et RAOUL MOUZON).

[Ont complètement résolu cette question : MM. E. Anzemberger ; F. Clabault ; J. Guéret ; J. Haag ; de Jarny ; R. Manen ; J. Pendariès ; P. Thonet ; H. Vincent.]

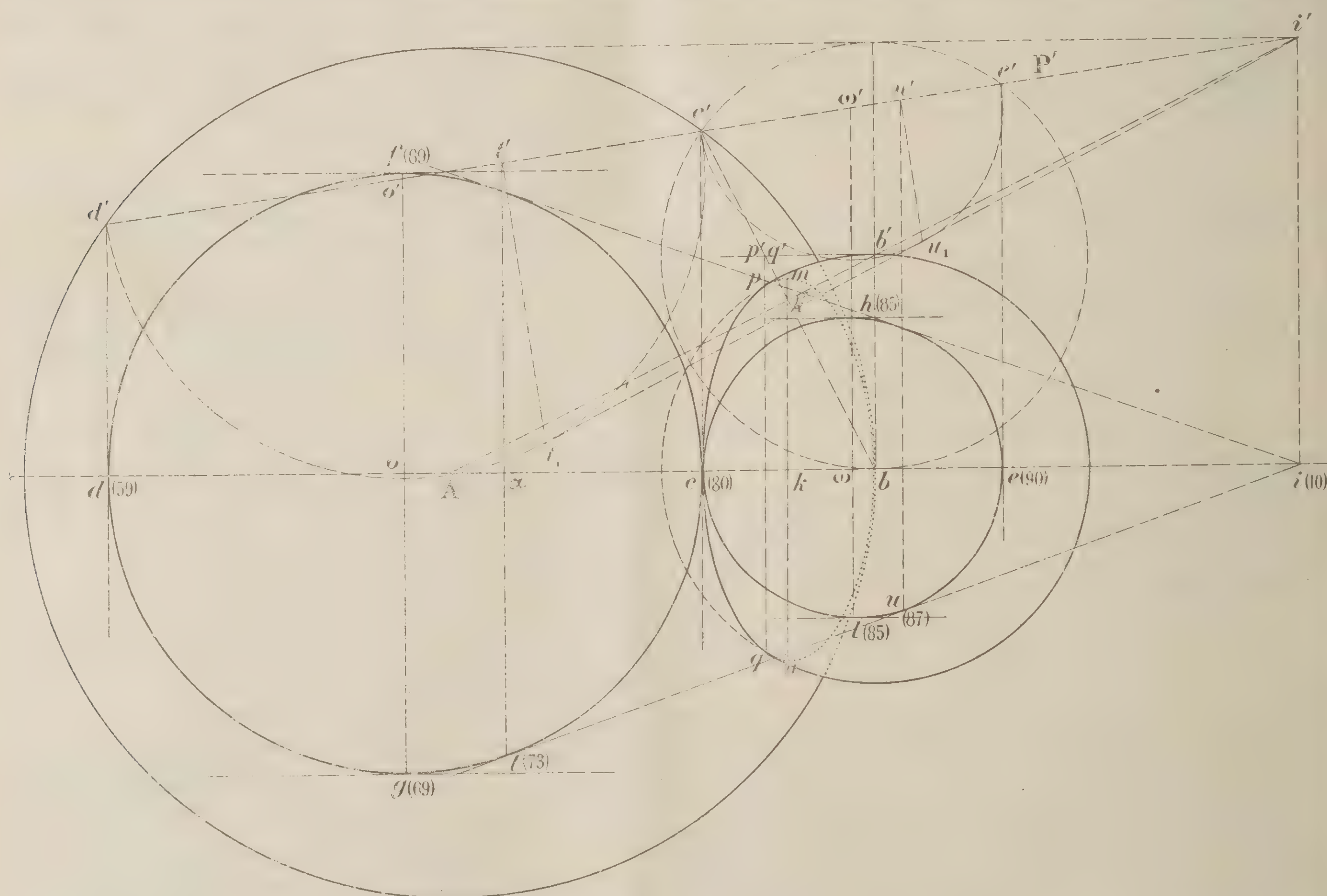
[Ont partiellement résolu cette question : MM. P. Bonnet ; E. Hugonnier-Ginet ; A. Legros ; D. Lword ; P. Valentin ; P. Zlatco.]

4828. — *Placer la feuille de manière que l'en-tête soit à droite. Sur une droite parallèle au bord inférieur de la feuille et située à 14cm de ce bord, marquer les points* A *et* b, A *à 12cm et* b *à 22cm du bord de gauche.*

A *est le centre d'une sphère de 10cm de rayon et* b *est le point de contact avec le plan de comparaison (plan de la feuille) d'une sphère de 10cm de diamètre, dont le centre est* B.

Soit I *le point où la droite* AB *perce le plan horizontal tangent à la fois à ces deux sphères, et soit* C *le point de cote maxima de l'intersection de ces mêmes sphères; soit enfin* P *le plan qui a* IC *pour ligne de plus grande pente.*

Représenter la projection horizontale de l'ensemble des portions des surfaces sphériques qui est compris entre le plan de comparaison et le plan P. *On supposera le plan* P *transparent, les surfaces sphériques opaques, et on supposera enlevée la portion de chaque surface sphérique comprise dans l'autre sphère.*



Construire les projections horizontales des tangentes menées de I *aux sections faites dans les sphères par le plan* P. *Inscrire les cotes du point* I, *des points de contact des tangentes précédentes, et des points de contact des tangentes menées aux deux sections planes : 1° parallèlement au plan horizontal ; 2° parallèlement au plan vertical contenant les centres des sphères.*

En prenant Ab comme ligne de terre, la sphère A a pour projection verticale le cercle A de 10cm de rayon, et, la sphère B, le cercle b' de 10cm de diamètre et tangent en b à Ab.

La corde bc', commune aux cercles A et b', est la projection

verticale du cercle d'intersection des deux sphères; la projection horizontale est une ellipse admettant bc pour petit axe et la perpendiculaire $mn = bc'$ au milieu k de bc pour grand axe.

La droite Ab' rencontre en i' la tangente commune aux cercles A et b'; le plan P est donc le plan de bout dont la trace verticale P' est la droite $i'c'$. Ce plan P coupe les deux sphères A et B suivant deux cercles projetés verticalement suivant les cordes $c'd'$ et $c'e'$; horizontalement ces cercles ont pour projections deux ellipses admettant respectivement pour petit et grand axe : la première cd et fg, la seconde ce et hl.

Pour obtenir directement les points de contact des tangentes menées de I aux deux sections planes, rabattons le plan sécant autour de sa trace verticale P' sur le plan vertical; les cercles d'intersection avec les deux sphères ont pour rabattement les cercles de diamètres $c'd'$ et $c'e'$; la tangente commune $i'u_1t_1$ à ces cercles est le rabattement d'une des tangentes cherchées, iut, obtenue en prenant sur la ligne de rappel de t', $\alpha t = t't_1$.

Les tangentes aux deux sections parallèles au plan horizontal ont évidemment pour projections horizontales les droites cc', dd', ee'; les tangentes parallèles au plan vertical contenant les centres A et B des sphères ont pour projections les tangentes en f, g, h, l aux deux ellipses o et ω, ces tangentes étant parallèles à la trace Ab du plan vertical considéré.

On obtient immédiatement les cotes du point I et des points de contact projetés en c, d, e, f, g, h, l au moyen des projections verticales de ces points situées sur la droite $i'c'$.

(David LWÓW, à Piatra N.)

NOTE SUR LA PARABOLE

par M. **V. Hioux**.

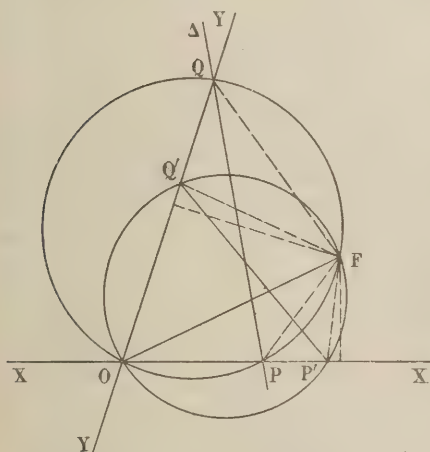
I. Théorème. — Si une droite mobile Δ intercepte sur les côtés d'un angle YOX deux segments $OP = p$, $OQ = q$, liés par la relation $ap + bq = l^2$, a, b et l désignant trois longueurs données, la droite Δ enveloppe une parabole.

Démonstration. — Nous démontrerons d'abord que tous les cercles OPQ passent par un second point fixe F. Pour cela, à une position initiale PQ de Δ, adjoignons une autre position P'Q'; nous aurons séparément

$$ap + bq = l^2 \quad (1)$$

et

$$ap' + bq' = l^2 ; \quad (2)$$



d'où, par soustraction,

$$a(p-p') + b(q-q') = 0.$$

Mais pour $p' > p$, on a nécessairement

$$q' < q,$$

si les quatre segments interceptés sont positifs. Or $PP' = p' - p$ et $Q'Q = q - q'$. On a donc $-a.PP' + b.Q'Q = 0$, d'où la relation remarquable :

$$\frac{PP'}{Q'Q} = \frac{b}{a}. \quad (3)$$

Cela posé, soit F le second point commun aux deux cercles OPQ et OP'Q'. On peut reconnaître que les triangles FPP' et FQ'Q sont semblables en remarquant que :

1° $\widehat{FPQ}$ est supplément de son adjacent $\widehat{FPP'}$ et de $\widehat{FQQ'}$, angle opposé du quadrilatère inscriptible PFOQ ; donc $\widehat{FPP'} = \widehat{FQQ'}$;

2° de même $\widehat{FQ'Q} = \widehat{FP'P}$.

Le rapport des hauteurs menées de F est par suite égal au rapport des bases PP' et Q'Q, c'est-à-dire égal à $\frac{b}{a}$. Ainsi :

Le point F est situé sur la droite lieu des points dont les distances à OX et OY sont dans le rapport $\frac{b}{a}$.

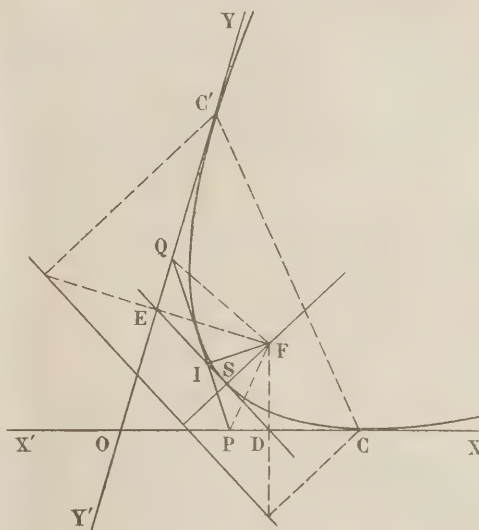
Cette droite passe en O et, si on désigne par F son second point de rencontre avec le cercle initial OPQ, tous les cercles OP'Q' passeront forcément par ce point F, puisque dans l'angle YOX il n'y a sur la circonférence OPQ qu'un seul point différent de O dont les distances à OX et à OY soient dans le rapport $\frac{b}{a}$. Donc :

1° Les cercles OPQ passent par un second point fixe F situé dans l'angle YOX.

Pour achever la démonstration, menons du point F les perpendiculaires FD, FE et FI sur les côtés du triangle OPQ.

Le point F se trouvera sur la circonférence circonscrite au triangle OPQ; on sait que ces trois points sont sur la droite fixe DE déterminée par D et E.

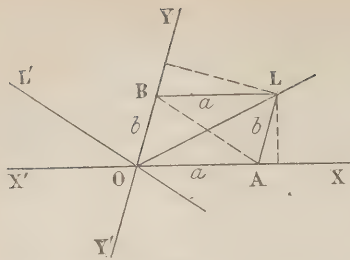
Le pied mobile I est donc le sommet d'un angle droit dont un côté FI passe par un point fixe, et, comme le point I décrit une droite, l'autre côté de l'angle enveloppe une parabole qui a pour foyer le point F et pour tangente au sommet la droite DE. Donc :



2° La droite mobile Δ enveloppe une parabole. C. q. f. d.

Remarque I. — Les droites OY et OX sont deux positions de Δ qui correspondent à $p = 0$ et à $q = 0$; donc la parabole est tangente à OX et à OY. En désignant par C et C' les points de contact l'un sur OX, l'autre sur OY, on a, pour $q = 0$, $OC = \frac{l^2}{a}$, et, pour $p = 0$, $OC' = \frac{l^2}{b}$. La droite CC' ou corde de contact, rapportée aux axes OX et OY aurait pour équation $ax + by = l^2$, qui se déduit de la relation $ap + bq = l^2$ en y remplaçant p et q par x et y.

Remarque II. — Si on fait varier la longueur l seulement, le foyer F décrit la droite lieu des points dont les distances à OX et OY sont dans le rapport $\frac{b}{a}$; cette droite est la diagonale OL



d'un parallélogramme OALB de côtés $OA = a$ et $OB = b$, car les distances du sommet L à OX et OY sont dans le rapport $\frac{b}{a}$.

Lorsque Δ touche la parabole entre C et C', les segments désignés par OP et OQ sont positifs ; mais l'un d'eux devient négatif quand Δ touche la parabole soit au delà de C, soit au delà de C'.

Remarque III. — A la relation donnée substituons $ap - bq = l^2$, ou bien $bq - ap = l^2$.

Dans le premier cas, on démontre facilement que le foyer F se place dans l'angle Y'OX, un des deux suppléments de $\widehat{YOX}$, sur la droite OL' conjuguée harmonique de OL par rapport à OX et à OY. La parabole est inscrite dans l'angle Y'OX. Dans le second cas, le foyer F se trouve dans l'angle YOX', sur la même droite OL' conjuguée de OL, et la parabole est inscrite dans l'angle YOX'.

Nota. — Connaissant le foyer d'une parabole et la tangente au sommet on peut, sans tracer la courbe, lui mener une tangente passant par un point, ou parallèle à une droite donnée. On pourra, par conséquent, en tenant compte du théorème qui vient d'être démontré, traiter facilement deux problèmes placés plus loin dans les *Questions proposées*.

ARITHMÉTIQUE

4953. — *Démontrer que si A et B ont leurs k derniers chiffres communs, A^n et B^n ont aussi leurs k derniers chiffres communs.*

Lorsque deux nombres entiers A et B ont leurs k derniers chiffres communs, la différence $A - B$ est terminée par k zéros, c'est-à-dire multiple de 10^k. Réciproquement si cette condition est remplie, les nombres A et B ont leurs k derniers chiffres communs.

Tout revient donc à démontrer que si l'on a

$$A - B = m.10^k,$$

on a aussi
$$A^n - B^n = m'.10^k.$$

Or on sait que $A^n - B^n$ est toujours divisible par $A - B$; donc

$$A^n - B^n = m''(A - B) = m''m'10^k.$$

C. q. f. d.

Remarque. — La réciproque de la propriété énoncée n'est pas vraie; car, par exemple, A^2 et B^2 peuvent être terminés par le même chiffre sans que A et B soient terminés par le même chiffre.

[Ont résolu la même question: Mlles S. Lauzanne: A. Saleilles; MM. S. Amy; D. Antonescu ; A. Arcizet ; P. Bancillon ; L. Bannerot ; E. Barbé ; H. Belbenoit ; M. Bernard ; A. Bernardeau ; P. Bonnot : L. Camillet ; R. Cattin ; V. Chosson: L. David; G. Desnoës; Ducongé-Cabireau; A. Duittoz; E. Durand; J. Franceschini ; R. Rives ; F. Gerard ; A. Gheysens ; P. Hamon ; J. Hébré; R. Henry : L. Hostier . E. Hugonnier ; A. James ; D. Koenig ; M. Laurence ; P. Legros ; L. Lemmet ; M. Marx ; A. Meynier ; J. Permann ; P Plisson ; M. Royer; E. Serres; F. Sol; J. Tastet; V. Thébault; C. Tourneux; J. Trouillé; Vautrey ; F. Verot ; P. Zlatco.]

ALGÈBRE

4353. — *Soit un tétraèdre SABC, CD perpendiculaire sur AB, SH perpendiculaire au plan ABC ; les sens positifs sur AB, DC, HS sont tels que les trois segments* $\overline{AB} = a$, $\overline{DC} = h$, $\overline{HS} = H$ *soient positifs. On considère un parallélépipède rectangle inscrit ou exinscrit au tétraèdre. Trois arêtes étant OM, ON, OP, les sommets opposés à O, M, N, P sont O', M', N', P'. La face OMP'N est dans le plan ABC ; la face opposée O'M'PN' a un côté PN' dans le plan SAB, un sommet M' dans le plan SAC, un sommet O' dans le plan SBC.*

On pose $\overline{OM} = x$, $\overline{ON} = y$, $\overline{OP} = z$, *et on demande d'établir, en une seule fois, la relation* $\frac{x}{a} + \frac{y}{h} + \frac{z}{H} = 1$.

Calculer z en supposant $\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{1}$; *faisant ensuite* $\lambda = \pm 1$, $\mu = \pm 1$, *on obtiendra les côtés des quatre cubes que l'on peut généralement inscrire ou exinscrire à un tétraèdre, ainsi que la disposition de ces cubes.*

La face O'M'PN' étant inscrite dans une section A'B'C' du tétraèdre, on a

$$\frac{\overline{O'M'}}{\overline{B'A'}} = \frac{\overline{C'D'} - \overline{O'N'}}{\overline{C'D'}}$$

ou

$$\frac{\overline{O'M'}}{\overline{B'A'}} + \frac{\overline{O'N'}}{\overline{C'D'}} = 1. \quad (1)$$

Or $\overline{O'M'} = -x$, $\overline{O'N'} = -y$; donc l'équation (1) peut s'écrire

$$\frac{x}{\overline{A'B'}} + \frac{y}{\overline{D'C'}} = 1.$$

D'autre part on a, dans tous les cas,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{D'C'}}{\overline{DC}} = \frac{H - z}{H}; \quad (2)$$

en tirant $\overline{A'B'}$ et $\overline{D'C'}$ des relations (2), et en les portant dans la précédente, on a

$$\frac{x}{\overline{AB}.\frac{H-z}{H}} + \frac{y}{\overline{DC}.\frac{H-z}{H}} = 1$$

ou
$$\frac{x}{\overline{AB}} + \frac{y}{\overline{DC}} = \frac{H - z}{H} = 1 - \frac{z}{H}$$

ou enfin
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{h} + \frac{z}{H} = 1.$$

Si on suppose $\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{1}$, on en déduit

$$x = \lambda z, \qquad y = \mu z, \qquad z = \frac{1}{\frac{\lambda}{a} + \frac{\mu}{h} + \frac{1}{H}}.$$

Si on fait $\lambda = \pm 1$, $\mu = \pm 1$, x, y et z sont donnés par

$$z_1 = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{h} + \frac{1}{H}}, \qquad x_1 = z_1, \qquad y_1 = z_1 ;$$

$$z_2 = \frac{1}{\frac{1}{H} + \frac{1}{h} - \frac{1}{a}}, \qquad x_2 = -z_2, \qquad y_2 = z_2 ;$$

$$z_3 = \frac{1}{\frac{1}{H} + \frac{1}{a} - \frac{1}{h}}, \qquad x_3 = z_3, \qquad y_3 = -z_3 ;$$

$$z_4 = \frac{1}{\frac{1}{H} - \frac{1}{a} - \frac{1}{h}}, \qquad x_4 = -z_4, \qquad y_4 = -z_4.$$

(M. Rebeix, lycée du Puy.)

4833. — *On donne un tétraèdre régulier* ABCD *dont le côté est* a. *Sur les côtés* DA, CA *on prend deux longueurs* DF, CE *égales à* x *; sur les côtés* DB, CB, *des longueurs* DH, CG *égales à* y. *On demande de déterminer* x *et* y *de telle sorte que le trapèze* EFGH *soit circonscrit à un cercle de rayon* R. *Discussion. Évaluer ensuite le volume du polyèdre* EFDCGH.

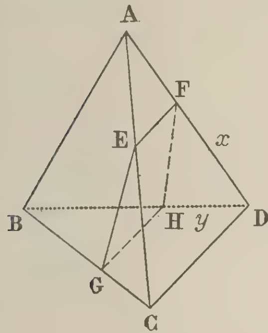
(*Bacc. lettres-math., Clermont, juillet 1899.*)

Le triangle AEF étant équilatéral, on a

$$\mathrm{EF} = \mathrm{AE} = a - x\,;$$

de même,

$$\mathrm{GH} = \mathrm{BH} = a - y.$$



Considérons le cercle O, de rayon R, inscrit dans le trapèze EFGH. Les droites EO, OG étant les bissectrices des angles supplémentaires E et G sont rectangulaires et l'on a

$$\mathrm{R}^2 = \mathrm{EP}.\mathrm{PG},$$

ou, comme $\mathrm{EP} = \dfrac{\mathrm{EF}}{2} = \dfrac{a-x}{2}$,

$$\mathrm{PG} = \frac{\mathrm{GH}}{2} = \frac{a-y}{2}$$

et

$$4\mathrm{R}^2 = (a-x)(a-y). \qquad (1)$$

D'autre part,

$$\mathrm{EG} = \mathrm{EP} + \mathrm{PG} = \frac{2a - x - y}{2},$$

et, dans le triangle EGC où $\mathrm{C} = 60^\circ$,

$$\overline{\mathrm{EG}}^2 = x^2 + y^2 - xy.$$

La seconde équation entre x et y est donc

$$(2a - x - y)^2 = 4(x^2 + y^2 - xy). \qquad (2)$$

De l'équation (1), on déduit facilement

$$xy = a(x+y) + 4\mathrm{R}^2 - a^2\,; \qquad (3)$$

en portant cette valeur dans (2), après avoir remplacé $x^2 + y^2$ par $(x+y)^2 - 2xy$, il vient

$$(2a - x - y)^2 = 4[(x+y)^2 - 3a(x+y) - 3(4\mathrm{R}^2 - a^2)],$$

ou, en simplifiant et ordonnant,

$$3(x+y)^2 - 8a(x+y) + 8a^2 - 48\mathrm{R}^2 = 0. \qquad (4)$$

Cette équation fait connaître $x + y$; si on pose

$$x + y = u,$$

l'équation (3) donne

$$xy = au + 4\mathrm{R}^2 - a^2.$$

Par suite x et y vérifient l'équation

$$\mathrm{X}^2 - u\mathrm{X} + au + 4\mathrm{R}^2 - a^2 = 0. \qquad (5)$$

Discussion. — Les valeurs de x et y doivent être réelles, positives et inférieures à a, si les points E, F, G, H sont sur les arêtes du tétraèdre et non sur les prolongements.

La condition de réalité de l'équation (5) s'exprime par

$$u^2 - 4au + 4a^2 - 16\mathrm{R}^2 \geqslant 0$$

ou

$$(u - 2a)^2 - 16\mathrm{R}^2 \geqslant 0$$

ou enfin

$$(u - 2a - 4\mathrm{R})(u - 2a + 4\mathrm{R}) \geqslant 0,$$

ce qui donnerait

$$u < 2a - 4\mathrm{R} \qquad \text{ou} \qquad u > 2a + 4\mathrm{R}.$$

La première inégalité doit seule être admise, x et y devant être tous deux inférieurs à a ; et on voit qu'il faut que $a > 2\mathrm{R}$. Pour que les racines soient positives, il faut et il suffit que

$$u > \frac{a^2 - 4\mathrm{R}^2}{a}.$$

Les inégalités

$$u < 2a - 4\mathrm{R}, \qquad u > \frac{a^2 - 4\mathrm{R}^2}{a}$$

sont toujours compatibles, car l'inégalité

$$\frac{a^2 - 4\mathrm{R}^2}{a} < 2a - 4\mathrm{R}$$

revient à

$$0 < (a - 2\mathrm{R})^2.$$

On est donc conduit à chercher si l'équation en u admet des racines vérifiant les inégalités précédentes.

La condition de réalité des racines de l'équation en u est

$$16a^2 - 24a^2 + 144\mathrm{R}^2 \geqslant 0$$

ou

$$a^2 \leqslant 18\mathrm{R}^2$$

ou enfin

$$a \leqslant 3\mathrm{R}\sqrt{2}.$$

Si on désigne par $f(u)$ le premier membre de l'équation (4), les conditions de limite conduisent à considérer les expressions

$$f(2a - 4\mathrm{R}) = 4a(a - 4\mathrm{R}),$$

$$f\left(\frac{a^2 - 4\mathrm{R}^2}{a}\right) = \frac{3(a^2 - 4\mathrm{R}^2)^2 - 16a^2\mathrm{R}^2}{a^2} = \frac{(3a^2 - 4\mathrm{R}^2)(a^2 - 12\mathrm{R}^2)}{a^2}.$$

Comme a doit être supérieur à 2R, la dernière expression est du signe de $a^2 - 12\mathrm{R}^2$ ou $a - 2\mathrm{R}\sqrt{3}$.

Si a est compris entre $2\mathrm{R}\sqrt{3}$ et 4R, les deux résultats de substitution sont de signes contraires; on a une solution donnée par la plus petite racine de l'équation en u.

Si $2\mathrm{R} < a < 2\mathrm{R}\sqrt{3}$, les résultats sont négatifs ; il n'y a pas de valeurs de u vérifiant les conditions.

Si $4\mathrm{R} < a < 3\mathrm{R}\sqrt{2}$, les deux résultats de substitution sont positifs; donc les valeurs substituées sont extérieures aux racines, la plus grande de ces valeurs, $2a - 4\mathrm{R}$, est inférieure à la demi-somme des racines de l'équation (4), car l'inégalité

$$2a - 4\mathrm{R} < \frac{4a}{3}$$

conduit à $a < 6\mathrm{R}$, inégalité vérifiée.

Donc, on ne peut trouver qu'un système de valeurs de x et y, et cela n'a lieu que si

$$2\mathrm{R}\sqrt{3} < a < 4\mathrm{R}.$$

Le volume EFDCGH est celui d'un prisme tronqué, et a pour expression

$$\mathrm{V} = \mathrm{CEG} \times \frac{h + h' + h''}{3},$$

h, h', h'' désignant les distances des sommets D, F, H à la face opposée CEG.

Or

$$\mathrm{CEG} = \frac{1}{2}\mathrm{CE}\,.\,\mathrm{CG}\sin\mathrm{C} = \frac{1}{2}xy\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{car } \sin\mathrm{C} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$h, \text{ haut. du tétraèdre} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,;$$

$$\frac{h'}{h} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AD}}, \qquad \text{d'où} \qquad h' = \frac{h(a-x)}{a};$$

$$\frac{h''}{h} = \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BD}}, \qquad \text{d'où} \qquad h'' = \frac{h(a-y)}{a}.$$

Donc

$$\frac{h + h' + h''}{3} = \frac{1}{3}\left[h + h\,.\,\frac{a-x}{a} + h\,.\,\frac{c-y}{a}\right]$$

$$= \frac{h}{3a}(3a - x - y) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}(3a - x - y),$$

et par suite

$$\mathrm{V} = \frac{xy}{12}\sqrt{2}(3a - x - y).$$

On doit remplacer $x + y$ par la plus petite racine, u', de l'équation en u, et xy par

$$au' + 4\mathrm{R}^2 - a^2.$$

En remarquant que

$$u'^2 = \frac{8au' - 8a^2 + 4\mathrm{R}^2}{3},$$

on peut amener l'expression de V à ne contenir u' qu'au premier degré, et on trouve

$$\mathrm{V} = \frac{\sqrt{2}}{36}[4(a^2 - 3\mathrm{R}^2)u' - a^3 - 12a\mathrm{R}^2].$$

4917. — *Dans un triangle rectangle* ABC, *on appelle* r *le rayon du cercle inscrit à ce triangle et* r' *le rayon du cercle tangent à l'hypoténuse* BC *et aux prolongements des deux côtés de l'angle droit (cercle exinscrit).*

On donne l'hypoténuse $BC = a$, *ainsi que le rapport* m *du rayon* r' *au rayon* r.

1° Calculer les deux côtés de l'angle droit de ce triangle rectangle. Discussion par rapport à m.

2° Pour chaque valeur convenable de m, *on trouve un triangle rectangle* ABC *répondant à la question. On appelle* M *le milieu de son hypoténuse et* O *et* O' *les centres des cercles inscrit et exinscrit dont les rayons ont été désignés précédemment par* r *et* r'.

Calculer, en fonction de m *et de* a, *l'expression* z *du rapport de la différence des carrés des distances du point* M *aux points* O' *et* O *à la somme des carrés de ces mêmes distances, soit*

$$z = \frac{\overline{MO'}^2 - \overline{MO}^2}{\overline{MO'}^2 + \overline{MO}^2}.$$

Variations de cette expression suivant les diverses valeurs attribuées à m.

Application. — *Dans les deux parties du problème, examiner le cas particulier de* $m = 3 + 2\sqrt{2}$ *et dire ce qui arrive lorsque* m *croît au delà de toute limite.*

(*Certificat d'aptitude au professorat des écoles normales, 1900.*)

1° Cette partie ayant déjà été traitée complètement ici (V. *Journal*, p. 21), nous mentionnerons seulement les résultats obtenus. Les deux côtés b et c sont racines de l'équation

$$X^2 - \frac{a(m+1)}{m-1}.X + \frac{2ma^2}{(m-1)^2} = 0,$$

et la condition de possibilité est

$$m \geqslant 3 + 2\sqrt{2}.$$

Pour $m = 3 + 2\sqrt{2}$, on a

$$b = c = a\sqrt{2},$$

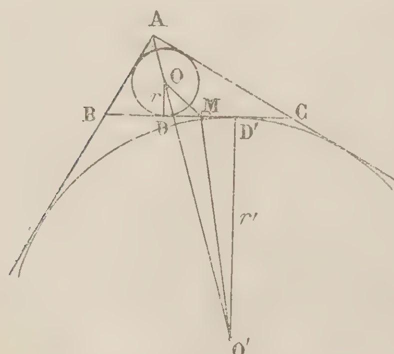
et le triangle devient isocèle.

Si m croît au delà de toute limite $\dfrac{m+1}{m-1} = \dfrac{1 + \frac{1}{m}}{1 - \frac{1}{m}}$ tend vers 1, et $\dfrac{2m}{(m-1)^2} = \dfrac{2}{m\left(1 - \frac{1}{m}\right)^2}$ tend vers 0; de sorte que l'équation devient

$$X^2 - aX = 0;$$

elle a comme racines 0 et a. Donc, dans ce cas, A vient se confondre avec B ou C.

2° Soient D et D' les points de contact des cercles O, O' avec BC. On a



$$\overline{MO'}^2 = r'^2 + \overline{MD'}^2,$$
$$\overline{MO}^2 = r^2 + \overline{MD}^2;$$

on déduit de là, en observant que

$$MD = MD' = \frac{DD'}{2},$$

$$z = \frac{\overline{MO'}^2 - \overline{MO}^2}{\overline{MO'}^2 + \overline{MO}^2} = \frac{r'^2 - r^2}{r'^2 + r^2 + \dfrac{\overline{DD'}^2}{2}}.$$

Mais DD' est la tangente commune intérieure de deux cercles de rayons r, r' et dont la distance des centres est

$$OO' = O'A - OA = (r' - r)\sqrt{2};$$

par suite

$$\overline{DD'}^2 = \overline{OO'}^2 - (r' + r)^2 = 2(r' - r)^2 - (r' + r)^2,$$

et

$$z = \frac{r'^2 - r^2}{r'^2 + r^2 + (r' - r)^2 - \dfrac{(r'+r)^2}{2}} = \frac{2(r'^2 - r^2)}{2(r'^2 + r^2) - (r' + r)^2 + 2(r' - r)^2}$$
$$= \frac{2(r'^2 - r^2)}{3(r' - r)^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{r' + r}{r' - r} = \frac{2}{3}\cdot\frac{m+1}{m-1}.$$

Pour suivre les variations du rapport

$$z = \frac{2}{3}\cdot\frac{m+1}{m-1}$$

lorsque m varie depuis son minimum $3 + 2\sqrt{2}$ jusqu'à l'infini, effectuons la division indiquée; nous aurons

$$z = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{2}{m-1}\right).$$

Sous cette forme on voit que z décroît à mesure que m croît. D'ailleurs pour

$$m = 3 + 2\sqrt{2}, \qquad z = \frac{2}{3}\left(\frac{4 + 2\sqrt{2}}{2 + 2\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{2},$$

et pour $m = \infty$, $z = \dfrac{2}{3}$.

Ainsi, lorsque m croît de $3 + 2\sqrt{2}$ à $+\infty$, z décroît de $\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$ à $\dfrac{2}{3}$.

(Henri GUILLAUD, école primaire supérieure de Chantonnay.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Anzemberger ; E. Barbé ; L. Barbérot ; P. Bely ; P. Bonnefoy ; L. Bordron ; I. Bourrec ; H. Dobryzniak ; E. Durand ; H. Dutordoir ; E. Gernez-Pfanmatter ; J. Guéret ; J. Hébré ; R. Henry ; A. Larcher ; A. Lecoutour ; L. Lemmet ; E. Licope ; M. B., instituteur à I. ; R. Manen ; A. Meynier ; T. Millet ; R. Mouzon ; F. Pégorier ; M. Petit ; G. Rabaté ; G. Réveillon ; L. Richard ; R. Rives ; A. de Saint-Gabriel ; V. Thébault ; P. Zlatco.]

4954. — *Résoudre et discuter le système*

$$x + y + z = a,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2,$$
$$yz + zx - xy = 0.$$

Le système peut s'écrire

$$x + y = a - z, \quad (1)$$
$$x^2 + y^2 = b^2 - z^2, \quad (2)$$
$$xy = z(x + y). \quad (3)$$

Des équations (1) et (3) on déduit

$$xy = z(a - z).$$

En remplaçant $x + y$, $x^2 + y^2$ et xy par leurs expressions dans l'identité

$$(x + y)^2 = (x^2 + y^2) + 2xy,$$

il vient

$$(a - z)^2 = b^2 - z^2 + 2z(a - z)$$

ou

$$4z^2 - 4az + a^2 - b^2 = 0.$$

On tire de là, en résolvant cette équation,

$$z = \frac{a \pm b}{2}.$$

Connaissant z, les équations (1) et (3) fournissent $x + y$ et xy, de sorte que x et y sont racines de l'équation

$$X^2 - (a - z)X + z(a - z) = 0,$$

qui donne $\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \dfrac{a - z \pm\sqrt{(a-z)(a-5z)}}{2}$.

En prenant d'abord $z = \dfrac{a+b}{2}$, les valeurs correspondantes de x et y sont

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{a - b \pm \sqrt{(b-a)(5b+3a)}}{4},$$

et ne sont réelles que lorsque b est extérieur à l'intervalle

$$\left(-\frac{3}{5}a,\ a\right).$$

Si $b = a$, on a $x = y = 0$, $z = a$;

si $b = -\dfrac{3a}{5}$, on a $x = y = \dfrac{2}{5}a$, $z = \dfrac{a}{5}$.

Pour $z = \dfrac{a-b}{2}$, les valeurs correspondantes de x et y sont

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{a + b \pm \sqrt{(b+a)(5b-3a)}}{4};$$

ces valeurs ne sont réelles que lorsque b est extérieur à l'intervalle $\left(-a,\ \dfrac{3}{5}a\right)$.

Si $b = -a$, on a $x = y = 0$, $z = a$;

si $b = \dfrac{3a}{5}$, on a $x = y = \dfrac{2}{5}a$, $z = \dfrac{a}{5}$.

Suivant la grandeur de b par rapport aux quatre valeurs remarquables a, $-\dfrac{3}{5}a$, $-a$, $\dfrac{3}{5}a$, on peut résumer la discussion des deux solutions du système comme suit :

$$-\infty \quad -a \quad -\frac{3}{5}a \quad \frac{3}{5}a \quad a \quad +\infty.$$

2 sol. 1 sol. 0 sol. 1 sol. 2 sol.

(Gasluc de SÉNÉBRON, à Hesbru.)

[Ont résolu cette question : Mlle S. Lauzanne : MM. M. Amiot ; C. Andréis ; M. Antoine ; D. Antonescu ; A. Arcizet ; P. Bancillon ; M. Bernard ; A. Bernardeau ; A. Bourlat ; J. Bournisien ; R. Cattin ; Colomer ; L. David ; G. Desnoës ; Douce ; Ducongé ; E. Durand ; G. Foucry ; J. Franceschini ; E. Gernez-Pfanmatter ; A. Godfroy ; P. Guerrier ; J. Hébré ; R. Henry ; J. Heyraud ; Joly ; D. Koenig ; J. Lafargue ; M. Laurence ; R. Lautré ; L. Lemmet ; J. Lestable ; Marais-Parier ; M. Marx ; H. Martin ; H. Masson ; J. Maury ; F. Mestre ; A. Meynier ; B. Paynel ; J. Permann ; M. Petitjean ; L. Platrier ; R. Rives ; E. Roncin ; A. de Saint-Gabriel ; G. Sanpite ; E. Serres ; F. Sol ; J. Tastet ; V. Thébault ; J. Trouillé ; P. Valentin ; G. Ybert ; P. Zlatco.]

GÉOMÉTRIE

4955. — *Construire un triangle connaissant la hauteur* AD, *sachant que cette hauteur, les côtés* AB, AC *qui la comprennent et le troisième côté* BC *sont en progression géométrique.*

Supposons le problème résolu ; soit ABC un triangle défini par la hauteur $AD = h$, les côtés AB, AC, BC étant tels que

$$AB = hq, \quad AC = hq^2, \quad BC = hq^3,$$

q désignant la raison inconnue de la progression géométrique.

En remarquant que

$$AB.AC = h^2q^3 = AD.BC,$$

on en déduit que le triangle ABC est rectangle en A ; on peut donc écrire

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

ou $$h^2q^2 + h^2q^4 = h^2q^6$$

ou $$q^4 - q^2 - 1 = 0,$$

d'où $$q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

et par suite $$AC = h\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

AC est ainsi égal au segment soustractif de la droite $AD = h$ divisée en moyenne et extrême raison. Pour obtenir ce segment, il faut, comme on sait, décrire le cercle E, de rayon $\dfrac{h}{2}$ et tangent en D à AD : AEC′ est le segment qu'il suffit de rabattre en AC de façon que C soit sur la perpendiculaire en D à AD. Elevant ensuite la perpendiculaire en A à AC, on obtient le triangle cherché ABC.

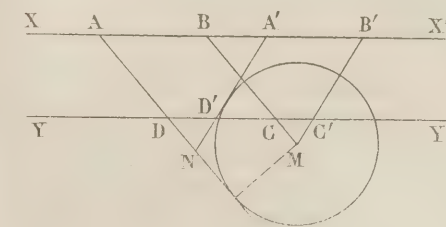
Le problème, toujours possible, ne comporte qu'une solution.

(F. PÉGORIER, à Carcassonne.)

[Ont résolu la même question : Mlle A. Saleilles ; MM. S. Amy ; L. Bannerot ; H. Belbenoit ; M. Bernard ; A. Bernardeau ; L. Butruille ; M. Campuzan ; L. Carmillet ; R. Cattin ; J. Cougnaux ; L. David ; A. Duittoz ; E. Durand ; J. Franceschini ; E. Gernez-Pfanmatter ; P. Guerrier ; R. Henry ; A. James ; Joly ; L. Kayser ; D. Koenig ; Lamarre ; M. Laurence ; P. Legros ; L. Lemmet ; E. Licope ; H. Masson ; F. Mestre ; A. Meynier ; E. Périnet ; M. Petitjean ; R. Rives ; J. Tastet ; J. Trouillé ; P. Valentin.]

4956. — *Construire un losange dont deux côtés opposés reposent sur deux parallèles données, chacun des deux autres côtés passant par un point donné.*

Supposons le problème résolu : soit ABCD un losange dont les côtés opposés AB, CD reposent sur les parallèles XX′, YY′, et dont les deux autres côtés BC, DA passent par les points donnés M et N.



Les hauteurs du losange étant égales, le côté AD est tangent à un cercle de centre M et de rayon égal à la distance d qui sépare les parallèles données XX′, YY′. Par suite le côté AD s'obtient en menant du point N une tangente au cercle connu M ; on en déduit ensuite BC en traçant la parallèle à AD issue de M.

Cette construction fournit généralement les deux losanges ABCD et A′B′C′D′, pourvu que le point N soit extérieur au cercle M.

Lorsque l'une des tangentes issues de N est parallèle à XX′ ou YY′, la solution correspondante n'existe plus, et le problème n'admet plus qu'une solution ; il en est de même lorsque le point N est situé sur la circonférence M.

Ainsi pour tout point N du plan extérieur au cercle M et non situé sur l'une des tangentes EE′, FF′ parallèles à XX′, le problème a deux solutions ; pour tout point N pris sur la circonférence M ou sur l'une des tangentes EE′, FF′, le problème n'a qu'une solution, et devient impossible si N est intérieur au cercle M.

(A. BERNARDEAU, à Surgères.)

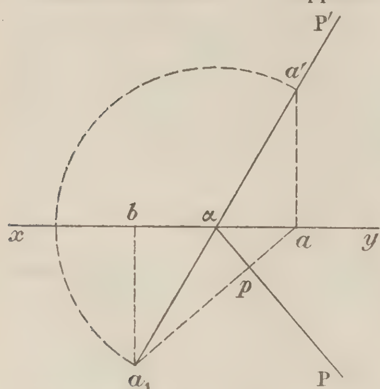
[Ont résolu la même question : Mlles S. Lauzanne ; A. Saleilles ; MM. S. Amy ; E. Barbé ; M. Begney ; M. Bernard ; A. Bernardeau ; L. Beuret ; P. Bonnat ; A. Bourlat ; J. Bournisien ; L. Butruille ; J. Cassan ; R. Cattin ; Douce ; A. Duittoz ; E. Durand ; G. de France ; C. Fontanel ; G. Foucry ; G., à G. ; A. Gheysens ; M. Guyot ; P. Hamon ; J. Hébré ; R. Henry ; E. Hugonnier ; A. James ; L. Kayser ; D. Koenig ; R. Larrieu ; M. Laurence ; L. Lemmet ; L. Licope ; M. Marx ; H. Masson ; F. Mestre ; A. Meynier ; H. Palustran ;

H. Pariselle ; F. Pégorier ; J. Permann ; M. Petitjean ; L. Pignier ; P. Plisson ; V. Rives ; E. Roncin ; A. Rousseau ; Samson ; A. Scotle ; E. Serres ; R. Thébault ; C. Tourneux ; F. Vallée ; F. Vérot ; P. Zlatco.]

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

4958. — *On donne la trace horizontale* αP *d'un plan. Déterminer sa trace verticale de façon que sur l'épure cette trace et son rabattement sur le plan horizontal soient en ligne droite.*

Première solution. — Supposons le problème résolu : soit $\alpha P'$ la trace verticale cherchée.



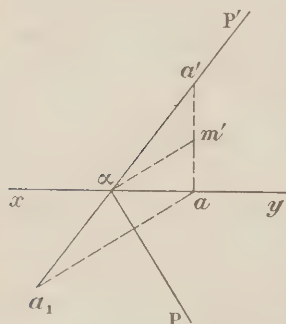
Le rabattement a_1 autour de αP d'un point (a, a') de la trace $\alpha P'$ est situé par hypothèse sur le prolongement de $\alpha P'$. Donc $\alpha a_1 = \alpha a'$, c'est-à-dire que α est le milieu du segment a_1a' ou de sa projection ba sur xy. D'où cette construction :

Par un point quelconque a de xy on mène la perpendiculaire ap à αP, et par le point b, tel que $b\alpha = \alpha a$, on élève une perpendiculaire à xy qui rencontre la première en a_1 ; en joignant $a_1\alpha$, on obtient la trace cherchée.

Remarque. — Si αP est perpendiculaire à xy, a_1 se confond avec b, et le plan $P\alpha P'$ coïncide avec le plan horizontal de projection.

(EMILE SERRES, lycée de Pau.)

Seconde solution. — Si, dans le triangle $aa'a_1$, on mène par le milieu α de $a'a_1$ une parallèle au côté a_1a, elle passe par le milieu m' du troisième côté aa' et est en même temps perpendiculaire à αP, ce qui conduit à cette seconde construction :



On élève en α une perpendiculaire à αP et en a une perpendiculaire à xy ; ces deux droites se coupent en m' ; on prolonge am' d'une longueur $m'a' = am'$: $\alpha a'$ est la trace cherchée.

(RAPHAËL RIVES.)

Solution trigonométrique. — On sait que si ω et ω' sont les angles des traces αP, $\alpha P'$ avec la ligne de terre, l'angle V de ces traces est donné par la formule

$$\cos V = \cos \omega . \cos \omega'.$$

Or, en vertu de l'hypothèse faite, l'angle V est représenté ici par le supplément de l'angle plan $P\alpha P' = \omega + \omega'$. La relation précédente s'écrit donc

$$-\cos(\omega + \omega') = \cos\omega.\cos\omega',$$

$$-\cos\omega.\cos\omega' + \sin\omega.\sin\omega' = \cos\omega.\cos\omega',$$

ou $$\operatorname{tg}\omega.\operatorname{tg}\omega' = 2,$$

d'où $$\operatorname{tg}\omega' = 2\operatorname{cotg}\omega.$$

L'angle ω' détermine ainsi la trace $\alpha P'$.

(BELTÇAGUY et PORTALIER, lycée d'Alger.)

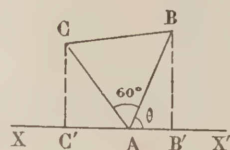
[Ont résolu la même question : MM. E. Barbé ; M. Bernard ; A. Bernardeau ; R. Cattin ; C. Chessin ; V. Chosson ; L. David ; Douce ; E. Durand ; G. Foucry ; G. de France ; E. Gernez-Pfanmatter ; Joly ; M. Laurence ; L. Lefèvre ; E. Licope ; H. Palustran ; J. Tastet ; J. Trouillé ; J. Valentin ; C. Yrvuag de Notelrac.]

TRIGONOMÉTRIE

4858. — *Un triangle équilatéral* ABC *de côté* a *tourne autour d'un axe* XX' *situé dans son plan et passant par son sommet* A. *Déterminer l'angle* $\theta = BAX'$ *de telle façon que la surface totale engendrée par le périmètre du triangle soit égale à* πm^2.

(*Bacc. lettres-math., Paris, juillet 1900.*)

Première solution. — Menons les perpendiculaires BB', CC' à l'axe XX'. En tournant autour de XX', les côtés AB, AC engendrent les surfaces latérales de deux cônes, et le côté BC, la surface latérale d'un tronc de cône. On doit donc avoir



$$\pi a BB' + \pi a CC' + \pi a(BB' + CC') = \pi m^2$$

ou $$2a(BB' + CC') = m^2.$$

Or $$BB' = a \sin\theta,$$

$$CC' = a \sin CAX' = a \sin(60^\circ + \theta).$$

L'équation du problème est donc

$$2a^2 [\sin\theta + \sin(60^\circ + \theta)] = m^2$$

ou, en développant $\sin(60^\circ + \theta)$ et remplaçant $\sin 60^\circ$ par $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos 60^\circ$ par $\frac{1}{2}$,

$$a^2 (3 \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta) = m^2.$$

Pour résoudre cette équation, nous exprimerons $\sin\theta$ et $\cos\theta$ en fonction de $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ à l'aide des formules connues,

$$\sin\theta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}, \qquad \cos\theta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}};$$

on obtient ainsi, toutes réductions faites,

$$(m^2 + a^2\sqrt{3})\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} - 6a^2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + m^2 - a^2\sqrt{3} = 0.$$

Discussion. — L'angle θ ne pouvant prendre que les valeurs comprises entre 0 et $180 - 60 = 120^\circ$, une valeur de $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ n'est acceptable qu'autant qu'elle est réelle et comprise entre 0 et $\operatorname{tg}\frac{120^\circ}{2} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.

Remplaçons dans le premier membre de l'équation $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ par 0 et $\sqrt{3}$; nous aurons

$$f(0) = m^2 - a^2\sqrt{3}, \qquad f(\sqrt{3}) = 4(m^2 - a^2\sqrt{3}).$$

Ces deux résultats ayant le même signe, il ne peut y avoir de solution unique.

Pour qu'il y ait deux solutions, il faut :

1° que l'équation ait ses racines réelles, c'est-à-dire que l'on ait

$$(3a^2)^2 - (m^2 + a^2\sqrt{3})(m^2 - a^2\sqrt{3}) \geqslant 0$$

ou $$12a^4 - m^4 \geqslant 0$$

ou $$m^2 \leqslant 2a^2\sqrt{3};$$

2° que $f(0)$ et $f(\sqrt{3})$ soient positifs comme le coefficient de $\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}$, ce qui entraîne

$$m^2 \geqslant a^2\sqrt{3};$$

3° que la demi-somme des racines soit comprise entre 0 et $\sqrt{3}$:

$$0 < \frac{3a^2}{m^2 + a^2\sqrt{3}} < \sqrt{3},$$

condition toujours remplie, puisque

$$3a^2 < m^2\sqrt{3} + 3a^2.$$

Ainsi lorsque $a^2\sqrt{3} < m^2 < 2a^2\sqrt{3}$, le problème est possible et admet deux solutions.

Cas particuliers. — 1° $m^2 = a^2\sqrt{3}$. On a

$$f(0) = f(\sqrt{3}) = 0,$$

d'où $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = 0$ et $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{3}$

et $\theta = 0, \quad \theta = 120°;$

l'un des côtés AB ou AC coïncide avec XX'.

2° $m^2 = 2a^2\sqrt{3}$. Les deux racines sont égales à leur demi-somme :

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{3a^2}{m^2 + a^2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} 30°,$$

d'où $\frac{\theta}{2} = 30°$ et $\theta = 60°$;

le côté BC est parallèle à XX'.

(E. ANZEMBERGER, lycée de Lyon.)

Seconde solution. — L'équation du problème

$$\sin\theta + \sin(60° + \theta) = \frac{m^2}{2a^2}$$

s'écrit
$$2\sin(30° + \theta)\cos 30° = \frac{m^2}{2a^2},$$

d'où, en remplaçant $\cos 30°$ par $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\sin(30° + \theta) = \frac{m^2\sqrt{3}}{6a^2}.$$

θ ne pouvant varier qu'entre 0 et 120°, l'angle $30° + \theta$ varie entre 30° et 150°. Or

$$\sin 30° = \sin 150° = \frac{1}{2}.$$

On doit donc avoir

$$\frac{1}{2} < \frac{m^2\sqrt{3}}{6a^2} < 1$$

ou
$$a^2\sqrt{3} < m^2 < 2a^2\sqrt{3}.$$

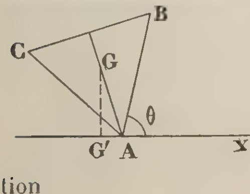
Lorsque cette double condition est remplie, en désignant par α le plus petit arc positif ayant pour sinus $\frac{m^2\sqrt{3}}{6a^2}$, on a les deux solutions

$$30° + \theta = \alpha, \qquad 30° + \theta = 180° - \alpha,$$

d'où
$$\theta = \alpha - 30°, \qquad \theta = 150° - \alpha.$$

(P. SAINTIN, lycée de Versailles.)

Remarque. — On pouvait appliquer le théorème de Guldin; le centre de gravité du périmètre étant évidemment le point G de concours des médianes; ce point est à une distance de A égale à



$$\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

AG fait avec AX l'angle $\theta + 30°$, de sorte qu'on a immédiatement l'équation

$$2\pi\frac{a\sqrt{3}}{3} \times 3a\sin(\theta + 30°) = \pi m^2.$$

On pouvait obtenir une solution géométrique en écrivant l'équation

$$2\pi GG' \times 3a = \pi m^2,$$

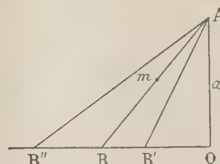
ce qui donnait
$$GG' = \frac{m^2}{6a}.$$

On a ainsi la distance du point G à l'axe; d'autre part comme l'axe ne doit pas traverser le triangle, G devait être sur l'arc de cercle de rayon AG correspondant à un angle au centre de 120° et dont la corde était parallèle à AX; on avait donc deux solutions si $\frac{m^2}{6a}$ était supérieure à l'apothème de cette corde $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ et inférieure au rayon $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Les deux solutions sont données pour deux positions du triangle, symétriques par rapport à la perpendiculaire élevée en A sur AX.

[Ont résolu la même question : MM. E. Anzemberger; F. R., à I.; M. Laurence; Noël; P. Saintin.]

MÉCANIQUE

4823. — *Un triangle rectangle a un côté OB de l'angle droit horizontal, tandis que l'autre OA, de longueur a, est vertical et dirigé vers le haut. Un point matériel pesant, de masse m, descend sans vitesse initiale et sans frottement, à partir de A, le long de l'hypoténuse AB. Ce point matériel est, en outre, repoussé par le sommet A avec une force constante égale à* $mk \times AB^\alpha$, *k désignant une constante positive et* α *un exposant entier et positif.*



1° *Calculer le temps que met le mobile pour arriver en B.*

2° *En supposant que la descente du même point s'effectue successivement sur les hypoténuses AB, AB', AB'', de différents triangles, quel est celui de ces triangles qui donnera le temps de descente minimum, dans chacun des deux cas particuliers où* $\alpha = 1$ *et* $\alpha = 3$?

(*Bac. lettres-math., Lille, mars 1899.*)

1° Le point matériel est soumis à une force dirigée suivant AB et égale à la composante du poids de ce point suivant AB, c'est-à-dire à $mg\cos A$. Ce point est ainsi sollicité par une force constante dirigée de A vers B et égale à

$$mg\cos A + mk \times AB^\alpha;$$

cette force lui communique une accélération γ telle que

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{mg\cos A + mk \times AB^\alpha}{mg},$$

d'où
$$\gamma = g\cos A + k \times AB^\alpha.$$

Par suite, l'espace e parcouru après un temps t est

$$e = \frac{1}{2}\gamma t^2 = \frac{1}{2}(g\cos A + k \times AB^\alpha)t^2.$$

En remplaçant e par $AB = \frac{a}{\cos A}$, on en déduit pour le temps cherché,

$$t = \sqrt{\frac{2a}{\cos A\left(g\cos A + \frac{ka^\alpha}{\cos^\alpha A}\right)}}.$$

2° Pour $\alpha = 1$, on a

$$t = \sqrt{\frac{2a}{g\cos^2 A + ka}};$$

le minimum de t correspond au maximum de $g\cos^2 A + ka$ ou de $\cos A$, lequel est atteint pour $\cos A = 1$ ou $A = 0$. Le point pesant descend alors verticalement suivant AO.

Pour $\alpha = 3$, on a

$$t = \sqrt{\frac{2a}{g\cos^2 A + \frac{ka^3}{\cos^2 A}}}.$$

Le minimum de t est ici 0, car pour $\cos A = 0$, le dénominateur devient infini. Mais ce dénominateur peut admettre

un minimum ; en effet, les deux quantités $g \cos^2 A$ et $\frac{ka^3}{\cos^2 A}$ ayant un produit constant, leur somme devient minimum lorsque

$$g \cos^2 A = \frac{ka^3}{\cos^2 A}, \qquad \text{d'où} \qquad \cos A = \sqrt[4]{\frac{ka^3}{g}}.$$

Cette valeur du cosinus n'est acceptable que si l'on a $\sqrt[4]{\frac{ka^3}{g}} < 1$, ou $k < \frac{g}{a^3}$. Dans ce cas, il existe une direction AB parcourue dans le temps le plus long ; dans le cas contraire, cette direction correspond au minimum de la différence positive

$$\frac{ka^3}{\cos^2 A} - g \cos^2 A,$$

qui est atteint pour $\cos A = 1$ ou $A = 0$.

[Ont partiellement résolu cette question : MM. R. Cattin ; G. Foucry ; M. Gondran ; J. Haag.]

4959. — *On donne un triangle ABC dont les longueurs des côtés sont exprimées par a, b, c. On applique aux sommets A, B, C des forces parallèles ayant pour mesures algébriques $m + \lambda a$, $m + \lambda b$, $m + \lambda c$.*

1° Trouver le lieu du centre de ces forces, en considérant λ comme un paramètre variable.

2° Intersection de ce lieu avec le côté AB.

On peut considérer la force $m + \lambda a$ appliquée en A comme la résultante des deux forces m et λa ayant même point d'application et même direction que la première.

En opérant de même sur les deux forces appliquées en B, C, on est ramené à composer les deux systèmes de forces parallèles suivants :

1° Un système de trois forces parallèles égales à m et appliquées en A, B, C. Ce système a comme on sait son centre au centre de gravité G du triangle.

2° Un système de trois forces parallèles égales à λa, λb, λc et appliquées respectivement en A, B, C. Ce système ayant son centre sur chacune des bissectrices intérieures du triangle, ce point se confond avec le centre I du cercle inscrit.

Il résulte de là que le centre des forces parallèles considérées est le point d'application de deux forces parallèles dont l'une, égale à $3m$, est appliquée en G, et l'autre, égale à $\lambda(a + b + c)$, est appliquée en I. Ce point M se trouve sur la droite GI, et comme cette dernière droite est fixe quel que soit m ou λ, elle constitue le lieu cherché. On a $\frac{\overline{MG}}{\overline{MI}} = \frac{\lambda(a + b + c)}{m}$, de sorte que quand $\frac{\lambda}{m}$ varie, M peut occuper toutes les positions sur GI.

2° Le point où la droite GI rencontre AB correspond au cas particulier où la force $m + \lambda c$ appliquée en C est nulle ; dans ce cas, en effet, les deux forces parallèles restantes ont leur centre en un point P de AB tel que

$$\frac{PA}{PB} = \frac{m + \lambda b}{m + \lambda a} = \frac{-\lambda c + \lambda b}{-\lambda c + \lambda a} = \frac{b - c}{a - c}.$$

(F. PÉGORIER, à Carcassonne.)

[Ont résolu la même question : MM. Bellçaguy ; A. Bernardeau ; G. Foucry ; M. Laurence ; Portalier.]

PHYSIQUE

4951. — *Un réservoir communiquant avec un manomètre est rempli d'air sec à zéro sous la pression de 4 atmosphères. On élève sa température à 100°, et l'on demande quelle sera la nouvelle pression, le volume de l'air étant maintenu constant quelles que soient la température et la pression :*

1° Si la totalité de l'air comprimé participe à l'élévation de température ;

2° Si la fraction de la masse d'air participant à l'élévation de température est seulement les neuf dixièmes de la masse totale, le dixième étant maintenu à zéro dans les tubes de communication.

(*Bacc. lettres-math., Montpellier, juillet 1900.*)

1° La force élastique H, acquise par l'air porté à la température de 100°, s'obtient en appliquant la formule

$$H = H_0(1 + \alpha t),$$

d'où

$$H = 4\left(1 + \frac{100}{273}\right) = 5^{\text{atm}},46.$$

2° Dans le second cas, tout se passe comme si l'on mélangeait deux gaz, l'un occupant un volume $\frac{9V}{10}$ sous la pression de $5^{\text{atm}},46$, l'autre, un volume $\frac{V}{10}$ sous la pression de 4^{atm}. En appliquant la formule générale du mélange des gaz, on a

$$V \times x = \frac{9V}{10} \times 5,46 + \frac{V}{10} \times 4,$$

x désignant la pression finale.

On en tire

$$x = 5^{\text{atm}},31.$$

(A. BERNARDEAU.)

[Ont résolu la même question : MM. Beuret ; Beyney ; Cattin ; Chessin ; Cognet ; David ; Desnoës ; Desmoulins ; Durand ; Gernez ; Grunfelier ; Guerrier ; Guyot : Henry : Hugonnier ; Lapresle ; Legay ; Lestable ; Larché ; Lecoutour ; Lemmet ; Martin ; Mestre ; Meynier ; P. Michaud ; R. Petit ; Roger ; A. de Saint-Gabriel ; Saintin ; Weimann ; Le Wermand.]

4952. — *La force électromotrice d'une dynamo est de 110^{volts}, sa résistance intérieure est $0^{\text{ohm}},1$. Elle alimente des lampes à incandescence placées en dérivation aux bornes de la dynamo. La résistance de chacune des lampes, à chaud, est de 120^{ohms}.*

1° Quel est le nombre de lampes que peut alimenter la dynamo, sachant que le courant est de $0^{\text{ampère}},5$ dans chacune d'elles ?

2° Combien faudrait-il employer d'accumulateurs en série pour alimenter le même nombre de lampes ? La force électromotrice d'un accumulateur est 2^{volts} et sa résistance est $0^{\text{ohm}},1$.

(*Bacc. lettres-sciences, Nancy, juillet 1900.*)

1° L'intensité du courant fourni par la dynamo est

$$I = \frac{E}{R + r} = \frac{110}{0,1 + r},$$

r désignant la résistance extérieure.

Les lampes étant montées en dérivation, la résistance extérieure est $\frac{120}{x}$ ohms, x étant le nombre de lampes. On doit avoir

$$0,5 \times x = \frac{110}{0,1 + \frac{120}{x}},$$

d'où

$$x = 1000 \text{ lampes.}$$

2° Soit y le nombre d'accumulateurs. L'intensité du courant que doivent fournir ces accumulateurs est

$$0,5 \times 1000 = 500 \text{ ampères.}$$

On a donc, avec l'association en série,

$$500 = \frac{y \times 2}{y \times 0,1 + \frac{120}{1000}}.$$

Cette égalité ne peut être vérifiée pour aucune valeur positive de y. Mettons le second membre sous la forme $\frac{2}{0,1 + \frac{3}{25y}}$. En y faisant $y = \infty$, la valeur de ce second membre est

$$\frac{2}{0,1} = 20 \text{ ampères,}$$

c'est-à-dire que l'on ne peut dépasser 20 ampères avec des accumulateurs de ce genre disposés en série.

(DURAND.)

[Ont résolu la même question : Mlle Madonne ; MM. Bernardeau ; A. de Saint-Gabriel.]

DISCOURS

prononcé par M. **Maurice Lévy**, Membre de l'Institut, à la séance publique annuelle de l'Académie des Sciences du 17 décembre 1900.

Messieurs, voici notre dernière séance solennelle d'un siècle où la science aura tenu la plus grande place.

C'est la première fois que le fait se produit. Mais aussi, nous sommes les premiers hommes que la science, par une sorte de miracle, aura fait assister à deux existences terrestres : celle d'il y a soixante ans et celle d'aujourd'hui, infiniment plus dissemblables, à bien des égards, que si, en d'autres temps, elles avaient été séparées par des centaines, des milliers d'années, si bien que nous aurons vraiment vécu comme si nous étions nés deux fois à de longs siècles d'intervalle.

Pourquoi cette rénovation de la vie s'est-elle produite juste à notre époque et pas avant ? Est-ce un accident ou un commencement ? Vivons-nous en un siècle fortuit ou est-il bien le premier d'une ère nouvelle et durable qui serait l'ère du messianisme de la science sur cette terre ?

C'est sur ces questions que je voudrais vous présenter quelques courtes réflexions. Il en devra ressortir ceci : que notre siècle est fait de toute la poussière de pensée scientifique éparse dans le passé, et que c'est bien sous nos yeux que cette nébuleuse devait recevoir ses premières clartés.

I.

En toutes choses et de tout temps, la pratique a devancé le précepte. Les arts utiles sont venus avant la science. Mais, sitôt nés, ils auraient eu besoin de cette mère nourricière pour se développer. Ils l'ont appelée, ils l'ont interrogée. C'est de ces appels et de ces interrogations qu'elle est sortie. Ils étaient la fonction, elle est devenue l'organe. Comme toujours, la fonction a créé l'organe, puis l'organe a grandi et anobli la fonction. Pour cela, la nature réclame beaucoup de temps. C'est pourquoi la science a tardé à venir. En fait, et j'en dirai la raison un peu plus loin, le capital scientifique susceptible d'être sérieusement mis en valeur par l'industrie humaine n'a commencé à être constitué que vers la fin du siècle dernier. Jusque-là, les plus grandes idées et les plus belles inventions du passé étaient restées stériles.

Ainsi, il y a vingt-cinq siècles que les philosophes grecs ont enseigné, comme un axiome de métaphysique, la pensée que rien ne sort de rien et que rien ne rentre dans le néant. Il a fallu juste ces vingt-cinq siècles pour que cette pensée sortît des rêves de la métaphysique pour entrer dans le domaine de la certitude et de la précision scientifiques, c'est-à-dire pour devenir féconde. C'est de cette vieillerie renouvelée que notre siècle aura tiré sa plus riche parure, sa grandeur scientifique et sa prospérité matérielle.

C'est à cette même époque des plus anciens philosophes de la Grèce que remontent les premières notions acquises par l'homme sur les phénomènes électriques et magnétiques. Qu'entre les deux il y a une parenté, c'est ce dont les grands navigateurs du XVe siècle eussent bien pu s'apercevoir chaque fois que, par les gros temps, précisément quand la boussole leur eût été le plus nécessaire, ils la voyaient affolée sous l'action de la foudre. Ils devaient voir là quelque pouvoir surnaturel uni aux éléments pour les perdre plus sûrement.

Il a fallu arriver à l'année 1801, c'est-à-dire à cette invention tout à fait primordiale qui s'appelle la pile de Volta et la découverte, par Œrstedt, de l'action du courant voltaïque sur la boussole, pour que Ampère pût enfin établir entre l'électricité et le magnétisme cette union féconde d'où, avec les travaux de Faraday sur l'induction, est sortie notre industrie électrique avec toutes les merveilles que vous connaissez.

La force de la vapeur a été étudiée par l'École d'Alexandrie. Mais la science manquait, et ce n'est encore qu'au début de notre siècle, après l'expiration des brevets de Watt, quand la construction de la machine à vapeur fut devenue libre, qu'elle a commencé à prendre son essor, mais encore sans guide scientifique suffisant. Aussi, se tenait-elle dans les basses pressions. C'est la création de la thermodynamique qui, dans le dernier demi-siècle, lui a donné sa puissance et a permis d'obtenir le cheval-vapeur avec une consommation de charbon quatre ou cinq fois moindre que celle des débuts.

La poudre à canon, qui devait tant révolutionner le monde, a commencé par le révolutionner bien peu pendant cinq cents ans. Ce n'est qu'au XVIIe et au XVIIIe siècle qu'elle a sérieusement modifié l'art de la guerre et, entre le canon d'aujourd'hui et celui d'alors, il y a presque autant de différence qu'entre celui-ci et une simple arquebuse.

Le canon d'aujourd'hui est un des laboratoires les plus instructifs que possède la science. Et n'allez pas croire que, dans le laboratoire dont j'entends vous parler, ce soit la chair humaine qui serve de réactif.

D'abord, c'est du canon moderne que sont sortis ces autres canons très pacifiques, eux, qui s'appellent des *machines à explosion* ou *machines à pétrole* ou *à gaz tonnant*, qui rendent tant de services, notamment à l'automobilisme.

Ce sont ensuite les grandes pressions obtenues dans ces machines qui ont aussi déterminé la machine à vapeur à passer à des pressions de 20 à 25 kilogrammes, qu'il y a quelques années on eût regardées comme impossibles. C'est de là que sont venues à la fois la puissance et l'économie de ces moteurs de 20 000 à 30 000 chevaux, qui promènent des navires aussi populeux que de petites cités, sur les vagues de la mer, avec autant d'aisance et de coquetterie que vogue le cygne sur le lac tranquille et, dans ces locomotives qui, lancées à des vitesses de 100 à 120 kilomètres à l'heure, « se dirigent aussi aisément dans la nuit la plus sombre qu'en plein jour ».

C'est, de même, le canon qui a appris à trouver des fermetures simples et étanches contre les plus hautes pressions. Je me rap-

pelle combien ce problème nous a paru difficile lorsque, pendant la guerre de 1870, j'étais chargé par le gouvernement de Tours et de Bordeaux de faire, pour la première fois, construire du matériel de guerre par l'industrie privée. C'était une grande innovation qui semblait alors une grande hardiesse que cette décision prise, sous l'empire de la nécessité, par le gouvernement de la Défense nationale. Je ne sais qui était le plus ignorant, en fait de matériel de guerre, de l'industrie qui devait le fabriquer ou de moi qui devais lui en fournir les éléments. Cela a marché pourtant. L'industrie s'y est mise avec autant de science que de dévouement et de patriotisme. Mais combien était délicate la construction de l'obturateur dans ces premiers canons français se chargeant par la culasse que venait d'imaginer l'illustre général, alors colonel de Reffye, et combien, de son côté, la gargousse était compliquée !

Aujourd'hui tout cela est bien facilité, et les résultats obtenus par des expériences faites en vue de la guerre ont servi tous les arts et toutes les branches de la science, où les hautes pressions acquièrent chaque jour un rôle plus capital : les machines, la fabrication des agglomérés, l'emploi de l'air comprimé, et de l'eau sous pression et enfin cette grandiose opération scientifique et philosophique de la liquéfaction et de la solidification des gaz les plus réfractaires.

Ce sont encore les nécessités créées par l'art militaire qui ont amené, dans la métallurgie, les merveilleux progrès accomplis dans ces dernières années, qui, notamment, ont contribué à nous apprendre qu'en ajoutant au fer quelques centièmes de carbone, ou de nickel, ou de manganèse, ou de telle autre matière, on peut modifier à son gré soit la ténacité, soit la ductilité de l'acier, et adapter ainsi les qualités de ce métal aux besoins les plus variés : aux grands ouvrages métalliques, aux rails des chemins de fer, au matériel roulant, au matériel naval, et c'est par là que chaque jour permet d'accroître un peu la vitesse de marche sur nos voies ferrées et la vitesse de nos paquebots.

C'est encore en vue du canon qu'on a étudié ces puissants explosifs qui ont ensuite servi dans les machines, dans les exploitations des mines, des carrières, dans les grandes percées comme celle des Alpes qu'on n'eût jamais pu entreprendre sans eux.

D'autre part, les appareils inaugurés pour observer tous les détails du passage du projectile dans l'âme du canon, malgré la durée à peine appréciable du phénomène, et les lois ainsi observées sont d'un haut intérêt pour la physique et la chimie. Ces lois forment l'objet de la balistique intérieure.

La balistique extérieure constitue, de son côté, un des plus beaux problèmes de la mécanique, surtout en raison des vitesses formidables données aujourd'hui aux projectiles. Ces vitesses atteignent de 1 000 à 1 200 mètres par seconde, c'est-à-dire que les canons d'aujourd'hui sont capables d'envoyer leurs projectiles, d'un poids de plusieurs kilogrammes, à destination avec une vitesse trois ou quatre fois plus grande que celle avec laquelle la nature est capable d'envoyer un simple son. Il s'ensuit que, de même que l'éclair se voit avant qu'on entende le tonnerre, de même le projectile arrive avant le bruit de la détonation, et ce fait a donné lieu à des remarques théoriques extrêmement importantes en hydrodynamique, sur la propagation des vagues que le projectile produit dans l'air, remarques faites, pour la première fois, par le savant et regretté capitaine d'artillerie de marine Hugoniot.

Ainsi, on voit que le canon nous instruit de bien des manières. C'est pourquoi, tout en restant très pacifiques, ne souhaitons pas la mort du canon, à charge de réciprocité de sa part, autant que possible. Souhaitons que, de plus en plus, il ne travaille que pour la science et l'humanité.

De toutes les inventions qui ont occupé notre siècle, la seule qui ne soit pas d'origine ancienne, est l'aérostation. C'est sans doute pour cela que le concours scientifique nécessaire pour la faire complètement réussir n'a pas encore pu être obtenu. On s'en console en la promettant à nos successeurs du xxe siècle, qui ne la verront peut-être pas plus que nous. On oublie un peu qu'elle avait déjà été promise à nos pères. L'apparition des premières montgolfières fut naturellement un grand évènement national. On s'en entretenait à la Cour et à la ville. Arago rapporte que, quand la maréchale de Villeroy, qui n'y avait d'abord pas voulu croire, eut vu, de ses propres yeux, s'élever, dans les airs, le premier ballon qui portait le physicien Charles, elle s'est écriée : « Décidément, rien n'est impossible aux hommes ; je suis certaine à présent qu'ils vont découvrir le remède contre la mort. Et dire que je serai peut-être morte à ce moment-là ! » Non seulement on regardait les voyages par ballons dirigeables comme chose prochaine, mais on pensait à la guerre aérienne, non pas simplement aux parcs d'aérostation, tels qu'on les emploie aujourd'hui, ou tels qu'on les a employés pour la première fois, si je ne me trompe, et pour le grand profit de la France, à la bataille de Fleurus, mais à de vrais combats en ballons. On tenait pour très urgent de mettre nos forteresses en état de défense contre ce nouveau genre d'agression.

Une trentaine d'années se passent. Rien n'est changé, et il est assez curieux de rapprocher de l'enthousiasme, bien naturel d'ailleurs, qu'avaient excité les commencements de la conquête de l'air, la prédiction suivante faite, dès les premières années de notre siècle, par un grand ingénieur américain, Evans, l'un des aïeux de l'automobilisme sous toutes ses formes (*) :

« Je ne doute pas, disait Evans, que mes machines n'arrivent à faire marcher des bateaux contre le courant du Mississipi et des voitures sur les grandes routes avec grand profit.

« Le temps viendra où l'on voyagera d'une ville à l'autre dans des voitures mues par des machines à vapeur et marchant *aussi vite que les oiseaux peuvent voler*, 15 ou 20 milles à l'heure... Une voiture partant de Washington le matin, les voyageurs déjeuneront à Baltimore, dîneront à Philadelphie et souperont à New-York le même jour...

« Des machines feront faire aux bateaux 10 à 12 milles par heure, et l'on verra des steamers courir sur le Mississipi, conformément aux prédictions faites il y aura alors bien des années (**). »

Certes, voilà un augure que les autres augures pourraient rencontrer sans rire, mais non sans se découvrir respectueusement. Il est impossible de prévoir plus juste jusque dans les chiffres annoncés. On voit donc que ce grand ingénieur trouvait, il y a près de cent ans, que l'automobilisme est la meilleure concurrence à faire aux oiseaux.

Il n'empêche que le problème de l'aérostation a été poursuivi en Amérique, et il est juste de dire que cette invention si française n'a pas non plus été négligée en France, ce qui n'a pas été le cas de toutes les grandes inventions nationales, notamment de celles de Papin et du marquis de Jouffroy et de celle moins connue de Joseph Cugnot. On sait avec quelle clairvoyance notre illustre confrère Dupuy de Lôme a approfondi la question, et deux de nos officiers qui ont le génie de la mécanique, — ils ne sont pas les seuls, — sont de leur côté, arrivés à de très heureux résultats. L'un d'eux dirige aujourd'hui l'une de nos plus grandes usines de fabrication d'automobiles. Il contribuera certainement

(*) Après toutefois l'ingénieur français Joseph Cugnot, qui a construit, dès l'année 1770, un tricycle à vapeur, très bien conçu et conservé au Conservatoire national des Arts et Métiers.

(**) Thurstone, *Histoire de la machine à vapeur*, traduction de M. Hirsch, vol. 1, p. 108. Le passage en italique a été souligné par l'auteur.

à maintenir à la France la suprématie qu'elle paraît avoir en ce genre d'industrie.

Mais serait-ce à dire qu'après avoir beaucoup médité sur la navigation aérienne, il en serait arrivé à penser aujourd'hui comme Evans pensait il y a près d'un siècle, à savoir : que l'automobile est le plus rapide des oiseaux ?

Il est certain que l'oiseau est une machine dont le rendement est encore incomparablement supérieur à celui des machines les plus légères que nous sachions construire. Il reste donc beaucoup à faire et on n'arrivera peut-être à l'aviation que quand les physiologistes auront, comme ils y tendent, donné plus complètement la main aux mécaniciens, en ce qui touche la machine animale.

Quant au ballon, il ne semble pas devoir constituer une solution définitive. La nature aurait pu faire des oiseaux-ballons, c'est-à-dire des oiseaux se gonflant et se dégonflant à volonté en produisant un gaz plus léger que l'air. Elle l'eût sans doute fait si ce n'eût été moins simple que l'aviation.

Après cela, je ne me dissimule pas que le métier de devin est devenu très ingrat en France, depuis que Rabelais nous a appris qu'un horoscope est à la naissance de chaque sot.

II.

Dans ce qui précède, j'ai montré qu'en fait, ce n'est qu'au cours de notre siècle que la science est sérieusement venue en aide à toutes les inventions passées. Mais alors se pose cette question : Pourquoi est-elle venue précisément pendant notre siècle et non avant ?

Pour répondre à cette question, il convient de faire la remarque suivante : tant que l'homme a cru que la Terre est le centre fixe du monde, tant qu'il n'en a pas connu même la forme, tant qu'il a pu admettre, avec Lucrèce, qu'il ne pourrait pas exister d'habitants à notre antipode parce qu'ils seraient forcés de marcher la tête en bas, il est évident qu'il ne pouvait rien connaître des forces cachées de la nature, ni, par suite, les utiliser. Pour que la science pût prendre naissance et venir au secours de l'industrie, il a donc fallu, avant tout, que quelques libres esprits, quelques hommes de génie et de courage la délivrassent de la servitude du passé. Ces hommes ne sont venus qu'aux environs de la Renaissance, et ce n'est que vers la fin du XVII[e] siècle que leur œuvre fut couronnée par la grande découverte newtonienne de la gravitation universelle. De là est sortie d'abord la mécanique céleste qui s'est développée au XVIII[e] et au XIX[e] siècle et a trouvé en France ses plus puissants apôtres : Clairaut, Laplace, Le Verrier, Delaunay et enfin Tisserand, qui a repris l'œuvre monumentale de Laplace : *la Mécanique céleste*, pour la mettre au courant de la science de notre époque. Je ne cite que des morts.

C'est de la mécanique céleste que Newton et ses successeurs du XVIII[e] siècle ont tiré la mécanique générale. Ce n'est donc qu'au cours de notre siècle qu'a pu se constituer la mécanique industrielle, celle que nous appliquons chaque jour.

Qu'il me soit permis d'insister sur cette genèse de la mécanique. Le fait qu'elle descend du ciel est bon à faire connaître aux utilitaires, à ceux qui n'apprécient la science qu'en tant qu'elle peut leur être d'un profit immédiat, qui se plaignent de ce qu'on en enseigne toujours trop dans nos écoles et qui regardent comme une superfluité toute celle qu'ils ne puisent pas dans ces formulaires, manuels, aide-mémoire, dont quelques-uns, faits consciencieusement, auraient leur utilité, et encore pour ceux qui savent, mais dont nous sommes vraiment trop envahis.

Les encyclopédistes du siècle dernier qui ont procuré à la France la gloire d'avoir offert au monde, mieux qu'une exposition, le premier exposé philosophique, scientifique et technique du savoir humain, et d'où est sortie cette évolution vers la pratique de notre siècle, nous avaient déjà annoncé, comme seul inconvénient de leur grande œuvre, que nous serions débordés par des entrepreneurs d'aide-mémoire. D'Alembert, dans sa magistrale Introduction à l'œuvre de l'*Encyclopédie*, nous met en garde contre leur intrusion dans la science.

Sans doute, il ne faut pas, dans les écoles professionnelles, enseigner la science pour la science. A ce point de vue, l'idée très philosophique qui, au siècle dernier, fut d'abord émise par Lamblardie, de créer l'École polytechnique, c'est-à-dire une école où serait réuni, sous forme doctrinale, un enseignement purement scientifique capable de préparer à toutes les applications, a pu, comme les meilleures idées, avoir son revers. Elle nous a habitués à trop séparer, dans notre enseignement à tous les degrés, la doctrine de l'application. Il faut, au contraire, les réunir. Dès l'école primaire, il faut montrer l'application dans la science et la science dans l'application, et il faut maintenir cette méthode unitaire dans toute la hiérarchie de notre enseignement. Quant à ce qui touche la quantité de science dont il convient d'abreuver chaque élève, il faut s'inspirer non pas strictement de celle qui lui suffirait à son entrée dans une carrière professionnelle, mais chercher à prévoir celle qu'il lui faudra à la fin de sa carrière, en escomptant le progrès si rapide à notre époque. Lui en donner davantage serait inutile, lui en donner moins serait insuffisant et abaisserait peu à peu notre industrie.

Enfin, les méthodes d'enseignement doivent être très générales quand on s'adresse à ceux qui sont destinés à former l'état-major de l'industrie, d'abord parce que ces méthodes sont les voies rapides, celles qui permettent d'enseigner beaucoup de matières en peu de temps, ensuite parce que ceux à qui on enseigne seront précisément voués, pendant toute leur carrière, à la conception des idées générales et des organisations d'ensemble.

Pour les autres, il faut, au contraire, les méthodes de plus en plus directes et voisines du but spécial à atteindre, à mesure qu'on descend dans l'échelle hiérarchique des emplois.

Mais au sommet de l'échelle devra toujours briller la science pure et désintéressee. Ce sont les pays qui la cultivent le mieux qui seront les maîtres du marché de demain, parce que c'est la haute science, celle que les utilitaires croient inutile, soit parce qu'ils l'ignorent, soit parce qu'elle est peut-être en effet l'inutile d'aujourd'hui, qui sera l'utile de demain. N'oublions donc jamais que, si la mécanique appliquée est arrivée aujourd'hui à des résultats si merveilleux, si nous pouvons calculer à l'avance les organes des machines les plus complexes, c'est parce qu'autrefois les pâtres de la Chaldée et de la Judée ont observé les astres, c'est parce que Hipparque a réuni leurs observations aux siennes et nous les a transmises, c'est parce que Tycho-Brahé en a fait de plus parfaites, c'est parce que, il y a deux mille ans passés, un grand géomètre, Apollonius de Perga, a rédigé un traité des sections coniques regardé, pendant des siècles, comme une inutilité, c'est parce que le génie de Képler, utilisant cet admirable ouvrage et les observations de Tycho-Brahé, nous a donné ses sublimes lois qui, elles-mêmes, auront été jugées bien inutiles par les purs utilitaires, c'est enfin parce que Newton a trouvé la loi de la gravitation universelle.

Il semble que la science, comme les anciens prophètes, ait eu besoin de passer des siècles dans la contemplation du ciel, loin des hommes, avant de pouvoir leur apporter la vérité. Il en sera toujours ainsi. Toujours, avant de devenir utile, la science devra aller communier sur les hauteurs, là où s'assemblent les nuages, mais où jaillit aussi l'éclair. Et voilà pourquoi ce n'est qu'à la fin du XVIII[e] siècle que la mécanique pouvait être et a été définitivement constituée et que c'est nous qui, par une extraordinaire faveur, avons, les premiers, pu en profiter. La chimie venait,

de même, d'être constituée par Lavoisier. La physique était encore dans les limbes, où elle attendait le sauveur qui la rachèterait du péché de n'avoir pas encore répudié les six fluides impondérables : fluide calorifique, fluide lumineux, deux fluides électriques et deux fluides magnétiques.

Tel est, en dehors des sciences naturelles qui se formaient aussi en suivant leur voie propre, le bilan de la science au début de ce siècle ; c'est la première fois qu'il existait une véritable réserve scientifique permettant de commencer à guider l'industrie humaine dans les voies de la science.

A cet héritage que nous avons reçu, voyons sommairement ce que notre siècle a ajouté et celui qu'il laissera après lui. C'est par là que nous pourrons juger du degré de vitalité que garde encore l'ère des grandes inventions, même après tout ce qu'elle nous a déjà donné.

Pour me tenir dans la limite de temps qui m'est imposée, je suivrai plus particulièrement la mécanique, parce que c'est à elle que toutes les autres sciences physiques et même naturelles doivent peu à peu être ramenées. Elle est ainsi la science des sciences, le thermomètre de toutes les autres. Tant qu'elle n'a pas existé, il n'y a pas eu, à proprement parler, de science. Ce n'est que depuis que Newton, complétant les travaux de Galilée et d'Huygens, lui a donné quelques fondements solides que la science moderne tout entière est née.

III.

De même que la mécanique céleste, de même que la chimie, c'est en France que la mécanique générale a été définitivement constituée. Après les travaux d'Euler et de D. Bernoulli, d'Alembert a montré qu'elle pouvait être comprise tout entière dans un principe unique qui porte son nom, et Lagrange a traduit ce principe par une formule mathématique qui fait tenir tout le dynamisme newtonien dans une ligne d'écriture. C'est la plus haute perfection qu'une science humaine ait jamais atteinte.

Mais, à cette hauteur et sous cette forme concise, elle était plutôt un témoignage de la puissance de l'esprit humain qu'un instrument usuel. Elle n'avait jusque-là donné la preuve de sa force qu'au ciel. Il fallait la rendre propre aux grands problèmes qu'allait bientôt lui poser le progrès de l'industrie humaine. Ici encore c'est notre pays qui a tout préparé. C'est l'Ecole polytechnique, ce sont nos grandes écoles d'application, c'est l'enseignement d'une pratique rationnelle qui y a été inauguré, ce sont les maîtres qui ont créé cet enseignement qui, par leurs écrits et leurs découvertes, ont rendu cette haute mécanique propre aux applications.

Navier, Cauchy, Poisson, Lamé, de Saint-Venant, créent ou perfectionnent la mécanique moléculaire.

Navier, Clapeyron, Bélanger, Bresse, créent ou perfectionnent la résistance des matériaux.

Poncelet publie ses leçons de l'école de Metz et crée la mécanique industrielle que Coriolis, Bélanger, Résal, Philips, etc., développeront.

Borda, le baron Charles Dupin et Reech perfectionnent l'art nautique et la théorie du navire.

Poinsot apporte à toute la mécanique la géniale notion des couples, qui jettent une lumière nouvelle sur toutes les parties de cette grande science.

Coriolis donne la théorie des mouvements relatifs. Lazare Carnot avait donné celle du choc. Foucault force la terre à écrire sur son propre sol le témoignage de son mouvement diurne et, par ses admirables expériences, découvre les propriétés gyroscopiques de la matière, et la mécanique est assez forte pour les expliquer et créer des appareils de ce genre.

Mais soudain, cette science d'apparence si robuste est arrêtée devant la machine à vapeur dont elle n'a pas, à elle seule, su donner une théorie satisfaisante et utile et, à plus forte raison, devant les machines électriques. Elle est souveraine dans l'étude des mouvements de la matière tangible, mais non dans celle où interviennent ces mouvements invisibles qui s'appellent la *chaleur*, la *lumière*, l'*électricité* et le *magnétisme*. Or nous savons aujourd'hui que ce sont là les grandes puissances de l'univers. C'est la science de ces invisibles que notre siècle a, pour la première fois, entreprise, et c'est là ce qui lui donne son caractère spécifique. Mais, pour cela, il a dû revenir aux idées cartésiennes qui avaient été trop délaissées pendant le XVIIIe siècle.

On s'est rappelé alors que celui qui avait créé la géométrie analytique, qui a eu cette grandiose pensée de *mettre* l'espace figuré *en équation*, nous a, par là même, suggéré l'idée que tout allait pouvoir se mettre en équation ; que toute forme, toute qualité, toute phénoménalité allait pouvoir être quantifiée ou *positivée*, comme diraient les disciples d'Auguste Comte.

Après la mise en équation de l'espace figuré est venue la mise en équation de l'espace impénétrable, c'est-à-dire la mécanique analytique de Lagrange ; puis la mise en équation de l'espace impénétrable dans ses rapports avec l'espace pénétrable, mais substantiel, c'est-à-dire les équations de l'électromagnétisme de Maxwell, d'où sont définitivement sortis, grâce aux travaux de Herz et de ses continuateurs, d'une part l'unité de cette trinité qu'avaient été la lumière, l'électricité et le magnétisme, d'autre part la télégraphie sans fil, c'est-à-dire le fait qu'il y a des germes d'énergie partout, fait qu'il convient de rapprocher du fait pasteurien de la préexistence des germes de vie.

On voit ainsi le génie de Descartes en puissance dans les plus modernes spéculations de la philosophie naturelle. Certes, il s'est trompé souvent, et souvent aussi il n'a produit que des conceptions vagues. Mais c'est quand il visait trop haut. Il ne se contentait pas, comme le feront ses successeurs plus pratiques du XVIIIe siècle, d'envisager le monde corporel. Il regardait l'univers, corps et âme, à la façon de Platon.

Newton, en bâtissant sur la matière tangible, a fait un édifice aux lignes splendides, bien ordonnées et bien saillantes ; mais les bases en devront être élargies. Descartes, en cherchant à bâtir dans le vide des espaces, là où s'accomplit l'éternel frémissement de l'univers, a seul entrevu le fondement durable.

Il n'y a que substance et mouvement : la chaleur est un mouvement, comme la lumière, comme l'électricité. C'est de ces idées cartésiennes que sortiront les théories fécondes de la lumière d'Huygens, de Fresnel, de Maxwell, avec toutes leurs conséquences : photographie, spectroscopie, rayons cathodiques, rayons X, rayons de Becquerel, corps radiants, etc. C'est de là que sortiront aussi le principe de la conservation de l'énergie et le principe de la dissipation de l'énergie qui, avec le principe déjà entrevu par Leibniz de la conservation de la matière établi par Lavoisier, sont les seules propositions universelles que nous possédions sur le mécanisme de l'univers. Elles apparaissent en quelque sorte immanentes. Elles ne le sont sans doute pas ; car il n'y a rien d'immanent dans la science humaine. Toute doctrine, vraie aujourd'hui, en ce qu'elle n'est infirmée par aucun fait connu, sera infirmée par quelque fait nouveau que l'avenir fera apparaître. Nous ne possédons que des contacts passagers avec l'éternelle vérité ; c'est beaucoup pour les applications, c'est peu pour notre curiosité toujours déçue, toujours inassouvie. La mécanique newtonienne est à reviser parce qu'elle sépare le pondérable et l'impondérable. La chimie de Lavoisier et le principe de l'énergie font de même. Il est vraisemblable que ces divers principes se

fondront en un seul dans l'énoncé duquel entreront à la fois le pondérable et l'impondérable. En chimie, cela ramènerait à une sorte de phlogistique envisagé sous un point de vue tout nouveau.

Mais, quoi que réserve le lointain avenir, les grandes doctrines de ce siècle resteront longtemps à la base de toute la science et de toute l'industrie humaine. Elles ne sont pas seulement admirables par leur générosité et leur puissance, mais aussi par leur simplicité. La science newtonienne exige toujours le haut calcul. La science nouvelle, basée sur ces principes, peut s'en passer, dans une certaine mesure, au moins quant à présent, et celui qui, le premier, a imaginé les raisonnements simples et féconds qui ont conduit à ces grandes vérités relatives à l'énergie, est un homme mort à l'âge de trente-six ans, inconnu de son vivant, à peine célèbre en France même aujourd'hui, bien qu'il soit reconnu partout ailleurs comme un génie de premier ordre et que, d'ailleurs, il porte un nom particulièrement cher à notre pays : c'est Sadi Carnot. Il n'est pas un raisonnement, il n'est pas une réflexion que nous fassions sur les grandes forces de la nature, dont on ne trouve l'origine dans les *Réflexions sur la puissance motrice du feu*, publiées par Sadi Carnot en 1824, ou dans ses papiers posthumes, qui contenaient réellement le principe de l'équivalent mécanique de la chaleur, et qui, malheureusement, ont été publiés trop tard pour que la gloire lui en restât. Des deux grands principes modernes, il n'en est qu'un auquel son nom reste attaché, bien qu'il ait conçu les deux. Mais en plus, c'est lui qui, le premier, aura publié les méthodes simples et profondes de la physique moderne.

C'est cette simplicité dans les méthodes et les résultats qui ont fait que, soudain, à notre époque, la science a pu descendre du ciel newtonien sur la terre ; que, pour la première fois, elle a pu se montrer aux hommes sans apparat, leur parler le langage compréhensif de la pratique et, par là, porter ses bienfaits partout : au domicile de l'humble comme dans la demeure du riche, au village comme à la ville, à la ferme comme à l'usine, au champ de labour comme au champ de manœuvre et même au champ de bataille ; qu'elle a débordé hors de ses amphithéâtres d'enseignement, hors de ses laboratoires ; qu'en rendant l'industrie scientifique, elle a, à son tour, trouvé des laboratoires auxiliaires dans toutes les industries et des adeptes dans chaque atelier, chez le contremaître, chez le simple ouvrier même. C'est vraiment dans l'œuvre de Sadi Carnot qu'on trouve l'origine de tout cela. Il semble que ce soit lui qui, le premier, ait travaillé à faire une réalité de ces pensées prophétiques exprimées par Condorcet presque à la veille de sa mort tragique :

« Jusqu'à cette époque, les sciences n'avaient été que le patrimoine de quelques hommes ; déjà elles sont devenues communes, et le moment approche où leurs éléments, leurs principes, leurs méthodes les plus simples deviendront vraiment populaires. C'est alors que leurs applications aux arts, que leur influence sur la justesse générale des esprits sera d'une utilité vraiment universelle. »

Déjà ils sont venus, en partie, les temps annoncés par Condorcet, et c'est Sadi Carnot qui aura été son premier exécuteur testamentaire.

L'Académie des sciences s'est honorée récemment en s'associant à l'œuvre de la statue tardivement élevée à Lavoisier. Nous ne saurions oublier que Sadi Carnot attend encore la sienne. On l'a dit avec raison, il ne lui a peut-être manqué que de vivre pour être le Newton de notre siècle : il en est à coup sûr le Galilée. Du grand astronome de Pise, il avait tout à la fois la finesse et la force.

IV.

Si les premières vérités nouvelles dont je viens de parler ont pu s'établir presque sans le secours des hautes mathématiques, celles-ci n'en restent pas moins, suivant la parole d'Ampère, la langue universelle, celle qui « ajoute à la puissance du raisonnement plus que le télescope n'ajoute à la puissance de l'œil, plus que l'aiguille aimantée n'a ajouté aux progrès de la navigation ».

Elles aussi ont progressé dans notre siècle plus qu'à aucune autre époque. Entre leur puissance d'aujourd'hui et celle d'il y a cent ans, il n'y a pas moins de différence qu'entre la puissance des machines aux deux époques.

Appuyées sur des observations de plus en plus précises, elles permettront à nos successeurs de pénétrer un peu plus profondément dans la connaissance de ce milieu mystérieux qui remplit l'univers, qui en fait un être unique et vivant, où l'œuvre des physiciens et des chimistes et l'œuvre de Pasteur nous auront seulement laissé entrevoir l'origine de toutes les forces aveugles ou conscientes dont dispose la nature. Par les merveilles que nous a données le peu que nous savons sur ces forces, on peut juger de celles qui nous restent cachées, tout en étant peut-être bien près de nous, et qui sont réservées à l'avenir.

Par les quelques vérités générales qu'il a découvertes, notre siècle est celui qui aura le plus largement préparé cet avenir, et il n'en pourra plus jamais être séparé.

EXAMENS ET CONCOURS

ÉCOLE DE CHIMIE INDUSTRIELLE DE LYON (*)

(Concours de 1899.)

Mathématiques.

I. — Trouver une fraction équivalente à la fraction $\frac{1058}{2622}$ et dont la somme des termes soit égale à 80.

II. — **4971**. On a trois alliages formés d'or, d'argent et de cuivre.

Le 1er contient : 2 or, 3 argent, 4 cuivre ;
— 2e — 3 — 4 — 5 — ;
— 3e — 4 — 3 — 5 — .

Quel poids faut-il prélever de chaque alliage pour en obtenir un quatrième renfermant : 9 or, 10 argent, 14 cuivre ?

III. — **4972**. Étant donné un tronc de cône dont les rayons de base sont R et r et la hauteur h, déterminer la distance x d'un plan parallèle aux bases partageant ce tronc de cône en deux parties dont les volumes soient équivalents.

Chimie.

I. — Chlore.

II. — Lois de Berthollet.

Physique.

I. — Tension des vapeurs

II. — **4973**. Une masse de platine pesant 100gr est chauffée dans un fourneau dont on tient à connaître la température ; on la place ensuite dans un vase en laiton pesant 200gr et contenant 600gr d'eau à 10°. La température s'élève à 14° ; on demande la température du fourneau. On prendra 0,03 pour la chaleur spécifique du platine et 0,09 pour celle du laiton.

(*) Les candidats à l'*école française de tannerie* composent sur les mêmes sujets que les candidats à l'école de chimie industrielle de Lyon, à moins qu'ils ne préfèrent prendre part au concours d'admission à l'école supérieure de commerce et y suivre les cours de la section des produits chimiques en même temps que ceux de l'école de tannerie installée à la Faculté.

ÉLÈVES DE LA MARINE MARCHANDE

(Examens de 1900.)

Élèves de 1re Classe.

PREMIER SUJET.

I. — **4974**. Trouver les trois côtés d'un triangle rectangle connaissant son périmètre $2p$ et le rapport m du volume engendré par le triangle tournant autour de l'hypoténuse à la somme des volumes engendrés en tournant autour des côtés de l'angle droit.

II. — Calcul des coordonnées écliptiques d'un astre ; mouvement du pôle du monde dans la sphère céleste.

III. — Exposer et démontrer les principes qui conduisent à la composition de deux couples quelconques.

DEUXIÈME SUJET.

I. — Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3}.$$

II. — Mouvement elliptique du soleil ; loi des aires.

III. — Résoudre un triangle sphérique rectangle connaissant b et B ; discussion des formules trouvées.

Élèves de 2e classe.

PREMIER SUJET

I. — Dans un tronc de pyramide on mène une section parallèle aux bases et équidistante des deux bases ; on demande de l'évaluer en fonction des deux bases.

II. — Sachant que l'on a dans le triangle de position

$$\text{tg D cos L} = \text{sin L cos P} + \text{sin P cotg Z},$$

démontrer la relation

$$2 \cos D \operatorname{cotg} Z = \sin(D - L) \operatorname{cotg} \frac{P}{2} + \sin(D + L) \operatorname{tg} \frac{P}{2}.$$

III. — Calculer l'heure temps moyen du lever vrai d'une étoile, discuter la formule trouvée et expliquer comment on passe du temps de l'astre au temps moyen.

DEUXIÈME SUJET

I. — Un triangle étant donné, on en forme un second qui a pour côtés les médianes du premier et ainsi de suite ; on demande d'évaluer la limite de la somme des aires des triangles ainsi obtenus en fonction de l'aire du premier.

II. — Établir les formules qui permettent de trouver la déclinaison et l'ascension droite d'une étoile, connaissant : 1° l'heure moyenne, la latitude et la longitude du lieu ; 2° la hauteur vraie et l'azimut vrai de l'astre.

III. — Définir le coefficient Pagel et démontrer la formule servant à le déterminer (les candidats sont libres de choisir la méthode).

QUESTIONS PROPOSÉES

4975. — Un domaine plan a la forme d'un polygone irrégulier de huit côtés ; soient $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$ les sommets consécutifs de ce polygone.

La position d'un sommet Ai quelconque a été définie sur le terrain : 1° par sa distance xi à une droite fixe, D, tracée sur le terrain ; 2° par sa distance yi à une autre droite fixe, D', tracée sur le terrain perpendiculairement à la première. On suppose que le relevé de ces distances soit le suivant :

pour A_1 $\begin{cases} x_1 = 60^m, \\ y_1 = 11^m ; \end{cases}$ pour A_2 $\begin{cases} x_2 = 66^m, \\ y_2 = 11^m{,}50 ; \end{cases}$

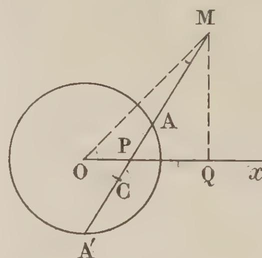
pour A_3 $\begin{cases} x_3 = 80^m, \\ y_3 = 10^m ; \end{cases}$ pour A_6 $\begin{cases} x_6 = 150^m, \\ y_6 = 40^m ; \end{cases}$

pour A_4 $\begin{cases} x_4 = 200^m, \\ y_4 = 12^m ; \end{cases}$ pour A_7 $\begin{cases} x_7 = 63^m, \\ y_7 = 50^m ; \end{cases}$

pour A_5 $\begin{cases} x_5 = 190^m, \\ y_5 = 50^m ; \end{cases}$ pour A_8 $\begin{cases} x_8 = 6^m, \\ y_8 = 12^m. \end{cases}$

1° Calculer la valeur, en mètres carrés, de la superficie du polygone.
2° Calculer à 1 décimètre près le rayon du cercle qui a même surface que le polygone.

(*Bacc. lettres-math., Montpellier, novembre 1900.*)



4976. — P étant un point fixe du plan d'une circonférence O de rayon r, on trace par ce point toutes les droites possibles A'PA, et on marque sur chacune d'elles : 1° le milieu C de la corde AA' ; 2° le point M tel que

$$CP.CM = \left(\frac{AA'}{2}\right)^2.$$

Calculer la projection OQ de la distance OM sur la direction fixe OPx. De son expression conclure le lieu géométrique des points M.

L'un des points M de ce lieu étant regardé comme fixe, on peut construire pour lui, comme pour P, un lieu de définition semblable : montrer qu'il passe en P.

(*Bacc. lettres-math., Rennes, novembre 1900.*)

4977. — Soit un angle XOY ; mener par un point, ou parallèlement à une direction donnée, une droite qui intercepte sur les côtés de cet angle deux segments OP et OQ tels que l'on ait

soit $OP + OQ = l$, soit $OP - OQ = l$,

l désignant une longueur donnée.

Plus généralement, tracer la droite de telle sorte que les segments $OP = p$ et $OQ = q$ soient liés à trois longueurs données a, b, l par l'une ou l'autre des relations $ap + bq = l^2$, $ap - bq = l^2$.

(V. H.)

4978. — Sur les côtés OX et OY d'un angle donné on a marqué deux points A et B, le premier sur OX, le second sur OY ; tracer une droite coupant les côtés de l'angle en deux points P et Q, tels que le rapport $\frac{AP}{BQ}$ ait une valeur donnée.

(V. H.)

4979. — Dans une lame homogène, très mince et d'égale épaisseur, on découpe un hexagone régulier ABCDEF, de côté a et de centre O.

1° De la surface de l'hexagone on enlève le triangle AOB, et on demande de trouver le centre de gravité de l'objet formé par les cinq triangles équilatéraux restants.

2° On enlève encore le nouveau triangle BOC, et on demande le centre de gravité de l'ensemble formé par les quatre triangles équilatéraux restants.

En enlevant successivement ainsi les divers triangles COD, DOE, on formera des figures composées de trois, de deux et de un triangle dont on demande les centres de gravité.

(*Bacc. lettres-sciences, Bordeaux, novembre 1900.*)

4980. — On donne une machine d'Atwood dans laquelle l'espace parcouru pendant la cinquième seconde est égal à $2^m{,}7$. Sachant que les deux poids égaux valent chacun 100^{gr} et le poids additionnel 25^{gr}, trouver la longueur du pendule simple qui bat la seconde au lieu considéré.

(*Bacc. lettres-sciences, Rennes, novembre 1900.*)

4981. — La température étant de 25°, la hauteur de la colonne de mercure dans un baromètre normal est trouvée égale à 758,5 divisions d'une règle de laiton dont chaque division a une longueur de 1^{mm} quand la règle est à 0°.

Calculer : 1° La hauteur barométrique réduite à 0° ;
2° La pression atmosphérique en mégadynes par centimètre carré.

Densité du mercure à 0° . . . . 13,6.
Coefficient de dilatation du mercure. . . . . 0,00018.
— — — — laiton . . . . . . 0,000018.
Accélération de la pesanteur. . . . . 980.
1 mégadyne = 10^6 dynes.

(*Bacc. lettres-math., Oran, novembre 1900.*)

ERRATUM. — Page 72, n° **4962** (4e ligne). — Une erreur typographique a dénaturé l'énoncé de cette question ; il faut lire :

... *au taux de 6 °/o*... au lieu de ... « 3600 » ...

Les solutions seront reçues jusqu'au 5 mars.

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet, FACDOUEL, Dir.

25e Année. — N° 11. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 1er Mars 1901.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Abonnements.. Librairie **Nony** et Cie, Boulevard St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

NOTE D'ARITHMÉTIQUE ET D'ALGÈBRE

par M. **A. Goulard**, professeur au lycée de Marseille.

La somme et le produit de deux nombres commensurables ne peuvent être entiers simultanément que si ces deux nombres sont entiers.

Première démonstration.— On sait que la somme de deux fractions irréductibles ne peut être égale à un nombre entier que si ces fractions ont le même dénominateur. Soient donc $\frac{m}{p}$ et $\frac{n}{p}$ ces deux fractions, m et n étant premiers avec p. Le produit $\frac{mn}{p^2}$ est une fraction irréductible, car mn est premier avec p^2.

Deuxième démonstration.— On sait que les deux nombres dont la somme est a et le produit b sont $\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-4b})$ et $\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-4b})$. Pour que ces deux nombres soient commensurables, il faut que a^2-4b soit un carré parfait ; alors, si a et b sont entiers, $\sqrt{a^2-4b}$ est un entier de même parité que a. Donc $a+\sqrt{a^2-4b}$ et $a-\sqrt{a^2-4b}$ sont pairs, et par suite $\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-4b})$ et $\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-4b})$ sont entiers.

Application.— On sait que, a et b étant commensurables, s'il existe deux nombres commensurables x et y tels que

$$\sqrt{a+2\sqrt{b}} = \sqrt{x}+\sqrt{y},$$

on aura $\quad x+y=a \quad$ et $\quad xy=b.$

Alors, si a et b sont entiers, il résulte de ce qui précède que x et y sont aussi entiers, ce qui permet de les trouver facilement dans les cas simples.

Exemple : $\quad \sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$;

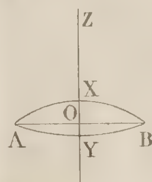
$$\sqrt{5+\sqrt{21}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{1}{2}(10+2\sqrt{21})} = \sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

ÉCOLE NAVALE

(Concours de 1900.)

4813. — *On donne une droite AB, de longueur $2a$; on demande de déterminer sur la perpendiculaire OZ élevée au milieu O de cette droite deux points X et Y tels que, si l'on fait passer par chacun d'eux et par les extrémités de AB deux arcs de cercles : 1° le volume lenticulaire engendré par la surface AXBY, comprise entre ces deux arcs, en tournant autour de OZ soit dans un rapport p avec le cylindre ayant pour hauteur XY et pour diamètre de base la longueur AB ; 2° la surface de cette lentille ait pour valeur $2\pi m^2$. ($OX = x$, $OY = y$).*

Le volume lenticulaire engendré par la figure AXBY est la somme des volumes de deux segments sphériques à une base, de rayon a, et dont les hauteurs sont $OX = x$, $OY = y$. En écrivant que ce volume est dans un rapport p avec le volume du cylindre dont le rayon de base est a et la hauteur $XY = x+y$, on a comme première équation



$$\frac{1}{6}\pi(x^3+y^3)+\frac{1}{2}\pi a^2(x+y) = p\pi a^2(x+y)$$

ou, en supprimant le facteur positif $\pi(x+y)$,

$$x^2-xy+y^2 = 3a^2(2p-1). \qquad (1)$$

D'autre part, la surface de la lentille est la somme des deux zones engendrées par les arcs AXB et AYB ; cette surface a donc pour expression

$$2\pi(Rx+R'y) = 2\pi m^2,$$

R et R' étant les rayons des cercles dont font partie les arcs AXB et AYB. Ces rayons se déduisent, comme on sait, des relations

$$x(2R-x) = a^2 = y(2R'-y),$$

qui donnent

$$2Rx = x^2+a^2, \qquad 2R'y = y^2+a^2,$$

de sorte que la seconde équation du problème est

$$x^2+y^2 = 2(m^2-a^2). \qquad (2)$$

Des équations (1) et (2) on déduit

$$(x^2+y^2)-(x^2-xy+y^2) = xy = 2m^2+a^2-6a^2p,$$

et ensuite

$$x+y = \sqrt{x^2+y^2+2xy} = \sqrt{6(m^2-2a^2p)}.$$

Il résulte de là que x et y sont les racines de l'équation

$$X^2-\sqrt{6(m^2-2a^2p)}.X+2m^2+a^2-6a^2p = 0.$$

La mise en équation suppose le point X sur OZ et le point Y sur le prolongement de OZ ; pour la rendre générale, il suffit de regarder x comme négatif lorsque X vient sur le prolongement de OZ ; de même pour y.

Discussion. — D'après la remarque précédente, pour que les valeurs de x et y conviennent, il faut et il suffit qu'elles soient réelles.

Cette condition entraîne d'abord

$$m^2 - 2a^2p \geqslant 0, \qquad \text{ou} \qquad p \leqslant \frac{m^2}{2a^2};$$

puis $$6(m^2 - 2a^2p) - 4(2m^2 + a^2 - 6a^2p) \geqslant 0$$

ou $$p \geqslant \frac{m^2 + 2a^2}{6a^2}.$$

Ainsi le problème n'est possible que si l'on a

$$\frac{m^2 + 2a^2}{6a^2} \leqslant p \leqslant \frac{m^2}{2a^2},$$

limites compatibles seulement dans le cas où $m > a$, condition évidente d'après (2), et d'ailleurs facile à déduire de la considération de la figure.

Pour fixer la position relative des points X et Y par rapport au point O, il suffit de remarquer que le produit

$$xy = 2m^2 + a^2 - 6a^2p$$

devient négatif lorsque

$$p > \frac{2m^2 + a^2}{6a^2};$$

dans ce cas X et Y sont d'un même côté de O et la lentille devient convexe-concave.

Cas particuliers. — Pour $p = \dfrac{m^2 + 2a^2}{6a^2}$, $x = y = \sqrt{m^2 - a^2}$; la lentille a ses deux faces égales.

Pour $p = \dfrac{2m^2 + a^2}{6a^2}$, $x = 0$, $y = \sqrt{2(m^2 - a^2)}$; la lentille est plan-convexe.

Pour $p = \dfrac{m^2}{2a^2}$, on trouverait $x = -y = \sqrt{m^2 - a^2}$.

Il y a lieu de remarquer que l'on a supprimé le facteur $x + y$ qui était en évidence dans la première équation ; de sorte que l'hypothèse $x + y = 0$ vérifie cette équation quel que soit p. D'ailleurs, si on suppose $x + y = 0$, la lentille aurait une épaisseur nulle, et le cylindre au volume duquel on rapportait celui de la lentille aurait une hauteur nulle.

[Ont résolu la même question : MM. M. Bayor ; Bouzy ; R. Cattin ; J. Haag ; R. Manen.]

4814. — *La durée de l'oscillation d'un pendule simple de longueur* l *est donnée par la formule* $t = \pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$; *calculer à* $\dfrac{1}{100}$ *de seconde près la durée d'oscillation d'un pendule de 300 mètres, sachant que* $g = 9{,}8094$ *en prenant le mètre et la seconde comme unités.*

Première méthode. — (Commandant Guyou).

Tableau du calcul

Opérations à faire	Approximations à vue défaut	Approximations à vue excès	Approximations nécessaires	Résultats définitifs
g	9	10	0,0012	9,81
$Q = \dfrac{300}{g}$	30	34	0,0055	30,581
$R = \sqrt{Q}$	5	6	0,0006	5,530
π	3	4	0,0004	3,1416
$t = \pi R$	15	24	0,01	17,37

Détail des calculs

On doit avoir :

$$\delta t = R'\delta\pi + \pi'\delta R < 0{,}01 - 0{,}005.$$

Il suffit pour cela que l'on ait

$$\delta\pi < \frac{0{,}0025}{R'} > \frac{0{,}0025}{6} > 0{,}0004$$

et $$\delta R < \frac{0{,}0025}{\pi'} > \frac{0{,}00025}{4} > 0{,}0006.$$

Les approximations nécessaires de π et R sont donc 0,0004 et 0,0006.

Or $\delta R = \dfrac{\delta Q}{2\sqrt{Q'}}$; on doit donc avoir

$$\delta Q < 2\sqrt{Q'}.0{,}00055 > 10.0{,}00055 = 0{,}0055,$$

et enfin

$$\frac{300\delta g}{g'^2} < 0{,}005, \quad \text{d'où} \quad \delta g < \frac{g'^2\ 0{,}005}{300} > \frac{80 \times 0{,}005}{300} > 0{,}0012.$$

Le résultat demandé exprimé en secondes est donc 17,37.

Seconde méthode. — (Erreurs relatives).

L'erreur relative d'un produit est égale à la somme des erreurs relatives des facteurs ; or le temps à calculer étant compris entre 10^{sec} et 20^{sec}, une erreur absolue de $\dfrac{1}{100}$ de seconde correspond à une erreur relative comprise entre $\dfrac{1}{1000}$ et $\dfrac{1}{2000}$; il suffit donc de prendre chacun des facteurs π et $\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ avec une erreur relative inférieure à $\dfrac{1}{4000}$.

Si on prend pour π la valeur 3,141, l'erreur absolue est inférieure à $\dfrac{6}{10\,000}$ et l'erreur relative à $\dfrac{2}{10\,000}$ ou $\dfrac{1}{5\,000}$.

Pour avoir $\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ avec une erreur relative inférieure à $\dfrac{1}{4\,000}$, il suffit de calculer le quotient $\dfrac{l}{g}$ avec une erreur relative inférieure à $\dfrac{1}{2\,000}$, c'est-à-dire avec une erreur absolue inférieure à $\dfrac{30}{2\,000} = \dfrac{3}{200}$; donc il suffit d'avoir le quotient avec 2 décimales exactes, et la racine avec une erreur absolue inférieure à $\dfrac{4}{4\,000}$ ou $\dfrac{1}{1\,000}$, soit avec 3 décimales.

Comme l est divisé exactement, il suffit donc de prendre :

1° g avec une erreur absolue inférieure à $\dfrac{1}{200}$, soit $g = 9{,}81$;

2° $\dfrac{l}{g}$ avec une erreur absolue inférieure à $\dfrac{1}{100}$, soit $\dfrac{l}{g} = 30{,}58$;

3° $\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ avec une erreur absolue inférieure à $\dfrac{5}{4000}$, soit $\sqrt{\dfrac{l}{g}} = 5{,}530$;

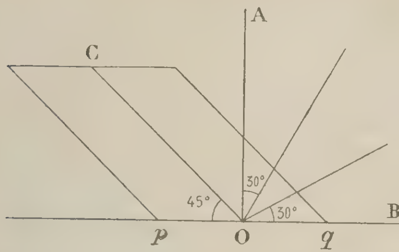
4° $\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ avec une erreur absolue inférieure à $\dfrac{1}{100}$, soit $\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} = 17{,}37$.

(E. ANZEMBERGER, lycée de Lyon.)

Remarque. — Pour les applications de la formule $t = \pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, il est commode de remarquer que $\dfrac{\pi}{\sqrt{g}}$ est à peu près égal à $1 + \dfrac{1}{270}$, de sorte qu'on a très sensiblement, $t = \sqrt{l}$, t étant exprimé en secondes et l en mètres.

[Ont résolu la même question : MM. M. Bayor ; Bouzy ; F. Clabault ; A. Delaire ; G. Foucry ; M. Gondran ; J. Haag ; E. Hugonnier-Ginet.]

4815. — *Deux cônes de révolution ont leur sommet commun O situé dans le plan horizontal de cote zéro. Ils ont même demi-angle au sommet 30°. L'axe du premier est la demi-droite verticale OA dirigée vers le haut; l'axe du second est la demi-droite horizontale OB dirigée vers la droite.*



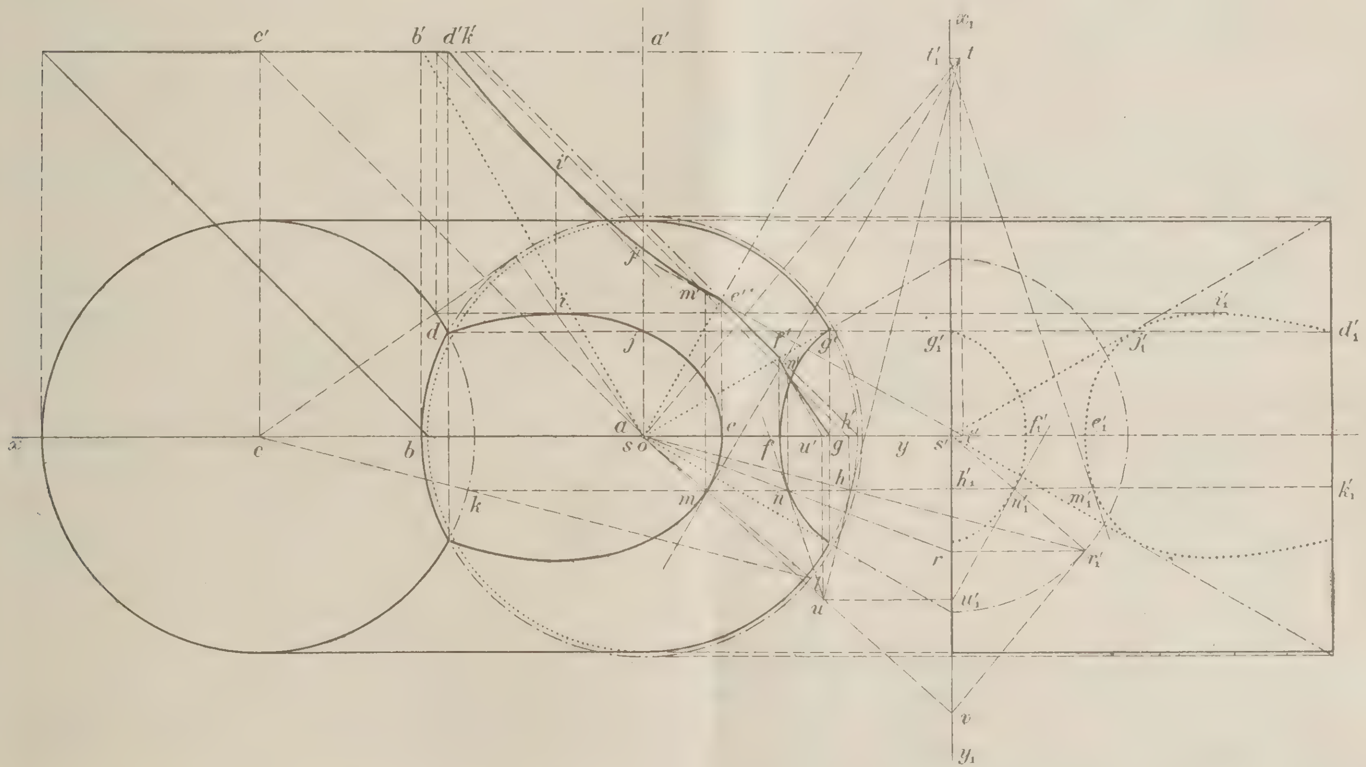
*On considère un cylindre oblique à base circulaire horizontale dont l'axe OC, situé dans le plan OAB, est incliné de 45° sur l'horizon et disposé par rapport à OA et OB comme l'indique la figure. Sa base inférieure est dans le plan horizontal de cote zéro et a pour rayon Op = Oq = 42*mm*. Sa base supérieure est dans le plan horizontal de cote égale à +75*mm.

*Construire les courbes d'intersection de ce cylindre et des deux cônes et représenter la partie solide du cylindre extérieure aux deux cônes. On effectuera cette représentation sur le plan horizontal de cote zéro, sur le plan vertical OAB, et sur un second plan vertical perpendiculaire à OB et distant de O de 60*mm *à droite.*

On déterminera la tangente en un point des courbes d'intersection.

Le plan de la base supérieure du cylindre rencontre le cône à axe vertical suivant un cercle de centre (a, a') et de rayon $a'b'$; ce cercle a avec la base (c, c') du cylindre deux points communs tels que (d, d', d'_1).

Le plan OAB détermine dans le cylindre et dans les deux cônes des génératrices de contour apparent se coupant aux points (e, e', e'_1) et (f, f', f'_1).



Enfin la base inférieure du cylindre a avec le cône d'axe horizontal deux points communs tels que (g, g', g'_1).

Le plan OAB étant un plan de symétrie du cylindre et des deux cônes, les courbes d'intersection sont symétriques par rapport à ce plan, de sorte que les parties symétriques ont leurs projections horizontales symétriques par rapport à xy; il en est de même pour les projections verticales sur le plan de profil; quant aux projections verticales sur le plan OAB, elles se superposent.

Construction d'un point commun au cylindre et à chacun des deux cônes, ainsi que la tangente en ce point.

Un plan auxiliaire quelconque passant par OC coupe le cylindre suivant la génératrice $(hk, h'k', h'_1k'_1)$ et le premier cône suivant la génératrice ol; ces génératrices se coupent en (m, m', m'_1) et en menant les plans tangents au cylindre et au cône suivant ces génératrices, leurs traces horizontales se rencontrent au point (t, t', t'_1), (la trace horizontale du plan tangent au cône est perpendiculaire à ol), qui est un second point de la tangente en M à l'intersection.

En appliquant cette construction au plan auxiliaire limite tangent au premier cône, on obtient le point (i, i', i'_1) pour lequel la tangente est parallèle à OC. On obtiendrait de même le point (j, j', j'_1) commun au cylindre et à l'une des génératrices du cône située dans le plan de profil oa'.

La droite OC, également inclinée par rapport au plan horizontal et par rapport au second plan vertical de profil a sa trace verticale sur ce dernier plan confondue avec o, de sorte que ohr'_1 est la nouvelle trace verticale ou horizontale du plan auxiliaire déjà considéré; ce plan coupe donc le second cône suivant la génératrice $(sr, s'r'_1)$ qui fournit ainsi le point (n, n'_1, n'). En menant le plan tangent au cône suivant cette génératrice, sa trace horizontale sv rencontre en (u, u'_1, u') la trace horizontale ht du plan tangent au cylindre; par suite $(nu, n'_1u'_1, n'u')$ est la tangente au point commun au cylindre et au second cône.

Sur le plan horizontal et sur le plan OAB, les projections des

courbes d'intersection sont entièrement vues; quant aux portions intérieures des génératrices de contour apparent des deux cônes et aux projections de l'intersection sur le second plan vertical, ces parties sont entièrement cachées par le cylindre.

(David Lwów, à Piatra N.)

4816. — $ABA'B'$ *est un trapèze inscriptible et circonscriptible : il est nécessairement isocèle.*

Soient O *et* I *les centres respectifs des cercles circonscrit et inscrit ;* M *le point de contact de* AB *et de la circonférence inscrite ;* OR *la perpendiculaire abaissée de* O *sur* AB ; MQ *la perpendiculaire abaissée de* M *sur* OI, *et* P *son point de rencontre avec* OR ; T *le point de rencontre de* AB *et de* OI.

Démontrer les propriétés suivantes :

1° *La circonférence décrite sur* AB *comme diamètre est tangente en* I *à* OI, *et le point* T *est d'égale puissance par rapport au point* I *et à la circonférence* O ;

2° *Les quatre points* A, M, B, T *forment une division harmonique :*

3° $\overline{RI}^2 = \overline{OR} \times \overline{IM}$ *et l'angle* OAP *est droit.*

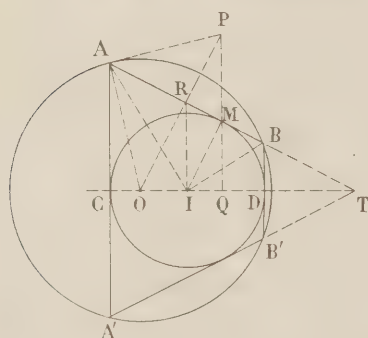
Appliquer ces propriétés à la construction d'un trapèze inscriptible et circonscriptible connaissant :

1° *son périmètre et le rayon du cercle circonscrit ;*

2° *la distance* OI *des centres des cercles inscrit et circonscrit et le rayon du cercle circonscrit;*

3° *les rayons des cercles inscrit et circonscrit.*

1° La droite RI joignant les milieux de AB et CD est parallèle à AC, c'est-à-dire perpendiculaire à OT; de plus, dans le trapèze ACDB,



$$RI = \frac{AC + BD}{2} = \frac{AM + BM}{2} = \frac{AB}{2} = RA$$

Par suite le cercle de diamètre AB est tangent en I à OI. Il en résulte que

$$\overline{TI}^2 = TA.TB,$$

relation qui exprime que le point T a même puissance par rapport au point I et au cercle O.

2° IB et IA étant les bissectrices intérieure et extérieure du triangle MIT, B et A sont conjugués harmoniques par rapport à MT.

Autrement : Dans le triangle rectangle RIT, on a

$$RM.\ RT = \overline{RI}^2 = \overline{RA}^2 \text{ ou } \overline{RB}^2,$$

ce qui montre que la division AMBT est harmonique.

3° Les angles ORI et RIM sont égaux comme alternes-internes; les triangles rectangles ORI et MIR sont donc semblables et donnent

$$\frac{OR}{RI} = \frac{RI}{IM}$$

ou

$$\overline{RI}^2 = OR.\ IM.$$

D'ailleurs, $IM = RP$ (côtés opposés d'un parallélogramme) et $RI = RA$; la relation précédente s'écrit donc

$$\overline{RA}^2 = OR.\ RP,$$

et exprime que le triangle OAP est rectangle en A.

Autrement : La division AMBT étant harmonique, la droite PMQ est la polaire du point T par rapport au cercle O, et comme telle contient le pôle de la droite ABT; ce pôle est donc en P, intersection de MQ avec OR. Par suite PA est tangente en A au cercle O et l'angle OAP est droit; on en déduit ensuite

$$\overline{RA}^2 = OR.RP \qquad \text{ou} \qquad \overline{RI}^2 = OR.IM.$$

Constructions du trapèze. — 1° *On donne son périmètre* $2p$ *et le rayon* R *du cercle circonscrit.*

On a (1re figure)

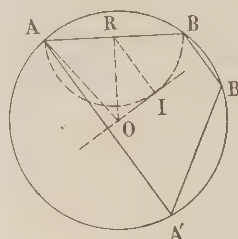
$$AC + AB + BD = p$$

ou, comme

$$AC + BD = AM + MB = AB,$$

$$AB = \frac{p}{2}.$$

D'où cette construction : Après avoir tracé le cercle O de rayon R, on y inscrit la corde $AB = \frac{p}{2}$; puis on décrit le cercle de diamètre AB auquel on mène la tangente OI : le reste s'achève facilement.



La seule condition de possibilité est que la tangente OI existe, c'est-à-dire qu'on ait

$$OR \geqslant \frac{p}{4}$$

ou

$$\sqrt{R^2 - \left(\frac{p}{4}\right)^2} \geqslant \frac{p}{4}$$

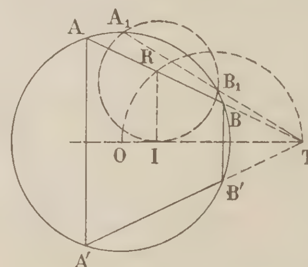
ou

$$p \leqslant 2R\sqrt{2}.$$

Lorsque $p = 2R\sqrt{2}$, O est sur le cercle de diamètre AB, et la tangente en O est parallèle à AB; le trapèze devient un carré.

2° *On donne la distance* OI *et le rayon* R.

Le point T étant d'égale puissance par rapport au point I et au cercle O s'obtient en traçant un cercle quelconque tangent en I à OI et coupant le cercle O, de rayon R, en A_1 et B_1 : la corde $A'B'$ rencontre OI au point T, puisque $\overline{TI}^2 = TA_1.TB_1 = TA.TB$. On détermine ensuite le point R par l'intersection du cercle de diamètre OT avec la perpendiculaire en I à OT Connaissant ainsi le côté AB du trapèze, on achève sa construction en menant les cordes AA', BB' perpendiculaires à OI, et en tirant A'B'.



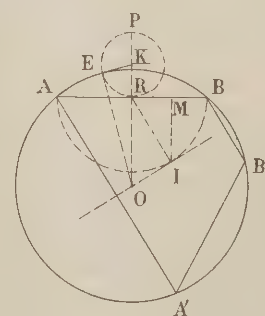
Le problème est toujours possible pour tout point I situé à l'intérieur du cercle O.

Lorsque I coïncide avec O, le point T est rejeté à l'infini, et le trapèze se transforme en un carré.

3° *On donne les rayons* R *et* r *des cercles* O *et* I.

On a vu que $\overline{OA}^2 = OR\ .\ OP$; donc le cercle O coupe orthogonalement le cercle de diamètre $PR = IM = r$.

De là cette construction : Sur une tangente en E au cercle O on prend $EK = \frac{r}{2}$, et l'on décrit le cercle de centre K et de rayon KE, qui coupe en P, R le diamètre KO ; élevant ensuite en R la perpendiculaire AB à OK, on a le côté AB, et le reste s'achève comme dans la première construction.



La seule condition de possibilité est que la tangente OI puisse être menée au cercle de diamètre AB, ce qui nécessite

$$OR \geqslant RA$$

ou, comme $AR = \sqrt{OR\ .\ r}$,

$$OR \geqslant r$$

ou $$OK - \frac{r}{2} \geqslant r$$

ou $$\sqrt{R^2 + \frac{r^2}{4}} \geqslant \frac{3r}{2}$$

ou enfin $$r \leqslant \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Quand $r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, I se confond avec O, et le trapèze devient un carré.

(J. HAAG, collège de Pont-à-Mousson.)

[Ont complètement résolu la même question : MM. R. Barthélemy ; M. Bayor ; Bouzy ; F. Clabault ; G. Guinand ; R. Henry ; H. Janois ; A. Legros ; R. Manen ; G. Marquet ; P. Petit ; P. Thonet ; P. Valentin.]

[Ont partiellement résolu la même question : MM. E. Anzemberger ; E. Cognet ; G. Foucry ; E. Hugonnier-Ginet ; R. Mouzon ; Noël ; A. Vannier.]

4817. — *Calculer les valeurs de x comprises entre zéro et 90° satisfaisant à la formule*

$$\operatorname{tg}^2(2x + 310°) = \frac{\cos(3\varphi + 37°)\sin^3 139°19'28''}{\cos 218°19'25''}$$

sachant que l'on a

$$\operatorname{tg}\varphi = (0{,}94732)^5 \operatorname{tg} 131°19'15''.$$

Ramenons d'abord les arcs au premier quadrant en observant que

$$\sin 139°19'28'' = \sin(180° - 139°19'28'') = \sin 40°40'32'',$$
$$\cos 218°19'25'' = -\cos(218°19'25'' - 180°) = -\cos 38°19'25'',$$
$$\operatorname{tg} 131°19'15'' = -\operatorname{tg}(180° - 131°19'15'') = -\operatorname{tg} 48°40'45''.$$

Les deux formules deviennent alors

$$\operatorname{tg}^2(2x + 310°) = \frac{\cos(3\varphi + 37°)\sin^3 40°40'32''}{-\cos 38°19'25''},$$
$$\operatorname{tg}\varphi = -(0{,}94732)^5 \operatorname{tg} 48°40'45''.$$

I. *Calcul des valeurs de φ.* — Posons

$$\operatorname{tg}\alpha = (0{,}94732)^5 \operatorname{tg} 48°40'45'',$$

α étant un angle du premier quadrant fourni par les tables. On en déduit

$$\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(-\alpha)$$

ou $$\varphi = k\,.\,180 - \alpha.$$

En calculant α par les tables à 7 décimales, on trouve

$$5 \log 0{,}94732 = \overline{1},8824835$$
$$\log \operatorname{tg} 48°40'45'' = 0{,}0559291$$
$$\log \operatorname{tg}\alpha = \overline{1},9384126,$$
$$\alpha = 40°57'3'',54.$$

II. *Calcul des valeurs de x.* — On a

$$\cos(3\varphi + 37°) = \cos(3k\,.\,180° - 3\alpha + 37°)$$
$$= \pm\cos(3\alpha - 37°)$$
$$= \pm\cos 85°51'10'',65.$$

Par suite

$$\operatorname{tg}^2(2x + 310°) = \mp\frac{\cos 85°51'10'',65 \sin^3 40°40'32''}{\cos 38°19'25''}.$$

Le premier membre étant toujours positif, le signe — doit être rejeté, et en posant

$$\operatorname{tg}^2\beta = \frac{\cos 85°51'10'',65 \sin^3 40°40'32''}{\cos 38°19'25''},$$

β étant un angle du premier quadrant, on a

$$\operatorname{tg}(2x + 310°) = \pm\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\pm\beta,$$
$$2x + 310° = k\,.\,180° \pm \beta,$$

d'où $$x = k\,.\,90° - 155° \pm \frac{\beta}{2}.$$

Calculons maintenant β au moyen des tables.

$$\log \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}(\log\cos 85°51'10'',65 + 3\log\sin 40°40'32'' + \operatorname{colog}\cos 38°19'25'').$$

$$\log\cos 85°51'10'',65 = \overline{2},8592365$$
$$3\log\sin 40°40'32'' = \overline{1},4422928$$
$$\operatorname{colog}\cos 38°19'25'' = 0{,}1053955$$
$$\overline{2},4069248,$$
$$\log\operatorname{tg}\beta = \overline{1},2034624,$$
$$\beta = 9°4'36'',30.$$

Tous les arcs x ont ainsi pour formule générale

$$x = k\,.\,90° - 155° \pm 4°32'18'',15\,;$$

les arcs compris entre 0 et 90° s'obtiennent en faisant $k = 2$, ce qui donne les deux arcs :

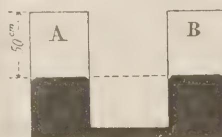
$$x_1 = 29°32'18'',15$$

et $$x_2 = 20°27'41'',85.$$

(Ch. GODARD, à Nantes.)

[M. H. Janois, à Saint-Calais, a résolu la même question.]

4818. — *Deux tubes verticaux A et B cylindriques, de même section et de même hauteur, communiquent à leur partie inférieure par un tube horizontal et sont fermés à leur partie supérieure. Ils contiennent du mercure et de l'air sec.*



Lorsque les deux tubes sont à la même température, le niveau est le même dans les deux tubes, et la partie occupée par l'air a une hauteur de 50cm.

La température du tube A étant maintenue à 0° et celle du tube B à 100°, on constate que le niveau du mercure dans le tube B baisse de 5cm. Quelle est, à un centimètre près, la pression de l'air contenu dans l'un et l'autre tube lorsque leur température commune est de 0° ?

On ne tiendra pas compte de la dilatation du mercure ni de celle de l'enveloppe.

Soient x la pression dans l'un et l'autre tube lorsque leur température commune est 0° ; f la pression dans le tube A, et f' la pression dans le tube B quand leurs températures respectives sont 0° et 100°.

Puisqu'on ne tient pas compte de la dilatation du mercure ni de celle de l'enveloppe, si le niveau du mercure dans le tube B s'abaisse de 5cm, le niveau du mercure dans le tube A doit s'élever de 5cm. On a donc

$$f + 10 = f', \qquad (1)$$

ces pressions étant évaluées sur des surfaces égales dans les deux tubes.

Appliquant la loi de Mariotte à l'air du tube A, on a, s désignant la section des tubes,

$$50xs = (50 - 5)sf,$$

d'où $$f = \frac{50x}{45}.$$

Pour l'air contenu dans le tube B, il faut appliquer l'équation qui réunit les lois de Mariotte et de Gay-Lussac :

$$50xs = \frac{(50 + 5)s \times f'}{1 + \frac{100}{273}},$$

d'où $$f' = \frac{50 \times 373x}{55 \times 273}.$$

Remplaçant f et f' par leur valeur dans l'équation (1), il vient

$$\frac{50x}{45} + 10 = \frac{50 \times 373x}{55 \times 273},$$

d'où $x = 76^{cm}$ à un centimètre près.

(M. GONDRAN.)

[Ont résolu la même question : MM. Bayor ; Bouzy ; A. Delaire ; J. Haag ; R. Henry ; E. Hugonnier-Ginet ; J. Laverdant ; David Lwow ; L. Patin ; A. de Saint-Gabriel ; C. Tourneux ; P. Valentin ; L. Vige.]

ARITHMÉTIQUE

4967. — *Soient* A, B, C *trois nombres entiers composés :*

A, *de* $2m$ *chiffres égaux à* 1 ;

B, *de* $m+1$ *chiffres égaux à* 1 ;

C, *de* m *chiffres égaux à* 6.

Démontrer que $A+B+C+8$ *est un carré parfait.*

En effet, tout nombre entier formé par m chiffres 1 est égal à

$$10^{m-1} + 10^{m-2} + \ldots + 10 + 1 = \frac{10^m - 1}{10 - 1}.$$

On peut donc écrire

$$A = \frac{10^{2m} - 1}{9}, \quad B = \frac{10^{m+1} - 1}{9}, \quad C = 6.\frac{10^m - 1}{9},$$

d'où l'on déduit

$$A + B + C + 8 = \frac{10^{2m} - 1 + 10^{m+1} - 1 + 6.10^m - 6}{9} + 8$$

$$= \frac{10^{2m} + 10^{m+1} + 6.10^m + 64}{9}$$

$$= \frac{10^{2m} + 16.10^m + 8^2}{9}$$

$$= \left(\frac{10^m + 8}{3}\right)^2.$$

L'expression $A+B+C+8$ est ainsi le carré du nombre entier

$$\frac{10^m + 8}{3} = \overbrace{33\ldots3}^{m} + 3 = \overbrace{33\ldots36}^{m}.$$

(LÚIS DE ALBA, à Malaga.)

[Ont résolu la même question : MM. L. Barberot ; A. Bernardeau ; R. Cattin ; G. Desnoës ; Durand ; E. Foucart ; A. Gheysen ; P. Guerrier ; A. Haar ; E. Hugonnier ; A. Jamet ; M. Laurence ; A. Legros ; E. Licope ; H. Martin ; H. Palustran ; F. Pégorier ; P. Plisson ; R. Rives ; A. Rousseau ; J. Schwarz ; P. Septembre ; E. Serres ; V. Thébault ; H. Thibon ; P. Thonet ; J. Trouillé ; F. Vérot ; P. Zlatco ; Mlle A. Saleilles ; MM. E. Barbé ; M. Bernard ; O. Guittet ; D. Kœnig ; P. Michaud ; Ch. Vallot.]

ALGÈBRE

4963. — *Un chemin de fer* AX *part d'une ville* A *et passe à une distance* δ *d'une autre ville* B. *En quel point* D *de* AX *faut-il établir une gare pour qu'en la reliant à la localité* B *par une route, le temps employé pour aller de* A *en* B *soit un minimum ? On connaît la distance* $AC = d$, *ainsi que la vitesse* v *du train et celle* v' *du parcours de la route* BD.

En posant $AD = x$, le temps mis pour parcourir le chemin ADB est

$$\frac{AD}{v} + \frac{DB}{v'} = \frac{x}{v} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + \delta^2}}{v'}.$$

Pour déterminer le minimum de cette quantité, égalons-la à m, et cherchons pour quelles valeurs de m la valeur correspondante de x est réelle et positive.

L'équation

$$\frac{x}{v} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + \delta^2}}{v'} = m,$$

devient $$\sqrt{(d-x)^2 + \delta^2} = \frac{v'}{v}(mv - x)$$

ou, en élevant au carré et simplifiant,

$$(v^2 - v'^2)x^2 - 2v(dv - mv'^2)x + v^2(d^2 + \delta^2 - mv'^2) = 0.$$

La condition de réalité est

$$v^2(dv - mv'^2) - (v^2 - v'^2) v^2(d^2 + \delta^2 - mv'^2) \geqslant 0$$

ou

$$v^2v'^2m^2 - 2vv'^2dm + v'^2(d^2 + \delta^2) - v^2\delta^2 \geqslant 0.$$

On satisfait à cette inégalité en prenant m extérieur aux deux valeurs qui annulent le premier membre. La plus grande de ces valeurs, soit

$$m'' = \frac{v'd + \delta\sqrt{v^2 - v'^2}}{vv'},$$

représente donc le minimum de m si toutefois la valeur correspondante de x est positive. Or, cette valeur est

$$x = \frac{v(dv - m''v'^2)}{v^2 - v'^2} = d - \frac{v'\delta}{\sqrt{v^2 - v'^2}},$$

quantité positive lorsque

$$d^2(v^2 - v'^2) > v'^2\delta^2$$

ou $$\frac{v}{v'} > \frac{\sqrt{d^2 + \delta^2}}{d}.$$

Cette condition remplie, la gare D est entre A et C ; elle doit être placée en A si le rapport $\frac{v}{v'}$ est égal ou inférieur à

$$\frac{\sqrt{d^2 + \delta^2}}{d} = \frac{AB}{AC}.$$

(ANTOINE SCOTTO, lycée d'Alger.)

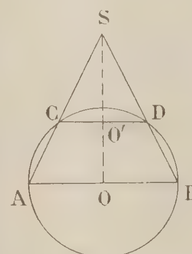
[Ont résolu la même question : MM. E. Barbé ; Durand ; E. Gernez-Pfanmatter ; E. Hugonnier ; Lemmet ; F. Mestre.]

GÉOMÉTRIE

4965. — *Étant donnée une sphère* R, *on construit sur un grand cercle comme base un cône droit équivalent à la moitié du volume de la sphère. On demande :*

1° de trouver le rayon du petit cercle d'intersection ;

2° d'évaluer le volume de la portion du cône comprise entre la base et le plan du petit cercle.



Soient SAB la section déterminée dans le cône par un plan passant par le sommet S du cône et le centre O de la sphère donnée, et CD la section déterminée par ce même plan dans le petit cercle d'intersection O' du cône et de la sphère. En désignant par h la hauteur du cône SAB, on a

$$\frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$$

d'où $h = 2R.$

Or, on a $SA \times SC = (SO + R)(SO - R) = 3R^2$, et, comme dans le triangle AOS, $SA = R\sqrt{5}$, on en déduit

$$SC = \frac{3R}{\sqrt{5}} = \frac{3R\sqrt{5}}{5}.$$

En posant $O'C = r$, la similitude des deux triangles SOC et SOA donne

$$\frac{r}{R} = \frac{SC}{SA} = \frac{3}{5},$$

d'où
$$r = \frac{3R}{5}.$$

Les volumes des deux cônes SCD et SAB étant proportionnels aux cubes de leurs éléments linéaires homologues, on a

$$\text{Vol. SCD} = \frac{2}{3}\pi R^3 \times \frac{27}{125};$$

par suite, le volume de la portion du cône comprise entre la base et le plan du petit cercle a pour expression

$$\frac{2}{3}\pi R^3\left(1 - \frac{27}{125}\right) = \frac{196\pi R^3}{375}.$$

(E. HUGONNIER, école nationale professionnelle de Voiron.)

[Ont résolu la même question : MM. L. Barberot ; A. Bernardeau ; M. Beyney ; A. Bourlat ; J. Brouard ; D. Cognet ; J. Cougnoux ; Delage ; Desmoulins ; H. Dobryzniak ; Ch. Dupas ; Durand ; Etienne ; G. F. ; E. Foucart ; Gérard ; E. Gernez-Pfanmatter ; R. Grenouillot ; P. Guerrier ; G. Guillaume ; A. James ; A. Lapresle ; M. Laurence ; R. Lautré ; L. Lefèvre ; P. Legros ; Lemmet ; G. Lepoivre ; G. Lesage ; J. Lestable ; L. Lestocart ; E. Licope ; P. Luquet ; A. Mabon ; H. Martin ; M. Marx ; J. Maury ; F. Mestre ; A. Meynier ; F. Pégorier ; M. Petitjean ; H. Pourtoy ; J. Raymond ; A. Renault ; R. Rives ; E. Robert ; E. Roncaglia ; A. Rousseau ; P. Saintin ; A. Scotto; E. Serres ; J. Trouillé ; P. Valentin ; G. Ybert ; P. Zlatco ; Mlle G. Oddos ; MM. E. Anzemberger ; E. Barbé ; M. Bernard ; Ducongé-Cabireau ; Gasluc de Sénébron ; R. Henry.]

TRIGONOMÉTRIE

4957. — *Les angles ω et ω' étant assujettis à vérifier la relation*

$$\frac{\sin\omega}{R\cos\omega + a} = \frac{\sin\omega'}{R\cos\omega' - a},$$

prouver que la différence

$$\frac{a^2 - R^2}{2}\left(\frac{1}{a\cos\omega' - R} - \frac{1}{a\cos\omega + R}\right)$$

conserve une valeur constante.

La relation entre ω et ω' peut s'écrire successivement

$$R\sin\omega\cos\omega' - a\sin\omega = R\cos\omega\sin\omega' + a\sin\omega',$$
$$R\sin(\omega - \omega') = a(\sin\omega + \sin\omega'),$$
$$2R\sin\frac{\omega - \omega'}{2}\cos\frac{\omega - \omega'}{2} = 2a\sin\frac{\omega + \omega'}{2}\cos\frac{\omega - \omega'}{2},$$
$$\sin\frac{\omega - \omega'}{2} = \frac{a}{R}\sin\frac{\omega + \omega'}{2}. \qquad (1)$$

Transformons maintenant l'expression proposée en cherchant à mettre en évidence les arcs $\frac{\omega - \omega'}{2}$ et $\frac{\omega + \omega'}{2}$. Il vient

$$\frac{a^2 - R^2}{2}\left(\frac{1}{a\cos\omega' - R} - \frac{1}{a\cos\omega + R}\right)$$
$$= \frac{(a^2 - R^2)[a(\cos\omega - \cos\omega') + 2R]}{2[a^2\cos\omega\cos\omega' - aR(\cos\omega - \cos\omega') - R^2]}$$
$$= \frac{2(a^2 - R^2)\left(R - a\sin\frac{\omega + \omega'}{2}\sin\frac{\omega - \omega'}{2}\right)}{a^2[\cos(\omega - \omega') + \cos(\omega + \omega')] + 4aR\sin\frac{\omega + \omega'}{2}\sin\frac{\omega - \omega'}{2} - 2R^2}$$
$$= \frac{(a^2 - R^2)\left(R - a\sin\frac{\omega + \omega'}{2}\sin\frac{\omega - \omega'}{2}\right)}{a^2\left(1 - \sin^2\frac{\omega - \omega'}{2} - \sin^2\frac{\omega + \omega'}{2}\right) + 2aR\sin\frac{\omega + \omega'}{2}\sin\frac{\omega - \omega'}{2} - R^2}$$

En remplaçant $\sin\frac{\omega - \omega'}{2}$ par la valeur (1), l'expression précédente devient

$$\frac{(a^2 - R^2)\left(R - \frac{a^2}{R}\sin^2\frac{\omega + \omega'}{2}\right)}{a^2\left[1 - \left(\frac{a^2}{R^2} + 1\right)\sin^2\frac{\omega + \omega'}{2}\right] + 2a^2\sin^2\frac{\omega + \omega'}{2} - R^2}$$
$$= \frac{(a^2 - R^2)\left(R - \frac{a^2}{R}\sin^2\frac{\omega + \omega'}{2}\right)}{a^2 - R^2 - a^2\left(\frac{a^2}{R^2} - 1\right)\sin^2\frac{\omega + \omega'}{2}}$$
$$= \frac{R(a^2 - R^2)\left(R^2 - a^2\sin^2\frac{\omega + \omega'}{2}\right)}{(a^2 - R^2)\left(R^2 - a^2\sin^2\frac{\omega + \omega'}{2}\right)} = R.$$

(M. LAURENCE, lycée de Bordeaux.)

[Ont résolu la même question : MM. M. Amiot ; E. Barbé ; H. Belbenoit ; L. David ; F. Durand ; E. Hugonnier ; E. Licope ; F. Pégorier.]

PHYSIQUE

4960. — *On demande le volume d'un aérostat rempli d'hydrogène capable d'enlever 1 250kg avec une force ascensionnelle de 10kg.*

Le poids du litre d'air à 0° et sous la pression 76cm de mercure est 1gr,293.

La densité de l'hydrogène par rapport à l'air est 0,0693.

On négligera le volume de l'enveloppe et celui de la nacelle.

(*Bacc. lettres-math., Lyon, mars 1900.*)

Soit V le volume du ballon en mètres cubes. Écrivons que la poussée que reçoit le ballon, diminuée du poids de l'hydrogène contenu dans le ballon et du poids à soulever, est égale à une force de 10kg. On a

$$V \times 1{,}293 - V \times 1{,}293 \times 0{,}0693 - 1250 = 10,$$

d'où
$$V \times 1{,}293\,(1 - 0{,}0693) = 1260.$$

On en tire
$$V = \frac{1260}{1{,}293(1 - 0{,}0693)} = 1047^{mc},041.$$

(DESMOULINS.)

[Ont résolu la même question : Mlle G. Oddos ; MM. Andrées ; Antoine ; Amiot ; Arcizet ; Bancillon ; Bannerot ; Beuret ; Beyney ; Beckerich ; Belbenoit ; Bonnot ; Bourrec ; Carliton ; Chauvalon ; Cognet ; David ; L. D. ; Desnoës ; Dobryzniak ; Durand ; Foucry ; Gérard ; Gernez ; Grenouillot ; Grünfelder ; Guyot ; Guerrier ; Godfroy ; Henry ; Hugonnier ; Larcher ; Lefèvre ; Lestable ; Luquet ; Martin ; Maben ; Mestre ; Megnier ; Marx ; Palustran ; Périnet ; Portalier ; Pourtoy ; Pernidun ; Poirier ; Raymond ; Royer ; Saintin ; Sanpité ; Serres ; Tastet ; Trouillé ; Valentin ; Vannier ; Weimann ; Ybert.]

4961. — *On donne une corde AB de longueur l rendue immobile en un point C tel que l'on ait* $\overline{AC}^2 = AB \times BC$. *Trouver le rapport des hauteurs des deux sons que rendraient les deux segments vibrant transversalement. La corde tout entière rendant le fa♯ de la quatrième octave, trouver les hauteurs des sons des deux segments. On donne la tierce = 435 vibrations doubles.*



(*Bacc. lettres-sciences, Rennes, juillet 1900.*)

La relation $\overline{AC}^2 = AB \times BC$ indique que la corde AB est partagée en moyenne et extrême raison. On a donc

$$AC = \frac{l}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

$$BC = \frac{l}{2}(3 - \sqrt{5}).$$

Or, les nombres des vibrations transversales exécutées par des cordes de longueurs différentes, toutes autres choses égales d'ailleurs, étant inversement proportionnels aux longueurs, le rapport des hauteurs des deux sons que rendraient les deux segments est

$$\frac{n}{n'} = \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} = \frac{191}{309},$$

n représentant le nombre de vibrations du segment AC, n' celui du segment BC.

La corde tout entière, rendant le fa♯, exécute

$$\frac{435 \times 6 \times 4 \times 25}{5 \times 3 \times 24} = 725 \text{ vibrations doubles.}$$

Le segment AC exécute donc par seconde

$$\frac{l \times 725}{\frac{l}{2}(\sqrt{5} - 1)} = 1173 \text{ vibrations,}$$

et le segment BC

$$\frac{l \times 725}{\frac{l}{2}(3 - \sqrt{5})} = 1898 \text{ vibrations.}$$

(A. MEYNIER.)

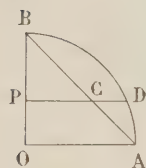
[Ont résolu la même question : Mlle Lauzanne ; MM. Bernard ; Bernardeau ; Cattin ; Desmoulins ; Gernez ; Hugonnier ; James ; Lemmet ; Luquet ; Marx ; Palustran ; Pariselle ; Périnet ; Royer ; de Saint-Gabriel ; Tourneux ; Vannier ; Ybert.]

QUESTIONS PROPOSÉES

4982. — Résoudre et discuter le système d'équations

$$2(x^3 + y^3) + (x + y) = 3(x^2 + y^2),$$
$$x + y = a.$$

4983. — Un quart de cercle AOB tourne autour du rayon OB. Ayant tracé la corde AB, on demande à quelle distance OP il faut mener la parallèle PCD au rayon OA pour que l'anneau engendré par le segment CD intercepté sur cette parallèle par la corde AB et la circonférence ait une surface donnée πm.



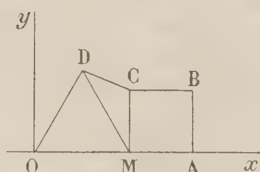
Maximum de cette surface quand on fait varier la distance OP depuis 0 jusqu'à $OB = a$.

On prendra si l'on veut pour inconnues

$OP = x, \qquad PD = y.$

(*Bacc. lettres-math., Alger, novembre 1900.*)

4984. — Sur la droite OA, de longueur l, on prend entre O et A un point M situé à la distance x de O. On construit sur la base OM le triangle équilatéral OMD, puis sur MA le carré MABC, et l'on tire CD.



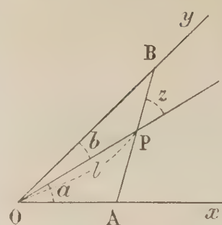
1° Calculer, en fonction de l et x, la surface du pentagone OABCD ;

2° Tracer la courbe qui représente la variation de cette surface lorsque x croît de 0 à l ; indiquer si la surface passe par un minimum ou un maximum, et trouver les valeurs correspondantes de x. On prendra l'axe des x suivant OA, l'axe des y suivant la perpendiculaire ;

3° Former les équations des tangentes à la courbe précédente aux points qui correspondent aux valeurs $x = 0$ et $x = l$; calculer l'abscisse du point d'intersection de ces tangentes.

(*Bacc. lettres-sciences, Montpellier, novembre 1900.*)

4985. — On donne un angle xOy et un point P dans cet angle ; soit $OP = l$, $\widehat{xOP} = a$, $\widehat{POy} = b$. On mène par ce point P une droite APB limitée aux côtés de cet angle et inclinée d'un angle z sur la direction OP.

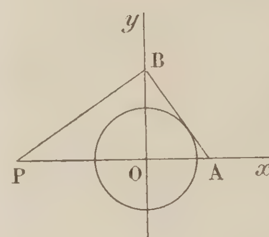


1° Exprimer en fonction de l, a, b, z le produit $PA \times PB$;

2° l, a, b restant invariables, pour quelles valeurs de z ce produit $PA \times PB$ est-il maximum ou minimum ;

3° Déduire du résultat obtenu la construction géométrique de la droite APB pour laquelle a lieu ce maximum ou ce minimum.

(*Bacc. lettres-math., Lille, novembre 1900.*)



4986. — On donne un cercle de rayon R et deux diamètres rectangulaires Ox, Oy de ce cercle ; sur Ox on prend un point P situé à une distance d du centre. On demande de mener au cercle une tangente rencontrant Ox en A, Oy en B, et telle que l'angle PBA soit droit.

(*Bacc. lettres-math., Clermont, novembre 1900.*)

4987. — Par les sommets A, B, C d'un triangle on mène trois droites parallèles quelconques qui coupent les côtés opposés en A', B', C'. Démontrer que les points de rencontre des droites AB et A'B', BC et B'C', CA et C'A' sont en ligne droite.

(H. LÉVY.)

4988. — Un madrier de section uniforme, ayant 4^m de longueur et pesant 30^{kg}, repose par l'une de ses extrémités sur un sol horizontal, et est appuyé par l'autre contre un mur vertical. Ce madrier est incliné à 45° ; il supporte un poids de 20^{kg} qui est suspendu au milieu de sa longueur. On demande :

1° Quel est, en faisant abstraction de tout frottement, l'effort horizontal à exercer sur le pied de ce madrier pour l'empêcher de glisser ;

2° Si cet effort augmente ou diminue quand on déplace le poids additionnel vers le pied du madrier.

(*Concours de 1900 pour l'emploi d'inspecteur du travail.*)

4989. — Un marteau pesant 1^{kg}, animé d'une vitesse horizontale de 1^m par seconde, frappe une bille qui roule sur un plan horizontal parfaitement poli. Après le choc, le marteau reste immobile, et la bille a une vitesse de $0^m,20$ par seconde.

On demande l'élévation de température de la bille sachant que sa masse est 500^{gr} et sa chaleur spécifique 0,1. On admet que le marteau absorbe les 2/3 de la chaleur dégagée par le choc.

(*Bacc. lettres-sciences, Besançon, juillet 1900.*)

4990. — Deux corps pesants, de masses m et m_1, sont lancés simultanément du même point, suivant la verticale, mais en sens contraires, avec la même vitesse initiale a.

1° Exprimer et discuter l'énergie ou puissance vive totale de ce système en fonction du temps ;

2° Minimum de l'énergie ;

3° Calculer l'époque de ce minimum, ainsi que sa valeur en *kilogrammètres* et en *ergs*.

$m = 3$ kilogrammes-masse (vers le bas),

$m_1 = 5$ kilogrammes-masse (vers le haut),

$$a = \frac{10^m}{1 \text{ sec.}}, \qquad g = \frac{9^m,81}{(1 \text{sec.})^2}.$$

(*Bacc. lettres-sciences, Montpellier, novembre 1900.*)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le Duc. — Imp. Comte-Jacquet, FACDOUEL, Dir.

25e Année. — N° 12. JOURNAL Paris, le 15 Mars 1901.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0 30	0 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Abonnements.. Librairie **Nony** et Cie, Boulᵈ St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

ARITHMÉTIQUE

4962. — *Un marchand a acheté les 7/8 d'une pièce de drap à raison de 56fr,50 le mètre ; il cède les 0,9 de son achat à un de ses confrères qui lui donne en paiement un billet de 3600fr payable dans un an, 4 mois et 20 jours. En escomptant ce billet au taux de 6 % chez un banquier, le marchand rentre dans ses déboursés et gagne 136fr sur son dernier marché, outre le drap qui lui reste. Trouver le nombre de mètres de la pièce de drap.*

(*Section normale annexée à l'école nationale d'Arts et Métiers de Châlons, 1900.*)

En escomptant le billet un an, 4 mois et 20 jours ou 500 jours avant son échéance, le banquier retient les intérêts simples de 3600fr pendant ce temps, et le marchand ne touche plus que

$$3600 - \frac{3600 \times 6 \times 500}{100 \times 360} = 3300^{\text{fr}}.$$

Cette somme comprenant les 136fr de bénéfice du marchand, ce dernier a ainsi déboursé

$$3300 - 136 = 3164^{\text{fr}}$$

pour acheter du drap à 56fr,50 le mètre ; le nombre de mètres achetés est donc

$$\frac{3164}{56,50} = 56^{\text{m}}.$$

Ces 56m représentant les 7/8 de la pièce, cette dernière mesurait donc

$$56 \times \frac{8}{7} = 64^{\text{m}}.$$

Sur les 56m achetés, le marchand en a vendu 9/10, de sorte qu'il lui en reste 5m,6 qui, avec les 136fr, constituent son bénéfice total.

(E. HUGONNIER, école professionnelle de Voiron.)

N.-B. — Plusieurs correspondants ont supposé à tort que le prix déboursé par le marchand se rapportait à la pièce vendue ou bien à la pièce achetée augmentée de la portion invendue.

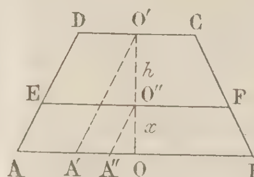
[Ont résolu la même question : MM. E. Barbé ; A. Bernardeau ; M. Beyney ; Delage ; Douce ; C. Dupas ; E. Gernez-Pfanmatter ; H. Lacape ; Lefèvre ; M. Marx ; M. Royer ; J. Trouillé ; G. Ybert ; R. Henry ; P. Luquet ; E. Périnet ; R. Rives.]

ALGÈBRE

4972. — *Étant donné un tronc de cône dont les rayons de base sont R et r et la hauteur h, déterminer la distance x d'un plan parallèle aux bases partageant ce tronc de cône en deux parties dont les volumes soient équivalents.*

(*École de chimie industrielle de Lyon, 1899.*)

Soit x la distance du plan cherché EF au plan de la base de rayon R et y le rayon du cercle d'intersection de ce plan avec le tronc de cône donné. On doit avoir



$$\frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{2}{3}\pi x(R^2 + y^2 + Ry).$$

Or les deux triangles rectangles semblables, O′OA′ et O″OA″, donnent

$$\frac{x}{h} = \frac{R - y}{R - r}\,; \qquad (1)$$

l'équation précédente devient, en remplaçant x par sa valeur,

$$(R - r)(R^2 + r^2 + Rr) = 2(R - y)(R^2 + y^2 + Ry),$$

ou

$$R^3 - r^3 = 2R^3 - 2y^3,$$

ou

$$2y^3 = R^3 + r^3,$$

d'où

$$y = \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}.$$

En remplaçant y par sa valeur dans la relation (1), il vient :

$$x = \frac{h}{R - r}\left(R - \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}\right).$$

On voit facilement qu'en supposant $R > r$, cette valeur de x est toujours positive et inférieure à h, et par suite toujours acceptable.

Si le tronc de cône donné était de deuxième espèce, il suffirait de remplacer r par $-r$ dans chacune des relations précédentes, et nous aurions pour la distance du plan cherché à la grande base,

$$x' = \frac{h}{R + r}\left(R - \sqrt[3]{\frac{R^3 - r^3}{2}}\right).$$

(E. HUGONNIER, école professionnelle de Voiron.)

[Ont résolu la même question : Mlle S. Lauzanne ; MM. Antonescu-Vercescu ; A. Bernardeau ; L. Bordron ; C. Bourvéau ; Ducongé-Cabireau ; E. Durand ; P. Guerrier ; M. Laurence ; P. Legros ; L. Lemmet ; J. Lestable ; A. Mabou ; H. Martin ; M. Marx ; P. Vercesco ; G. Ybert ; Mlle G. Oddos ; MM. E. Barbé ; M. Bégué ; R. Cattin ; C. Dupas ; R. Henry ; F. Pégorier ; R. Rives ; E. Roncin ; P. Vernet.]

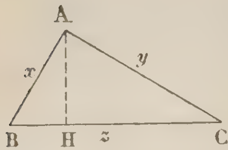
4974. — *Trouver les trois côtés d'un triangle rectangle connaissant son périmètre 2p et le rapport m du volume engendré par le triangle tournant autour de l'hypoténuse à la somme des volumes engendrés en tournant autour des côtés de l'angle droit.*

(*Élèves de la marine marchande, 1900.*)

Désignons par x, y les deux côtés de l'angle droit et par z l'hypoténuse du triangle.

On a d'abord

$$x + y + z = 2p, \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 = z^2. \qquad (2)$$



En tournant autour de BC, le triangle ABC engendre un double cône, de volume

$$\frac{1}{3}\pi \overline{\mathrm{AH}}^2.\mathrm{BC} = \frac{1}{3}\pi\frac{x^2y^2}{z^2}.z\,;$$

de même en tournant autour de AB et de AC, le triangle ABC engendre deux cônes dont les volumes sont respectivement

$$\frac{1}{3}\pi y^2 x \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{3}\pi x^2 y.$$

La troisième équation du problème est donc

$$\frac{1}{3}\pi\frac{x^2y^2}{z} = \frac{1}{3}\pi xy(x+y)m,$$

ou

$$xy = m(x+y)z. \qquad (3)$$

De l'équation (1), on déduit

$$x + y = 2p - z\,;$$

puis, en tenant compte de (2),

$$xy = \frac{(x+y)^2 - (x^2+y^2)}{2} = 2p(p-z).$$

Portant ces deux valeurs dans l'équation (3), on obtient

$$2p(p-z) = mz\,(2p-z),$$

ou

$$mz^2 - 2p(m+1)z + 2p^2 = 0. \qquad (4)$$

z étant une racine de cette équation, x et y sont les racines de l'équation

$$\mathrm{X}^2 - (2p-z)\mathrm{X} + 2p(p-z) = 0. \qquad (5)$$

Discussion. — Un triangle rectangle étant complètement déterminé par les deux côtés de l'angle droit, il suffit d'exprimer que les valeurs de x et y sont réelles et positives.

La condition de réalité de l'équation (5) est

$$(2p-z)^2 - 8p(p-z) \geqslant 0,$$

ou

$$z^2 + 4pz - 4p^2 \geqslant 0,$$

inégalité satisfaite pour toute valeur de z au moins égale à la racine positive annulant son premier membre :

$$z \geqslant 2p(\sqrt{2}-1).$$

Les racines de l'équation (5) sont toutes deux positives lorsque

$$z < p.$$

Le problème admet ainsi autant de solutions qu'il y a de racines de l'équation (4) comprises entre $2p(\sqrt{2}-1)$ et p. En substituant ces limites à la place de z dans l'équation (4), on trouve

$$f(2p\sqrt{2}-2p) = 2p^2(3-2\sqrt{2})(1-2m\sqrt{2}),$$
$$f(p) = -mp^2.$$

Comme $f(p)$ est négatif ou de signe contraire au terme en z^2, p sépare les deux racines de l'équation (4), qui sont par suite réelles. Pour que la plus petite racine, seule acceptable ici, soit supérieure à $2p(\sqrt{2}-1)$, il faut et il suffit que $f(2p\sqrt{2}-2p)$ soit positif, c'est-à-dire qu'on ait

$$1 - 2m\sqrt{2} \geqslant 0,$$

ou

$$m \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

En résumé :

Si $m < \frac{\sqrt{2}}{4}$, le problème admet une solution correspondant à la plus petite des racines de l'équation (4).

Si $m = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $z = 2p(\sqrt{2}-1)$ et $x = y = \frac{2p-z}{2} = p(2-\sqrt{2})$; le triangle est isocèle.

Si $m > \frac{\sqrt{2}}{4}$, le problème est impossible.

(E. HUGONNIER, école professionnelle de Voiron.)

[Ont résolu la même question : MM. L. Azaubert ; L. Barberot ; A. Bernardeau ; P. Bily ; L. Bordron ; Bottin ; A. Bourlat ; E. Durand ; Gasluc de Sénébron ; M. Hermant ; E. Hugonnier ; M. Laurence ; A. Legros ; P. Legros ; M. Marx ; P. Thonet ; M. Beyney ; R. Cattin ; L. David ; H. Dobryzniak ; P. Luquet ; E. Roncin ; F. Thibier ; P. Valentin.]

4975. — *Un domaine plan a la forme d'un polygone irrégulier de huit côtés; soient* $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$ *les sommets consécutifs de ce polygone.*

La position d'un sommet A_i *quelconque a été définie sur le terrain : 1° par sa distance* x_i *à une droite fixe,* D, *tracée sur le terrain ; 2° par sa distance* y_i *à une autre droite fixe,* D', *tracée sur le terrain perpendiculairement à la première. On suppose que le relevé de ces distances soit le suivant :*

pour A_1 $\begin{cases} x_1 = 60^{\mathrm{m}}, \\ y_1 = 11^{\mathrm{m}}\,; \end{cases}$ *pour* A_3 $\begin{cases} x_5 = 190^{\mathrm{m}}, \\ y_5 = 50^{\mathrm{m}}\,; \end{cases}$

pour A_2 $\begin{cases} x_2 = 66^{\mathrm{m}}, \\ y_2 = 11^{\mathrm{m}},50\,; \end{cases}$ *pour* A_6 $\begin{cases} x_6 = 150^{\mathrm{m}}, \\ y_6 = 40^{\mathrm{m}}\,; \end{cases}$

pour A_3 $\begin{cases} x_3 = 80^{\mathrm{m}}, \\ y_3 = 10^{\mathrm{m}}\,; \end{cases}$ *pour* A_7 $\begin{cases} x_7 = 63^{\mathrm{m}}, \\ y_7 = 50^{\mathrm{m}}\,; \end{cases}$

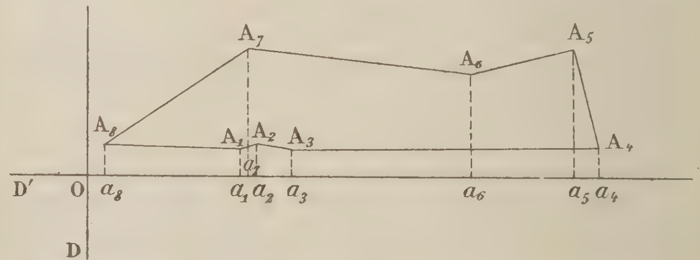
pour A_4 $\begin{cases} x_4 = 200^{\mathrm{m}}, \\ y_4 = 12^{\mathrm{m}}\,; \end{cases}$ *pour* A_8 $\begin{cases} x_8 = 6^{\mathrm{m}}, \\ y_8 = 12^{\mathrm{m}}. \end{cases}$

1° Calculer la valeur, en mètres carrés, de la superficie du polygone.

2° Calculer à 1 décimètre près le rayon du cercle qui a même surface que le polygone.

(*Bacc. lettres-math., Montpellier, novembre 1900.*)

1° Pour fixer la position des divers sommets du polygone par rapport aux droites D et D', portons sur OD, $Oa_1 = x_1$, et menons par a_1 la parallèle $a_1A_1 = y_1$ à OD ; en opérant de même pour les autres sommets successifs, on obtient le polygone $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ dont la superficie est la différence



entre les aires des polygones $A_4A_5A_6A_7A_8a_8a_4$ et $A_8A_1A_2A_3A_4a_4a_8$.

Or le premier de ces polygones est décomposé par les parallèles menées à OD en quatre trapèzes dont les aires sont

$$A_4A_5a_5a_4 = \frac{(x_4-x_5)(y_4+y_5)}{2} = 310,$$
$$A_5A_6a_6a_5 = \frac{(x_5-x_6)(y_5+y_6)}{2} = 1\,800,$$
$$A_6A_7a_7a_6 = \frac{(x_6-x_7)(y_6+y_7)}{2} = 3\,915,$$
$$A_7A_8a_8a_7 = \frac{(x_7-x_8)(y_7+y_8)}{2} = 1\,767\,;$$

l'aire S_1 du premier polygone est donc

$$S_1 = 310 + 1\,800 + 3\,915 + 1\,767 = 7\,792^{\mathrm{mq}}.$$

Par un calcul analogue, on obtient pour l'aire S_2 du second polygone,

$$S_2 = 621 + 67{,}5 + 150{,}5 + 1\,320 = 2\,159^{\mathrm{mq}}.$$

La superficie cherchée est donc

$$S = S_1 - S_2 = 7792 - 2159 = 5633^{mq}.$$

2° Soit R le rayon du cercle de surface égale à S. On a

$$\pi R^2 = 5\,633,$$

d'où

$$R = \sqrt{\frac{5\,633}{\pi}}.$$

R ayant deux chiffres à la partie entière, pour l'obtenir à 1^{dm} près, il faut calculer la racine avec 3 chiffres exacts, et par suite, évaluer le quotient $\frac{5633}{\pi}$, dont le premier chiffre est inférieur à 5, avec 4 chiffres exacts, ce qui revient à prendre π avec 5 chiffres exacts. En faisant le calcul numérique, on a ainsi

$$R = \sqrt{\frac{5\,633}{3{,}1416}} = 42^m{,}3.$$

(ERNEST FOUCART.)

[Ont résolu la même question: MM. L. Azaubert ; H. Belbenoît ; A. Bernardeau ; P. Bily ; A. Bottin ; G. Desnoës ; E. Durand ; A. Fraysse ; Gasluc de Sénébron ; E. Hugonnier ; L. Lefèvre ; A. Legros ; P. Legros ; A. Mabon ; H. Mangin ; M. Marx ; G. Nègre ; M. Poirier ; Mlle A. Saleilles ; MM. E. Lelarge ; P. Luquet ; H. Palustran ; F. Pégorier.]

GÉOMÉTRIE

4976. — *P étant un point fixe du plan d'une circonférence* O *de rayon r, on trace par ce point toutes les droites possibles* A'PA, *et on marque sur chacune d'elles :* 1° *le milieu* C *de la corde* AA' ; 2° *le point* M *tel que*

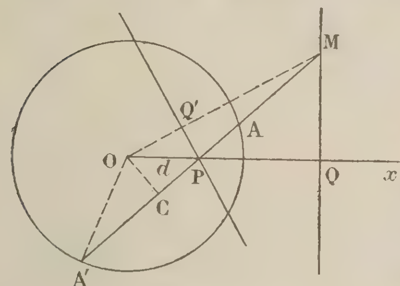
$$CP.\,CM = \left(\frac{AA'}{2}\right)^2.$$

Calculer la projection OQ *de la distance* OM *sur la direction fixe* OPx. *De son expression conclure le lieu géométrique des points* M.

L'un des points M *de ce lieu étant regardé comme fixe, on peut construire pour lui, comme pour* P, *un lieu de définition semblable : montrer qu'il passe en* P.

(*Bacc. lettres-math., Rennes, novembre 1900.*)

Les angles OCM, OQM étant droits, le quadrilatère OCQM est inscriptible et donne



$$OP.\,PQ = CP.\,PM.$$

Or, en posant $OP = d$,

$$PQ = OQ - d,$$

et

$$PM = CM - CP.$$

Donc

$$d(OQ - d) = CP(CM - CP),$$

d'où

$$OQ = \frac{d^2 - \overline{CP}^2 + CP.CM}{d},$$

ou, comme $d^2 - \overline{CP}^2 = \overline{OC}^2$ et $CP.CM = \left(\frac{AA'}{2}\right)^2 = \overline{CA'}^2$,

$$OQ = \frac{\overline{OC}^2 + \overline{CA'}^2}{d} = \frac{\overline{OA'}^2}{d} = \frac{r^2}{d}.$$

La projection OQ de OM sur Ox étant indépendante de la sécante APA', le lieu de M est la perpendiculaire élevée en Q à Ox.

Les points M et P jouant le même rôle dans la relation $CP.CM = \left(\frac{AA'}{2}\right)^2$, on peut appliquer au point M ce qui vient d'être dit pour le point P; le lieu de P est alors la perpendiculaire élevée en un point Q' de OM tel que

$$OQ' = \frac{r^2}{OM}.$$

Remarque. — Par définition, le point M est le conjugué harmonique de P par rapport au segment AA' ; ce point M décrit donc la polaire du point fixe P par rapport au cercle O, c'est-à-dire la perpendiculaire MQ à OP. En regardant le point M comme fixe, le point P décrirait de même la polaire de M par rapport au cercle ou la perpendiculaire PQ' à OM.

(MARCEL MARX, collège de Montargis.)

[Ont résolu la même question : MM. H. Belbenoît ; A. Bernardeau ; A. Bottin ; A. Bourlat ; C. Bourvéau ; G. Desnoës ; E. Durand ; E. Foucart ; A. Fraysse ; H. Fricquegnon ; Gasluc de Sénébron ; G. Gründfelder ; P. Guerrier ; E. Hugonnier ; M. Job ; L. Kayser ; B. Krausz ; G. Leclercq ; P. Legros ; L. Lemmet ; C. Marie ; J. Maury ; A. Meynier ; A. Minary ; G. Nègre ; C. Perroquin ; P. Saintin ; J. Tastet ; P. Thonet ; C. Vallot ; A. Vannier ; E. Barbé ; M. Beyney ; R. Cattin ; L. David ; H. Dobryzniak ; R. Henry ; H. Lacreuse ; E. Lelarge ; R. Mouzon ; M. Petitjean ; V. Pollet ; R. Rives ; F. Thibier ; P. Zlatco.]

4977. — *Soit un angle* XOY; *mener par un point, ou parallèlement à une direction donnée, une droite qui intercepte sur les côtés de cet angle deux segments* OP *et* OQ *tels que l'on ait*

soit $OP + OQ = l$, *soit* $OP - OQ = l$,

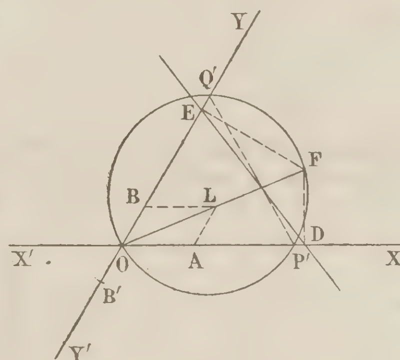
l *désignant une longueur donnée.*

Plus généralement, tracer la droite de telle sorte que les segments $OP = p$ *et* $OQ = q$ *soient liés à trois longueurs données* a, b, l *par l'une ou l'autre des relations*

$$ap + bq = l^2, \qquad ap - bq = l^2.$$

Traitons d'abord la question dans le cas général où la droite PQ satisfait à la relation $ap + bq = l^2$.

D'après la note de M. Hioux (V. p. 75), la droite PQ est tangente à une parabole dont le foyer F est à l'intersection de la droite OL, diagonale du parallélogramme OALB de côtés



$$OA = a,$$
$$OB = b,$$

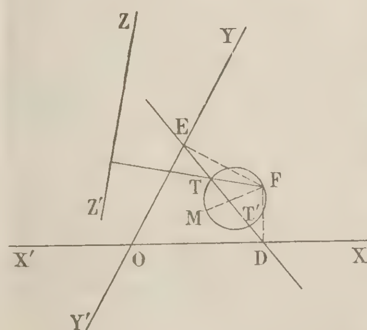
avec la circonférence OP'Q', P'Q' étant une position particulière de PQ, par exemple celle pour laquelle

$$OP' = OQ' = \frac{l^2}{a + b};$$

de plus, cette parabole admet pour tangente au sommet la droite DE qui joint les projections du point F sur OX, OY.

Le problème revient alors à mener à une parabole définie par son foyer et la tangente au sommet une tangente issue d'un point donné M ou parallèle à une direction donnée ZZ'.

On sait que la tangente au sommet d'une parabole est le lieu des projections du foyer sur les tangentes à cette courbe ; il en résulte que dans le premier cas, la tangente cherchée est la droite qui joint M à l'un des points de rencontre T ou T' de la circonférence de diamètre MF avec la tangente au sommet DE. Suivant le nombre des points d'intersection du cercle et de la droite, le problème admet 2, 1 ou 0 solutions. Lorsque le cercle MF touche la droite DE, le point M est situé sur la parabole, comme il est facile de le voir directement.



Dans le second cas, la tangente s'obtient en joignant M au point de rencontre T de DE avec la perpendiculaire abaissée de E sur la direction donnée ZZ'. Tant que le point T existe, ce qui suppose ZZ' non perpendiculaire à DE, le problème admet toujours une solution.

Pour rendre les résultats précédents applicables à la relation $ap - bq = l^2$, il suffit de supposer b négatif dans la relation $ap + bq = l^2$. Le point A ne change pas, et les points B, P', Q' sont définis par les distances

$$OB' = -b, \qquad OP' = OQ' = \frac{l^2}{a-b}.$$

Sauf ces différences, la solution reste la même que ci-dessus.

Examen du cas particulier où $OP + OQ = l$. — Ce cas se déduit du cas général, en faisant

$$a = b = l.$$

La droite OL est alors bissectrice de l'angle XOY et par suite perpendiculaire à la droite P'Q' telle que

$$OP' = OQ' = \frac{l^2}{a+b} = \frac{l}{2}.$$

Comme les angles OP'F et OQ'F sont droits, DE se confond avec P'Q'.

Dans le cas où l'on donne $OP - OQ = l$, OL est bissectrice de l'angle XOY' et on peut prendre pour la droite P'Q' celle qui intercepte sur les côtés de cet angle des segments égaux à $\frac{l}{2}$.

(Henri FRICQUEGNON, à Vigneulles.)

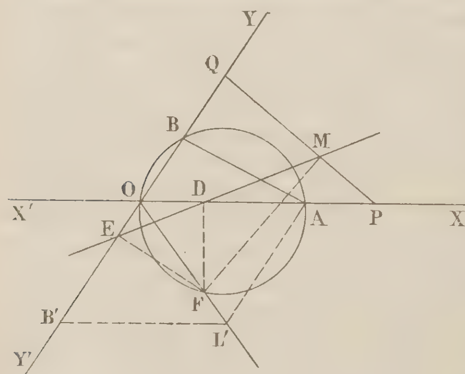
[Ont résolu la même question : MM. H. Belbenoit ; A. Bernardeau ; E. Foucart ; E. Hugonnier ; A. Krausz ; M. Laurence ; J. Tastet ; V. Thébault ; J. Trouillé ; C. Vallot ; E. Weber ; L. David.]

4978. — *Sur les côtés* OX *et* OY *d'un angle donné on a marqué deux points* A *et* B, *le premier sur* OX, *le second sur* OY ; *tracer une droite coupant les côtés de l'angle en deux points* P *et* Q, *tels que le rapport* $\frac{AP}{BQ}$ *ait une valeur donnée.*

Au cours de la démonstration donnée dans la note de M. Hioux (V. p. 75), on a vu que si deux droites PQ et P'Q' vérifient la relation $ap + bq = l^2$, le rapport $\frac{PP'}{Q'Q}$ est constant et égal à $\frac{b}{a}$. Si donc on suppose la droite arbitraire P'Q' confondue avec AB, toute droite PQ telle que

$$\frac{AP}{QB} = \frac{b}{a} \qquad \text{ou} \qquad \frac{AP}{BQ} = -\frac{b}{a}$$

enveloppe une parabole dont nous allons déterminer le foyer et la tangente au sommet.



Le foyer F est à l'intersection de la circonférence OAB avec la diagonoale OL' du parallélogramme OAL'B' dont le côté

$$OB' = -\frac{b}{a}.OA.$$

La tangente au sommet DE s'obtient en projetant le point F en D et E sur OX et OY.

Il ne reste plus qu'à mener à la parabole ainsi définie une tangente quelconque, ce qui revient à élever en un point quelconque M de DE une perpendiculaire à la droite MF, coupant en P, Q l'angle XOY.

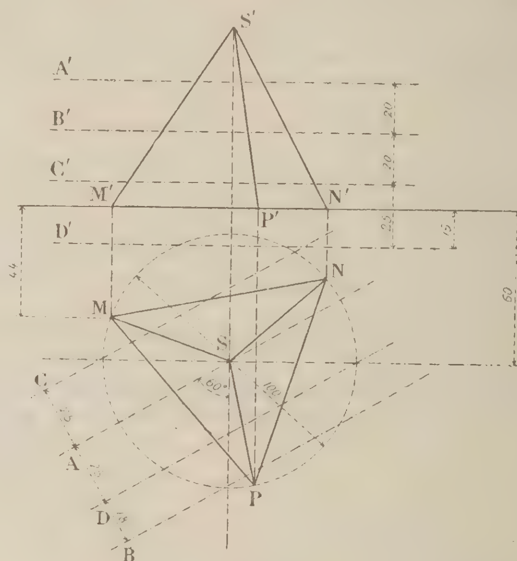
Dans ce qui précède, le rapport $\frac{AP}{BQ}$ étant regardé comme positif, b a une valeur négative ; si on suppose ce rapport négatif (c'est-à-dire A et B de part et d'autre de PQ), b doit être positif, et le point B' est situé sur OY, de façon que $OB' = \frac{b}{a}.OA$. La droite OL' coupe alors le cercle OAB dans l'angle XOY en un point F, foyer d'une seconde parabole dont les tangentes répondent également à la question.

(Henri FRICQUEGNON, à Vigneulles.)

[Ont résolu la même question : MM. H. Belbenoit ; A. Bernardeau ; J. Chapron ; E. Foucart ; E. Hugonnier ; B. Krausz ; M. Laurence ; J. Tastet ; V. Thébault ; Beltçaguy-Portalier ; L. David ; R. Rives.]

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

4966. — *Un tétraèdre régulier* SMNP *et un prisme horizontal dont les arêtes se projettent respectivement en* A *et* A', B *et* B', C *et* C', D *et* D', *sont dessinés sur la figure ci-contre. On demande de représenter le tétraèdre entaillé par le prisme.*



(*Section normale annexée à l'école nationale d'Arts et Métiers de Châlons, 1900.*)

Intersection du prisme avec le plan de la face SMP. — En coupant cette face par des plans horizontaux ayant pour traces les projections verticales A', B', C', D' des arêtes du prisme, on obtient facilement, au moyen des horizontales issues des points (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d'), les points (a_1, a'_1), (b_1, b'_1), (c_1, c'_1), (d_1, d'_1), où les arêtes du prisme percent le plan de la face SMP. Le prisme détermine ainsi dans le plan de cette face la section convexe $(a_1b_1d_1c_1, a'_1b'_1d'_1c'_1)$ qui coupe les arêtes MP et SP du tétraèdre aux points (e, e'), (f, f'), (g, g'), (h, h').

Intersection du prisme avec le plan de la face SNP. — En opérant comme ci-dessus, on obtient la section $(a_2b_2d_2c_2, a'_2b'_2d'_2c'_2)$ qui rencontre les arêtes SP, PN, NS du tétraèdre aux points (g, g'), (h, h'), (i, i'), (j, j'), (k, k'), (l, l').

Intersection du prisme avec la face SMN. — On voit sans difficulté que la face SMN ne peut être coupée que par les faces

(AC, A'C') et (CD, C'D') du prisme qui y déterminent ainsi l'angle $(kc_3l, k'c'_3l')$.

Intersection du prisme avec la base MNP. — Cette intersection est représentée par les deux portions d'horizontales $(cj, c'j')$ et $(fi, f'i')$.

Dans la mise à l'encre, on a supposé enlevée toute la partie du tétraèdre intérieure au prisme, de sorte que le tétraèdre se trouve décomposé en deux morceaux constitués, en projection horizontale, par le tétraèdre $hfip$ et le polyèdre $sga_1c_1emnjlc_3ka_2g$.

Sur l'épure les parties visibles de la section du tétraèdre par le prisme ont été couvertes de hachures.

(A. JAMES, école professionnelle de Clermont.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Bernardeau ; R. Rives ; C. Sudreau ; J. Trouillé.]

TRIGONOMÉTRIE

4810. — *Éliminer l'angle* φ *entre les deux équations*

$$a + b\operatorname{tg}\varphi + \cos 2\varphi(c\operatorname{tg}\varphi - d) = 0,$$
$$a\operatorname{tg}\varphi - b + \cos 2\varphi(c + d\operatorname{tg}\varphi) = 0.$$

On peut résoudre les équations par rapport à $\operatorname{tg}\varphi$ et $\cos 2\varphi$; il suffira alors de remplacer les valeurs des lignes trigonométriques calculées, dans une identité.

Éliminons d'abord $\cos 2\varphi$ en égalant entre elles les deux valeurs fournies par les équations ; il vient

$$\frac{a + b\operatorname{tg}\varphi}{c\operatorname{tg}\varphi - d} = \frac{a\operatorname{tg}\varphi - b}{c + d\operatorname{tg}\varphi},$$

ou, en simplifiant,

$$2(ad + bc)\operatorname{tg}\varphi = (bd - ac)(1 - \operatorname{tg}^2\varphi),$$

ce qui peut s'écrire

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{bd - ac}{ad + bc}. \qquad (1)$$

Éliminons de même $\operatorname{tg}\varphi$; nous aurons

$$\frac{d\cos 2\varphi - a}{b + c\cos 2\varphi} = \frac{b - c\cos 2\varphi}{a + d\cos 2\varphi},$$

ou

$$d^2\cos^2 2\varphi - a^2 = b^2 - c^2\cos^2 2\varphi,$$

d'où

$$\cos^2 2\varphi = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}. \qquad (2)$$

Il ne reste plus qu'à porter les valeurs (1) et (2) dans l'identité

$$\operatorname{tg}^2 2\varphi = \frac{1 - \cos^2 2\varphi}{\cos^2 2\varphi}.$$

On obtient ainsi

$$\left(\frac{bd - ac}{ad + bc}\right)^2 = \frac{c^2 + d^2}{a^2 + b^2} - 1,$$

ou

$$\frac{b^2d^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2}{(ad + bc)^2} = \frac{c^2 + d^2}{a^2 + b^2},$$

ou, après suppression du facteur commun $c^2 + d^2$,

$$(a^2 + b^2)^2 = (ad + bc)^2,$$

ou encore

$$a^2 + b^2 = \pm(ad + bc).$$

(R. BARTHÉLEMY.)

Remarque. — On peut observer que les équations proposées se déduisent l'une de l'autre en changeant φ en $\frac{\pi}{2} + \varphi$; si on exprime $\cos 2\varphi$ en fonction de $\operatorname{tg}\varphi$, on a deux équations du 3e degré qui se déduisent l'une de l'autre en changeant $\operatorname{tg}\varphi$ en $-\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}$. On peut alors trouver la relation précédemment établie en écrivant que le premier membre d'une des équations est divisible par

$$\operatorname{tg}^2\varphi + 2\operatorname{tg}\varphi - 1 = 0.$$

[Ont résolu la même question : MM. Aubert ; J. Haag ; Noël ; H. Pitrat ; P. Thonet ; A. Vauthier.]

4853. — *Dans un triangle* ABC, *soit* O *le point de rencontre des perpendiculaires élevées sur chaque côté en son milieu et soit* α *le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet* A *sur* BC. *On prend sur* $A\alpha$ *un point* A' *tel que* $A\alpha . \alpha A' = B\alpha . \alpha C$ *en grandeur et en signe. De même, sur les hauteurs* $B\beta$ *et* $C\gamma$ *on prend les points* B' *et* C' *tels que*

$$B\beta . \beta B' = C\beta . \beta A, \qquad C\gamma . \gamma C' = A\gamma . \gamma B.$$

1° *Démontrer que les points* A, B, C, A', B', C' *sont sur une même circonférence.*

2° *Exprimer les hauteurs* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *en fonction des angles du triangle* ABC *et de la longueur* $AO = l$.

3° *Démontrer que la somme*

$$\frac{AA'}{A\alpha} + \frac{BB'}{B\beta} + \frac{CC'}{C\gamma}$$

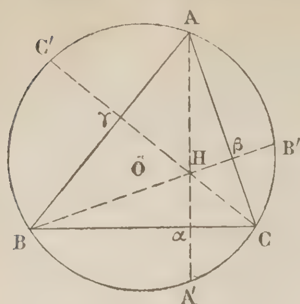
est constante ou indépendante du triangle ABC *considéré. Trouver la valeur de cette somme. Examiner le cas où l'angle* C *est obtus.*

4° *Établir la formule*

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

(Concours général de 1900 entre les élèves des institutions libres du Nord et du Pas-de-Calais.)

1° Puisque $A\alpha . \alpha A' = B\alpha . \alpha C$, AA′ et BC sont deux cordes d'un même cercle (propriété des sécantes); le point A′ est donc sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Il en est de même pour B′ et C′.



2° Dans le triangle rectangle $AB\alpha$, on a

$$A\alpha = AB \sin B.$$

Or, dans le triangle ABC,

$$\frac{AB}{\sin C} = 2l;$$

donc $A\alpha = 2l \sin B \sin C$.

On aurait de même

$$B\beta = 2l \sin C \sin A,$$
$$C\gamma = 2l \sin A \sin B.$$

3° On a

$$\frac{AA'}{A\alpha} = \frac{A\alpha + \alpha A'}{A\alpha} = 1 + \frac{H\alpha}{A\alpha};$$

de même

$$\frac{BB'}{B\beta} = 1 + \frac{H\beta}{B\beta}$$

et

$$\frac{CC'}{C\gamma} = 1 + \frac{H\gamma}{C\gamma}.$$

Par suite

$$\frac{AA'}{A\alpha} + \frac{BB'}{B\beta} + \frac{CC'}{C\gamma} = 3 + \frac{H\alpha}{A\alpha} + \frac{H\beta}{B\beta} + \frac{H\gamma}{C\gamma}.$$

Les triangles HBC, ABC ayant même base, sont entre eux comme leurs hauteurs; donc

$$\frac{H\alpha}{A\alpha} = \frac{HBC}{ABC},$$

et de même

$$\frac{H\beta}{B\beta} = \frac{HCA}{ABC},$$

$$\frac{H\gamma}{C\gamma} = \frac{HAB}{ABC}.$$

Dès lors

$$\frac{AA'}{A\alpha} + \frac{BB'}{B\beta} + \frac{CC'}{C\gamma} = 3 + \frac{HBC + HCA + HAB}{ABC}$$
$$= 3 + 1 = 4.$$

On parvient au même résultat en observant que

$$\frac{H\alpha}{A\alpha} = \frac{\text{tg HBC}}{\text{tg B}} = \text{cotg B cotg C}$$

et en utilisant la relation connue

$$\text{cotg B cotg C} + \text{cotg C cotg A} + \text{cotg A cotg B} = 1.$$

Lorsque l'angle C est obtus, on a

$$\frac{AA'}{A\alpha} = \frac{A\alpha - \alpha A'}{A\alpha} = 1 - \frac{H\alpha}{A\alpha},$$

$$\frac{BB'}{B\beta} = \frac{B\beta - \beta B'}{B\beta} = 1 - \frac{H\beta}{B\beta},$$

$$\frac{CC'}{C\gamma} = \frac{C\gamma + \gamma C'}{C\gamma} = 1 + \frac{H\gamma}{C\gamma}.$$

On en déduit

$$\frac{AA'}{A\alpha} + \frac{BB'}{B\beta} + \frac{CC'}{C\gamma} = 3 - \frac{H\alpha}{A\alpha} - \frac{H\beta}{B\beta} + \frac{H\gamma}{C\gamma}$$
$$= 3 + \frac{HAB - HBC - HCA}{ABC} = 4.$$

4° On a successivement

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2 \sin (A + B) \cos (A - B) + 2 \sin C \cos C$$
$$= 2 \sin C[\cos (A - B) + \cos C]$$
$$= 2 \sin C[\cos (A - B) - \cos (A + B)]$$
$$= 4 \sin A \sin B \sin C.$$

(G. FOUCRY, école normale de Châlons-sur-Marne.)

[Ont résolu la même question : MM. R. Bazin; Bouzy; F. Clabault; G. Delahaye; G. de France; L. Guilhem; J. Haag; R. Henry; E. Hugonnier Ginet; D. Koenig; A. Lecoutour; A. Legros; J. Lehmann; T. Lemoyne; E. Licope; D. Lword; R. Manen; R. Mouzon; Noël; L. Ollié; H. Tellier; P. Thonet; H. Varennes; P. Zlatco.]

4964. — *Démontrer que* $\frac{\pi}{4} = \text{arc cotg } 7 + 2 \text{ arc cotg } 3.$

(*Section normale annexée à l'école nationale d'Arts et Métiers de Châlons, 1900.*)

Posons $\text{arc cotg } 7 = a$, $\text{arc cotg } 3 = b$, ou, ce qui revient au même,

$$\text{tg } a = \frac{1}{7}, \qquad \text{tg } b = \frac{1}{3}.$$

La relation proposée devient

$$a + 2b = \frac{\pi}{4},$$

ou, en prenant les tangentes de chaque membre,

$$\text{tg}(a + 2b) = 1.$$

Réciproquement si cette dernière relation est vérifiée, elle entraîne $a + 2b = \frac{\pi}{4}$, si on suppose que a et b sont les plus petits arcs positifs ayant respectivement pour tangente $\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{3}$, car les arcs a et b ayant leur tangente inférieure à 1 sont inférieurs à $\frac{\pi}{4}$, et $a + 2b$ est égal à $\frac{\pi}{4}$, seul arc compris entre 0 et π dont la tangente soit 1.

Cela posé, on a

$$\text{tg}(a + 2b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } 2b}{1 - \text{tg } a . \text{tg } 2b}.$$

Or

$$\text{tg } a = \frac{1}{7}$$

et

$$\text{tg } 2b = \frac{2 \text{ tg } b}{1 - \text{tg}^2 b} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}.$$

Donc

$$\text{tg}(a + 2b) = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{28}} = 1$$

C. q. f. d.

(E. HUGONNIER, école professionnelle de Voiron.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Barbé; L. Bannerot; A. Bernardeau; M. Beyney; G. Bianchi; A. Bottin; A. Bourlat; C. Bourvéau; D. Cognet; L. David; G. Delahaye; A. Desmoulins; Douce; E. Durand; F. Filiol; E. Foucart; Gasluc de Sénébron; F. Gérard; E. Gernez-Pfanmatter; P. Guerrier; G. Guillaume; R. Henry; V. Herzenberg; A. James; H. Lacape; M. Laurence; L. Lefèvre; A. Legros; P. Legros; L. Lemmet; G. Lesage; Luquet; H. Martin; F. Pégorier; M. Petitjean; A. Renault; Riatdurand; R. Rives; E. Robert; P. Saintin; A. Scotto; H. Thibon; P. Thonet; J. Trouillé; A. Vannier; P. Vercesco; P. Zlatco.]

PHYSIQUE

4969. — *On suppose que par trois points* A, B, C *on fait passer une corde sonore parfaitement flexible et également tendue sur toute sa longueur. Déterminer la forme de ce triangle de telle sorte que les trois côtés, quand on les fait vibrer, produisent l'accord parfait majeur.*

(*On se bornera à donner les valeurs des cosinus des trois angles, sous la forme de fractions ordinaires irréductibles.*)

(*Bacc. lettres-sciences, Montpellier, juillet 1900.*)

L'accord parfait majeur est formé de trois sons dont les rapports des nombres de vibrations sont $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$.

Toutes choses égales d'ailleurs, les longueurs des cordes vibrantes sont en raison inverse des nombres de vibrations. Les trois côtés du triangle cherché peuvent donc être représentés par $1, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$, ou par 15, 12 et 10.

Or, on sait que le carré d'un côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins le double produit de ces côtés par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent. On a donc, en posant $a = 15$, $b = 12$, $c = 10$,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{19}{240},$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{181}{300},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{269}{360}.$$

(C. BOURVÉAU, à Quimperlé.)

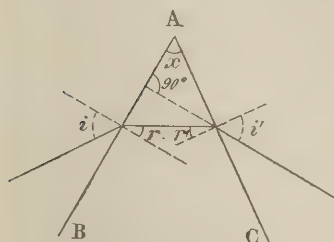
[Ont résolu la même question : MM. Amiot ; Barberot ; Bernardeau ; Bottin ; Caltin ; Cognet ; Desnoës ; Etienne ; Estave ; Foucart ; Gernez ; Guerrier ; R. Henry ; Hugonnier ; James ; Lapresle ; Legros ; Lestable ; Lefèvre ; Luquet ; Marie ; Martin ; Marx ; Matheron ; Meynier ; Palustran ; Poirier ; Pourtoy ; Raymond ; Rives ; Robert ; Trouillé ; Vannier ; Ybert.]

4970. — *Sur la face* AB *d'un prisme* ABC *d'angle* x *on fait tomber un rayon lumineux sous l'angle* i. *Si* n *désigne l'indice de réfraction du prisme par rapport à l'air, quelle est la valeur qu'il faut donner à l'angle* x *pour que le rayon sortant du prisme soit normal à la face* AB?

Cas particulier où $i = \frac{\pi}{6}$ et $n = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

(*Bacc. lettres-math., Bordeaux, juillet 1900.*)

Les formules ordinaires du prisme donnent dans le cas du problème :



$$\sin i = n \sin r,$$
$$\sin i' = n \sin r',$$
$$r + r' = x.$$

Les angles i' et x sont égaux comme avant les côtés perpendiculaires; on a donc

$$\sin x = n \sin r',$$

d'où $\sin x = n \sin (x - r)$
$= n(\sin x \cos r - \cos x \sin r).$

L'équation $\sin i = n \sin r$ donne $\sin r = \frac{\sin i}{n}$.

Par suite

$$\sin x = n\left(\sin x \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}} - \frac{\cos x \sin i}{n}\right),$$

d'où
$$\sin x\,(\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - 1) = \cos x \sin i.$$

Divisant par $\cos x$ les deux membres, il viendra :

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - 1}.$$

Cas particulier. — Si $i = \frac{\pi}{6}$ et $n = \frac{\sqrt{5}}{2}$, on a

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin 30^0}{\sqrt{\frac{5}{4} - \sin^2 30^0} - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4} - \frac{1}{4}} - 1} = \infty,$$

d'où
$$x = 90^o.$$

(P. GUERRIER, à Saint-Etienne.)

[Ont résolu la même question : MM. Barberot ; Bernard ; Bernardeau ; Beyney ; Boivin ; Bourrec ; Cognet ; David ; Durand ; Etienne ; Foucart ; Gernez ; Henry ; Hugonnier ; James ; Lapresle ; Legros ; Lestable ; Licope ; Luquet ; Mabon ; Martin ; Marx ; Mestre ; Michaud ; Palustran ; Pierquet ; Pourtoy ; Raynaud ; Robert ; Rousseau ; Rousselin ; Saintin ; Thonet.]

CONCOURS GÉNÉRAUX DE BELGIQUE (1900)

ATHÉNÉES

Troisième des Humanités anciennes (*section latine*).

MATHÉMATIQUES

Arithmétique.

Énoncer et démontrer le théorème de Fermat.

Algèbre.

On contracte un emprunt remboursable par 10 termes annuels de 2000fr, le taux étant de 4 %. Le prêteur nous propose de le rembourser par une rente trimestrielle immédiate de 20 termes au taux trimestriel équivalent à 4 % annuel. Déterminer le terme de cette nouvelle rente.

Taux trimestriel équivalent $= 1{,}04^{\frac{1}{4}} - 1$ pour 1.

Géométrie.

Rechercher le lieu géométrique des orthocentres (point de rencontre des hauteurs) des triangles de même base BC et de même angle au sommet A.

Trigonométrie.

4991. — Résoudre un triangle, étant donnés a, $b + c$ et r_a le rayon du cercle exinscrit au triangle et compris dans l'angle A.

(*27 juillet. — Durée : 4 heures.*)

Seconde grecque-latine et Troisième moderne (*section scientifique*).

PHYSIQUE

I. — Énoncez et formulez les lois de la chute des corps dans le vide et appliquez-les au cas suivant :

4992. — Deux poids, l'un de 40gr, l'autre de 10gr, sont attachés aux extrémités du fil qui passe sur une poulie d'Atwood et abandonnés à la pesanteur dans le vide. Quel sera l'espace parcouru par les poids lorsque la vitesse acquise sera de 29m,427 par seconde ? Quelle sera en outre à ce moment la durée de la chute ?

II. — Énoncez les lois de la tension dans le vide : 1° d'un mélange de vapeurs à la même température; 2° d'un mélange de vapeurs d'un même liquide à des températures différentes ; 3° d'un mélange d'air et de vapeurs.

III. — Qu'est-ce que le degré hygrométrique de l'air ? Donner la description de l'hygromètre de Daniell ou de celui de Regnault.

IV. — Miroirs convexes : définitions, détermination géométrique et expérimentale des foyers, foyers conjugués. Situation et caractère de l'image.

Remarque. — Les élèves de 3e moderne établiront en outre les formules des miroirs convexes et en déduiront leurs conclusions quant aux foyers et à l'image.

(*28 juillet. — Durée : 4 heures.*)

Seconde des Humanités modernes (*section scientifique*).
Seconde des Humanités anciennes (*section latine*).

MATHÉMATIQUES

Arithmétique.

4993. — Rechercher le caractère général de divisibilité d'un nombre écrit dans la base B par un facteur quelconque de $B^n \pm r$. Appliquer la formule au nombre $123ab56$ (base 12) divisé par $(10)^2 \pm 1$ et par $(10)^3 \pm 2$ (base 12).

Algèbre.

I. — **4994**. Démontrer que les racines incommensurables d'une équation du second degré à coefficients rationnels donnent naissance à des fractions périodiques continues.

II. — **4995**. Rechercher dans le développement de la puissance $(1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3)^5$, dont les termes semblables sont supposés réduits, le coefficient du terme en x^8.

Géométrie.

I. — Deux sphères de rayons respectifs R et R', tangentes extérieurement, sont inscrites dans un cône. Démontrer que le volume intérieur limité par les deux sphères et par le cône vaut la moitié du volume extérieur compris entre le cône et la sphère qui passe par les deux circonférences de contact des sphères données (*).

II. — Partager une pyramide à base de parallélogramme en deux parties équivalentes par un plan passant par un côté de la base.

(*27 juillet. — Durée : 5 heures.*)

Seconde des Humanités modernes (*section commerciale*).

SCIENCES COMMERCIALES

Opérations financières.

Voulant acheter à Anvers 5 000 fl^A à 50 jours, je trouve les cotes suivantes :

Anvers sur Amsterdam,	vue 209,40,	Amsterdam sur Vienne,	3m,	95,
— Berlin,	— 123,65,	Anvers	—	c. j., 200,
— Londres,	— 25,24,	Londres	—	2m, 12,75,
— Paris,	vue 1/8 0/0 prime.	Berlin	—	2m, 161,10,
		Paris	—	p.1.,198.

Les frais sont : à Amsterdam et à Berlin, 1/4 0/00,
à Londres et à Paris, 1 0/00.

Escompte à Vienne, 5 0/0.

Déterminer la voie à suivre et le prix d'achat.

(*27 juillet. — Durée 4 heures, y compris les compositions d'histoire commerciale, droit commercial, géographie commerciale.*)

Rhétorique des Humanités modernes (*section commerciale*).

MATHÉMATIQUES

Algèbre.

I. — Une ville emprunte 20 000 000 représentés par des obligations de 500 fr. remboursables au pair par annuités constantes en 60 ans, taux 4 0/0.

Rechercher :

1° L'annuité qui fait le service de l'emprunt ;

2° Le nombre, à une unité près, d'obligations amorties au 25e tirage ;

3° La nue propriété, à cette époque, d'une des obligations restantes.

II. — Rechercher la valeur actuelle d'une rente viagère différée de d années, au taux de r pour 1 fr. pour une personne d'âge n. Le terme de la rente est a.

L'usage de la table de logarithmes est autorisé.

Géométrie.

Deux circonférences de rayons R et R' sont tangentes extérieurement en A ; leur tangente commune extérieure a pour points de contact B et C. Déterminer, en fonction de R et de R' le volume engendré par le triangle ABC tournant autour de la ligne des centres comme charnière (**).

(*27 juillet. — Durée : 4 heures.*)

Rhétorique des Humanités modernes
(*section commerciale*).

CHIMIE

I. — Que savez-vous du ferrocyanure et du ferricyanure de potassium ? Indiquez les caractères des sels ferreux et ceux des sels ferriques.

II. — Qu'est-ce qu'un alcool triatomique ? Donnez la description de la glycérine et la composition de ses éthers. Nitroglycérine et dynamite.

III. — Qu'est-ce que vous savez de la benzine et de sa constitution ? Exposez la théorie de ses dérivés bisubstitués isomères.

IV. — Que savez-vous des propriétés des solutions de permanganate de potassium, de leur rôle dans les dosages ? Liqueurs titrées de permanganate les plus en usage.

Doser le fer contenu dans un fer commercial donné : fonte ou acier.

V. — **4996**. Rechercher la formule moléculaire du corps dont la composition centésimale est la suivante :

Carbone : 52,17 ; Hydrogène : 13,04 ; Oxygène : 34,79.

La densité de vapeur de ce corps est 1,593 par rapport à l'air.

(*28 juillet. — Durée : 6 heures.*)

Rhétorique grecque-latine.

CHIMIE

Dites ce que vous savez : 1° de l'acide carbonique ; 2° du carbonate de soude artificiel ou sel de soude. Préparation, usages.

PHYSIQUE

I. — **4997**. Rechercher l'angle d'incidence qui donne à un prisme d'angle A sa déviation minima. On admettra que le rayon réfracté intérieur forme des angles égaux avec les deux faces du prisme. Appliquer la formule trouvée au cas où l'indice de réfraction est $\frac{2}{\sqrt{2}}$ et déterminer l'angle cherché.

II. — Exposer le phénomène de la polarisation des piles et les procédés de dépolarisation.

III. — Exposer sur un exemple le principe des machines magnéto-électriques. Indiquer en outre le principe des machines dynamo-électriques et faire ressortir leurs avantages.

(*28 juillet. — Durée : 4 heures.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4998. — Etant donnés deux cercles O et O' tangents intérieurement, on inscrit dans le cercle O un triangle ABC dont les côtés AB et AC sont tangents au cercle O'. Les cercles O et O' étant supposés fixes on demande, quand le triangle ABC varie :

1° Le lieu du centre du cercle inscrit au triangle ABC ;

2° L'enveloppe du côté BC ;

3° Le lieu du point où le cercle inscrit touche le côté BC (ce lieu n'est pas une conique).

(A. D., à Castres.)

4999. — Pour que les centres de gravité de deux triangles ABC, A'B'C' coïncident, il faut et il suffit que les forces représentées par les segments $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ forment un couple.

(T. C.)

5000. — Le circuit d'une pile est fermé par deux conducteurs APB (résistance r), BMA (résistance R). Par quelle résistance x faut-il réunir les points A, B pour que l'intensité I du courant qui traverse P devienne m fois l'intensité primitive I_0 ?



Exprimer l'intensité i du courant qui traverse la résistance x.

Le problème est-il toujours possible ? Que signifie, en particulier, le résultat relatif au cas $m = 1$?

(*Bacc. lettres math., Montpellier, juillet 1900.*)

ERRATUM. — Page 74, *épure*, distinction des parties visibles : Le plan P qui détermine deux ouvertures dans les deux surfaces sphériques étant transparent, d'après l'énoncé, et non opaque, toute la partie de l'intersection *bmcn* comprise dans l'ouverture *cleh* est visible.

(*) Voir la solution dans le n° du 15 juin 1900, p. 139.

(**) Dans le n° du 1er mai 1896, p. 118, on a calculé ce volume et prouvé qu'il était le double du volume engendré par le triangle mixtiligne ABC.

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet, FACDOUEL, Dir.

25e Année. — N° 13. JOURNAL Paris, le 1er Avril 1901.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Abonnements.. Librairie **Nony** et Cie, Boulᵈ St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

SUR LES RELATIONS ENTRE LES ÉLÉMENTS DES TRIANGLES

On établit dans tous les traités de trigonométrie les systèmes suivants de relations entre les éléments des triangles :

$$\text{I}\quad\begin{cases} A+B+C=180^\circ, \\ \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}; \end{cases}$$

$$\text{II}\quad\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A, \\ b^2=c^2+a^2-2ac\cos B, \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C; \end{cases}$$

$$\text{III}\quad\begin{cases} a=b\cos C+c\cos B, \\ b=c\cos A+a\cos C, \\ c=a\cos B+b\cos A; \end{cases}$$

et on démontre que si, a, b, c étant positifs, A, B, C étant compris chacun entre 0 et 180°, a, b, c, A, B, C vérifient les équations d'un des systèmes II ou III, ils vérifient les équations du système I.

On peut assez facilement, de différentes façons, montrer qu'on a entre a, b, c, A, B, C les relations

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

Pour retrouver la relation

$$A+B+C=180^\circ,$$

on emploie diverses méthodes ingénieuses, mais souvent délicates à exposer pour des élèves. Il me semble qu'il y aurait intérêt à utiliser un calcul, qui se fait d'ailleurs dans tous les cours à propos de la résolution des triangles, et une remarque très simple.

***

On obtient pour $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ en partant du système II les expressions

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=+\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=+\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=+\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Or, on a

$$\operatorname{tg}\frac{A+B+C}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}-\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}},$$

de sorte que si le dénominateur de la fraction qui est dans le second membre est nul, on a

$$\frac{A+B+C}{2}=90^\circ+k.180^\circ,$$

ou

$$A+B+C=180^\circ+k.360^\circ$$

Si A, B, C sont compris chacun entre 0 et 180°, la somme $A+B+C$ est positive et inférieure à $180^\circ+360^\circ$; donc on ne peut donner à k que la valeur 0.

Donc, pour montrer que $A+B+C=180^\circ$ lorsque A, B, C sont des angles compris chacun entre 0 et 180°, il suffit de montrer que

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=1.$$

Or

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=+\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}\times\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}=\frac{p-a}{p},$$

de sorte que le premier membre de la relation est égal à

$$\frac{p-a}{p}+\frac{p-b}{p}+\frac{p-c}{p},\qquad\text{ou}\qquad\frac{3p-2p}{p}.$$

La proposition considérée est donc établie.

Ch. Bioche.

ALGÈBRE

4971. — *On a trois alliages formés d'or, d'argent et de cuivre.*

Le 1er contient : 2 *or,* 3 *argent,* 4 *cuivre ;*

— 2e — 3 — 4 — 5 — ;

— 3e — 4 — 3 — 5 — .

Quel poids faut-il prélever de chaque alliage pour en obtenir un quatrième renfermant : 9 *or,* 10 *argent,* 14 *cuivre ?*

(*École de chimie industrielle de Lyon, 1899.*)

En supposant les parties figurant dans les trois alliages égales en poids, la fusion des trois alliages en fournit un quatrième qui contient

9 or, 10 argent, 14 cuivre,

c'est-à-dire les proportions indiquées. Pour former le quatrième alliage, il suffit donc de prendre

$2+3+4=9$ du premier,

$3+4+5=12$ du deuxième,

$4+3+5=12$ du troisième.

On peut d'ailleurs obtenir algébriquement ce résultat.

Soient x, y, z les poids à prélever respectivement sur le premier, le deuxième et le troisième alliage pour en former le quatrième.

Écrivons que les quantités d'un même métal contenues dans les trois alliages se retrouvent dans l'alliage final ; nous aurons

$$\frac{2x}{9}+\frac{3y}{12}+\frac{4z}{12}=\frac{9}{33}(x+y+z),$$

$$\frac{3x}{9}+\frac{4y}{12}+\frac{3z}{12}=\frac{10}{33}(x+y+z),$$

$$\frac{4x}{9}+\frac{5y}{12}+\frac{5z}{12}=\frac{14}{33}(x+y+z).$$

En ajoutant ces trois équations, on obtient l'identité

$$x + y + z = x + y + z,$$

ce qui montre que l'une des équations est une conséquence des deux autres, de sorte que les équations déterminent les rapports de deux des inconnues à la troisième, qui reste arbitraire.

Multiplions chacun des membres des deux premières équations par 36 ; il vient

$$8x + 9y + 12z = \frac{9 \times 12}{11}(x + y + z),$$

$$12x + 12y + 9z = \frac{10 \times 12}{11}(x + y + z),$$

ou, en simplifiant,

$$20x + 9y - 24z = 0,$$
$$4x + 4y - 7z = 0,$$

d'où l'on tire facilement

$$x = \frac{3}{4}z, \qquad y = z.$$

Les quantités à prélever sur les trois alliages sont donc proportionnelles aux nombres $\frac{3}{4}$, 1, 1, ou bien 3, 4, 4.

(Pétrus GUERRIER, pensionnat Valbenoîte, Saint-Etienne.)

[Ont résolu la même question : M[lle] A. Saleilles ; MM. H. Belbenoit ; A. Bottin ; C. Bourion ; C. Bourvéau ; L. David ; R. Henry ; M. Laurence ; L. Lefèvre ; P. Legros ; M. Marx ; R. Rives ; M. Royer ; P. Saintin ; J. Trouillé ; A. Vannier ; G. Ybert.]

4982. — *Résoudre et discuter le système d'équations*

$$2(x^3 + y^3) + (x + y) = 3(x^2 + y^2),$$
$$x + y = a.$$

Des identités connues

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y),$$
$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy,$$

on déduit, en remplaçant $x + y$ par a,

$$x^3 + y^3 = a^3 - 3axy,$$
$$x^2 + y^2 = a^2 - 2xy.$$

La première équation du système devient alors

$$2(a^3 - 3axy) + a = 3(a^2 - 2xy),$$

d'où l'on tire $$xy = \frac{2a^3 - 3a^2 + a}{6(a - 1)},$$

ou, en remarquant que le numérateur de cette valeur s'annulant pour $a = 1$ est divisible par $a - 1$,

$$xy = \frac{a(2a - 1)}{6}.$$

Connaissant ainsi $x + y$ et xy, x et y sont racines de l'équation

$$X^2 - aX + \frac{a(2a - 1)}{6} = 0.$$

Discussion. — La condition de réalité est

$$a^2 - \frac{4a(2a - 1)}{6} \geqslant 0,$$

ou $$-a^2 + 2a \geqslant 0,$$

inégalité vérifiée pour toute valeur de a comprise entre les deux valeurs qui annulent le premier membre :

$$0 \leqslant a \leqslant 2.$$

La somme, a, des racines est par suite toujours positive ou nulle ; quant au produit P des racines, il prend le signe de $2a - 1$, c'est-à-dire est positif pour $a > \frac{1}{2}$.

On peut alors dresser le tableau suivant, qui résume toute la discussion :

$a < 0$, Racines imaginaires.

$a = 0$, $x = y = 0$.

$0 < a < \frac{1}{2}$, P est négatif ; deux racines de signes contraires, la plus grande en valeur absolue étant positive.

$a = \frac{1}{2}$, $P = 0$; une des racines est nulle et l'autre égale à $a = \frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2} < a < 2$, P est positif ; deux racines positives.

$a = 2$, $x = y = 1$.

$a > 2$, Racines imaginaires.

(H. DAMOISEAU, école primaire supérieure de Bar-sur-Seine.)

Remarque. — Si $a = 1$ l'équation d'où on a tiré xy se réduit à une identité ; dans ce cas, le système proposé admet toutes les solutions de l'équation

$$x + y = 1.$$

On peut vérifier que la première équation peut s'écrire

$$(x + y - 1)[2(x + y)^2 - (x + y) - 6xy] = 0,$$

de sorte que le système d'équations à résoudre se décompose en

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ x + y = a, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2(x + y)^2 - (x + y) - 6xy = 0, \\ x + y = a. \end{cases}$$

C'est le second système qui seul a été considéré dans la solution précédente.

[Ont résolu la même question : MM. M. Amiot ; H. Andréis ; Antonescu-Vercescu ; L. Azaubert ; L. Bannerot ; V. Barol ; A. Bernardeau ; M. Beyney ; P. Bonnefoy ; P. Bonnetain ; A. Bottin ; A. Bourlat ; J. Bournisien ; C. Bourvéau ; R. Cattin ; H. Cazaux ; F. Clabault ; M. Compain ; F. Coutard ; L. David ; Delhotel ; G. Douce ; Ducongé-Cabireau ; C. Dupas ; E. Durand ; E. Foucart ; Gasluc de Sénébron ; F. Gérard ; P. Guerrier ; M. Guyot ; A. Haar ; R. Henry ; E. Hugonnier ; A. James ; Lamarre ; E. Larran ; C. Laurent ; L. Lemmet ; G. Lepoivre ; J. Lestable ; E. Licope ; H. Martin ; M. Marx ; J. Maury ; A. Meynier ; R. Mouzon ; H. Palustran ; H. Pariselle ; B. Paynel ; E. Périnet ; J. Permann ; D. Petit ; M. Petitjean ; L. Platrier ; M. Poirier ; Poujol ; E. Roncin ; M. Royer ; F. Sol ; J. Tastet ; V. Thébault ; J. Trouillé ; P. Valentin ; A. Vannier ; M. Vidal ; G. Ybert ; P. Zlatco ; G. Marie ; F. Pégorier ; H. Thibon.]

4984. — *Sur la droite* OA, *de longueur* l, *on prend entre* O *et* A *un point* M *situé à la distance* x *de* O. *On construit sur la base* OM *le triangle équilatéral* OMD, *puis sur* MA *le carré* MABC, *et l'on tire* CD.

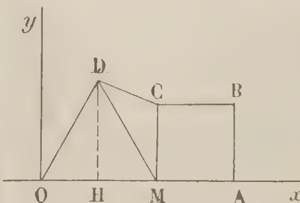
1° *Calculer, en fonction de* l *et* x, *la surface du pentagone* OABCD ;

2° *Tracer la courbe qui représente la variation de cette surface lorsque* x *croît de* 0 *à* l ; *indiquer si la surface passe par un minimum ou un maximum, et trouver les valeurs correspondantes de* x. *On prendra l'axe des* x *suivant* OA, *l'axe des* y *suivant la perpendiculaire à* OA ;

3° *Former les équations des tangentes à la courbe précédente aux points qui correspondent aux valeurs* $x = 0$ *et* $x = l$; *calculer l'abscisse du point d'intersection de ces tangentes.*

(*Bacc. lettres-sciences, Montpellier, novembre 1900.*)

1° Menons la hauteur DH du triangle OMD. La surface y du pentagone est la somme des surfaces des triangles OMD, DMC et du carré MABC.



Or, $$\text{surf. OMD} = \frac{1}{2}\,\text{OM}.\text{DH} = \frac{1}{2}x.\frac{x\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{surf. DMC} = \frac{1}{2}\,\text{HM}.\text{MC} = \frac{x(l - x)}{4},$$

$$\text{surf. MABC} = \overline{\text{MA}}^2 = (l - x)^2.$$

La surface cherchée a donc pour expression

$$y = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{x(l-x)}{4} + (l-x)^2,$$

ou, en ordonnant par rapport à x,

$$y = \frac{3+\sqrt{3}}{4}.x^2 - \frac{7l}{4}x + l^2.$$

2° On sait qu'une fonction y est croissante ou décroissante pour une certaine valeur de x suivant que cette valeur rend positive ou négative la dérivée de la fonction.

En prenant la dérivée de y, on a

$$y' = \frac{3+\sqrt{3}}{2}.x - \frac{7l}{4};$$

cette dérivée s'annule pour

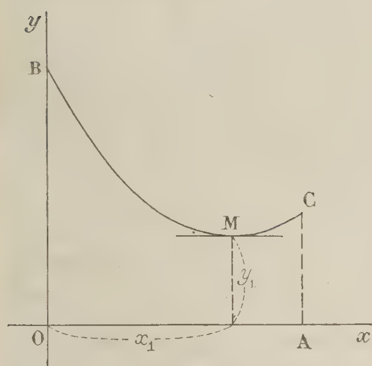
$$x_1 = \frac{7l}{2(3+\sqrt{3})},$$

valeur comprise entre 0 et l. Par suite, lorsque x croît de 0 à x_1, y' est négatif et y décroît ; x variant de x_1 à l, y' devient positif et y croît. La valeur x_1 correspond donc au minimum de y, dont la valeur est

$$y_1 = \frac{49l^2}{16(3+\sqrt{3})} - \frac{49l^2}{8(3+\sqrt{3})} + l^2$$

$$= \frac{l^2(16\sqrt{3}-1)}{16(3+\sqrt{3})} = \frac{l^2(49\sqrt{3}-51)}{96}.$$

Pour $x = 0$, $y = l^2$, et pour $x = l$, $y = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.



On peut dès lors figurer les variations de y par l'arc de courbe BMC, qui représente d'ailleurs un arc de parabole ayant son sommet en M.

3° L'équation de la tangente à la courbe au point (x, y) est

$$Y - y = y'(X - x).$$

Les équations des tangentes aux points B et C sont donc

$$Y = -\frac{7l}{4}X + l^2,$$

$$Y = \frac{(2\sqrt{3}-1)l}{4}(X - l) + \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

En égalant entre elles ces deux valeurs de Y, on a

$$-\frac{7l}{4}X + l^2 = \frac{(2\sqrt{3}-1)l}{4}(X-l) + \frac{l^2\sqrt{3}}{4},$$

d'où l'on tire

$$X = \frac{l}{2}$$

pour l'abscisse du point commun aux deux tangentes. L'ordonnée de ce point est d'ailleurs

$$Y = -\frac{7l}{4}\cdot\frac{l}{2} + l^2 = \frac{l^2}{8}.$$

(Aimé LARUE, à Saint-Trojan.)

Remarque. — La fonction y s'exprimant par un trinome en x, dans lequel x^2 a un coefficient positif, il est facile de trouver que la fonction passe par un minimum, et de calculer la valeur de x correspondante sans faire intervenir la dérivée.

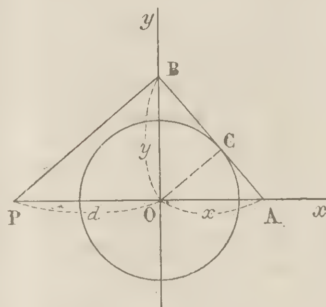
[Ont complètement résolu cette question : MM. A. Bernardeau ; A. Legros ; P. Legros ; A. Vannier.]

[Ont partiellement résolu cette question : MM. G. Allais ; G. Auvergne ; H. Belbenoît ; Bénech ; M. Beyney ; P. Bonnetain ; F. Clabault ; M. Compain ; Daure ; E. Délécraz ; G. Desnoës ; E. Foucart ; A. Fraysse ; H. Fricquegnon ; J. Garin ; H. Haour ; R. Henry ; E. Hugonnier ; E. Larram ; C. Laurent ; J. Lestable ; M. Marx ; H. Martin ; J. Maury ; J. Permann ; D. Petit ; M. Petitjean ; M. Poirier ; J. Raymond ; P. Saintin ; P. Thonet ; P. Valentin ; P. Zlatco.]

4986. — *On donne un cercle de rayon* R *et deux diamètres rectangulaires* Ox, Oy *de ce cercle ; sur* Ox *on prend un point* P *situé à une distance* d *du centre. On demande de mener au cercle une tangente rencontrant* Ox *en* A, Oy *en* B, *et telle que l'angle* PBA *soit droit.*

(*Bacc. lettres-math., Clermont, novembre 1900.*)

Posons OA $= x$ et OB $= y$. Dans le triangle rectangle OAB, la hauteur OC $=$ R correspond à l'hypoténuse AB $= \sqrt{x^2+y^2}$; donc



$$xy = \text{R}\sqrt{x^2+y^2}$$

ou, en élevant au carré,

$$x^2y^2 = \text{R}^2(x^2+y^2). \quad (1)$$

D'ailleurs, l'angle PBA étant droit, on a

$$y^2 = dx.$$

Portant cettte valeur de y^2 dans (1), on obtient

$$dx^3 = \text{R}^2(x^2 + dx)$$

ou, en divisant par x, qui n'est pas nul,

$$dx^2 - \text{R}^2x - \text{R}^2d = 0.$$

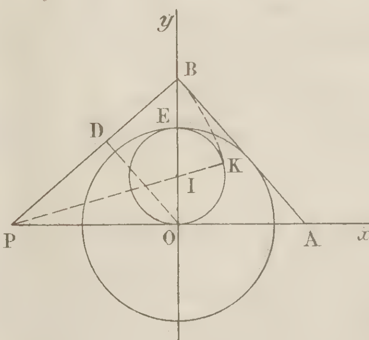
Cette équation ayant ses termes extrêmes de signes contraires admet deux racines réelles et de signes contraires. La racine positive, seule acceptable ici, convient si elle surpasse R, ce qui a toujours lieu, puisque

$$f(\text{R}) = -\text{R}^3$$

étant négatif, R sépare les deux valeurs de x.

Donc $$x = \frac{\text{R}(\text{R} + \sqrt{\text{R}^2+4d^2})}{2d},$$

et par suite $$y^2 = \text{R}\left(\frac{\text{R}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\text{R}}{2}\right)^2 + d^2}\right).$$



On peut déterminer géométriquement le point B en remarquant que si l'on mène OD parallèle à AB, on a

$$\text{PB} = \frac{y^2}{\text{BD}} = \frac{y^2}{\text{R}}$$

$$= \frac{\text{R}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\text{R}}{2}\right)^2 + d^2},$$

de sorte que PB est représenté par le segment PK, obtenu en joignant P au milieu de OE et en prolongeant PI jusqu'à la circonférence de diamètre OE.

(P. LEGROS, à Rethel.)

[Ont résolu la même question : Mlle S. Lauzanne ; MM. M. Amiot ; Antonescu-Vercescu ; G. Auvergne ; L. Azaubert ; L. Bannerot ; V. Barol ; M. Beau ; H. Belbenoît ; Bénech ; A. Bernardeau ; L. Beuret ; M. Beyney ; V. Bogdán ; P. Bonnefoy ; P. Bonnetain ; A. Bottin ; A. Bourlat ; C. Carleton ; R. Cattin ; H. Cazaux ; F. Clabault ; L. Colombey ; M. Compain ; Courtade ; Damoisex ; Daure ; L. David ; E. Délécraz ; Delhotel ; G. Desnoës ; A. Duittoz ; C. Dupas ; E. Durand ; E. Foucart ; A. Fraysse ; H. Fricquegnon ; G., à L. ; J. Garin ; Gasluc de Sénébron ; F. Gérard ; A. Godfroy ; P. Guerrier ; M. Guyot ; A. Haour ; E. Hélary ; R. Henry ; E. Hugonnier ; A. James ; H. Janois ; Joyer-Luciani ; L. Kayser ; Lambert ; A. Larchet ; L. Lefèvre ; P. Legay ; A. Legros ; P. Legros ; L. Lemmet ; G. Lepoivre ; J. Lestable ; L. Lestocart ; H. Martin ; M. Marx ; J. Maury ; A. Meynier ; A. Minary ; Montel ; R. Mouzon ; H. Palustran ; A. Parisey ; D. Petit ; M. Petitjean ; L. Platrier ; M. Poirier ;

A. Pollet-Toulemonde ; Poujol ; J. Raymond ; E. Roncin ; M. Royer ; Sade ; P. Saintin ; F. Sol ; J. Tastet ; V. Thébault ; G. Toublet ; J. Trouillé ; P. Valentin ; A. Vannier ; X., à Ajaccio ; G. Ybert ; P. Zlatco ; F. Thibier ; H. Thibon.]

GÉOMÉTRIE

4136. — *Dans un triangle équilatéral* ABC, *on détermine le point de rencontre de chaque côté avec la droite qui joint un point* M *du cercle circonscrit au milieu de l'arc soustendu par ce côté ; on obtient ainsi les trois points* A′, B′, C′. *Montrer que ces points sont situés sur un diamètre du cercle parallèle à la droite de Simson du point* M.

Les trois points A′, C′, B′ sont situés sur un même diamètre du cercle circonscrit O.

En effet, les trois points B′, O, C′ sont en ligne droite, car on a, en observant que les points E, F sont les symétriques de O par rapport à AC, AB,

$$\widehat{AOB'} = \widehat{AEB'},$$
$$\widehat{AOC'} = \widehat{AFC'},$$

d'où, en ajoutant,

$$\widehat{AOB'} + \widehat{AOC'} = \widehat{AEM} + \widehat{AFM} = 2 \text{ dr.}$$

On établirait de même que les trois points A′, O, B′ sont sur une même droite, qui se confond nécessairement avec la droite précédente.

Pour démontrer que le diamètre A′ C′ B′ est parallèle à la droite de Simson *cab* du point M, il suffit de montrer que l'on a

$$\widehat{A'CO} = \widehat{Aca}.$$

Or $\widehat{AC'O} = \widehat{AC'F} = 90° - \widehat{OFC'}$,

$$\widehat{Aca} = \widehat{BMa} = 90° - \widehat{MBa} ;$$

les angles inscrits OFC′ et MB*a* interceptant le même arc MC sont égaux, et par suite, aussi leurs compléments AC′O et A*ca*.

C.q.f.d.

(CARPENTIER-JAVELOT, lycée Chanzy.)

[Ont résolu la même question : MM. J. d'Avillez ; Benoist Daubray ; C. Bourdet ; E. Foucart ; G. Hiernaux ; A. Marcenet ; A. Mirc ; P. Vincent.]

4403. — *On considère deux cercles* O *et* O′ *et deux points fixes* A *et* A′ *sur chacun d'eux ; on mène deux rayons* OB *et* O′B′, *rencontrant les cercles* O *et* O′ *en* B *et* B′, *et faisant entre eux un angle constant* V ; *on mène enfin les droites* AB *et* A′B′ *qui se coupent en* P. *On fait varier* OB *et* O′B′ *et on demande :*

1° *Le lieu géométrique du point* P ;

2° *Le lieu géométrique du centre du cercle circonscrit au triangle* PBB′.

Désignons par α, α' les angles constants que font les rayons OA, O′A′ avec la direction O′Ox, et par β, β' les angles que font les rayons OB, O′B′ avec la même direction. Abaissons les perpendiculaires OQ, O′Q′ sur les droites PA, PA′, et désignons par x, x' les angles de ces droites avec la même direction. On a

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}, \qquad x' = \frac{\alpha' + \beta'}{2}.$$

L'angle des deux directions OQ, O′Q′ est

$$x - x' = \frac{\alpha - \alpha'}{2} + \frac{\beta - \beta'}{2}.$$

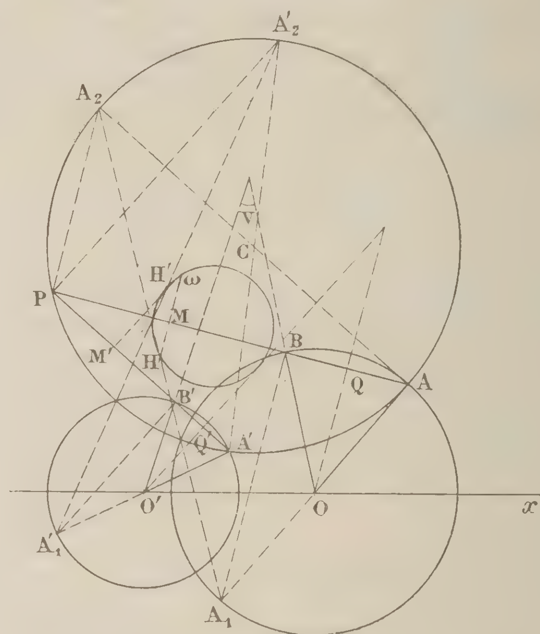
Or, $\beta - \beta' = V$, et l'angle APA′ est égal à $x - x'$ ou à son supplément, suivant sa position par rapport à AA′. Cet angle est égal à

$$\frac{V + \alpha - \alpha'}{2},$$

ou à

$$\pi - \frac{V + \alpha - \alpha'}{2}.$$

Cet angle est constant de chaque côté de AA′. Le lieu du point P est donc le segment capable de l'angle $\frac{V + \alpha - \alpha'}{2}$ ou $\pi - \frac{V + \alpha - \alpha'}{2}$ construit sur AA′. Le lieu complet est alors une circonférence C ayant pour corde AA′.



Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle PBB′. — Ce centre ω est obtenu en menant les perpendiculaires au milieu M de PB et au milieu M′ de PB′. L'angle de ces perpendiculaires est égal à l'angle $\frac{V + \alpha - \alpha'}{2}$ ou à son supplément.

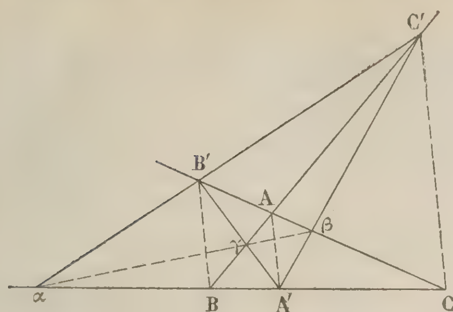
D'autre part, la perpendiculaire au point B à PA passe par le point A_1, intersection du diamètre AO avec le cercle O, et la perpendiculaire à PA menée par le point P passe par le point A_2, intersection du diamètre AC avec le cercle C. Les points A_1, A_2 étant fixes, la perpendiculaire Mω passe par le point fixe H, milieu de A_1A_2. On démontrerait de même que la perpendiculaire M′ω passe par le point fixe H′, milieu de $A'_1A'_2$. Le lieu du point ω est donc un cercle ayant pour corde HH′.

(J. VIDAILLET.)

4987. — *Par les sommets* A, B, C *d'un triangle on mène trois droites parallèles quelconques qui coupent les côtés opposés en* A′, B′, C′. *Démontrer que les points de rencontre des droites* AB *et* A′B′, BC *et* B′C′, CA *et* C′A′ *sont en ligne droite.*

Soient α, β, γ les points où les droites B′C′, C′A′, A′B′ rencontrent respectivement les côtés BC, CA, AB.

Les droites BB′, CC′ étant parallèles, les triangles αBB′, αCC′, sont semblables, et donnent, en grandeur et en signe,



$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{CC'}}.$$

De même

$$\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AA'}},$$

et

$$\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}.$$

Multipliant membre à membre ces trois égalités, on obtient

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = 1,$$

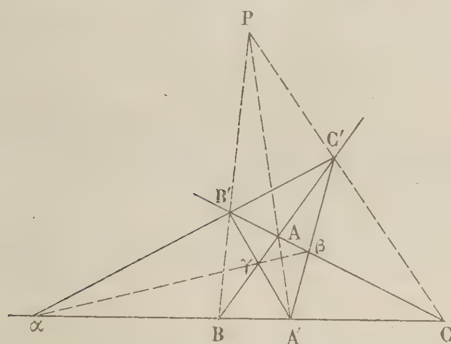
relation qui exprime que les trois points α, β, γ sont en ligne droite (réciproque du théorème de Ménélaüs).

(P. SAINTIN, lycée de Versailles.)

Généralisation : Première solution. — Supposons que les droites AA′, BB′, CC′, au lieu d'être parallèles, concourent en un même point P. En appliquant le théorème de Céva à ces trois droites concourantes, on a

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1. \qquad (1)$$

Mais, dans le quadrilatère complet AB′PC′CB, la diagonale BC est divisée harmoniquement en A′ et α par les deux autres ; donc



$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}},$$

et d'une manière analogue,

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}},$$

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}.$$

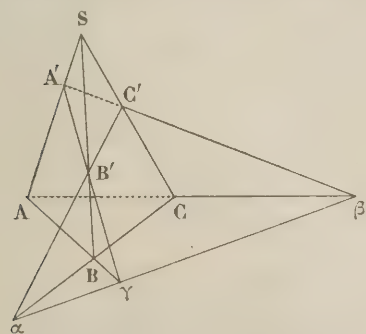
La relation (1) devient ainsi

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = 1,$$

et sous cette forme exprime comme plus haut que les trois points α, β, γ sont en ligne droite.

(Ernest FOUCART.)

Seconde solution. — Si on coupe un tétraèdre SABC par un plan non parallèle à la base, on obtient une section A′B′C′; le plan sécant coupe le plan de la base suivant une droite qui contient les traces α, β, γ de B′C′, C′A′, A′B′.



Au lieu d'un tétraèdre, on peut considérer un prisme triangulaire de base ABC.

En projetant la figure sur le plan de la base, on retrouve la figure considérée dans l'énoncé.

(V. H.)

Remarque. — On peut ramener le cas général au cas particulier en faisant la perspective de la figure de façon à ce que le point P ait sa projection rejetée à l'infini.

[Ont résolu la même question : Mlle A. Saleilles ; MM. Antonescu-Vercescu ; L. Bannerot ; V. Barol; M. Beau; H. Belbenoit H. Bénech ; A. Bernardeau ; M. Beyney ; P. Bily ; E. Bohler ; A. Bourlat ; Bournisien ; C. Bourvéau ; R. Cattin ; L. David ; Delhotel ; G. Desnoës ; H. Dobryzniak ; G. Douce ; A. Duittoz ; E. Durand ; J. Franceschini ; Gasluc de Sénébron ; R. Henry ; E. Hugonnier ; A. James ; H. Janois ; Joyer-Luciani ; L. Kayser ; H. Lacape ; Lamarre ; M. Laurence ; A. Legros ; P. Legros ; L. Lemmet ; T. Lemoyne; E. Licope ; L. de Longueville ; A. Meynier ; A. Minary ; R. Mouzon ; H. Palustran; E. Périnet; C. Perroquin; D. Petit ; M. Petitjean; C. Quantin ; A. Saintloup ; F. Sol ; J. Tastet ; V. Thébault ; P. Thonet ; J. Trouillé ; P. Valentin : A. Vannier ; Vautrey ; M. Vidal ; G. Ybert ; P. Zlatco ; F. Pégorier ; F. Thibier : H. Thibon.]

TRIGONOMÉTRIE

4968. — *Par un point* A *dans le plan d'une circonférence de centre* O *et de rayon* R, *on mène une sécante* ABC *qui coupe la circonférence aux points* B *et* C *et fait avec* AO *un angle* α. *Considérant alors le triangle* BOC, *on demande :*

1° *l'expression de son aire en fonction de* a, *de* R *et de* α *;*

2° *la valeur de* α *pour laquelle cette aire est maxima ;*

3° *la valeur correspondante de l'angle* BOC *;*

4° *la construction géométrique qui en résulte pour la sécante.*

(*Bacc. lettres-math., Rennes, juillet 1900.*)

Première solution. — 1° Soit H le milieu de BC. La surface du triangle BOC s'exprime par

$$S = OH \times BH.$$

Or $\quad OH = a \sin \alpha,$

$$BH = \sqrt{R^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \alpha};$$

donc $\quad S = a \sin \alpha \sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \alpha}.$

2° S est maximum en même temps que

$$S^2 = a^2 \sin^2 \alpha (R^2 - a^2 \sin^2 \alpha).$$

Le second membre de cette expression est le produit de deux facteurs dont la somme, R², est constante ; il sera donc maximum lorsque ces facteurs seront égaux, c'est-à-dire pour

$$2a^2 \sin^2 \alpha = R^2,$$

d'où

$$\sin \alpha = \frac{R\sqrt{2}}{2a}.$$

3° En égalant deux expressions de S^2, on a

$$a^2 \sin^2 \alpha (R^2 - a^2 \sin^2 \alpha) = \frac{R^4}{4} \sin^2 BOC,$$

d'où, en remplaçant $\sin^2 \alpha$ par $\frac{R^2}{2a^2}$,

$$\sin^2 BOC = 1,$$

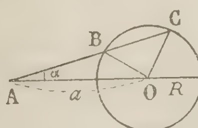
ce qui entraîne $\quad \widehat{BOC} = 90°.$

4° L'angle ACO est égal à 45°. C se trouve donc à l'intersection de la circonférence de centre O et du segment capable de 45° construit sur AO. On obtiendra la sécante ABC en joignant le point A au point C ainsi obtenu.

(L. BARBEROT.)

Seconde solution. — Soit S la surface du triangle BOC ; on a

$$S = \frac{1}{2} R^2 \sin BOC. \qquad (1)$$



Or le triangle AOC donne

$$\frac{\sin ACO}{a} = \frac{\sin \alpha}{R},$$

d'où $\quad \sin ACO = \frac{a}{R} \sin \alpha. \qquad (2)$

D'autre part, on a

$$\sin \text{BOC} = \sin 2\,\text{ACO} = 2 \sin \text{ACO} \cos \text{ACO}$$
$$= \frac{2a}{R} \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{R^2}} = \frac{2a \sin \alpha \sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \alpha}}{R^2}.$$

En portant cette valeur de sin BOC dans (1), il vient

$$S = a \sin \alpha \sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \alpha}. \qquad (3)$$

La condition de réalité de S est

$$a^2 \sin^2 \alpha \leqslant R^2 \qquad \text{ou} \qquad \sin \alpha \leqslant \frac{R}{a}.$$

La relation (1) montre que le maximum de S a lieu en même temps que celui de sin BOC, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$\sin \text{BOC} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \widehat{\text{BOC}} = 90°.$$

Le triangle BOC est alors rectangle isocèle, et l'on a $\widehat{\text{ACO}} = 45°$. La relation (2) donne alors

$$\sin \alpha = \frac{R\sqrt{2}}{2a}.$$

Lorsque S est maximum, le segment BC est le côté du carré inscrit dans le cercle donné O. On peut alors facilement décrire la circonférence inscrite dans ce carré, puis, en menant de A une tangente à cette circonférence, on obtient la sécante ABC.

(E. HUGONNIER, école professionnelle de Voiron.)

[Ont partiellement résolu cette question : MM. C. Dupas ; R. Grenouillet ; J. Heyraud ; E. Gernez-Pfanmatter ; A. Meynier ; J. Raymond ; P. Valentin.]

MÉCANIQUE

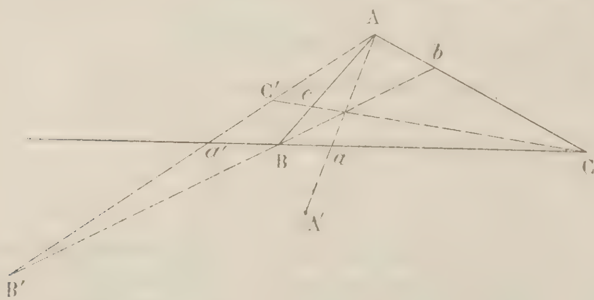
4940. — *Étant donné un triangle* ABC, *on représente par* A', B', C' *les centres de chacun des systèmes de trois forces parallèles* $-\alpha, \beta, \gamma$; $\alpha, -\beta, \gamma$; $\alpha, \beta, -\gamma$ *appliquées aux sommets.*

Démontrer que AA', BB', CC' *sont concourantes et que le triangle* ABC *a ses sommets sur les côtés du triangle* A'B'C'.

Le centre A' des forces parallèles $-\alpha, \beta, \gamma$ se trouve sur la droite Aa joignant A au centre a des forces parallèles β, γ, tel que

$$\frac{\overline{\text{B}a}}{\overline{a\text{C}}} = \frac{\gamma}{\beta}, \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{a\text{B}}}{\overline{a\text{C}}} = -\frac{\gamma}{\beta};$$

de même, les centres B' et C' sont respectivement sur les droites



Bb et Cc, b et c étant deux points tels que

$$\frac{\overline{b\text{C}}}{\overline{b\text{A}}} = -\frac{\alpha}{\gamma}, \qquad \frac{\overline{c\text{A}}}{\overline{c\text{B}}} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

En multipliant ces trois égalités membre à membre, il vient

$$\frac{\overline{a\text{B}}}{\overline{a\text{C}}} \cdot \frac{\overline{b\text{C}}}{\overline{b\text{A}}} \cdot \frac{\overline{c\text{A}}}{\overline{c\text{B}}} = -1,$$

relation qui montre, d'après la réciproque du théorème de Céva, que les trois droites AaA', BbB', CcC' sont concourantes.

Pour démontrer que A est situé sur le côté B'C' du triangle A'B'C', remarquons que le centre B' des forces parallèles $\alpha, -\beta, \gamma$ appartient également à la droite Aa' qui joint A au centre a' des forces parallèles $-\beta, \gamma$; de même, le centre C' des forces parallèles $\alpha, \beta, -\gamma$ est aussi sur cette droite, puisque a' est en même temps le centre des forces parallèles $\beta, -\gamma$. La droite Aa' est d'ailleurs conjuguée harmonique de AA' par rapport à l'angle A.

On verrait de même que les points C' et A', A' et B' sont situés respectivement sur deux droites passant par B et C et conjuguées harmoniques des droites BB', CC' par rapport aux angles B, C.

(H. BLANC, lycée de Clermont.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Bernardeau ; R. Cattin ; M. Laurence ; R. Rives ; P. Thonet.]

PHYSIQUE

4973. — *Une masse de platine pesant* 100gr *est chauffée dans un fourneau dont on tient à connaître la température ; on la place ensuite dans un vase en laiton pesant* 200gr *et contenant* 600gr *d'eau à* 10°. *La température s'élève à* 14° ; *on demande la température du fourneau. On prendra* 0,03 *pour la chaleur spécifique du platine et* 0,09 *pour celle du laiton.*

(*École de chimie industrielle de Lyon*, 1899.)

Représentons par x la température du fourneau. La chaleur perdue par la masse de platine est égale à

$$100 \times 0{,}03(x - 14) \text{ calories.}$$

La chaleur gagnée par l'eau et par le calorimètre en s'élevant de 10 à 14° est égale à

$$(600 + 200 \times 0{,}09)(14 - 10) \text{ calories.}$$

Écrivons que la chaleur perdue est égale à la chaleur gagnée. Il vient

$$100 \times 0{,}03(x - 14) = (600 + 200 \times 0{,}09)4,$$

d'où l'on tire

$$x = 838°.$$

(A. LAPRESLE.)

[Ont résolu la même question : Mlles Lauzanne ; Oddos ; MM. Belbenoît ; Bernardeau ; Beuret ; Beyney ; Bourlat ; Bottin ; Cattin ; Chauvalon ; Cusset ; Douce ; Dobryzniak ; Ducongé ; Durand ; Foucart ; Gasluc de Sénébron ; Grenouillot ; Grunfelder ; Guéret ; Guerrier ; Henry ; Hugonnier ; Krausz ; Lacreuse ; Lacape ; Luquet ; Legros ; Lefèvre ; Lemmet ; Lestable ; Laurence ; Lepoivre ; Laurent ; Mabon ; Martin ; Meynier ; Nègre ; Pegorier ; Périnet ; Petitjean ; Raymond ; Rives ; Roncin ; Roncaglia ; Saintin ; Testenoire ; Thibon ; Thébault ; Thibier ; Trouillé ; Vallot ; Vannier ; Valentin ; Vernet ; Vercescu ; de Wormand ; Ybert.]

4980. — *On donne une machine d'Atwood dans laquelle l'espace parcouru pendant la cinquième seconde est égal à* 2m,7. *Sachant que les deux poids égaux valent chacun* 100gr *et le poids additionnel* 25gr, *trouver la longueur du pendule simple qui bat la seconde au lieu considéré.*

(*Bacc. lettres-sciences, Rennes, novembre* 1900.)

On sait que, dans un mouvement uniformément accéléré, les espaces parcourus pendant la première, la deuxième, ... seconde de chute par un corps qui est parti du repos sont entre eux comme la suite des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, ... D'après cela, si l'on appelle x l'espace parcouru pendant la première seconde, on aura la relation

$$\frac{x}{2{,}7} = \frac{1}{9},$$

d'où

$$x = 0^{\text{m}},30.$$

L'accélération γ du système a pour valeur le double de l'espace parcouru pendant la première seconde. On a donc

$$\gamma = 0^{\text{m}},60.$$

Dans une machine d'Atwood, l'accélération γ est donnée par la relation

$$\gamma = g\,\frac{m}{2M + m}, \qquad (1)$$

g désignant l'accélération due à la pesanteur.

Remplaçant les lettres par leur valeur, il vient

$$g = 5^m,40.$$

Or, en un lieu où l'accélération est g, la longueur du pendule simple qui effectue une oscillation en une seconde est donnée par la formule

$$1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

d'où l'on tire

$$l = \frac{g}{\pi^2}.$$

Remplaçant g par $5^m,40$, il vient

$$l = \frac{5^m,40}{\pi^2} = 0^m,5471.$$

Donc la longueur du pendule simple qui bat la seconde au lieu considéré est de $54^{cm},71$.

(C. LAURENT, à Saint-Etienne.)

[Ont résolu la même question : Mlle Eyquem ; MM. Amiot ; Belbenoît ; Bernardeau ; Beckerich ; Cusset ; David ; Desnoës ; Dupas ; Durand ; Grunfelder ; Fraysse ; de Faria ; Garin ; Guéret ; Guerrier ; Godfroy ; Guyot ; Kissel ; Luquet ; Lemmet ; Lestable ; Lepoivre ; Lapresle ; Marx ; Martin ; Meynier ; Nègre ; Palustran ; Petitjean ; Poirier ; Pollet ; Raymond ; Rives ; Royer ; Rousselin ; Saintin ; Tastet ; Testenoire ; Thibier ; Thibon ; Thonet ; Vannier ; de Wormand ; Valentin ; Vernet ; Ybert.]

4981. — *La température étant de 25°, la hauteur de la colonne de mercure dans un baromètre normal est trouvée égale à 758,5 divisions d'une règle de laiton dont chaque division a une longueur de 1^{mm} quand la règle est à 0°.*

Calculer : 1° *La hauteur barométrique réduite à 0°* ;

2° *La pression atmosphérique en mégadynes par centimètre carré.*

Densité du mercure à 0°	13,6
Coefficient de dilatation du mercure	0,00018
— — — — *laiton*	0,000018
Accélération de la pesanteur	980.

1 *mégadyne* = 10^6 *dynes.*

(Bacc. lettres-math., Oran, novembre 1900.)

1° Soient H la hauteur barométrique observée à $t°$, H_0 la hauteur correspondante à 0°, D_0 la densité du mercure à 0°, D sa densité à $t°$, Δ le coefficient de dilatation du mercure. On a

$$\frac{H_0}{H} = \frac{D}{D_0},$$

et, en remarquant que $D = \frac{D_0}{1 + \Delta t}$, il vient

$$H_0 = \frac{H}{1 + \Delta t}.$$

La hauteur barométrique, ayant été lue sur la règle de laiton, était en réalité $H(1 + \lambda t)$, λ désignant le coefficient de dilatation linéaire du laiton. La hauteur réelle de la colonne barométrique est donc

$$H_0 = H\frac{1 + \lambda t}{1 + \Delta t},$$

ou, approximativement,

$$H_0 = H[1 - (\Delta - \lambda)t].$$

Remplaçant les lettres par leur valeur, il vient

$$H_0 = 758,5[1 - (0,00018 - 0,000018)25] = 755^{mm},438.$$

2° La pression atmosphérique par centimètre carré au moment de l'expérience est égale au poids d'une colonne de mercure ayant $755^{mm},438$ à 0° et un centimètre carré de section. On a donc, en désignant par F cette pression,

$$F = 75,5438 \times 13,6 \times 980 = 1\,006\,847 \text{ dynes},$$

ou

$$F = \frac{1\,006\,847}{10^6} = 1 \text{ mégadyne } 006\,847.$$

(AMIOT, à Chagny.)

[Ont résolu la même question : Mlle Lauzanne ; MM. Beyney ; Bernardeau ; Bourlat ; Bénech ; Claustre ; Chauvalon ; Desnoës ; David ; Dobryzniak ; Ducongé ; Durand ; Fraysse ; Foucart ; Guéret ; Guerrier ; Godfroy ; Guyot ; Henry ; Hostier ; Hugonnier ; Kissel ; Krausz ; Lapresle ; Lacape ; Luquet ; Lestable ; Laurent ; Lemoing ; Lemmet ; Mabon ; Marx ; Meynier ; Matteron ; Martin ; Mouzon ; Palustran ; Poirier ; Rives ; Saintin ; Testenoire ; Thébault ; Thibier ; Trouillé ; Vallot ; Vernet ; de Wormand ; Ybert.]

ASTRONOMIE

Sur la nouvelle étoile apparue récemment dans la constellation de *Persée*.

M. Janssen, directeur de l'Observatoire d'astronomie physique de Meudon, a fait, le 4 mars, à l'Académie des Sciences, la communication que nous reproduisons plus loin.

La plus haute température que nous sachions obtenir (avec le four électrique de M. Moissan) est d'environ 3500°. Or la température du Soleil est évaluée à 7000°. M. Janssen émet l'hypothèse que l'oxygène pourrait ne pas être un corps simple et qu'à la température du Soleil les éléments constitutifs de ce gaz seraient dissociés. On s'était déjà étonné de la complexité du spectre de l'oxygène et aussi de la facilité avec laquelle il semble se transformer en ozone.

Si l'hypothèse de M. Janssen venait un jour à se vérifier, ce ne serait pas la première fois que le Soleil aurait ouvert aux chimistes la voie des découvertes. On sait, notamment, que le gaz hélium a été découvert dans le Soleil (d'où son nom), par l'analyse spectrale, vingt ans avant qu'on ait pu en trouver trace sur notre planète.

Voici la communication de M. Janssen :

L'apparition toute récente d'une nouvelle étoile dans la constellation de *Persée*, et les phases si rapides de changement d'éclat qu'elle présente depuis qu'on l'observe, ont rappelé l'attention des astronomes et même du public sur les causes qui peuvent produire ces grands phénomènes.

Ces causes nous sont encore inconnues, et il faudra sans doute encore de longues études avant qu'elles puissent être reconnues et expliquées avec une entière certitude.

Sans avoir la prétention de proposer et encore moins de donner une théorie de ces phénomènes, je voudrais ici émettre quelques idées qui, dans l'avenir, pourront sans doute concourir aux explications que la Science a pour devoir de chercher.

Ces idées découlent en quelque sorte des recherches que j'ai faites sur la constitution du gaz oxygène et à son absence apparente dans les enveloppes gazeuses qui surmontent la photosphère solaire.

L'Académie se rappelle que j'ai été conduit, dans les observations de laboratoire et par celles exécutées au mont Blanc, soit par mes collaborateurs, soit par moi-même, à admettre que le gaz oxygène tel que nous le connaissons ne se trouve ni dans la chromosphère ni dans l'atmosphère coronale.

Je faisais remarquer, à cette occasion et à la suite de mes observations de 1893 au mont Blanc, que l'absence de l'oxygène, avec la constitution que nous lui connaissons, dans le Soleil, paraissait répondre à une nécessité du bon fonctionnement de l'astre ; car si l'oxygène existait dans l'atmosphère coronale et aux points où cette atmosphère confine aux espaces extérieurs, il se combinerait inéluctablement avec l'hydrogène, si abondant en ces points, d'où il résulterait de la vapeur d'eau qui formerait autour du Soleil une atmosphère plus ou moins opaque pour les rayons calorifiques, d'où un affaiblissement de la radiation solaire, par conséquent, qui irait en augmentant rapidement et compromettrait la fonction fondamentale de notre astre central.

D'un autre côté, je faisais remarquer qu'il est bien difficile d'admettre que l'oxygène, corps qui joue un rôle si capital dans le développement et l'entretien de la vie à la surface de la Terre et sans doute des autres planètes de notre système, soit absent dans notre astre central, qui contient tous nos corps terrestres et beaucoup d'autres accusés par le spectre solaire et non encore reconnus.

On est ainsi conduit à admettre ou tout au moins à pressentir que l'oxygène, en raison des si hautes températures du globe solaire, y existe à l'état dissocié (la complexité des spectres de l'oxygène militerait en faveur de cette opinion). Si l'on admettait cette manière de voir, on apporterait un élément tout nouveau d'explication aux phénomènes auxquels les étoiles temporaires nous font assister.

En effet, lorsque les températures des atmosphères d'une

étoile se seraient abaissées au point de permettre la genèse de l'oxygène et ultérieurement sa combinaison avec l'hydrogène, gaz qui baigne si largement dans toutes les atmosphères stellaires, la combinaison des gaz générateurs de l'eau, avec l'énorme dégagement de chaleur et de lumière qui l'accompagne, se produirait, et l'étoile passerait rapidement, de l'état correspondant à la température relativement basse qui a permis la combinaison des gaz, à celui qui résulterait de la conflagration des éléments en question.

L'étoile passerait donc par une croissance d'éclat qui ne serait réglée que par l'abondance des éléments en présence et les conditions de leur entrée en combinaison. Mais en même temps, si l'augmentation et la grandeur de l'éclat devraient être singulièrement rapides, puisqu'elles sont les effets d'une combinaison, la décroissance ne le serait pas moins, puisque, la combinaison étant effectuée, non seulement la cause de ce rayonnement extraordinaire cesserait, mais la formation d'une vaste atmosphère de vapeur résultant des corps volatilisés, des vapeurs surchauffées et surtout de la vapeur d'eau produite, s'opposerait ensuite et dans une mesure considérable au rayonnement de l'astre.

Je ne donne cette vue que comme contribution à la théorie de ces phénomènes sur lesquels l'analyse spectrale, si elle en suit exactement toutes les phases, pourra mieux que tout autre moyen nous en révéler les causes.

Nota. — Il faut ajouter qu'au moment de la combinaison des gaz oxygène et hydrogène, ce dernier gaz, en raison des pressions et températures développées, doit montrer ses raies considérablement élargies ; or c'est précisément ce que montre la photographie du spectre qu'on a obtenue à Meudon, avec notre grande lunette, et que M. Deslandres m'a prié de soumettre à l'examen de l'Académie. Cependant d'autres causes encore peuvent concourir à cet élargissement généralement si considérable, ainsi qu'en témoignent les descriptions que j'ai reçues de l'étranger.

BACCALAURÉATS

SESSION DE MARS 1901

PARIS

Lettres-Mathématiques.

Mathématiques.

I. — **5001**. Calculer les côtés d'un rectangle ABCD, connaissant le périmètre $2p$ et le rayon R du cercle passant par les deux sommets A, B et tangent au côté CD. — Discuter.

II. — *1er sujet.* — Connaissant $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, calculer $\sin a$ et $\cos a$.

II. — *2e sujet.* — Connaissant $\operatorname{tg} a$, calculer $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$.

II. — *3e sujet.* — Limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand x tend vers zéro.

Physique.

I. — **5002**. Deux baromètres, l'un parfait, l'autre contenant de l'air dans sa chambre barométrique, sont observés simultanément. La température étant de 0°, on lit sur le premier baromètre 760^{mm}, et sur le second 740^{mm}.

Quand le premier marque 740^{mm}, le second marque 728^{mm}.

Quelle est la longueur de la chambre barométrique?

A quelle température, le premier baromètre marquant toujours 740^{mm}, le second ne marquera-t-il plus que 726^{mm}?

On négligera la dilatation du mercure, celle de l'enveloppe et celle de l'échelle.

Coefficient de dilatation de l'air : $\frac{1}{273}$.

II. — *1er sujet.* — Expériences qui établissent la composition de la lumière blanche.

II. — *2e sujet.* — Prisme. Cas de la lumière blanche et de la lumière monochromatique.

II. — *3e sujet.* — Spectre solaire.

Lettres-Sciences.

Mathématiques.

I. — **5003**. On donne un cercle de rayon R et de centre O. On le coupe par une sécante AB qui partage en deux parties égales le rayon perpendiculaire à cette sécante, et on demande le lieu des points de l'intérieur du cercle situés à égale distance de la sécante et de la circonférence. Ce lieu fait partie de deux coniques qu'on demande de définir et de construire.

On place ensuite la circonférence O sur un plan horizontal de projection, de façon que AB soit perpendiculaire à la ligne de terre. On construit les projections d'un cône circulaire droit ayant pour base le cercle de centre O et dont le volume est équivalent à celui d'une sphère de même rayon R que le cercle donné, et on propose de couper ce cône par des plans tels que les sections obtenues aient pour projections les deux coniques précédentes. Mener ensuite les tangentes aux deux coniques à l'un des points où elles coupent la circonférence O donnée, et indiquer la valeur de l'angle de ces deux tangentes.

II. — *1er sujet.* — Projections stéréographiques d'un hémisphère : 1° sur l'équateur ; 2° sur le méridien qui sert de base dans chacun des cas.

II. — *2e sujet.* — Inégalité des jours et des nuits.

II. — *3e sujet.* — Mesure du temps. — Jour solaire vrai; jour solaire moyen. — Calendrier : ses réformes.

Physique.

I. — Le rapport entre le poids spécifique du cuivre à 0° et celui de l'eau à 4° est 8,88. Quel est ce rapport lorsque le cuivre et l'eau sont à la température de 15°?

Coefficient de dilatation linéaire du cuivre $= \frac{1}{58\,200}$;

Dilatation totale de l'eau entre 4° et 15° $= \frac{1}{1\,140}$.

II. — *1er sujet.* — Éclairage électrique.

II. — *2e Sujet.* — Harmoniques. — Timbre des sons.

II. — *3e Sujet.* — Sources de chaleur.

QUESTIONS PROPOSÉES

5004. — L'expression $n^{10} - n^3 - n^4 + n^2$ est divisible par 21, n étant un entier quelconque.

(V. Thébault, école normale de Laval.)

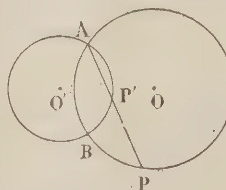
5005. — Résoudre le système d'équations

$$\frac{x^2+x}{y^2+y} = a, \qquad \frac{x^2+y}{y^2+x} = b.$$

5006. — Un père de famille, âgé de 30 ans, s'assure à une compagnie d'assurances pour une somme de $50\,000^{fr}$ payable à son décès moyennant une prime annuelle de 1335^{fr}. L'assuré meurt après le 25e versement. En supposant l'intérêt de 3 1/2 %, la compagnie a-t-elle perdu ou gagné?

5007. — Calculer la surface d'un quadrilatère sachant qu'il est inscriptible à un cercle et circonscriptible à un autre, et connaissant : 1° le périmètre $2p$, 2° le produit k^2 des diagonales; 3° un côté, a.

5008. — Construire un triangle connaissant deux côtés et sachant que la somme des hauteurs qui leur correspondent est égale à la troisième hauteur.



5009. — Deux cercles O et O' se coupent en A et B; on mène par le point A une corde qui coupe ces cercles en P et P'. On considère :

1° le cercle ω qui passe par B et P et coupe orthogonalement le cercle O;

2° le cercle ω' qui passe par B et P' et coupe orthogonalement le cercle O'.

Les cercles ω et ω' se coupent en un point M autre que B. Trouver le lieu de ce point lorsque APP' tourne autour de A.

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet, Facdouel, Dir.

25e Année. — N° 14. JOURNAL Paris, le 15 Avril 1901.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Abonnements.. Librairie **Nony** et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

NOTE RELATIVE A L'APPLICATION DU SENS DES ANGLES DANS UN PLAN

par M. **C. Rech**, professeur au lycée de Lons-le-Saunier.

La question du sens des angles joue un rôle très important dans un grand nombre de démonstrations de propositions géométriques et en particulier dans celles où interviennent des quadrilatères inscriptibles. Nous allons énoncer quelques propositions fondamentales où intervient le sens des angles, et nous les appliquerons ensuite à la solution d'un problème que l'on donne en général, soit d'une façon incomplète, soit en examinant successivement les différents cas de figures qui peuvent se présenter; dans le premier cas, la solution ne peut être acceptée, puisqu'elle n'est pas complète; dans le second, elle ne peut être acceptée qu'à défaut d'autre, car elle est défectueuse au point de vue de la méthode.

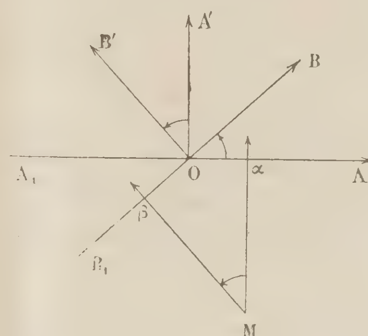
Ce qui importe souvent dans une démonstration, c'est non seulement de savoir si deux angles sont égaux, mais aussi s'ils ont même sens ou des sens contraires; de même pour deux angles supplémentaires, il faut voir s'ils ont même sens ou des sens contraires. Ce que nous allons exposer montrera que dans certaines démonstrations, les angles supplémentaires et de sens contraires jouent le même rôle que les angles égaux et de même sens. Deux angles qui étaient égaux et de même sens dans un cas de figure deviennent supplémentaires et de sens contraires dans un autre cas, par suite d'un changement brusque de sens dans l'un des côtés de l'angle; c'est en ne séparant pas les deux cas que l'on peut arriver à traiter tous les cas de figures en une seule fois.

Nous indiquons que deux angles α et β sont égaux et de même sens en écrivant $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$, que deux angles α et β sont égaux et de sens contraires par $\widehat{\alpha} = \underset{\smile}{\beta}$. De même, que deux angles α et β sont supplémentaires et de même sens par $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} = 2\,\text{dr.}$, et enfin, supplémentaires et de sens contraires par $\widehat{\alpha} + \underset{\smile}{\beta} = 2\,\text{dr.}$

Je commence par mettre en évidence les propositions suivantes faciles à établir lorsqu'on a défini le sens d'un angle dans un plan et déduit les conséquences immédiates de cette définition.

1° Considérons un angle AOB, nous désignerons par OA_1 la demi-droite opposée à OA, et par OB_1 la demi-droite opposée à OB; effectuons une rotation de 90° autour de O, dans le sens AOB par exemple, nous obtenons A'OB' déduit de AOB par cette rotation; on a

$$\widehat{A'OB'} = \widehat{AOB}.$$



Comme les angles AOB et AOA' sont de même sens, OB et OA' sont du même côté de OA. Comme d'autre part les angles BOA et BOB' sont de sens contraires, OA et OB sont de côtés différents de OB; les points du plan de côté opposé à OA' par rapport à OA et de côté opposé à OB' par rapport à OB sont par suite les points du plan qui sont de côté opposé à OB par rapport à OA et du même côté que OA par rapport à OB, ce sont donc les points de l'angle B_1OA. Soit M l'un quelconque de ces points; abaissons de M les perpendiculaires $M\alpha$ et $M\beta$ respectivement sur OA et sur OB; $M\alpha$ et OA' sont parallèles et de même sens, de même $M\beta$ et OB' sont parallèles et de même sens, donc

$$\widehat{\alpha M \beta} = \widehat{A'OB'} = \widehat{AOB}.$$

Prenons maintenant un point M_1 dans l'angle A_1OB; soient $M_1\alpha_1$, $M_1\beta_1$ les perpendiculaires abaissées respectivement sur OA et OB; l'angle $\alpha_1M_1\beta_1$ a les côtés respectivement parallèles et de sens contraires à ceux de l'angle $\alpha M\beta$, on a par suite

$$\widehat{\alpha_1M_1\beta_1} = \widehat{\alpha M \beta} = \widehat{A'OB'} = \widehat{AOB}.$$

Enfin prenons un point M_2, soit dans l'angle AOB ou dans l'angle A_1OB_1 opposé par le sommet, on a

$$\widehat{\alpha_2M_2\beta_2} + \underset{\smile}{\alpha M \beta} = 2\,\text{dr.};$$

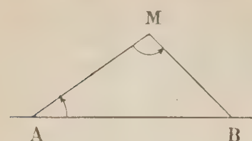
par suite

$$\widehat{\alpha_2M_2\beta_2} + \underset{\smile}{AOB} = 2\,\text{dr.}$$

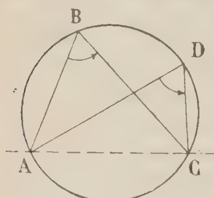
2° Les trois angles ABC, BCA, CAB d'un triangle ABC ont même sens.

3° Étant donnés deux points fixes A, B, tous les angles AMB ayant leur sommet M d'un même côté de AB sont de même

sens (AMB a en effet même sens que BAM), et tous les angles AMB ayant leur sommet M de l'autre côté de AB sont de sens contraire aux précédents (ils s'en déduisent par une symétrie par rapport à AB).



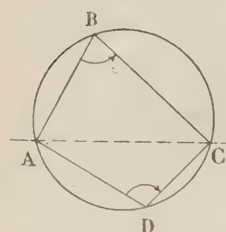
4° La condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère soit inscriptible est que les angles opposés soient égaux et de même sens, ou supplémentaires et de sens contraires. Soit en effet un quadrilatère inscriptible ABCD, A et C étant deux sommets opposés ; si B et D sont d'un même côté de AC, on a



$$\widehat{ABC} = \widehat{ADC};$$

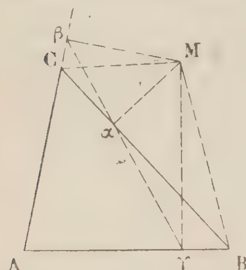
si B et D sont de côtés différents de AC, on a

$$\widehat{ABC} + \underset{\smile}{ADC} = 2 \text{ dr.}$$



Réciproquement, si dans un quadrilatère les angles opposés sont égaux et de même sens, ou supplémentaires et de sens contraires, le quadrilatère est inscriptible. La démonstration est immédiate.

Problème. — *Étant donné un triangle* ABC, *on demande le lieu des points* M *du plan tels que leurs projections sur les trois côtés du triangle* ABC *soient trois points en ligne droite.*



Soient M un point quelconque du lieu, α, β, γ les projections de M respectivement sur BC, CA, AB ; tirons $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$, MB, MC. Le quadrilatère $M\beta C\alpha$ étant inscriptible, on a

$$\widehat{MC\beta} = \widehat{M\alpha\beta}, \quad \text{(cas de la figure)}$$
ou
$$\widehat{MC\beta} + \underset{\smile}{M\alpha\beta} = 2 \text{ dr.}$$

Pour la même raison :

$$\widehat{MB\gamma} = \widehat{M\alpha\gamma},$$
ou
$$\widehat{MB\gamma} + \underset{\smile}{M\alpha\gamma} = 2 \text{ dr.}; \quad \text{(cas de la figure)}$$

or les trois points α, β, γ étant en ligne droite, on a

$$\widehat{M\alpha\beta} = \widehat{M\alpha\gamma},$$
ou
$$\widehat{M\alpha\beta} + \underset{\smile}{M\alpha\gamma} = 2 \text{ dr.} \quad \text{(cas de la figure)}$$

On conclut des égalités précédentes :

$$\widehat{MC\beta} = \widehat{MB\gamma},$$
ou
$$\widehat{MC\beta} + \underset{\smile}{MB\gamma} = 2 \text{ dr.};$$

or, ces deux angles ne peuvent être supplémentaires puisqu'ils appartiennent respectivement aux deux triangles rectangles $MC\beta$ et $MB\gamma$, par suite

$$\widehat{MC\beta} = \widehat{MB\gamma};$$

on conclut de là $\qquad \widehat{\beta MC} = \widehat{\gamma MB},$

et, par une rotation autour de M de l'angle $\widehat{\beta MC}$, on amène $M\beta$ sur MC et $M\gamma$ sur MB, donc

$$\widehat{\beta M\gamma} = \widehat{CMB}.$$

Comme d'autre part

$$\widehat{\beta M\gamma} = \widehat{CAB},$$
ou
$$\widehat{\beta M\gamma} + \underset{\smile}{CAB} = 2 \text{ dr.}, \quad \text{(cas de la figure)}$$

on en conclut :

$$\widehat{CMB} = \widehat{CAB},$$
ou
$$\widehat{CMB} + \underset{\smile}{CAB} = 2 \text{ dr.}; \quad \text{(cas de la figure)}$$

par suite, le quadrilatère ABMC est inscriptible : tout point du lieu se trouve par conséquent sur la circonférence circonscrite à ABC.

Réciproquement, tout point de cette circonférence est un point du lieu. Soient M′ un point quelconque de la circonférence, α', β', γ' les projections de M′ respectivement sur les côtés BC, CA, AB du triangle.

Si M′ est dans l'angle CAB, on a

$$\widehat{CM'B} + \underset{\smile}{CAB} = 2 \text{ dr.} \quad \text{(cas de la figure)}$$
et
$$\widehat{\beta' M' \gamma'} + \underset{\smile}{CAB} = 2 \text{ dr.}; \quad \text{(cas de la figure)}$$
donc
$$\widehat{\beta' M' \gamma'} = \widehat{CM'B}.$$

Si M′ est en dehors de l'angle CAB, on a

$$\widehat{CM'B} = \widehat{CAB},$$
$$\widehat{\beta' M' \gamma'} = \widehat{CAB};$$
donc
$$\widehat{\beta' M' \gamma'} = \widehat{CM'B}.$$

Donc, dans tous les cas, les deux angles $\beta' M' \gamma'$ et CM′B sont égaux et de même sens ; et, de même pour les angles $M'C\beta'$ et $M'B\gamma'$, c'est-à-dire

$$\widehat{M'C\beta'} = \widehat{M'B\gamma'}.$$

Comme conséquence, puisque les quadrilatères $M'\alpha'C\beta'$ et $M'\alpha'B\gamma'$ sont inscriptibles, on déduit

$$\widehat{M'\alpha'\beta'} = \widehat{M'\alpha'\gamma'},$$
ou
$$\widehat{M'\alpha'\beta'} + \underset{\smile}{M'\alpha'\gamma'} = 2 \text{ dr.}; \quad \text{(cas de la figure)}$$

donc α', β', γ' sont trois points en ligne droite.

ALGÈBRE

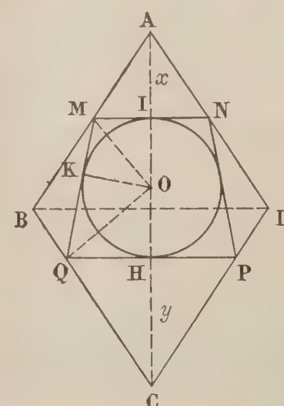
4401. — *Inscrire dans un losange* ABCD *un trapèze* MNPQ *de surface donnée* S *et qui soit de plus circonscriptible à un cercle.*

Données : $AC = 2a$, $BD = 2b$, $S = \frac{b}{a} m^2$; *les bases* MN, PQ *du trapèze sont parallèles à la diagonale* BD *du losange.*

Inconnues : les distances $AI = x$, $CH = y$ *des sommets* A *et* C *du losange aux bases* MN *et* PQ.

Discussion.

Supposons le trapèze MNPQ circonscrit à un cercle O, de rayon R, les bases étant parallèles à BD ; soient I, H, K les points de contact du cercle avec les côtés MN, PQ, QM. On a d'abord



$$AI + IH + HC = AC,$$
ou
$$x + y + 2R = 2a. \qquad (1)$$

Puis $\quad S = IH(MI + QH) = \frac{b}{a} m^2,$

ou, en observant que $\quad \frac{MI}{b} = \frac{x}{a}$

et $\quad \frac{QH}{b} = \frac{y}{a},$

$$2R(x + y) = m^2. \qquad (2)$$

D'ailleurs, les droites MO et QO étant bissectrices des angles supplémentaires IOK, KOH, l'angle MOQ est droit, et l'on a $\qquad MK.KQ = \overline{OK}^2,$

ou, comme $MK = MI = \frac{bx}{a}$ et $KQ = QH = \frac{by}{a}$,

$$xy = \frac{a^2}{b^2}R^2. \qquad (3)$$

Des équations (1) et (2) on déduit

$$x + y = 2(a - R) = \frac{m^2}{2R};$$

par suite, R est donné par l'équation

$$f(R) = 4R^2 - 4aR + m^2 = 0, \qquad (4)$$

et alors x et y sont racines de l'équation

$$F(X) = X^2 - 2(a - R)X + \frac{a^2}{b^2}R^2 = 0. \qquad (5)$$

Pour qu'on ait une solution, il faut et il suffit que l'équation (5) ait ses deux racines réelles, positives et inférieures à a.

Discussion. — 1° X *réel*. — Pour qu'on trouve des valeurs réelles pour R, il faut que $4a^2 - 4m^2 \geqslant 0$, ou $m^2 \leqslant a^2$.

2° X *réel et positif*. — Cette condition étant vérifiée, on aura des racines réelles pour X si

$$(a - R)^2 - \frac{a^2}{b^2}R^2 \geqslant 0,$$

et ces racines seront positives si

$$a > R.$$

Si on suppose cette inégalité vérifiée la précédente peut s'écrire

$$a - R \geqslant \frac{a}{b}R,$$

ou

$$R \leqslant \frac{ab}{a+b};$$

comme $\frac{ab}{a+b} < a$ lorsque cette dernière inégalité est vérifiée, la précédente l'est *a fortiori*. Donc la condition pour que l'équation (5) ait des racines réelles et positives est que

$$R \leqslant \frac{ab}{a+b}.$$

Or, si on substitue $\frac{ab}{a+b}$ dans le premier membre $f(R)$ de l'équation (4), on a

$$f\left(\frac{ab}{a+b}\right) = m^2 - \frac{4a^2b}{a+b} + \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} = m^2 - \frac{4a^3b}{(a+b)^2};$$

$\frac{4a^3b}{(a+b)^2}$ étant inférieur à a^2, le résultat de substitution peut être positif ou négatif.

Si $m^2 < \frac{4a^3b}{(a+b)^2}$, $\frac{ab}{a+b}$ est entre les racines; la plus petite racine de l'équation (4) donne seule des racines réelles et positives pour l'équation (5).

Si $m^2 > \frac{4a^3b}{(a+b)^2}$, comparons $\frac{ab}{a+b}$ à la demi-somme, $\frac{a}{2}$, des racines de l'équation (4); on voit immédiatement que si $a > b$, les deux racines en R sont supérieures à $\frac{ab}{a+b}$, le problème n'a pas de solution, et si $a < b$, les deux racines sont inférieures à $\frac{ab}{a+b}$, de sorte que l'équation (5) donne pour chaque valeur de R déduite de (4) deux racines réelles et positives.

3° $X < a$. — Il est évident que l'une des racines de l'équation (5) est inférieure à a puisque la demi-somme est $a - R$; donc, pour que les deux racines soient inférieures à a, il faut et il suffit que $F(a) > 0$.

Or

$$F(a) = a^2 - 2a(a - R) + \frac{a^2}{b^2}R^2;$$

$F(a)$ sera donc positif lorsqu'on aura

$$R \geqslant \frac{b\sqrt{a^2+b^2} - b^2}{a}.$$

Désignons par R_1 cette dernière expression; le problème aura autant de solutions que l'équation (4) donnera de valeurs de R comprises entre R_1 et $\frac{ab}{a+b}$.

On peut vérifier qu'on a toujours

$$R_1 = \frac{b\sqrt{a^2+b^2} - b^2}{a} < \frac{ab}{a+b},$$

et que

$$R_1 < \frac{a}{2}.$$

Donc la condition $R > R_1$ est toujours compatible avec celle qui a déjà été trouvée; et comme R_1 est inférieur à la demi-somme des racines de l'équation (4), pour qu'il soit inférieur aux deux racines à la fois il faut et il suffit que $f(R_1) > 0$, ce qui donne

$$m^2 > 4R_1(a - R_1) = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a}\left[\sqrt{a^2+b^2} - b\right].$$

Il résulte de cette discussion que :

1° si $\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a}(\sqrt{a^2+b^2} - b) < m^2 < \frac{4a^3b}{(a+b)^2}$, le problème a une solution, la valeur de R correspondant à cette solution étant la plus petite des racines de l'équation (4);

2° si $m^2 > \frac{4a^3b}{(a+b)^2}$, a étant supérieur à b, le problème n'a pas de solution;

3° si $m^2 > \frac{4a^3b}{(a+b)^2} > \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a}(\sqrt{a^2+b^2} - b)$, a étant inférieur à b, le problème a une solution;

4° si $\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a}(\sqrt{a^2+b^2} - b) > m^2 > \frac{4a^3b}{(a+b)^2}$, le problème a deux solutions.

Remarque. — Il faut observer que $\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a}(\sqrt{a^2+b^2} - b)$ peut être soit inférieur, soit supérieur à $\frac{4a^3b}{(a+b)^2}$.

[Ont résolu la même question : MM. M. Boutry; L. Gourdet; A. Nayel; J. Sire.]

4983. — *Un quart de cercle* AOB *tourne autour du rayon* OB. *Ayant tracé la corde* AB, *on demande à quelle distance* OP *il faut mener la parallèle* PCD *au rayon* OA *pour que l'anneau engendré par le segment* CD *intercepté sur cette parallèle par la corde* AB *et la circonférence ait une surface donnée* πm.

Maximum de cette surface quand on fait varier la distance OP *depuis* 0 *jusqu'à* $OB = a$.

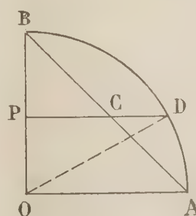
On prendra si l'on veut pour inconnues

$$OP = x, \qquad PD = y.$$

(*Bacc. lettres-math., Alger, novembre 1900.*)

La surface de l'anneau engendré par le segment CD a pour expression

$$\pi(\overline{PD}^2 - \overline{PC}^2).$$



Or, en posant $OP = x$, le triangle rectangle OPD donne

$$\overline{PD}^2 = a^2 - x^2,$$

et le triangle BPC, semblable au triangle isocèle BOA,

$$PC = PB = a - x.$$

L'équation du problème est donc

$$\pi(a^2 - x^2) - \pi(a - x)^2 = \pi m,$$

ou

$$2x^2 - 2ax + m = 0.$$

Discussion. — Pour qu'une valeur de x convienne, il faut et il suffit qu'elle soit réelle et comprise entre 0 et a.

La condition de réalité est

$$a^2 - 2m \geqslant 0,$$

ou

$$m \leqslant \frac{a^2}{2}.$$

Cette condition remplie, les deux valeurs de x sont positives et inférieures à a, car leur produit est positif et leur somme égale à a. Le problème admet donc deux solutions. Les cordes correspondantes étant placées symétriquement par rapport au milieu de OB.

Ces deux solutions se réduisent à une seule lorsque m atteint son maximum, $\frac{a^2}{2}$; dans ce cas, on a $x = \frac{a}{2}$, et P est le milieu de OB.

On peut également obtenir directement le maximum de m en écrivant cette quantité sous la forme

$$m = 2x(a - x),$$

et en observant que le produit variable $x(a - x)$ ayant la somme de ses facteurs constante devient maximum lorsque

$$x = a - x, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{a}{2}.$$

(Camille SUDREAU, école normale de Périgueux.)

[Ont résolu la même question : Mlle A. Saleilles ; MM. M. Amiot ; P. Azaubert ; L. Bannerot ; V. Barol ; M. Beau ; H. Belbenoît ; A. Bernardeau ; M. Beyney ; V. Bogdan ; E. Bohler ; P. Bonnetain ; A. Bottin ; Bourdeaux ; A. Bourlat ; J. Bournisien ; R. Cattin ; F. Clabault ; Compain ; F. Coutard ; H. Damoiseau ; L. David ; Delhotel ; G. Desnoës ; H. Dobryzniak ; Ducongé-Cabireau ; C. Dupas ; E. Durand ; E. Foucart ; A. Fraysse ; H. Fricquegnon ; G., à L. ; J. Garin ; Gasluc de Sénébron ; F. Gérard ; A. Gheysens ; G. Gautier ; P. Guerrier ; A. Haour ; R. Henry ; E. Hugonnier ; J., à T. ; L. Kayser ; Lambert ; A. Larcher ; L. Lefèvre ; A. Legros ; L. Lemmet ; G. Lepoivre ; J. Lestable ; L. Lestocart ; P. Legay ; L. de Longueville ; M. Marx ; J. Maury ; A. Meynier ; A. Minary ; Montel ; R. Mouzon ; Martin des Pallières ; H. Palustran ; E. Périnet ; J. Permann ; D. Petit ; M. Petitjean ; M. Poirier ; Poujol ; J. Raymond ; E. Roncin ; M. Royer ; Sade ; P. Thonet ; P. Tomvieille ; J. Tastet ; P. Valentin ; A. Vannier ; X., à Ajaccio ; G. Ybert ; P. Zlatco ; G. Marie ; F. Pégorier ; F. Thibier ; H. Thibon.]

GÉOMÉTRIE

4788. — *Sur une droite on marque trois points* A, B, C. *Par* A *et* B *on fait passer une circonférence* S *de centre* O, *et sur* CO *comme diamètre on décrit une circonférence* (S'). *On demande les lieux :*

1° *Des points* M *et* N *communs aux circonférences* S *et* S' ;

2° *Du point de rencontre* R *de* CO *et de l'axe radical* Δ *des deux circonférences* S *et* S' ;

3° *Des points de rencontre* P *et* Q *de* Δ *avec les droites* AO *et* BO.

1° L'angle OMC étant droit, la droite CM est tangente au cercle O, et l'on a

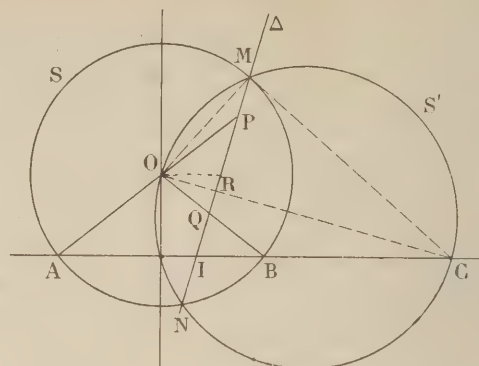
$$\overline{CM}^2 = CA . CB = \text{constante}.$$

Donc le lieu de M ou de son analogue N est un cercle de centre C et de rayon $\sqrt{CA . CB}$.

2° La droite Δ étant la polaire du point C relativement au cercle O passe par le point fixe I, conjugué harmonique de C par rapport à A et B. Par suite le lieu de R est un cercle de diamètre IC.

3° Le point O décrivant une droite perpendiculaire au milieu de AB, les droites AO, CO engendrent deux faisceaux homographiques ; de même le point R décrivant un cercle, les droites IR et CR engendrent deux faisceaux homographiques.

Les faisceaux engendrés par les droites AO et IR sont ainsi homographiques comme homographiques à un troisième. Le point de rencontre P de ces deux droites décrit donc une conique admettant AI comme axe de symétrie. Pour connaître son genre, cherchons si elle a des points à l'infini ; pour ces points, AO est



parallèle à Δ ou perpendiculaire à OC, et le point O se trouve sur le cercle de diamètre AC ; ce cercle coupant toujours la perpendiculaire élevée au milieu de AB en deux points, la conique lieu de P a deux points à l'infini : c'est donc une hyperbole définie par son axe transverse AI et ses asymptotes.

En répétant le raisonnement précédent sur le point Q analogue au point P, on reconnaît facilement que le lieu de Q est une ellipse dont l'un des axes est IB.

Remarque. — Un raisonnement analogue permet de trouver le lieu du point de rencontre de Δ avec la parallèle à AB menée par O. Ce lieu est une conique admettant un seul point à l'infini, c'est donc une parabole ayant pour sommet le point I.

(V. H.)

[Ont complètement résolu la question : MM. Bayor ; Duvergé et Sainte-Laguë ; G. Foucry ; T. Lemoyne ; D. Lwow.
Ont partiellement résolu la question : MM. Aubert ; H. Blanc ; F. Clabault ; A. Delaire ; H. Dobryzniak ; J. Haag ; E. Licope ; P. Zlatco.]

4111. — *On donne, dans un cercle, deux cordes* MN *et* MR, *qui se coupent sur la circonférence en* M.

1° *Mener une troisième corde, qui coupe* MN *et* MR *en* P *et en* Q, *la circonférence en* P' *et en* Q', *et telle que*

$$MN - MR = MP - MQ = PP' - QQ'.$$

2° *Lieu du point de rencontre des droites* NQ *et* RP *lorsque les points* N *et* R *restent fixes et que* M *décrit la circonférence.*

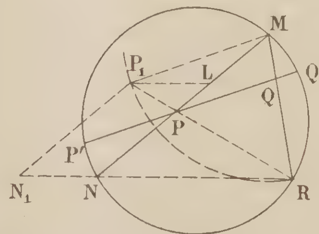
1° La relation

$$MN - MR = MP - PQ$$

peut s'écrire

$$MN - MP = MR - PQ,$$

ou $\qquad NP = QR. \qquad (1)$



D'ailleurs, d'après la propriété relative à deux cordes d'un cercle, on a

$$MP.PN = PP'.PQ' = PP'(PQ + QQ'),$$

$$MQ.QR = QQ'.QP' = QQ'(PQ + PP'),$$

d'où, en retranchant membre à membre et en tenant compte de (1),

$$(MP - MQ)PN = (PP' - QQ')PQ,$$

ou, puisque $MP - MQ = PP' - QQ'$ par hypothèse,

$$PN = PQ.$$

On est ainsi ramené à déterminer la droite PQ de manière que l'on ait

$$NP = PQ = QR.$$

Pour cela, prenons sur MN le point L tel que $NL = MR$ et menons de L une parallèle à NR qui coupe en P_1 le cercle de centre M et de rayon MR : la droite P_1R coupe MN en P. En effet, si l'on mène P_1N_1 parallèle à MN et limitée à NR, les triangles P_1N_1R, PNR sont homothétiques ; il en est de même des triangles isocèles P_1MR, PQR qui ont l'angle en R commun ; les deux quadrilatères MP_1N_1R, QPNR sont donc homothétiques, et comme par construction $N_1P_1 = P_1M = MR$, il s'ensuit que

$$NP = PQ = QR.$$

Il existe toujours deux points P_1 ou P et par suite deux droites PQ, mais l'une de ces droites coupant les prolongements de NM et RM ne convient pas au problème énoncé.

2° Soit I le point de rencontre des droites NQ et RP.

On a

$$\widehat{NIR} = \widehat{PIQ} = 180° - (\widehat{IPQ} + \widehat{IQP}) ;$$

mais les triangles isocèles PQR, PNQ donnent

$$\widehat{IPQ} = \frac{\widehat{MQP}}{2}$$

et

$$\widehat{IQP} = \frac{\widehat{MPQ}}{2} ;$$

donc

$$\widehat{NIR} = 180° - \frac{\widehat{MQP} + \widehat{MPQ}}{2}$$

$$= 180° - \frac{180° - \widehat{NMR}}{2}$$

$$= 90° + \frac{\widehat{NMR}}{2}.$$

Le lieu du point I est donc un segment de cercle capable de l'angle $90° + \frac{\widehat{NMR}}{2}$ et de base NR ; ce segment passe par le centre O du cercle inscrit dans le triangle MNR, puisque $\widehat{NOR} = 90° + \frac{\widehat{NMR}}{2}$, et a son centre ω au milieu de l'arc $N\omega R$.

On verrait de même que lorsque M décrit l'arc $N\omega R$, le point I décrit un second segment de base NR ayant son centre au milieu ω' de l'arc $N\omega' R$.

(L. WEISZ, école réale de Pécs.)

(Ont résolu la même question : MM. A. Bertrand ; Courtinat ; G. Hiernaux ; J. Pastour ; P. Vincent.)

TRIGONOMÉTRIE

4939. — *On considère sur le cercle trigonométrique les deux points H et H' qui sont les extrémités des divers arcs ayant pour cosinus un nombre donné m. On désignera par H celui de ces deux points qui est sur la demi-circonférence ABA'.*

1° Etablir les formules permettant de calculer tous les arcs x dont l'extrémité P est telle que le rapport $\frac{PH}{PH'}$ des cordes joignant le point P aux points H et H' soit égal à un nombre donné k.

2° Les extrémités de tous ces arcs sont en deux points P_1 et P_2 du cercle trigonométrique. Calculer la distance du centre O de ce cercle au point où la droite P_1P_2 rencontre le diamètre AA'.

3° On considère le cercle C qui passe par les points P_1 et P_2, et dont le centre G est sur la droite HH'. En quels points coupe-t-il la droite HH' ?

4° Démontrer que les droites GP_1 et GP_2 sont tangentes au cercle trigonométrique donné, et que les droites OP_1 et OP_2 sont tangentes au cercle C.

(*Bacc. lettres-math., Lyon, juillet 1900.*)

1° Soit P_1 le point P situé sur l'arc HAH' et tel que $AP_1 = x$. La bissectrice P_1A' de l'angle HP_1H' coupe HH' en un point D, tel que

$$\frac{HD}{DH'} = \frac{P_1H}{P_1H'} = k,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{HI - DI}{HI + DI} = k,$$

ou

$$\frac{HI}{DI} = \frac{1+k}{1-k}.$$

Or

$$HI = \sqrt{\overline{OH}^2 - \overline{OI}^2} = \sqrt{1 - m^2}$$

et

$$DI = A'I \operatorname{tg} A' = (1+m) \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Donc

$$\frac{\sqrt{1-m^2}}{(1+m)\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{1+k}{1-k},$$

d'où

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-k}{1+k}\sqrt{\frac{1-m}{1+m}}.$$

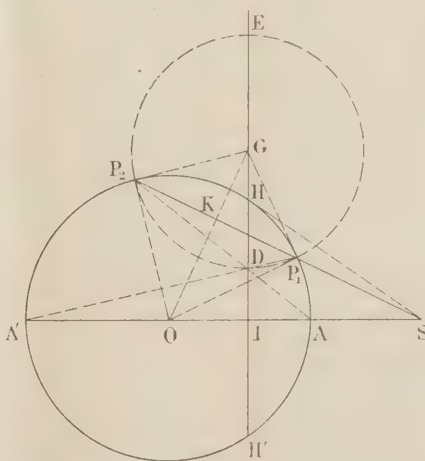
Lorsque $-1 \leqslant m \leqslant 1$, cette valeur est réelle et positive ou négative suivant que $k <$ ou > 1 ; elle correspond à la tangente d'une série d'arcs compris dans la formule $k\pi + \alpha$, α désignant le plus petit d'entre eux. On peut donc écrire

$$\frac{x}{2} = k\pi + \alpha, \qquad \text{ou} \qquad x = 2k\pi + 2\alpha,$$

formule qui représente tous les arcs x aboutissant en P_1.

En considérant le point P_2 situé sur l'arc HA'H' et tel que $\frac{P_2H}{P_2H'} = k$, on verrait de même que l'angle $P_2OA = x'$ est donné par la formule analogue

$$\operatorname{tg}\frac{x'}{2} = \frac{1+k}{1-k}\sqrt{\frac{1-m}{1+m}},$$



qui ne diffère de la première que par le changement du signe de k. On en déduit de même

$$x' = 2k\pi + 2\alpha',$$

formule définissant tous les arcs x' aboutissant en P_2.

2° Soit S le point de rencontre des droites P_2P_1 et A'A. Projetons O en K sur P_2P_1.

On a

$$OS \cos SOK = OK = OP_1 \cos KOP_1,$$

d'où

$$OS = \frac{\cos KOP_1}{\cos SOK} = \frac{\cos\frac{x'-x}{2}}{\cos\frac{x'+x}{2}} = \frac{\cos\frac{x'}{2}\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x'}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x'}{2}\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x'}{2}\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{x'}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{x'}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{1 + \frac{1-m}{1+m}}{1 - \frac{1-m}{1+m}} = \frac{1}{m}.$$

On parvient plus rapidement à ce résultat en observant que les droites AP_2 et $A'P_1$ se coupent en un point de la polaire de S ; comme ce point D est situé sur HH′, cette polaire coïncide avec HH′, et HS est la tangente en H. Donc

$$OS.OI = \overline{OH}^2, \qquad \text{ou} \qquad OS = \frac{1}{m}.$$

3° Les points P_1 et P_2 étant tels que le rapport des distances de chacun d'eux aux points fixes H et H′ est constant et égal à k, appartiennent à un cercle ayant son centre à l'intersection G de HH′ avec la perpendiculaire OK au milieu de P_1P_2. Ce cercle G divise harmoniquement le segment HH′ aux points D et E, tels que

$$\frac{DH}{DH'} = \frac{EH}{EH'} = k.$$

4° G étant le milieu de DE, on sait que

$$\overline{GD}^2 = GH.GH'.$$

Or $$GD = GP_1 = GP_2 ;$$

donc $$\overline{GP_1}^2 = \overline{GP_2}^2 = GH.GH',$$

ce qui montre que les droites GP_1 et GP_2 sont tangentes au cercle trigonométrique O, et par suite, les droites OP_1 et OP_2 qui sont perpendiculaires à GP_1 et GP_2 sont tangentes au cercle G.

(Eugène LICOPE, à Mons.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Bernardeau ; A. Bottin ; L. David ; J. Maury ; F. Mestre ; E. Poucin ; J. Trouillé.]

4985. — *On donne un angle xOy et un point P dans cet angle ; soit $OP = l$, $\widehat{xOP} = a$, $\widehat{POy} = b$. On mène par ce point P une droite APB limitée aux côtés de cet angle et inclinée d'un angle z sur la direction OP.*

1° *Exprimer en fonction de l, a, b, z le produit $PA \times PB$;*

2° *l, a, b restant invariables, pour quelles valeurs de z ce produit $PA \times PB$ est-il maximum ou minimum ;*

3° *Déduire du résultat obtenu la construction géométrique de la droite APB pour laquelle a lieu ce maximum ou ce minimum.*

(*Bacc. lettres-math., Lille, novembre 1900.*)

1° Les triangles POA, POB permettent d'écrire

$$\frac{PA}{\sin a} = \frac{l}{\sin(a+z)},$$
$$\frac{PB}{\sin b} = \frac{l}{\sin(z-b)} ;$$

d'où l'on déduit

$$PA \, . \, PB = l^2 \, . \, \frac{\sin a \sin b}{\sin(a+z)\sin(z-b)}.$$

2° Le maximum de PA . PB correspond au minimum du produit

$$\sin(a+z)\sin(z-b).$$

Or comme

$$2\sin(a+z)\sin(z-b) = \cos(a+b) - \cos(2z+a-b),$$

ce minimum répond au maximum de $\cos(2z+a-b)$, lequel est atteint lorsque

$$\cos(2z+a-b) = 1,$$

d'où $$2z + a - b = 0$$

et $$z = \frac{b-a}{2}.$$

Cet angle étant inférieur à b, la sécante APB ne coupe pas Oy, mais son prolongement, de sorte que le maximum de PA . PB convient seulement aux positions de la sécante APB pour lesquelles cette sécante rencontre l'un des suppléments de l'angle donné xOy.

On verrait de même que le minimum de PA . PB a lieu en même temps que celui de $\cos(2z+a-b)$, c'est-à-dire pour

$$\cos(2z+a-b) = -1,$$

d'où $$2z + a - b = 180°$$

et $$z = 90° + \frac{b-a}{2}.$$

Cet angle étant supérieur à b, puisque $a + b < 180°$, la sécante correspondante APB coupe les côtés de l'angle xOy.

3° Menons la bissectrice OC de l'angle xOy. On a

$$\widehat{POC} = \frac{a-b}{2}.$$

Par suite la sécante A_1PB_1 répondant au minimum s'obtient en abaissant de P une perpendiculaire sur OC, car on a ainsi

$$\widehat{OPA_1} = 90° - \widehat{POC} = 90° - \frac{a-b}{2}.$$

De même la sécante PB_2A_2, perpendiculaire à A_1PB_1 ou parallèle à OC, s'applique au maximum signalé plus haut.

(F. PÉGORIER, à Carcassonne.)

Remarque. — L'expression trouvée pour PA . PB est positive dans le cas où la sécante coupe bien Ox et Oy et non leurs prolongements ; elle serait négative dans le cas contraire.

Le premier cas correspond aux valeurs de z telles que

$$b < z < 180° - a.$$

Si on ne considère que les valeurs absolues de PA . PB il y a un minimum correspondant à chaque cas de figure.

[Ont résolu la même question : MM. M. Amiot ; L. Bannerot ; M. Beau ; A. Bernardeau ; L. Beuret ; M. Beyney ; A. Bottin ; F. Clabault ; Compain ; L. David ; G. Desnoës ; E. Durand ; E. Foucart ; J. Garin ; A. Godfroy ; M. Guyot ; Legros ; Licope ; C. Marie ; D. Petit ; V. Pollet ; Poujol ; E. Roncin ; H. Thibon ; P. Zlatco.]

MÉCANIQUE

4979. — *Dans une lame homogène, très mince et d'égale épaisseur, on découpe un hexagone régulier ABCDEF, de côté a et de centre O.*

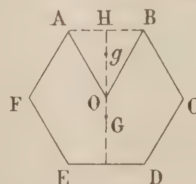
1° *De la surface de l'hexagone on enlève le triangle AOB, et on demande de trouver le centre de gravité de l'objet formé par les cinq triangles équilatéraux restants.*

2° *On enlève encore le nouveau triangle BOC, et on demande le centre de gravité de l'ensemble formé par les quatre triangles équilatéraux restants.*

En enlevant successivement ainsi les divers triangles COD, DOE, on formera des figures composées de trois, de deux et de un triangle dont on demande les centres de gravité.

(*Bacc. lettres-sciences, Bordeaux, novembre 1900.*)

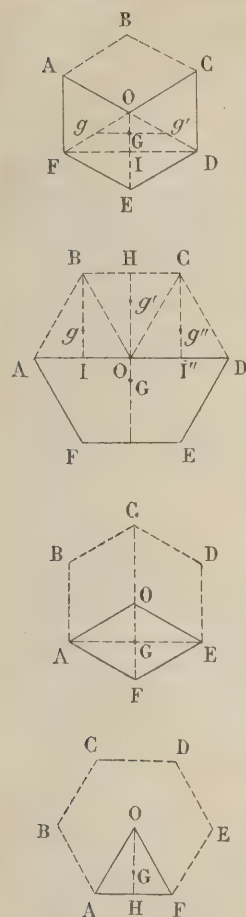
1° Soient g le centre de gravité du triangle AOB, situé aux $\frac{2}{3}$ de l'apothème OH à partir de O, et G le centre de gravité de la partie restante, situé sur HO prolongé. En appliquant le théorème des moments par rapport à O, centre de gravité de la figure totale, on a



$$-OAB.Og + 5.OAB.OG = 0,$$

d'où $$OG = \frac{1}{5}Og = \frac{2}{15}OH = \frac{a\sqrt{3}}{15}.$$

2° La figure restante se compose ici des deux losanges OAFE et OCDE ayant leurs centres de gravité aux milieux g, g' de OF, OD ; par suite son centre de gravité G est à l'intersection de gg' avec l'axe de symétrie OE, et l'on a



$$OG = \frac{1}{2} OI = \frac{1}{4} OE, \text{ ou } a.$$

3° Soient g, g', g'' les centres de gravité des triangles enlevés OAB, OBC, OCD, et G le centre de la figure restante, situé sur l'axe de symétrie Og' prolongé.

En appliquant le théorème des moments par rapport à l'axe AD, on a

$$-OAB.gI - OBC.Og' - OCD.g''I'' + 3.OAB\ OG = 0,$$

d'où

$$OG = \frac{2gI + Og'}{3} = \frac{\frac{4}{3}OH}{3} = \frac{4}{9} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{9}.$$

4° Le centre de gravité G du losange restant OAFE est situé au milieu de OF, et $OG = \frac{a}{2}$.

5° Le centre de gravité du triangle restant OAF est situé aux $\frac{2}{3}$ de l'apothème OH à partir de O, et

$$OG = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

(Ernest FOUCART.)

[Ont complètement résolu cette question : Mlle A. Saleilles ; MM. M. Amiot ; L. Barberot ; H. Belbenoit ; M. Beyney ; R. Cattin ; Chauvalon ; L. David ; G. Desnoës ; H. Fricquegnon ; P. Guérit ; M. Guyot ; E. Hugonnier ; B. Krausz ; Lamarre ; Le Bunetel ; L. Lemmet ; G. Lepoivre ; H. Mangin ; Martin ; M. Marx ; H. Palustran ; F. Pégorier ; J. Trouillé ; Valentin ; A. Vannier ; P. Vernet ; G. Ybert.

Ont partiellement résolu cette question : MM. B. Bernardeau ; G. Bianchi ; E. Durand ; A. Fraysse ; Gasluc de Sénébron ; P. Guerrier ; R. Henry ; E. Kissel ; L. Lefèvre ; V. Thiébault ; C. Vallot.]

PHYSIQUE

4989. — *Un marteau pesant 1kg, animé d'une vitesse horizontale de 1m par seconde, frappe une bille qui roule sur un plan horisontal parfaitement poli. Après le choc, le marteau reste immobile, et la bille a une vitesse de 0m,20 par seconde.*

On demande l'élévation de température de la bille sachant que sa masse est 500gr et sa chaleur spécifique 0,1. On admet que le marteau absorbe les 2/3 de la chaleur dégagée par le choc.

(*Bacc. lettres-sciences, Besançon, juillet 1900.*)

Le marteau en mouvement a une force vive constante exprimée par $\frac{1}{2}mv^2$, ou $\frac{1\,000 \times \overline{100}^2}{2} = 5\,000\,000^{\text{ergs}}$, ou $0^{\text{joule}},5$.

Le marteau restant immobile après le choc, cette force vive se retrouve tout entière dans la force vive de la bille et dans la chaleur qui élève la température de la bille et du marteau.

La force vive de la bille est égale à $\frac{500 \times \overline{20}^2}{2} = 100\,000^{\text{ergs}}$, ou $0^{\text{joule}},01$. Le reste de la force vive du marteau, c'est-à-dire $0,5 - 0,01 = 0^{\text{joule}},49$, s'est transformé en chaleur ; mais $\frac{1}{3}$ seulement de cette chaleur, c'est-à-dire $\frac{0,49}{4,17 \times 3} = 0^{\text{cal}},039$, est consacré à chauffer la bille (on sait en effet qu'une calorie correspond à un travail de $4^{\text{joules}},17$).

On a donc, en appelant x la température de la bille,

$$0,039 = 500 \times 0,1 \times x,$$

d'où

$$x = 0°,00078.$$

(LEMMET.)

[Ont résolu la même question : Mlle Saleilles ; MM. Bernardeau ; Beuret ; Cattin ; David ; Desnoës ; Dobryzniak ; Durand ; Fournel ; Godfroy ; Guérit ; Guyot ; Rousselin.]

4990. — *Deux corps pesants, de masses m et m_1, sont lancés simultanément du même point, suivant la verticale, mais en sens contraires, avec la même vitesse initiale a.*

1° Exprimer et discuter l'énergie ou puissance vive totale de ce système en fonction du temps ;

2° Minimum de l'énergie ;

3° Calculer l'époque de ce minimum, ainsi que sa valeur en kilogrammètres et en ergs.

$m = 3$ *kilogrammes-masse* (*vers le bas*),
$m_1 = 5$ *kilogrammes-masse* (*vers le haut*),

$$a = \frac{10^{\text{m}}}{1^{\text{sec.}}}, \qquad g = \frac{9^{\text{m}},81}{(1^{\text{sec.}})^2}.$$

(*Bacc. lettres-sciences, Montpellier, novembre 1900.*)

Le premier corps est animé d'un mouvement uniformément accéléré dont la vitesse à l'instant t est $a + gt$.

Le mouvement du second corps est uniformément retardé, et sa vitesse à l'instant t est $a - gt$.

L'énergie W du système aura donc pour expression

$$W = \frac{1}{2}m(a + gt)^2 + \frac{1}{2}m_1(a - gt)^2.$$

Discuter cette expression revient à chercher les valeurs qu'elle prend pour des valeurs réelles et positives de t. Pour une valeur donnée de W, les valeurs correspondantes de t sont fournies par l'équation

$$g^2(m + m_1)t^2 - 2ag(m_1 - m)t + a^2(m + m_1) - 2W = 0.$$

La condition de réalité est

$$a^2g^2(m_1 - m)^2 - g^2(m + m_1)[a^2(m + m_1) - 2W] \geqslant 0,$$

ou

$$W \geqslant \frac{2a^2mm_1}{m + m_1}.$$

Le signe des racines dépend de celui de leur produit

$$P = \frac{a^2(m + m_1) - 2W}{g^2(m + m_1)}.$$

Lorsque $W > \frac{a^2(m + m_1)}{2}$, P est négatif ; les deux racines sont réelles et de signes contraires.

Lorsque $\frac{a^2(m + m_1)}{2} > W \geqslant \frac{2a^2mm_1}{m + m_1}$, les deux racines sont réelles et du signe de leur somme

$$S = \frac{2a(m_1 - m)}{g(m_1 + m)}.$$

Dans ce cas, si $m_1 > m$, les deux valeurs correspondantes de t sont réelles et positives ; si $m_1 < m$, ces valeurs sont réelles et négatives.

2° D'après ce qui précède, le minimum de W est

$$W' = \frac{2a^2mm_1}{m + m_1}, \quad \text{si} \quad m_1 > m ;$$

ou

$$W'' = \frac{a^2(m + m_1)}{2}, \quad \text{si} \quad m_1 < m.$$

Dans le premier cas, la valeur correspondante de t est

$$t' = \frac{a(m_1 - m)}{g(m + m_1)} ;$$

dans le second cas, cette valeur est

$$t'' = 0,$$

c'est-à-dire que ici le minimum de l'énergie W correspond à l'instant du départ des deux corps.

3° Dans l'exemple numérique donné, $m_1 > m$; on a donc pour le minimum de W et l'époque de ce minimum,

$$W' = \frac{2a^2mm_1}{m+m_1} = \frac{2 \times \overline{1000}^2 \times 3\,000 \times 5000}{3000+5000}$$
$$= 375 \times 10^7 \text{ ergs}, \quad \text{ou} \quad 375 \text{ joules}.$$
$$t' = \frac{a(m_1 - m)}{g(m+m_1)} = \frac{1\,000(5\,000-3\,000)}{981(5\,000+3000)} = 0^{\text{sec}},254.$$

(DURAND.)

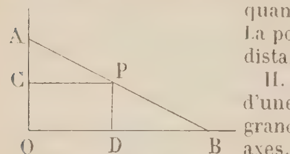
[Ont résolu la même question: MM. Bernardeau; Beuret; Foucart; Fournel; Godfroy; Guyot; James; Lemmet; Marx; Rousselin; Royer; Saintin.]

ÉLÈVES DE LA MARINE MARCHANDE
DIEPPE

Examens de 1900.
(31 mars.)

Élèves de 1re Classe.

I. — **5010**. Par un point P pris dans un angle droit, on mène une sécante APB. On demande d'étudier la variation du produit $PA \times PB$ quand la sécante tourne autour du point P. La position du point P est déterminée par les distances $PC = a$, $PD = b$.



II. — Déterminer les points de rencontre d'une droite et d'une ellipse donnée par son grand axe et ses foyers ou bien par ses deux axes.

III. — Démontrer la relation
$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Pp}{I}.$$

IV. — Mouvement elliptique du soleil. Exprimer l'excentricité de l'orbite en fonction des demi-diamètres maximum et minimum.

Élèves de 2e Classe.

I. — Calculer la somme des n premiers termes de la progression arithmétique
$$\div \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n} \cdot \ldots$$

II. — Un triangle AOB, rectangle en O, engendre un cône en tournant autour de AO; le côté $AO = 0^m,15$, la somme des deux autres côtés $AB + BO = 0^m,45$. On demande de calculer: 1° le volume du cône; 2° l'angle du secteur circulaire obtenu en développant la surface latérale du cône supposé ouvert suivant une génératrice.

III. — Démontrer que dans tout triangle ABC, on a la relation
$$\frac{b - 2a\cos C}{a \sin C} + \frac{c - 2b\cos A}{b\sin A} + \frac{a - 2c\cos B}{c \sin B} = 0.$$

IV. — Régler un chronomètre par la méthode des hauteurs correspondantes.

Examens de 1901.
(3 mars.)

Élèves de 1re Classe.

I. — Déterminer p et q de façon que la fraction
$$\frac{3x^2 + px + q}{x^2 + 1}$$
puisse prendre toutes les valeurs comprises entre $+4$ et -3 et seulement ces valeurs quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

II. — Trouver les points de rencontre d'une droite et d'une parabole.

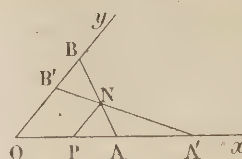
III — **5011**. Un corps très petit descend verticalement dans un tube rempli d'eau à 4° et dont la hauteur est 2^m. Partant sans vitesse initiale de la surface du liquide, il arrive au fond en $1^{\text{sec}}\ 1/2$. On demande de trouver le poids spécifique de ce corps en supposant qu'on puisse considérer comme négligeable la résistance du liquide au mouvement.

IV. — Instruments servant à déterminer les coordonnées des astres.

V. — Théorie des cartes marines.

Élèves de 2e Classe.

I. — **5012**. Étant donnés sur les côtés d'un angle xOy quatre points A, A', B, B' tels que
$$OA = a, \qquad OA' = a',$$
$$OB = b, \qquad OB' = b',$$
on mène les droites A'B' et AB, qui se coupent en N.



On mène NP parallèle à Oy, et on demande de calculer $OP = x$ et $NP = y$.

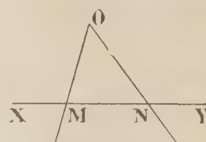
II. — Résoudre un triangle rectiligne connaissant les angles A, B, C et le périmètre $2p$. On rendra les formules trouvées calculables par logarithmes.

III. — Du coefficient Pagel: le définir et indiquer les différents moyens de le calculer.

QUESTIONS PROPOSÉES

5013. — Inscrire dans un cône de rayon R et de hauteur h un cylindre de surface totale donnée.

5014. — Étant donnés une droite fixe, XY, et un angle constant tournant autour de son sommet O, trouver le lieu :

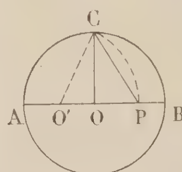


1° Des points de rencontre des médianes et des hauteurs du triangle formé par la droite fixe et par les côtés de l'angle mobile;

2° Des centres des cercles inscrit et circonscrit à ce triangle.

(E. Sinturel, à Brioude.)

5015. — On donne un cercle de diamètre AB; OC étant le rayon perpendiculaire à AB, on prend $OO' = \frac{R}{2}$, et, de O' comme centre, avec O'C pour rayon, on décrit un cercle qui coupe OA en P. Démontrer que CP est le côté du pentagone convexe inscrit.

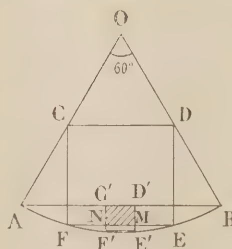


Déduire de là, en généralisant, la construction de la corde de longueur
$$R\,\frac{\sqrt{2(n^2+1) - 2\sqrt{n^2+1}}}{n}.$$

(Lùis de Alba, à Malaga.)

5016. — Calculer en fonction du rayon, l'aire de la partie commune C'D'MN aux carrés inscrits, l'un dans un secteur de 60°, l'autre dans le segment correspondant.

(A. Bernardeau, à Surgères.)



5017. — Les cercles décrits des pieds des hauteurs d'un triangle comme centres, avec un même rayon, rencontrent les côtés correspondants du triangle formé par les milieux des côtés en six points qui sont sur un même cercle dont le centre est à la rencontre des hauteurs du premier triangle.

(M. O.)

5018. — Un aréomètre à poids constant a une tige, exactement cylindrique, divisée en cent parties égales. Plongé dans l'eau pure, de densité 1, il s'enfonce jusqu'à zéro : le point d'affleurement est 100 dans SO^4H^2, de densité 1,84. Calculer le rapport du volume d'une division de la tige au volume total limité au zéro. Quel serait le point d'affleurement dans AzO^3H, de densite 1,4?

(*Bacc. lettres-math., Besançon, novembre 1900.*)

Erratum. — Page 112, question 5004 : lire « $-n^8$ », au lieu de « $-n^3$ ».

Le Rédacteur-Gérant : Henry Vuibert.

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet, Facdouel, Dir.

25e Année. — N° 15. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 1er Mai 1901.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.
Abonnements.. Librairie Nony et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

CONCOURS GÉNÉRAUX DE BELGIQUE

(Concours de 1900.)

ATHÉNÉES

4991. — *Résoudre un triangle, étant donnés a, $b+c$ et r_a le rayon du cercle exinscrit au triangle et compris dans l'angle* A.

Soit D le point de contact du côté AB avec le cercle exinscrit O, de rayon r_a.

Dans le triangle rectangle OAD, on a

$$r_a = \mathrm{AD}\,\mathrm{tg}\,\frac{\mathrm{A}}{2},$$

d'où, en observant que $\mathrm{AD} = p = \dfrac{a+b+c}{2}$,

$$\mathrm{tg}\,\frac{\mathrm{A}}{2} = \frac{2r_a}{a+b+c}.$$

Cette valeur de $\mathrm{tg}\,\frac{\mathrm{A}}{2}$ étant positive, détermine un angle $\frac{\mathrm{A}}{2}$ et un seul compris entre 0 et 90°. Par suite on trouve un angle A compris entre 0 et 180°.

A étant connu, B et C se déduisent des relations connues

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C} = 180°,$$

$$\frac{a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{b}{\sin \mathrm{B}} = \frac{c}{\sin \mathrm{C}}.$$

En effet, ces dernières s'écrivent

$$\frac{a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{b+c}{\sin \mathrm{B} + \sin \mathrm{C}},$$

ou

$$\frac{a}{2\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\cos\frac{\mathrm{A}}{2}} = \frac{b+c}{2\sin\frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{2}\cos\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}},$$

d'où, en observant que $\cos\frac{\mathrm{A}}{2} = \sin\frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{2}$,

$$\cos\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2} = \frac{b+c}{a}\sin\frac{\mathrm{A}}{2}.$$

L'angle $\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}$ ne pouvant varier qu'entre 0 et $\frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{2}$, son cosinus doit être compris entre 1 et $\cos\frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{2} = \sin\frac{\mathrm{A}}{2}$; de là la double condition

$$1 \geqslant \frac{b+c}{a}\sin\frac{\mathrm{A}}{2} > \sin\frac{\mathrm{A}}{2},$$

ou

$$(b+c)\sin\frac{\mathrm{A}}{2} \leqslant a < b+c.$$

On peut d'ailleurs remplacer $\sin\frac{\mathrm{A}}{2}$ par sa valeur en fonction des données en observant que

$$\sin\frac{\mathrm{A}}{2} = \frac{\mathrm{tg}\frac{\mathrm{A}}{2}}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\frac{\mathrm{A}}{2}}} = \frac{2r_a}{\sqrt{(a+b+c)^2+4r_a^2}}.$$

Cas limite. — Lorsque $a = (b+c)\sin\frac{\mathrm{A}}{2}$, $\cos\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2} = 1$, d'où $\mathrm{B} = \mathrm{C}$, et le triangle devient isocèle.

(H. Thibon, lycée d'Aix.)

Solution géométrique. — Dans le triangle ABC, considérons le cercle exinscrit O et le cercle inscrit O′, tangents en D et E au côté AB. On a

$$\mathrm{AD} = \frac{a+b+c}{2}$$

et

$$\mathrm{AE} = \frac{b+c-a}{2}.$$

Les longueurs AD et AE sont donc connues ; de là cette construction :

Avec AD et r_a comme côtés de l'angle droit, on construit le triangle rectangle ADO ; sur le côté AD on prend $\mathrm{AE} = \dfrac{b+c-a}{2}$ et l'on élève la perpendiculaire EO′ à AD. Il ne reste plus qu'à tracer les cercles O, O′ tangents en D, E à AD, et à leur mener les tangentes communes AC et BC. (La seconde tangente commune intérieure donne un triangle symétrique du précédent.)

Pour que le problème soit possible, il faut d'abord que AE soit positif, ce qui entraîne la condition évidente $a < b+c$. Il faut en outre pour que la tangente BC existe, que les cercles O et O′ soient extérieurs, c'est-à-dire qu'on ait

$$\mathrm{OD} + \mathrm{O'E} \leqslant \mathrm{OO'}.$$

Or $\mathrm{OD} = \mathrm{AD}\,\mathrm{tg}\,\frac{\mathrm{A}}{2}$, $\mathrm{O'E} = \mathrm{AE}\,\mathrm{tg}\,\frac{\mathrm{A}}{2}$,

$$\mathrm{OO'} = \mathrm{AO} - \mathrm{AO'} = \frac{\mathrm{AD}}{\cos\frac{\mathrm{A}}{2}} - \frac{\mathrm{AE}}{\cos\frac{\mathrm{A}}{2}};$$

l'inégalité précédente devient donc

$$(\mathrm{AD}+\mathrm{AE})\,\mathrm{tg}\,\frac{\mathrm{A}}{2} \leqslant \frac{\mathrm{AD}-\mathrm{AE}}{\cos\frac{\mathrm{A}}{2}},$$

ou, en remplaçant AD et AE par leurs valeurs,

$$(b+c)\sin\frac{\mathrm{A}}{2} \leqslant a.$$

Lorsque $(b+c)\cdot \sin\frac{A}{2} = a$, les cercles O, O' sont tangents extérieurement, et le triangle ABC est isocèle.

(H. THIBON.)

[Ont résolu la même question : MM. H. Andréis ; A. Bernardeau ; M. Beyney ; A. Bourlat ; Delhotel ; Ducongé ; E. Durand ; R. de Faria ; H. Fricquegnon ; Gasluc de Sénébron ; F. Gérard ; P. Guerrier ; E. Hugonnier ; A. Humblot ; M. Laurence ; Le Bunetel ; Mestre ; A. Meynier ; T. Millet ; H. Palustran ; F. Pégorier ; D. Petit ; M. Petitjean ; P. Saintin ; A. Vannier.]

4992. — *Deux poids, l'un de 40^{gr}, l'autre de 10^{gr}, sont attachés aux extrémités du fil qui passe sur une poulie d'Atwood et abandonnés à la pesanteur dans le vide. Quel sera l'espace parcouru par les poids lorsque la vitesse acquise sera de $29^m,427$ par seconde? Quelle sera en outre à ce moment la durée de la chute ?*

La masse qui met le système en mouvement est $40-10=30^{gr}$. Si cette masse tombait librement, son poids p lui communiquerait un mouvement uniformément accéléré, et l'on aurait

$$p = 30 \times g.$$

En agissant sur la masse totale, $40+10=50^{gr}$, la même force constante p lui communiquerait un mouvement qui est encore uniformément accéléré, mais dont l'accélération γ est plus petite que g. On a alors

$$p = 50 \times \gamma.$$

Égalant les deux valeurs de p, il vient

$$30g = 50\gamma,$$

d'où

$$\gamma = \frac{30 \times 9{,}81}{50} = 5^m{,}886.$$

La vitesse au bout du temps t est donnée par la formule $v=\gamma t$. On a donc

$$29{,}427 = 5{,}886t,$$

d'où

$$t = 5^{sec}.$$

L'espace parcouru est donné par la formule $e = \frac{1}{2}\gamma t^2$.

Par suite, cet espace a pour valeur

$$e = \frac{1}{2} \times 5{,}886 \times \overline{5}^2 = 73^m{,}575.$$

(P. GUERRIER, à Saint-Etienne.)

[Ont résolu la même question : M[lle] A. Saleilles ; MM. Amiot ; Bourlat ; Cattin ; Delhotel ; Durand ; de Faria ; Fraysse ; Gérard ; Hugonnier ; James ; Laurent ; Licope ; Martin ; Meynier ; Millet ; Palustran ; Poirier ; Rousselin ; A. de Saint-Gabriel ; Thibon ; Valentin ; Vannier.]

4993. — *Rechercher le caractère général de divisibilité d'un nombre écrit dans la base B par un facteur quelconque de $B^n \pm r$. Appliquer la formule au nombre $123ab56$ (base 12) divisé par $(10)^2 \pm 1$ et par $(10)^3 \pm 2$ (base 12).*

Un nombre quelconque écrit dans le système de base B (*) est de la forme

$$N = \alpha_0 + \alpha_1 10^n + \alpha_2 10^{2n} + \ldots + \alpha_m 10^{mn},$$

$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ désignant les nombres obtenus en partageant N en tranches de n chiffres à partir de la droite.

Divisibilité de N *par le facteur* $10^n + r$ (base B).

En posant $10^n + r = A$,

on en déduit

$$10^n = A - r,$$
$$10^{2n} = \text{mult. } A + r^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$10^{mn} = \text{mult. } A \pm r^m,$$

suivant que m est pair ou impair.

Par suite

$$N = \text{mult. } A + \alpha_0 - \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 - \alpha_3 r^3 + \ldots \pm \alpha_m r^m.$$

De cette égalité, on déduit comme caractère général de divisibilité de N par A, dans le système de base B, la règle suivante :

On partage le nombre N en tranches de n chiffres à partir de la droite ; on multiplie ensuite les diverses tranches successives par $1, -r, r^2, \ldots, \pm r^m$, puis on retranche la somme des tranches de rang pair de la somme des tranches de rang impair augmentée s'il y a lieu d'un multiple de A. On obtient ainsi un certain nombre N' ; si $N' < A$, N' est le reste de la division de N par A ; dans le cas contraire, on opère sur N' comme sur N jusqu'à ce qu'on parvienne à un nombre N inférieur à A.

Appliquons cette règle aux deux exemples donnés.

1° On a $B = 12, \quad n = 2, \quad r = 1$;

$$123ab56 = \text{mult.}[(10)^2+1] + 56 - ab + 23 - 1$$
$$= \text{mult.}[(10)^2+1] + 101 + 78 - ab = \text{mult.}[(10)^2+1] + 8a.$$

2° On a $B = 12, \quad n = 3, \quad r = 2$;

$$123ab56 = \text{mult. } [(10)^3+2] + b56 - 23a \times 2 + 4$$
$$= \text{mult. } [(10)^3+2] + 6a2.$$

Divisibilité de N *par le facteur* $10^n - r$ (base B).

En posant $10^n - r = A$,

on déduit

$$10^n = A + r,$$
$$10^{2n} = \text{mult. } A + r^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$10^{mn} = \text{mult. } A + r^m.$$

Par suite

$$N = \text{mult. } A + \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \ldots\ldots + \alpha_m r^m,$$

ce qui conduit à la règle suivante :

On partage le nombre N en tranches de n chiffres à partir de la droite ; on multiplie ensuite les diverses tranches successives par $1, r, r^2, \ldots, r^m$, puis on fait leur somme N'. Si $N' \geqslant A$, on opère sur N' comme sur N jusqu'à ce qu'on tombe sur un nombre N inférieur à A.

Applications :

1° On a $B = 12, \quad n = 2, \quad r = 1$;

$$123ab56 = \text{mult. } (10^2 - 1) + 56 + ab + 23 + 1$$
$$= \text{mult. } (10^2 - 1) + 169,$$
$$169 = \text{mult. } (10^2 - 1) + 69 + 1 = \text{mult. } (10^2 - 1) + 6a.$$

2° On a $B = 12, \quad n = 3, \quad r = 2$;

$$123ab56 = \text{mult. } (10^3 - 2) + b56 + 23a \times 2 + 4$$
$$= \text{mult. } (10^3 - 2) + 1416,$$
$$1416 = \text{mult.}(10^3-2) + 4.16 + 2 = \text{mult. } (10^3-2) + 418.$$

(R. CATTIN, à Mont-de-Marsan.)

[Ont résolu la même question : MM. L. David ; A. James ; M. Laurence.]

(*) Il importe de remarquer que dans tout système la base s'écrit 10. Par exemple, si la base est le nombre *douze*, les douze premiers nombres sont représentés par

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, 10.

4994. — *Démontrer que les racines incommensurables d'une équation du second degré à coefficients rationnels donnent naissance à des fractions périodiques continues.*

Note sur les fractions continues

Les fractions continues ne figurant plus dans les programmes français, nous allons donner à leur sujet quelques indications de façon que tous nos lecteurs puissent comprendre sans difficulté la solution de la question suivante, proposée dans un concours en Belgique.

Soit x un nombre positif quelconque, α sa partie entière ; si on pose

$$x = \alpha + \frac{1}{x_1},$$

x_1 est un nombre positif supérieur à 1 ; on peut poser de même

$$x_1 = \alpha_1 + \frac{1}{x_2}, \qquad x_2 = \alpha_2 + \frac{1}{x_3}, \qquad \text{etc.},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ étant les parties entières de $x_1, x_2, \ldots$

On peut alors écrire, par exemple,

$$x = \alpha + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{x_3}}}.$$

Si x est commensurable, l'un des nombres, x_n, est entier; sinon on peut prolonger indéfiniment le développement.

L'expression ainsi obtenue est ce qu'on appelle une *fraction continue.*

Les nombres $x_1, x_2, \ldots$ sont les *quotients complets ;*

les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont les *quotients incomplets.*

On dit que la fraction continue est *périodique* si les quotients incomplets se reproduisent périodiquement.

La fraction est dite *périodique simple* si la première période commence à α_1, et périodique mixte si le premier terme de la première période est un terme d'indice supérieur.

Solution

On peut toujours ramener l'équation proposée à avoir ses coefficients tous entiers, le premier étant positif. L'équation sera donc

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (1)$$

a, b, c étant entiers, et a positif. Il y a différentes hypothèses à distinguer relativement aux signes des autres coefficients.

1re Hypothèse : $c < 0$. Les racines sont de signes contraires ; considérons la racine positive, qui est donnée par

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Soit α sa partie entière ; posons $x = \alpha + \frac{1}{x_1}$; en remplaçant x par cette expression et en réduisant, on a

$$(a\alpha^2 + b\alpha + c)x_1^2 + (2a\alpha + b)x_1 + a = 0,$$

ou

$$a_1x_1^2 + b_1x_1 + c_1 = 0. \qquad (2)$$

Il est facile de vérifier que

$$b_1^2 - 4a_1c_1 = b^2 - 4ac ;$$

il est d'ailleurs évident que les racines des équations (1) et (2) sont réelles et en même temps irrationnelles.

Le nombre α étant compris entre les racines de l'équation (1), les racines de l'équation (2) sont de signes contraires : c'est la racine positive qu'il s'agit de calculer. Si on désigne par α_1 la partie entière de cette racine, si on pose $x_1 = \alpha_1 + \frac{1}{x_2}$, et si on continue comme précédemment, on a successivement les équations

$$a_2x_2^2 + b_2x_2 + c_2 = 0,$$
$$a_3x_3^2 + b_3x_3 + c_3 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Les coefficients de ces équations sont tous entiers, les racines sont irrationnelles et de signes contraires, et on a

$$b^2 - 4ac = b_1^2 - 4a_1c_1 = b_2^2 - 4a_2c_2 = \ldots\ldots ;$$

de plus $\qquad c_1 = -a, \quad c_2 = -a_1, \quad$ etc.

Remarquons que les nombres a_1, a_2, ..., ont des valeurs absolues inférieures à $\frac{b^2 - 4ac}{4}$.

En effet a_1 est négatif puisque α est compris entre les racines de l'équation (1), et comme le premier membre de cette équation a pour minimum $\frac{4ac - b^2}{4a}$, on a

$$\frac{4ac - b^2}{4a} < a_1 < 0 ;$$

d'où

$$|a_1| < \frac{b^2 - 4ac}{4a} \leq \frac{b^2 - 4ac}{4},$$

a étant entier et positif.

De même a_2 est positif puisque α_1 est compris entre les racines de l'équation (2) dont le premier terme a un coefficient négatif ; donc a_2 est inférieur au maximum de ce trinome qui est $\frac{4a_1c_1 - b_1^2}{4a_1}$ ou $\frac{b_1^2 - 4a_1c_1}{-4a_1}$, valeur inférieure à $\frac{b_1^2 - 4a_1c_1}{4}$ ou $\frac{b^2 - 4ac}{4}$, puisque a_1 est un entier négatif. Et ainsi de suite.

De même b_1, b_2, ... sont inférieurs, en valeur absolue, à $\sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}$, $\sqrt{b_2^2 - 4a_2c_2}$, ... puisque les produits a_1c_1, a_2c_2, ... sont négatifs. Donc b_1, b_2, ... sont inférieurs, en valeur absolue, à $\sqrt{b^2 - 4ac}$, valeur commune de ces radicaux.

Les nombres c_1, c_2, ... étant égaux à $-a$, $-a_1$, ... ont des valeurs absolues inférieures à $\frac{b^2 - 4ac}{4}$.

Donc le nombre des systèmes de valeurs que peuvent prendre les coefficients des équations successives est limité ; par suite on retombera à un certain moment sur une équation déjà obtenue, et par suite on retrouvera la suite de quotients incomplets déjà trouvée après cette équation.

Pour montrer que la racine négative possède la même propriété que la racine positive il suffit de changer x en $-x$; on a ainsi une nouvelle équation dont les racines sont celles de la première changées de signes ; la racine positive, pour laquelle la périodicité est établie, donne la valeur absolue de la racine négative de l'équation initiale.

2e Hypothèse : Supposons c positif en même temps que a ; b étant négatif. Les deux racines sont positives si elles sont réelles.

Si leurs parties entières sont différentes, soit α la partie entière de la plus grande, par exemple ; posons $x = \alpha + \frac{1}{x_1}$, on aura pour x_1 une équation du second degré à racines de signes contraires ; ces racines sont développables en fractions continues périodiques d'après ce qu'on a vu plus haut. Il en sera de même des racines de l'équation primitive.

Si les racines ont même partie entière, soit α cette partie ; posons $x = \alpha + \frac{1}{x_1}$; les deux valeurs de x_1 sont positives.

Si elles n'ont pas même partie entière, on est ramené au cas précédemment examiné. Si elles ont même partie entière, α_1, on posera $x_1 = \alpha_1 + \frac{1}{x_2}$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve pour les quotients complets des parties entières différentes, et on retombera sur le cas précédent.

3e Hypothèse : c et b sont positifs en même temps que a. Si les racines sont réelles elles sont négatives, leurs valeurs absolues sont les racines de

$$ax^2 - bx + c = 0,$$

équation qui correspond à la seconde hypothèse.

Le théorème est donc établi dans tous les cas.

(M. Laurence, lycée de Bordeaux.)

Remarque. — Le théorème précédent est connu sous le nom de théorème de *Lagrange.*

On peut établir facilement :

1° Que toute fraction continue périodique représente un nombre qui est racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels ;

2° Que l'équation du second degré a ses racines de signes contraires si la fraction est périodique simple, et ses racines de même signe si la fraction est périodique mixte.

4995. — *Rechercher dans le développement de la puissance* $(1+2x+2^2x^2+2^3x^3)^5$, *dont les termes semblables sont supposés réduits, le coefficient du terme en* x^8.

En remarquant que

$$1+2x+2^2x^2+2^3x^3 = 1+2x+4x^2(1+2x)$$
$$= (1+2x)(1+4x^2),$$

la puissance considérée peut s'écrire

$$(1+2x)^5(1+4x^2)^5.$$

Chacun des deux facteurs de ce produit peut être développé au moyen de la formule connue

$$(1+a)^5 = 1+5a+10a^2+10a^3+5a^4+a^5 ;$$

on trouve ainsi

$$(1+2x)^5 = 1+10x+40x^2+80x^3+80x^4+32x^5,$$
$$(1+4x^2)^5 = 1+20x^2+160x^4+640x^6+1280x^8+1024x^{10}.$$

Lorsqu'on effectue le produit de ces deux polynomes, les termes en x^8 sont donnés par les trois produits suivants :

$$1 \times 1280x^8 = 1280x^8,$$
$$40x^2 \times 640x^6 = 25600x^8,$$
$$80x^4 \times 160x^4 = 12800x^8,$$

dont la somme est $39680x^8$.

Le coefficient du terme en x^8 est donc 39680.

Remarque. — Si on pose $2x = y$, on est ramené à calculer le coefficient de y^8 dans $(1+y+y^2+y^3)^5$. En opérant comme précédemment on voit que ce coefficient est

$$5+10\times 10+5\times 10 = 155.$$

En remplaçant y par $2x$, ou y^8 par 2^8x^8, ou $256\times x^8$, on voit que le coefficient de x^8 est

$$155\times 256 = 39680.$$

(DURAND, instituteur à Salernes.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Bernardeau ; M. Beyney ; Bourdeaux ; A. Bourlàt ; L. David ; G. Desnoës ; R. Ducongé ; Gasluc de Sénebron ; E. Hugonnier ; A. James ; M. Laurence ; H. Palustran ; F. Pégorier.

4996. — *Rechercher la formule moléculaire du corps dont la composition centésimale est la suivante :*

Carbone : 52,17 ; *Hydrogène* : 13,04 ; *Oxygène* : 34,79.

La densité de vapeur de ce corps est 1,593 *par rapport à l'air.*

En divisant les résultats que donne la composition centésimale par le poids atomique correspondant à chaque élément, on obtient le nombre relatif d'atomes de chacun de ces éléments contenus dans une molécule du corps considéré.

On a, pour l'oxygène

$$\frac{34,79}{16} = 2,17,$$

pour l'hydrogène

$$\frac{13,04}{1} = 13,04 \quad \text{ou sensiblement} \quad 2,17\times 6,$$

et pour le carbone

$$\frac{52,17}{12} = 4,34 \quad \text{ou} \quad 2,17\times 2.$$

Il y a donc, pour un atome d'oxygène, 6 atomes d'hydrogène et 2 atomes de carbone, ce qui conduit à la formule générale $C^{2n}H^{6n}O^n$.

Le poids moléculaire d'un composé volatil s'obtient en multipliant la densité de sa vapeur par 28,8. Le poids moléculaire du corps considéré est donc

$$1,593\times 28,8 = 45,878 \quad \text{ou sensiblement } 46.$$

Si l'on fait $n = 1$ dans la formule $C^{2n}H^{6n}O^n$, on trouve pour poids moléculaire correspondant 46.

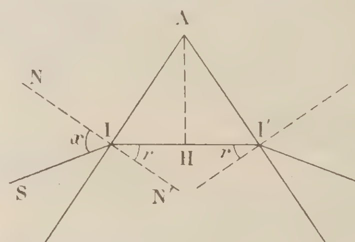
La formule moléculaire du corps considéré est donc C^2H^6O. Ce corps est l'alcool ordinaire ou alcool éthylique.

(DELHOTEL, à Vaucouleurs.)

[Ont résolu la même question : Mlle A. Saleilles ; MM. Ambard ; Amiot ; Bernardeau ; Bianchi ; Bourdeaux ; Durand ; de Faria ; Fraysse ; Gérard ; Guerrier ; Hugonnier ; James ; Laurence ; Laurent ; Lefèvre. G. Lepoivre ; Martin ; Maubeck ; Meynier ; Millet ; Palustran ; Poirier ; Rousselin ; A. de Saint-Gabriel ; Saintin ; Thébault ; Thibon ; Vannier.]

4997. — *Rechercher l'angle d'incidence qui donne à un prisme d'angle A sa déviation minima. On admettra que le rayon réfracté intérieur forme des angles égaux avec les deux faces du prisme. Appliquer la formule trouvée au cas où l'indice de réfraction est* $\frac{2}{\sqrt{2}}$ *et déterminer l'angle cherché.*

Le rayon réfracté intérieur faisant des angles égaux avec les deux faces du prisme, le triangle AII′ est isocèle. Abaissons la perpendiculaire AH sur II′.



Les angles N′IH et IAH sont égaux comme ayant les côtés perpendiculaires. On a donc

$$\widehat{N'IH} = \frac{A}{2}.$$

En désignant par n l'indice de réfraction de la substance du prisme par rapport à l'air, et par x l'angle cherché, on aura

$$\sin x = n \sin\frac{A}{2}.$$

Dans le cas où l'indice de réfraction est égal à $\frac{2}{\sqrt{2}}$, la formule précédente devient

$$\sin x = \frac{2}{\sqrt{2}}\sin\frac{A}{2} = \sin\frac{A}{2}\sqrt{2}.$$

A cette valeur de $\sin x$ correspondent deux angles supplémentaires ; l'angle aigu est seul admissible, car $x \leqslant 90°$.

Quand $\sin\frac{A}{2}\sqrt{2} = 1$, on a $\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

d'où $\frac{A}{2} = 45°$ et $A = 90°$.

Pour $\frac{A}{2} > 45°$, le problème est impossible, car on aurait $\sin x > 1$.

(A. MEYNIER, à Thonon.)

[Ont résolu la même question : MM. Amiot ; Bernardeau ; Bourdeaux ; Delhotel ; Durand ; Gérard ; Guerrier ; Laurent ; Licope ; Poirier ; Vannier.]

ARITHMÉTIQUE

5006. — *Un père de famille, âgé de 30 ans, s'assure à une compagnie d'assurances pour une somme de* 50000fr *payable à son décès moyennant une prime annuelle de* 1335fr. *L'assuré meurt après le* 25e *versement. En supposant l'intérêt de* 3 1/2 %, *la compagnie a-t-elle perdu ou gagné ?*

La première prime placée à intérêts composés jusqu'au décès de l'assuré, c'est-à-dire pendant 24 ans, devient, au bout de ce temps,

$$1335(1 + 0{,}035)^{24}\,;$$

de même la seconde prime devient

$$1335(1 + 0{,}035)^{23}\,;$$

et ainsi de suite jusqu'à la 25e prime qui ne rapporte aucun intérêt.

Au décès de l'assuré, la valeur des primes payées sera égale à

$$1335[(1 + 0{,}035)^{24} + (1 + 0{,}035)^{23} + \ldots\ldots + 1]$$

$$= \frac{1335[(1{,}035)^{25} - 1)]}{0{,}035} = 51996^{\text{fr}}.$$

La compagnie a donc gagné

$$51996 - 50000 = 1996^{\text{fr}}.$$

(G. DESNOËS, à Chezal-Benoit.)

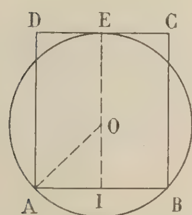
[Ont résolu la même question : MM. H. Andréis ; E. Barbé ; A. Bernardeau ; M. Beyney ; A. Bourlat ; P. Chanvallon ; E. Durand ; Gasluc de Sénébron ; E. Hugonnier ; M. Laurence ; M. Marx ; F. Mestre ; P. Valentin.]

ALGÈBRE

5001. — *Calculer les côtés d'un rectangle* ABCD, *connaissant le périmètre* $2p$ *et le rayon* R *du cercle passant par les deux sommets* A, B *et tangent au côté* CD. — *Discuter.*

(*Bacc. lettres-math., Paris, mars 1901.*)

Soit O le cercle de rayon R passant par A, B et tangent en E à DC.



En posant $AB = x$, $AD = y$, on a

$$2x + 2y = 2p,$$

ou

$$x + y = p. \qquad (1)$$

D'autre part, le triangle rectangle AOI donne la relation

$$\overline{AO}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{IO}^2$$

ou

$$R^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (y - R)^2. \qquad (2)$$

Remplaçons dans (2), x par sa valeur tirée de (1), nous aurons, après avoir ordonné par rapport à y,

$$5y^2 - 2(p + 4R)y + p^2 = 0. \qquad (3)$$

Discussion. — Pour qu'une valeur de y convienne, il faut et il suffit qu'elle soit réelle et inférieure à p. En effet si l'équation (3) a ses racines réelles, elles sont nécessairement positives ; d'ailleurs l'égalité (2) entraine $\left(\frac{x}{2}\right)^2 < R^2$ ou $x < 2R$, et $(y - R)^2 < R^2$ ou $y(y - 2R) < 0$; par suite $0 < y < 2R$.

La condition de réalité est

$$(p + 4R)^2 - 5p^2 \geqslant 0,$$

ou

$$p^2 - 2Rp - 4R^2 \leqslant 0,$$

inégalité vérifiée lorsque

$$0 < p \leqslant R(1 + \sqrt{5}).$$

En remplaçant y par p dans le premier membre de l'équation (3), on obtient

$$5p^2 - 2p^2 - 8Rp + p^2 = 4p(p - 2R).$$

Si $p < 2R$, ce résultat est négatif ; p sépare les deux racines ; la plus petite convient seule.

Si $p > 2R$, p est extérieur aux racines et supérieur à leur demi-somme $\frac{p + 4R}{5}$, au plus égale à $\frac{3p}{5}$ (*) ; les deux racines conviennent.

En résumé, pour $p \leqslant 2R$, il y a une solution, et pour $2R < p \leqslant R(1 + \sqrt{5})$, il existe deux solutions.

(G. SANPITÉ, à Soissons.)

Solution géométrique. — Pour figurer le demi-périmètre p du rectangle, prolongeons EF d'une longueur $FH = AB$, de sorte que $EH = p$.

On peut tracer le cercle O et déterminer le point H ; il reste ensuite à mener la droite BH de manière que l'on ait

$$BF = \frac{AB}{2} = \frac{FH}{2}.$$

Pour cela on remarque que la droite HB prolongée coupe le côté CD tangent en E au cercle O en un point connu K tel que

$$\frac{EK}{EH} = \frac{FB}{FH} = \frac{1}{2},$$

d'où

$$EK = \frac{p}{2}.$$

Pour que la droite KH rencontre le cercle O, il faut que sa distance OI au centre du cercle soit inférieure ou égale à R :

$$OI \leqslant R.$$

Or le triangle OIH étant semblable au triangle BFH, on a

$$2OI = IH = \sqrt{\overline{OH}^2 - \overline{OI}^2},$$

d'où

$$OI = \frac{OH}{\sqrt{5}} = \frac{p - R}{\sqrt{5}}.$$

La condition de possibilité est donc

$$\frac{p - R}{\sqrt{5}} \leqslant R$$

ou

$$p \leqslant R(1 + \sqrt{5}).$$

Cette condition remplie, la droite KH coupe le demi-cercle EG en deux points lorsque

$$EH > EG \qquad \text{ou} \qquad p > 2R\,;$$

il existe alors deux solutions, qui se confondent en une seule pour $p = R(1 + \sqrt{5})$.

Lorsque $p < 2R$, la droite KH n'a plus qu'un seul point commun avec le demi-cercle EG ; dans ce cas le problème n'a qu'une solution.

(R. CATTIN, à Mont-de-Marsan.)

[Ont résolu la même question : MM. M. Amiot ; E. Barbé ; A. Bernardeau ; M. Beyney ; H. Bottin ; A. Bourlat ; J. Bournisien ; G. Bourvéau ; L. David ; R. Ducongé ; A. Duittoz ; E. Durand ; H. Fricquegnon ; Gasluc de Sénébron ; A. Godfroy ; P. Guerrier ; E. Hugonnier ; A. Humblot ; A. Lapresle ; M. Laurence ; A. Legros ; M. Marx ; F. Mestre ; Pariselle ; D. Petit ; L. Platrier ; E. Ronçin ; M. Thibon ; A. Vannier ; Mlle G. Oddos ; MM. Daure ; H. Dobryzniak ; Serres.]

(*) On peut remarquer que la moyenne géométrique des racines est $\frac{p}{\sqrt{5}}$; comme $p > \frac{p}{\sqrt{5}}$, p est supérieur aux racines.

5008. — *Construire un triangle connaissant deux côtés et sachant que la somme des hauteurs qui leur correspondent est égale à la troisième hauteur.*

Soient a, b les deux côtés donnés et x le troisième côté inconnu du triangle. Si h, h', h'' sont les hauteurs correspondantes, on a, par hypothèse,

$$h + h' = h''.$$

Or des égalités $ah = bh' = xh''$,

on tire $h = \frac{xh''}{a}$, $h' = \frac{xh''}{b}$.

Par suite $\frac{xh''}{a} + \frac{xh''}{b} = h''$,

d'où $x = \frac{ab}{a+b}$,

valeur facile à construire au moyen d'une quatrième proportionnelle.

Le triangle est ainsi déterminé par ses trois côtés a, b, x. Pour qu'il existe, on doit avoir

$$a - b < x < a + b,$$

ou $a - b < \frac{ab}{a+b} < a + b.$

La seconde inégalité revient à

$$ab < (a+b)^2,$$

résultat évident puisque $(a+b)^2 > 2ab$; la première inégalité s'écrit

$$a^2 - b^2 < ab,$$

ou $a^2 - ab - b^2 < 0$,

inégalité vérifiée lorsque

$$0 < a < \frac{b(1+\sqrt{5})}{2}.$$

(DURAND, instituteur à Salernes.)

[Ont résolu la même question : Mlle A. Saleilles ; MM. P. Antonescu ; H. Belbenoît ; A. Bottin ; C. Bourion ; R. Cattin ; F. Clabault ; L. David ; A. Duittoz ; H. Fricquegnon : Gaslue de Sénébron ; P. Guerrier ; E. Hugonnier ; M. Laurence ; A. Legros ; M. Marx ; F. Mestre ; A. Meynier ; A. Minary ; F. Pégorier ; J. Permann ; R. Perrot ; P. Septembre ; A. Vannier ; E. Weber ; G. Ybert ; F. Coutard ; H. Dobryzniak.]

GÉOMÉTRIE

4998. — *Étant donnés deux cercles O et O' tangents intérieurement, on inscrit dans le cercle O un triangle ABC dont les côtés AB et AC sont tangents au cercle O'. Les cercles O et O' étant supposés fixes on demande, quand le triangle ABC varie :*

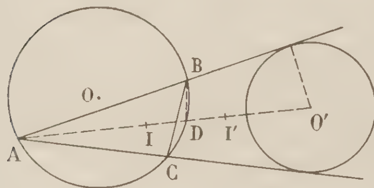
1° *Le lieu du centre du cercle inscrit au triangle ABC ;*

2° *L'enveloppe du côté BC ;*

3° *Le lieu du point où le cercle inscrit touche le côté BC (ce lieu n'est pas une conique).*

Pour plus de généralité, supposons les cercles O et O' quelconques.

1° Soient I et I' les centres des cercles tangents aux côtés du triangle ABC et situés sur la bissectrice AO'. Cherchons le lieu de ces centres.



La bissectrice AO' coupe le cercle O en D. On sait que l'on a $DI = DI' = DB$. Désignons par R et R' les rayons des cercles O et O', par d la distance OO'. On a les relations

$$\frac{DB}{\sin DAB} = 2R,$$

$$O'A \sin DAB = R',$$

$$d^2 - R^2 = O'A \cdot O'D,$$

d'où l'on déduit

$$DB = \frac{2RR'}{d^2 - R^2} \cdot O'D = k \cdot O'D,$$

en supposant $d \neq R$ et en posant $\frac{2RR'}{d^2 - R^2} = k$ pour simplifier l'écriture.

On a alors

$$\left.\begin{matrix} O'I \\ O'I' \end{matrix}\right\} = O'D \pm kO'D = O'D(1 \pm k).$$

Cette égalité montre que les points I, I' appartiennent aux deux cercles transformés par homothétie du cercle O, O' étant le centre et $1 \pm k$ les rapports d'homothétie.

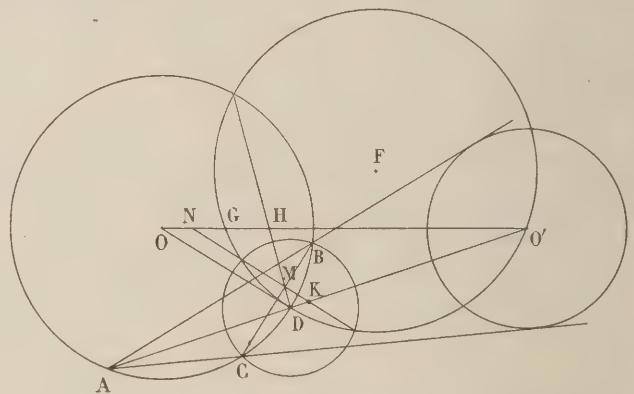
Si $d = R$, O' est sur le cercle O et les égalités ci-dessus donnent

$$DB = \frac{2RR'}{O'A},$$

d'où $\left.\begin{matrix} O'I \\ O'I' \end{matrix}\right\} \times O'A = \pm 2RR'.$

Les points I et I' sont alors sur les deux droites transformées par inversion du cercle O, O' étant le centre et $\pm 2RR'$ les puissances d'inversion. Ces droites ne sont autres que les tangentes au cercle O' aux extrémités du diamètre OO'.

Dans tous les cas, les parties utiles sont limitées par les droites qui joignent O' aux points d'intersection des deux cercles O et O'. Les portions des lieux intérieures au cercle O correspondent à un cercle inscrit, et les portions extérieures à un cercle exinscrit.



2° Décrivons le cercle de centre D et de rayon DB ainsi que le cercle F orthogonal au cercle O et passant par O'.

Le cercle F coupe OO' en un point G fixe déterminé par la relation

$$OG \cdot d = R^2.$$

L'axe radical de O et de F passe également par un point fixe H sur OO', car la division OGHO' est harmonique. On trouve facilement

$$HO = \frac{2dR^2}{d^2 + R^2}.$$

L'axe radical de D et F coupe AO' en K et l'on a

$$DK \cdot DO' = \overline{DB}^2 = k^2 . \overline{DO'}^2,$$

donc $DK = k^2 . DO'$.

Si M est le centre radical des cercles O, D, F on voit que KM parallèle à OD coupe OO' au point fixe N tel que

$$ON = k^2 . d.$$

Les triangles semblables OHD et NHM donnent alors

$$\frac{NM}{OD} = \frac{HN}{HO}, \quad \text{d'où} \quad NM = \left(\frac{HO - ON}{HO}\right) OD,$$

et finalement $NM = R - \frac{k^2(d^2 + R^2)}{2R}.$

Le lieu de M est le cercle de centre N et de rayon NM définis par les égalités ci-dessus. Ce cercle est aussi l'enveloppe de BC qui lui est tangent en M.

On s'assurera facilement que les cercles N, O, O′ ont même axe radical.

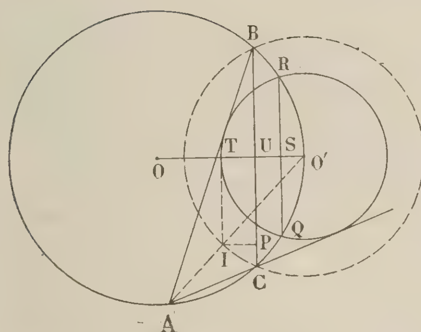
En remarquant que H est un centre d'homothétie des cercles N et O on voit que les parties utiles du cercle N sont limitées aux droites joignant H aux points d'intersection des deux cercles O et O′.

Quand $d = R$, BC se déplace parallèlement à lui-même en restant perpendiculaire à OO′.

3° D'après la première partie, les rayons des cercles lieux des points I et I′ qui aboutissent en I et en I′ sont parallèles à OD, par suite perpendiculaires à BC. Les points de contact des cercles I et I′ avec BC sont alors les projections des centres des cercles lieux de I et I′ sur BC. BC enveloppant le cercle N, les lieux de ces deux points de contact sont donc deux limaçons de Pascal dont les deux points doubles et le cercle générateur sont connus.

Si $d = R$ le raisonnement précédent n'est plus applicable. Soit P le point de contact du cercle I avec BC, la figure ci-dessous permet d'écrire les relations suivantes :

$$\overline{PU}^2 = \overline{IT}^2 = \overline{IO'}^2 - \overline{O'T}^2$$
$$= \overline{O'B}^2 - \overline{O'R}^2$$
$$= 2R.O'U - 2R.O'S$$
$$= 2R.US.$$

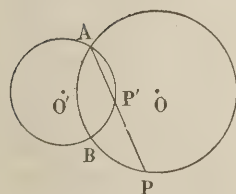


Le carré de l'ordonnée PU est proportionnel à l'abscisse US. La courbe P est donc une parabole ayant OO′ pour axe, S pour sommet, 2R pour paramètre. I′ donne lieu à la même parabole.

Les parties utiles de ces différents lieux se déduisent aisément de celles des lieux I et I′.

(A. D., à Castres.)

[M. P. Thonet a résolu la même question.



5009. — *Deux cercles* O *et* O′ *se coupent en* A *et* B ; *on mène par le point* A *une corde qui coupe ces cercles en* P *et* P′. *On considère :*

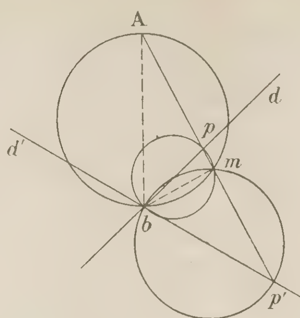
1° *le cercle* ω *qui passe par* B *et* P *et coupe orthogonalement le cercle* O ;

2° *le cercle* ω′ *qui passe par* B *et* P′ *et coupe orthogonalement le cercle* O′.

Les cercles ω *et* ω′ *se coupent en un point* M *autre que* B. *Trouver le lieu de ce point lorsque* APP′ *tourne autour de* A.

Transformons la figure par rayons vecteurs réciproques en prenant A pour pôle, la puissance d'inversion restant quelconque.

Les cercles O, O′ passant par le pôle A se transforment en deux droites *bd, bd′* ; la sécante AP′P devient la droite A*pp′* ; le cercle ω passant par B et P et orthogonal au cercle O a pour réciproque un autre cercle passant par *b* et *p* et orthogonal à *bd*, c'est-à-dire le cercle de diamètre *bp* ; de même le cercle ω′ a pour réciproque le cercle de diamètre *bp′*. Les cercles de diamètres *bp* et *bp′* se coupent en un point *m*, inverse du point M. Comme l'angle A*mb* est droit, le lieu de *m* est le cercle de diamètre A*b*.



En revenant à la figure primitive, le cercle de diamètre A*b* a pour inverse la droite passant par B et perpendiculaire à AB : cette droite représente le lieu de M.

(AMBLARD, à Saint-Flour.)

[Ont résolu la même question : Mlle A. Saleilles ; MM. E. Barbé ; H. Belbenoit ; A. Bernardeau ; M. Beyney ; A. Bottin ; F. Clabault ; R. Colomer ; L. David ; E. Durand ; L. Hostier ; A. Legros.]

MÉCANIQUE

4988. — *Un madrier de section uniforme, ayant* 4m *de longueur et pesant* 30kg, *repose par l'une de ses extrémités sur un sol horizontal, et est appuyé par l'autre contre un mur vertical. Ce madrier est incliné à* 45° ; *il supporte un poids de* 20kg *qui est suspendu au milieu de sa longueur. On demande :*

1° *Quel est, en faisant abstraction de tout frottement, l'effort horizontal à exercer sur le pied de ce madrier pour l'empêcher de glisser ;*

2° *Si cet effort augmente ou diminue quand on déplace le poids additionnel vers le pied du madrier.*

(*Concours de 1900 pour l'emploi d'inspecteur du travail.*)

Première solution. — Le milieu G du madrier est sollicité par une force verticale P égale à son poids plus le poids additionnel, soit

$$P = 30 + 20 = 50^{kg}.$$

La force P se décompose en deux forces parallèles égales : $P_1 = P_2 = \frac{P}{2}$; la force P_2 est détruite par la résistance du sol ; la force P_1 se décompose en deux autres dont l'une, F′, est normale au mur et détruite par la résistance du mur, et l'autre, F, est dirigée suivant AB. La force AF peut être transportée en BF_1 où elle se décompose encore en deux autres forces. Ces forces sont égales puisque le madrier est incliné à 45° ; elles ont pour valeur commune P_1 ou $\frac{P}{2}$; l'une, f_1, est dirigée suivant OB, et l'autre est normale au sol OB et détruite par sa résistance. En définitive, la force f_1 tend à faire glisser le madrier dans le sens OB ; pour empêcher ce glissement, il faut donc exercer en B un effort horizontal égal et opposé à

$$f_1 = \frac{P}{2} = 25^{kg}.$$

2° Lorsque le poids additionnel est appliqué entre G et B, en le décomposant en deux autres forces parallèles appliquées en A et B, la composante agissant en A est moindre que celle

agissant en B, de sorte que l'on a alors

$$P_1 < P_2, \quad \text{ou} \quad P_1 < P - P_1, \quad \text{ou} \quad P_1 < \frac{P}{2}.$$

Par suite la force F tend à diminuer, ainsi que l'effort horizontal de glissement opposé à f_1.

(LAMARRE, collège de Châtillon-sur-Seine.)

Seconde solution. — Le madrier en équilibre est soumis à l'action de cinq forces, savoir : son poids P appliqué au milieu G de AB ; le poids additionnel P' appliqué en un point quelconque D de GB ; les réactions normales N et N' déterminées par la résistance du mur et du sol ; enfin la force horizontale X qui s'oppose au glissement de l'extrémité B.

En prenant les moments par rapport au point d'intersection C des réactions N et N', les moments de ces forces sont nuls, et il reste pour l'équation des moments des trois autres forces :

$$Pa + P'x = 2a\,X,$$

en posant $OA = OB = 2a$ et $BI = x$.

On tire de là

$$X = \frac{P}{2} + \frac{P'x}{2a}.$$

On voit que x variant de a à 0, l'effort horizontal décroît de $\frac{P + P'}{2}$ à $\frac{P}{2}$.

(D. PETIT, lycée de Belfort.)

[Ont résolu la même question : MM. M. Amiot ; H. Andréis ; A. Bernardeau ; G. Desnoës ; E. Durand ; Fournel ; P. Guérit ; M. Laurence ; G. Lepoivre ; G. Marie ; M. Marx ; F. Pégorier ; D. Petit ; M. Poirier ; P. Valentin.]

DISCOURS DE M. MASCART

MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR DE PHYSIQUE GÉNÉRALE ET EXPÉRIMENTALE
AU COLLÈGE DE FRANCE,

Prononcé le 13 avril, à Nancy, à la séance de clôture du Congrès annuel des Sociétés savantes de Paris et des départements :

MONSIEUR LE MINISTRE,
MESSIEURS,

La marche de la civilisation est continue et les siècles successifs n'y tracent que des limites artificielles ; mais ces étapes s'imposent à l'esprit, par suite d'une longue tradition, et il arrive parfois que le nom d'un siècle suffit à éveiller le souvenir de grands événements dans l'histoire de l'humanité.

Au moment où nous venons d'inaugurer une nouvelle période, il est naturel de reporter sa pensée en arrière et de dresser l'inventaire des connaissances actuelles, en le comparant au bilan des richesses intellectuelles que le dix-neuvième siècle avait reçues du passé.

Ce serait là le programme d'une œuvre immense, mais le temps des encyclopédistes n'est plus ; le domaine scientifique a pris une telle extension que les efforts individuels se doivent concentrer sur une région très restreinte, et il faut borner sa curiosité à des notions générales sur les progrès accomplis dans les différents champs que l'on n'a pas soi-même exploités.

Pour ne pas risquer de m'égarer, je voudrais seulement vous soumettre quelques réflexions sur les sciences qui constituent la physique et montrer comment, d'abord isolées les unes des autres, elles ont fini par se rapprocher et se réunir pour constituer un ensemble dont toutes les parties se tiennent étroitement. Au surplus, si les connaissances mathématiques sont nécessaires pour donner à l'esprit l'habitude et le langage des raisonnements exacts, la physique intervient également dans toutes les recherches expérimentales, par les méthodes et les instruments d'observation, par l'étude des divers agents que l'on fait intervenir, et par les notions qu'elle suggère sur la constitution de la matière. La physique, à laquelle les Anglais ont conservé le beau nom de philosophie naturelle, se trouve ainsi à la base de toutes les sciences qui visent aujourd'hui à la précision, et mérite peut-être une attention particulière.

A la fin du dix-huitième siècle, si nous laissons à part les questions relatives à la pesanteur et à l'élasticité, on peut déjà signaler des progrès importants dans l'étude de la chaleur, de la lumière, de l'électricité et du magnétisme.

En optique, on connaissait les principales lois de la propagation, la réflexion sur les surfaces polies et les miroirs, la réfraction dans les différents milieux, les propriétés des rayons colorés qui constituent la lumière blanche ; on savait construire les lunettes, les télescopes et les microscopes, qui augmentent la puissance de l'observation pour l'étude des astres qui peuplent le ciel, et pour l'observation de ces organismes dont la petitesse échappe à la vue ordinaire et dont le rôle grandit tous les jours. On connaissait aussi les lois expérimentales des phénomènes qui se rapportent à l'irisation des bulles de savon et les propriétés singulières que présentent les deux espèces de rayons réfractés dans les cristaux transparents.

Sur la nature même de la lumière, on hésitait entre la notion des projectiles, abritée sous l'autorité de Newton, et l'hypothèse émise par Huygens des ondes ou des vibrations d'un milieu spécial. Si l'idée des projectiles lumineux se prêtait malaisément à l'explication des anneaux colorés, par contre on ne pouvait encore concilier celle des vibrations avec la propagation en ligne droite ni avec les qualités acquises par les rayons qui ont subi la double réfraction. « Pour dire comment cela se fait », ajoute Huygens, « je n'ay rien trouvé jusqu'icy qui me satisfasse. »

L'électricité paraissait marcher plus vite. On avait reconnu les deux manières différentes d'électriser les corps, les attractions et répulsions qui s'exercent entre eux et l'électrisation par influence à distance ; les machines électriques furent perfectionnées ; la bouteille de Leyde permit de condenser ce nouvel agent et d'exagérer les phénomènes ; l'analogie de la foudre et de l'électricité, conduisant à l'invention du paratonnerre, avait illustré le nom de Franklin.

Les mémorables expériences de Coulomb montrèrent ensuite que les actions réciproques des corps électrisés suivent les mêmes lois que la gravitation universelle, et cette partie de la science semblait définitivement établie.

Il en fut de même pour le magnétisme. Si les propriétés magnétiques ne peuvent pas se transmettre aisément d'un corps à l'autre, comme en électricité, on avait reconnu qu'il est possible de donner au fer doux, par influence, une aimantation temporaire, que les deux pôles d'un aimant ont des qualités différentes, qu'ils se repoussent ou s'attirent suivant qu'ils sont de même nom ou de noms différents. Après que Coulomb eut constaté également que ces actions obéissent aux lois de l'attraction universelle, on put admirer combien parfois la nature semble se plaire à la simplicité des moyens, puisqu'elle a recours aux mêmes règles dans des ordres de phénomènes aussi différents.

La boussole servait, de temps immémorial, à la direction des navigateurs. Tant que les voyages furent réduits à des éten-

dues de mer limitées, la déviation du compas restait à peu près invariable ; mais la découverte du Nouveau-Monde fit voir que l'action de la terre sur l'aiguille aimantée n'a pas la même direction géographique en tous les points du globe. En outre, l'aiguille libre tend à prendre une direction inclinée sur l'horizon et cette inclinaison varie d'un lieu à l'autre. Les grands voyages de la fin du dix-huitième siècle ont ainsi planté les premiers jalons des travaux ultérieurs sur le magnétisme terrestre.

Il y a beaucoup moins à dire sur la chaleur. On avait bien inventé les thermomètres pour mesurer les degrés de température ; on voyait la chaleur se transmettre soit de proche en proche, entre des particules voisines ou des corps en contact, soit par un rayonnement à distance, pour tendre toujours à l'équilibre des températures ; on avait été un peu plus loin en comparant les quantités de chaleur nécessaires pour échauffer également un même poids de différentes substances, ou pour opérer certaines transformations d'état, comme la fusion de la glace.

Au point de vue théorique, c'était le règne des fluides, mot magique destiné trop souvent à voiler l'ignorance et commode en ce sens qu'il était loisible d'attribuer à ces fluides, mal définis, toutes les qualités successives qu'exigeait l'interprétation de nouvelles expériences.

L'électricité est attribuée à deux fluides différents, d'abord réunis en quantité illimitée dans chaque corps à l'état de fluide neutre, que l'on pouvait séparer par contrainte, mais toujours disposés à se rapprocher pour reconstituer un fluide neutre. Le magnétisme est dû également à deux fluides semblables, moins faciles à traiter cependant, parce que, séparés en apparence, ils persistent à exister simultanément en quantités égales et consentent seulement à rester face à face dans les moindres particules des corps, sans vouloir passer de l'une à l'autre.

De même, la chaleur s'explique par un fluide calorifique, d'essence inaltérable, dont les éléments se repoussent, et qui s'écoule des points plus chauds vers les points plus froids avec une vitesse qui dépend des variations de la température et de la conductibilité propre des milieux.

Il y avait bien lieu de se demander comment tous ces fluides, qui doivent cohabiter dans les mêmes particules avec des propriétés si différentes, y peuvent vivre en bonne harmonie et si le moment n'était pas venu d'examiner de plus près leur ménage. La chaleur n'était pas sans créer un réel embarras dans le phénomène de rayonnement, car la lumière qui nous vient du soleil est accompagnée de chaleur qui la suit avec la même vitesse et obéit aux mêmes lois générales de propagation ; il fallait donc ici joindre la lumière et la chaleur et renoncer pour elles à l'idée de fluide.

Et cependant, de cet ensemble de travaux, en apparence si disparates, une idée féconde s'était dégagée, qui consistait à mesurer les phénomènes et à déterminer leurs rapports numériques, au lieu de constater simplement leurs qualités en plus ou en moins. En même temps que Lavoisier transforme la chimie par l'emploi général de la balance, que Lavoisier et Laplace comparent les chaleurs spécifiques, Coulomb mesure et pèse les actions électriques ou magnétiques.

Un esprit éminent de notre époque aime à répéter : « Quand on peut mesurer ce dont on parle et l'exprimer en nombres, on y connaît quelque chose ; si on ne peut le traduire par un nombre, la connaissance est maigre et ne mérite pas le nom de science. »

Ce qui importe alors, c'est que tous les peuples civilisés emploient les mêmes mesures et parlent, pour ainsi dire, la même langue. Au-dessus de l'intérêt des transactions commerciales, l'intérêt de l'esprit humain demande que chacun, sans calculs stériles, puisse mettre à profit les travaux et les documents des savants disséminés dans le monde entier.

A la fin du dix-huitième siècle, alors que les échanges devenaient plus actifs, on vivait encore sous un régime essentiellement particulariste, et la complication des mesures était inextricable.

En France seulement, chaque province et même, ce qui semble plus étrange, chaque administration de l'État avait son système particulier de mesures, ce qui constituait une source de difficultés dans les transactions de l'une à l'autre. En outre, les mesures de longueur, de surface et de poids n'étaient reliées entre elles que par des rapports compliqués ; suivant les cas, il fallait recourir à des subdivisions par 10, 12, 16 ou 32, pour passer des unités principales aux unités secondaires.

Les longueurs s'évaluaient en lieues, toises, pieds, pouces, lignes et centièmes de pouce ou de ligne ; les mesures agraires en arpents et perches ; les volumes en muids, setiers, boisseaux et pintes ; les poids en livres, onces et grains, sans compter les carats des orfèvres et les scrupules du pharmacien.

Les savants avaient proposé une refonte générale des mesures en prenant comme point de départ une base empruntée à la nature, telle que la longueur du pendule qui bat la seconde ou une fraction de la circonférence du globe, afin que le nouveau système pût être adopté par tous les peuples.

Les grands corps politiques de la Révolution française avaient surtout en vue de confirmer l'unité nationale dans ses diverses manifestations en imposant dans toute l'étendue du pays l'usage de mesures uniformes et coordonnées ; mais leurs projets prirent un caractère plus élevé.

Le 8 mai 1790, sur la proposition de M. de Talleyrand, l'Assemblée constituante rendit un décret par lequel « le roi était supplié d'engager le Parlement d'Angleterre à concourir avec l'Assemblée nationale à la fixation de l'unité naturelle des mesures et poids..., et en déduire un modèle invariable pour toutes les mesures et pour les poids ».

Le moment n'était pas favorable à une entente internationale, mais l'entreprise ne fut pas abandonnée. La Convention confia à une commission de savants le soin d'établir les bases du système métrique ; une dizaine d'années furent nécessaires, au milieu des troubles politiques et sous un régime de suspicion qui frappa plusieurs membres de la commission, pour aboutir à à la fin des travaux. C'est là une œuvre dont on ne saurait trop admirer la grandeur et dont la perfection s'est affirmée de nos jours par la création du bureau international des poids et mesures.

Le dix-neuvième siècle débutait ainsi avec un outillage perfectionné et un ensemble considérable, quoique un peu décousu, de connaissances scientifiques ; il nous reste à montrer comment il a su faire fructifier ce bel héritage.

L'un des progrès les plus tardifs a été celui de la chaleur, dont on commençait à voir déjà l'utilisation mécanique dans les machines à vapeur. A cet égard, l'ouvrage de Sadi Carnot intitulé : « Réflexions sur la puissance motrice des machines à feu » fut un trait de génie, mais il venait presque trop tôt, car il fut mal compris. Le célèbre théorème de Carnot, sur la relation qui existe entre le travail accompli et les deux températures du foyer et du réfrigérant, avait besoin, pour constituer une véritable théorie mécanique de la chaleur, d'être complété par une autre notion, à savoir : que la chaleur n'est pas un fluide indestructible, qu'elle peut disparaître en produisant un travail, de même qu'on peut la créer par un travail mécanique. Des notes posthumes, publiées trop tardivement, ont montré que Carnot

avait conçu et énoncé formellement ce complément nécessaire de la doctrine et, vingt ans après sa mort, le mérite allait en revenir à Jean-Tobie Mayer.

Le fluide calorique était donc appelé à disparaître et on ne voit plus dans la chaleur qu'un mode particulier de mouvement.

En même temps, les quantités de chaleur absorbées ou dégagées dans les opérations mécaniques permettaient de rétablir, sans aucune réserve, le grand principe de la conservation de l'énergie, que l'on doit sans doute faire remonter à Galilée.

Pour l'optique, les travaux de Fresnel ont fait prévaloir sans conteste la théorie des ondulations. Le rayon lumineux n'existe plus avec son ancienne rigueur géométrique ; il se dévie et s'étale latéralement quand on veut le serrer entre des orifices trop étroits. Les lumières émanées de deux sources voisines peuvent s'entredétruire si les déplacements qu'elles tendent à imprimer à un même point sont égaux et directement opposés, de sorte que la lumière ajoutée à la lumière produit parfois l'obscurité. Les colorations des lames minces et des lames cristallines, les phénomènes de réflexion et de réfraction, le pouvoir rotatoire des corps dits actifs, tout s'explique par les vibrations d'un milieu qui remplirait les espaces vides du ciel, pour pénétrer les corps pondérables en y subissant diverses modifications.

Les découvertes plus récentes, l'analyse spectrale des sources de lumière, les rayons chimiques et calorifiques, l'entraînement partiel des ondulations par les corps où elles se propagent, la détermination du mouvement des astres suivant la ligne d'observation par la nature de la lumière qu'ils nous envoient, toutes ces notions nouvelles n'ont fait que s'adapter aux idées de Fresnel et confirmer ses prévisions les plus hardies.

L'optique paraissait ainsi devenir une science définitive, partiellement rattachée à la chaleur par un certain nombre de propriétés communes, mais soumise encore à une sorte de régime particulier.

Dans le domaine de l'électricité, les grandes découvertes ont débuté avec le dix-neuvième siècle qu'elles ont continué d'émerveiller jusqu'à la fin.

Le 16 brumaire an X (28 octobre 1801), Volta lisait devant la 1re classe de l'Institut de France : sciences mathématiques et physiques, son premier mémoire sur la théorie du galvanisme et, particulièrement, sur le fluide galvanique.

A la suite de cette lecture, d'après les procès-verbaux de l'Institut, « le citoyen Bonaparte propose que la classe donne une médaille d'or au citoyen Volta et qu'une commission soit chargée de faire en grand toutes les expériences propres à répandre un jour nouveau sur l'importante branche de la physique dont le citoyen Volta vient d'entretenir la classe ».

La lecture de Volta fut continuée dans les séances du 12 et du 22 novembre 1801.

Dès le 2 décembre, sur la proposition de la commission, « la classe charge son bureau et la commission des fonds de prendre les mesures nécessaires pour faire frapper la médaille destinée au citoyen Volta ».

On remarquera peut-être, en passant, que les académies et même les commissions de toute nature n'ont pas coutume, en général, d'aller si vite en besogne, et ce n'est pas manquer de respect envers la première classe de l'Institut de penser que l'autorité du premier consul a pu avoir quelque influence sur cette activité inusitée.

D'ailleurs, le premier consul ne devait pas borner à cette récompense les marques de son enthousiasme. Deux jours après la communication du rapport, ayant appris que les ressources de Volta s'étaient épuisées, il lui fit remettre une gratification de 6 000 fr.

Quelques mois plus tard, le 25 juin 1802, il écrivait à Chaptal, ministre de l'intérieur :

« Je désire donner en encouragement une somme de 60 000 fr. à celui qui, par ses expériences et ses découvertes, fera faire à l'électricité et au magnétisme un pas comparable à celui qu'ont fait faire à ces sciences Franklin et Volta, et ce au jugement de la première classe de l'Institut national, ...mon but spécial étant d'encourager et de fixer l'attention des physiciens sur cette partie de la physique qui est, à mon sens, le chemin des grandes découvertes. »

Ce jugement d'un grand capitaine mérite d'être conservé comme un précieux document historique. Les événements devaient justifier sa prévision d'une manière inespérée et nous pouvons être fiers que l'Institut de France, s'associant aux intentions du premier consul, ait rendu un si éclatant hommage à l'œuvre de Volta.

Les découvertes n'ont pas tardé. On avait déjà obtenu quelques réactions chimiques par l'action des étincelles électriques, mais les phénomènes étaient mal définis et difficiles à régler. La pile de Volta permit de décomposer l'eau en ses éléments; Davy put isoler les métaux alcalins, le potassium et le sodium, et les applications de l'électricité à la chimie devinrent très nombreuses.

Toutefois, on s'appliquait trop à étudier les effets produits à l'interruption ménagée entre les fils attachés aux pôles de la pile, sans chercher ce qui se passe dans le conducteur lui-même qui est parcouru par le courant électrique.

Il ne fallut pas moins de vingt années avant qu'Œrsted, approchant ce fil conjonctif d'une aiguille aimantée, s'aperçût qu'elle était déviée de sa position d'équilibre, comme elle eût fait sous l'action d'un aimant. C'est le hasard, semble-t-il, qui mit Œrsted sur la voie de cette grande découverte, mais le hasard ne réussit qu'entre bonnes mains, et la science fourmille d'exemples où les phénomènes les plus importants ont échappé à ceux qui en furent les premiers témoins.

Dès l'annonce de l'expérience d'Œrsted, Ampère se mit à l'étude du nouveau phénomène. Avec une rare pénétration d'esprit, il établit les lois de cette action singulière dont la dissymétrie était imprévue. Comme dans tous les phénomènes naturels, l'action du courant sur les aimants devait être accompagnée d'une réaction égale et contraire des aimants sur le courant, ce que l'expérience confirma. En outre, les courants devaient agir les uns sur les autres, ce qui fut encore vrai. Dans le cours d'une seule année, Ampère réalisa une série d'expériences ingénieuses et en suivit toutes les conséquences mathématiques pour aboutir aux lois célèbres de l'électromagnétisme et de l'électrodynamique. Les mémoires d'Ampère sont restés un modèle auquel le temps et les progrès ultérieurs n'ont rien changé ; ils ont excité une telle admiration qu'en Angleterre même un illustre savant a pu dire qu'ils n'étaient comparables qu'à l'œuvre de Newton.

En même temps, Arago et Ampère découvraient l'aimantation temporaire du fer doux par les courants et imaginaient la construction de l'électro-aimant, dont le rôle est devenu universel. Un lien se trouvait ainsi établi entre deux sciences primitivement distinctes ; les aimants n'étaient plus que le siège de courants électriques autour des particules et les deux fluides magnétiques allaient devenir superflus.

Un nouveau pas restait à franchir. Puisque les courants aimantent le fer doux et l'acier et que l'essence des deux agents paraît ainsi la même, on doit s'attendre à ce que les aimants

soient capables de produire des courants électriques. Ampère le comprit bien et chercha à mettre en évidence ce qu'on a appelé depuis les courants induits. Il les aperçut meme, sans y porter une attention suffisante, dans une expérience où il espérait produire des courants permanents, n'ayant pas l'idée que les effets sont temporaires et liés au mouvement relatif des aimants et des conducteurs ; ce fut plus tard un des chagrins de sa vie. On pourrait citer encore d'autres circonstances où il n'est pas douteux que divers expérimentateurs, à leur insu, ont eu sous les yeux les courants induits sans les distinguer.

Pour Faraday, il serait injuste de penser qu'une circonstance fortuite le mit sur la voie de sa grande découverte. C'était un esprit concentré, vivant au millieu de ses appareils, toujours occupé d'expériences parfois si étranges qu'il mettait une sorte de pudeur à les tenir secrètes avant d'en avoir tiré un résultat intéressant. Les courants induits, dont il montra la production par les aimants, par les courants ou simplement par l'action du magnétisme terrestre, interviennent chaque fois que des modifications se produisent dans un système électrique ou magnétique, et leur durée est limitée à celle de ces modifications. Ces courants sont le principe de toutes les machines actuelles.

Et si, dans l'ordre d'idées que je poursuis en ce moment, on n'y trouve guère d'aperçu nouveau sur les relations des diverses branches de la physique, Faraday réservait une autre surprise lorsqu'il reconnut, en 1848, que les actions magnétiques, quelle qu'en soit l'origine, sont capables de modifier un rayon de lumière qui se propage dans un milieu transparent. C'est la découverte du pouvoir rotatoire magnétique. Un morceau de verre, placé dans la direction de l'aiguille d'inclinaison, acquiert, sous l'influence du magnétisme terrestre, des propriétés optiques analogues à celles que possède l'axe des cristaux de quartz.

Il y a donc quelques liens entre l'électricité, le magnétisme et la lumière, mais un nouvel intervalle de vingt ans fut encore nécessaire pour les dégager avec plus de précision.

Dans les appareils construits pour reproduire incessamment des courants induits, le sens de ces courants est naturellement alternatif, comme les oscillations d'un pendule, comme le flux et le reflux de la mer en comparaison avec le cours continu des fleuves. Ces mouvements de sens opposés se retrouvent aussi dans la décharge des bouteilles de Leyde et ils présentent quelque analogie lointaine avec les vibrations de la lumière.

Par une puissante analyse mathématique, Maxwell a montré que cette analogie pourrait bien être une identité. Les vibrations électriques doivent se propager dans l'air et dans les différents milieux appelés diélectriques, comme le fait la lumière, avec une vitesse définie, que diverses méthodes expérimentales permettent de déterminer. L'interprétation d'expériences antérieures en fournissait déjà une valeur approchée, très voisine de celle de la lumière, et tous les travaux plus récents n'ont fait que vérifier l'identité absolue des deux vitesses.

Après avoir sacrifié les fluides magnétiques, il faudra donc aussi passer condamnation sur les fluides électriques, les seuls qui eussent survécu jusque-là.

La constitution et les propriétés mécaniques d'un seul milieu devront suffire à tout expliquer, et la lumière elle-même, cantonnée d'abord dans une sorte de forteresse intangible, devient une vibration électromagnétique.

Les découvertes de Hertz et les travaux de ses successeurs ont été le triomphe de cette doctrine. Les vibrations électriques fournissent des rayons, comme la lumière ; ces rayons se brisent ou se diffractent aux bords des obstacles ; ils se réfléchissent, changent de direction en passant d'un milieu dans un autre, se polarisent et subissent la double réfraction dans les corps à structure cristalline. J'éprouve une satisfaction particulière à constater que le laboratoire de physique de l'université de Nancy a brillamment contribué à l'édification de cette science nouvelle.

Après avoir conduit à la solution, sinon complète encore, mais très problable, de tant de difficultés anciennes, l'électricité semble prendre plaisir à en créer de nouvelles. Les rayons cathodiques, les rayons X et le rayonnement des corps actifs analogues aux sels d'uranium ne laissent pas de mettre la science dans un grand embarras. Ces substances singulières, dont l'action électrique est inusable et qui émettent indéfiniment de la lumière, sans qu'on sache encore à quelle source elles la puisent, sembleraient même donner des inquiétudes sur le principe de la conservation de l'énergie, que l'on doit cependant considérer comme un dogme scientifique.

Dans aucune autre voie qu'en électricité, les applications industrielles n'ont suivi d'aussi près les découvertes scientifiques.

La pile de Volta a mis entre les mains des chimistes un agent puissant. La galvanoplastie permettait de recouvrir les métaux usuels d'une couche inaltérable, de reproduire les œuvres d'art avec une perfection absolue et de répandre dans les milieux les plus modestes l'usage des ustensiles en métaux précieux. Avec les courants formidables que fournissent les machines actuelles, le four électrique a renouvelé la chimie minérale. Nombre de composés nouveaux s'y produisent et on peut y préparer en masses de plusieurs kilogrammes des métaux rares que l'on avait à peine entrevus.

L'électro-aimant d'Ampère a fait la télégraphie électrique, les sonnettes de nos appartements et plus tard la téléphonie. La découverte de Faraday, permettant de créer les courants électriques par le travail des machines, apporta les puissants foyers de lumière et l'éclairage de phares. Les expériences de Hertz ont donné la télégraphie sans fil.

Dans cet empressement à s'emparer des découvertes, il est même arrivé que la pratique a devancé la science. Les télégraphes à longue distance et les câbles sous-marins ont soulevé des difficultés que les ingénieurs devaient résoudre sans guide assuré ; ils ont été ainsi conduits à imaginer des méthodes spéciales d'observation et de mesures. On pouvait dire, à une certaine époque, que la science était moins dans les universités que dans les laboratoires industriels.

L'exemple d'un simple ouvrier mérite ici d'être rappelé. Les courants alternatifs produits par les machines construites sur le principe de Faraday n'avaient encore qu'un usage restreint à des applications spéciales. Pendant près de quarante ans on chercha sans succès à redresser ces courants, c'est-à-dire à remplacer le flux et le reflux d'électricité par un flot continu, si tourmenté qu'il pût être par les vagues. C'est alors que Zenobe Gramme, qui avait vu dans les ateliers tous les inconvénients des courants alternatifs, parvint à construire une machine qui les redressait spontanément sans étincelles nuisibles, et fournissait un fleuve d'électricité à peine ondulé. Ce fut une véritable révolution industrielle. L'inventeur n'était guidé par aucune notion théorique et ne trouva guère d'encouragements auprès des hommes les plus autorisés; mais il avait une rare pénétration d'esprit, une persistance obstinée et il eut la joie de voir ses efforts couronnés par le succès le plus extraordinaire qu'ait jamais rencontré l'industrie. Gramme vient de disparaitre ; c'est une grande figure dont nous saluons avec respect la mémoire.

Depuis lors, on s'est ingénié à utiliser les courants alternatifs eux-mêmes et à leur donner de nouvelles formes. L'électricité

industrielle a fait des pas de géant et envahi tous les domaines de l'activité humaine. Les forces naturelles autrefois perdues dans la solitude des montagnes sont mises à profit et transportées au loin. Les chutes du Niagara, qui n'étaient qu'un spectacle grandiose de la nature, s'asservissent aux besoins de l'homme. L'ensemble des capitaux engagés dans la télégraphie, la téléphonie, l'éclairage, les transports et les applications infiniment variées de l'électricité est comparable à ceux qu'absorbe l'industrie des chemins de fer.

Cette extension générale de l'électricité et la variété des transactions internationales qu'elle entraine mirent en évidence la nécessité absolue d'établir un langage commun, un système uniforme de dénominations et de mesures, pour éviter de construire une autre tour de Babel. Ce fut le résultat capital du congrès international des électriciens, réuni à Paris en 1881, auquel assistaient les plus grandes illustrations scientifiques. Les décisions du congrès prirent comme point de départ des unités fondées sur le système métrique. C'est peut-être le seul exemple d'un assentiment général de tous les peuples où pénètre la civilisation ; les unités électriques apportent avec elles le système métrique et contribueront efficacement à répandre dans le monde entier l'œuvre accomplie par la Convention.

L'électricité rapproche les peuples, supprime les distances, abrège le temps, fournit à l'industrie les merveilles inépuisables de sa fécondité ; elle multiplie les relations internationales dans une proportion incalculable et devient ainsi un instrument puissant de civilisation, de progrès et de paix.

Sur le terrain purement métaphysique, l'électricité a transformé les sciences voisines au point de les absorber, élargi nos connaissances, élevé les idées et, si je n'ai pas été trop inférieur à ma tâche, j'espère que vous emporterez la conviction qu'elle est véritablement la science maîtresse.

J.-B. Dumas traduisait cette pensée, sous une forme poétique, dans la dernière séance du congrès des électriciens :

« La mythologie grecque, personnifiant avec bonheur les forces de la Nature, avait rangé les vents, les flots et le feu sous les ordres de divinités secondaires ; elle avait fait du dieu de la poésie et des arts le représentant céleste de la lumière ; par une admirable prescience, elle avait réservé la foudre à Jupiter. »

QUESTIONS PROPOSÉES

5019. — Trouver deux nombres entiers sachant que leurs carrés ont pour différence 105.

(Coudrais, école normale de Saint-Brieuc.)

5020. — Résoudre l'équation

$$\sqrt[3]{\frac{a-x}{b+x}}+\sqrt[3]{\frac{b+x}{a-x}}=c.$$

5021. — Sur une ellipse de grand axe $2a$, de distance focale $FF'=2c$, déterminer un point M tel que le rayon du cercle circonscrit au triangle MFF' soit égal à R.

5022. — Quand un quadrilatère inscriptible a ses diagonales rectangulaires, les bissectrices des angles formés par le prolongement des côtés opposés du quadrilatère coupent les côtés en quatre points qui sont les sommets d'un carré dont le côté est la demi-moyenne harmonique des diagonales.

(R. Manen, petit séminaire de Massals.)

5023. — On considère un triangle variable ABC inscrit dans un cercle fixe O, le sommet A étant fixe et le produit AB.AC constant. Lieux des centres des cercles inscrit et exinscrits à ce triangle.

5024. — Un angle constant tourne autour d'un point fixe A d'un cercle O ; ses côtés coupent le cercle en B et C. On demande de prouver :

1° Que des trois droites qui joignent les milieux des côtés du triangle, deux passent chacune par un point fixe et la troisième enveloppe un cercle fixe ;

2° Que les trois hauteurs du triangle passent chacune par un point fixe ;

3° Que des trois droites qui joignent les pieds des hauteurs du triangle, une reste parallèle à une direction fixe et les deux autres enveloppent chacune un cercle fixe ;

4° Que le cercle des neuf points du triangle enveloppe deux cercles fixes ;

5° Que les droites de Simson du triangle relatives aux milieux des deux arcs BC passent chacune par un point fixe.

(M. Rebeix, lycée Louis le-Grand.)

5025. — On considère la fonction

$$y=\frac{4\cos^2 x-7\cos x-2}{1+\cos x};$$

étudier ses variations lorsque x varie de 0 jusqu'à π, et construire la courbe représentative en coordonnées rectangulaires.

(*Bacc. lettres-sciences, Caen, mars 1901.*)

5026. — Calculer le côté a d'un triangle, sachant que $2a=b+c$ et connaissant l'angle A et la hauteur correspondante h.

5027. — Un cône de révolution dont l'angle au sommet est 2β et dont l'axe est perpendiculaire au plan horizontal de projection, est coupé par un plan $P\alpha P'$ perpendiculaire au plan vertical et incliné de telle sorte que la section soit une parabole.

S
P'
a
o'
x
D
y
o
M
D₁
P

1° Démontrer que la projection de la courbe sur le plan horizontal est aussi une parabole et déterminer son sommet, sa directrice et son foyer.

2° Trouver la position que doit occuper le plan sécant $P\alpha P'$ pour que la parabole projection passe par un point M du plan horizontal ;

3° Pour qu'elle ait pour directrice une droite DD_1 perpendiculaire à xy.

4° Trouver le lieu géométrique des traces verticales, des directrices et des projections verticales des foyers des paraboles obtenues en faisant varier la position du plan $P\alpha P'$.

5° En déduire un procédé graphique pour placer sur le cône une parabole de paramètre donné.

(*Bacc. lettres-sciences, Bordeaux, juillet 1900.*)

5028. — On donne dans un plan vertical un disque O circulaire fixe, de rayon R.

A
M
O
B
C
P

Sur la circonférence de ce disque repose une barre rectiligne, homogène, AB, de longueur $2a$ et de poids P.

Cette barre est maintenue en équilibre au moyen d'un fil AMC très long, non pesant et supportant à son extrémité libre C un poids P.

1° Quelle est la position d'équilibre du système ?

2° Calculer la pression exercée par AB sur le disque.

(On négligera les frottements.)

5029. — Pour comparer les forces électromotrices E_1 et E_2 de deux piles, de résistances intérieures r_1 et r_2 inconnues, on les met en circuit avec un galvanomètre de résistance g également inconnue.

Dans une première expérience, les piles sont réunies par deux pôles contraires et on lit la déviation D du galvanomètre. Dans une seconde expérience, elles sont réunies par deux pôles de même nom, c'est-à-dire mises en opposition, et on lit la déviation d. En admettant la proportionnalité des intensités aux déviations, on demande le rapport des deux forces électromotrices.

Cas particulier : $D=56$ divisions, $d=8$ divisions.

(*Bacc. lettres-math., Bordeaux, mars 1900.*)

Le Rédacteur-Gérant : **Henry VUIBERT.**

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet, Facdouel, Dir.

25e Année. — N° 16. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 15 Mai 1901.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Abonnements.. Librairie **Nony** et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

VOLUME DE LA SPHÈRE

par M. **R. Badia**, professeur au Royal institut technique de Pérouse (Italie).

1. *Si n est un nombre entier et positif qui croit indéfiniment, l'expression*

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}$$

a pour limite $\frac{1}{3}$.

En effet, si l'on désigne par a un nombre entier et positif, on a

$$\frac{(a+1)^3-a^3}{3} > a^2 > \frac{a^3-(a-1)^3}{3},$$

d'où, en posant successivement

$$a=1, \qquad a=2, \qquad \ldots, \qquad a=n-1,$$

additionnant et divisant par n^3, on trouve

$$\frac{1-\frac{1}{n^3}}{3} > \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3} > \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^3}{3},$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

2. Étant donnée une demi-circonférence de centre O, dont le diamètre AB est divisé en $2n$ parties égales en sorte que chaque rayon OA et OB soit divisé en n parties égales, on mène par les points extrêmes A et B, par le centre O et par les points de division des perpendiculaires à AB, et, par les points où ces perpendiculaires rencontrent la circonférence, des parallèles à la même droite.

Cela posé, si l'on fait tourner la figure autour de AB, la sphère engendrée par la demi-circonférence sera renfermée dans une série de cylindres superposés que nous appellerons exinscrits à la sphère et qui sont en nombre $2n$, et, à son tour, elle renfermera $2(n-1)$ cylindres inscrits.

En désignant par R le rayon de la sphère, par $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, les rayons des bases des cylindres à partir de celui qui a pour rayon R, par S la somme des volumes des cylindres exinscrits, par s la somme des volumes des cylindres inscrits, on a

$$S=(R^2+r_1^2+r_2^2+\ldots+r_{n-1}^2)\frac{2\pi R}{n},$$

$$s=(r_1^2+r_2^2+\ldots+r_{n-1}^2)\frac{2\pi R}{n},$$

d'où

$$S-s=\frac{2\pi R^3}{n}.$$

Si n croit indéfiniment, le premier membre de cette égalité tend vers zéro, et comme S, en décroissant, restera toujours plus grande que la sphère, tandis que le contraire arrivera pour s qui en sera toujours moindre, il est clair que le volume V de la sphère sera la limite commune des deux sommes variables S et s; donc on aura

$$V=\lim. S=\lim. (R^2+r_1^2+r_2^2+\ldots+r_{n-1}^2)\frac{2\pi R}{n}$$

ou, en observant que

$$r_1^2=R^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right),\quad r_2^2=R^2\left(1-\frac{2^2}{n^2}\right),\quad \ldots,\quad r_{n-1}^2=R^2\left(1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right),$$

$$V=\lim.\left(1-\frac{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}\right)2\pi R^3=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

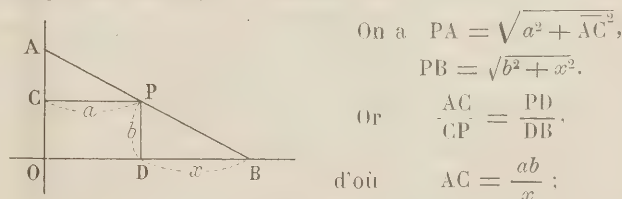
ÉLÈVES DE LA MARINE MARCHANDE

DIEPPE

Examens de 1900.

5010. — *Par un point P pris dans un angle droit on mène une sécante APB. On demande d'étudier la variation du produit PA × PB quand la sécante tourne autour du point P. La position du point P est déterminée par les distances PC = a, PD = b.*

Première solution. — Posons DB = x.



On a $PA=\sqrt{a^2+\overline{AC}^2}$,

$$PB=\sqrt{b^2+x^2}.$$

Or $$\frac{AC}{CP}=\frac{PD}{DB},$$

d'où $$AC=\frac{ab}{x};$$

par suite $$PA=\sqrt{a^2+\frac{a^2b^2}{x^2}}=\frac{a}{x}\sqrt{x^2+b^2}$$

et $$PA\times PB=\frac{a(b^2+x^2)}{x}.$$

Pour étudier la variation de ce produit égalons-le à m; nous aurons l'équation

$$ax^2-mx+ab^2=0.$$

Pour que à une valeur de m réponde une valeur réelle de x, on doit avoir

$$m^2-4a^2b^2\geqslant 0,$$

inégalité vérifiée lorsque

$$m\leqslant -2ab \qquad \text{ou} \qquad m\geqslant 2ab.$$

Les valeurs de x correspondant au maximum et au minimum de m sont respectivement

$$x = \frac{m}{2a} = -b, \qquad x = \frac{m}{2a} = b.$$

Dans ces deux cas, le triangle PBD devient isocèle et la sécante APB est parallèle à l'une des bissectrices de l'angle AOB.

D'ailleurs, pour $x = 0$, la fonction

$$y = \frac{a(b^2 + x^2)}{x}$$

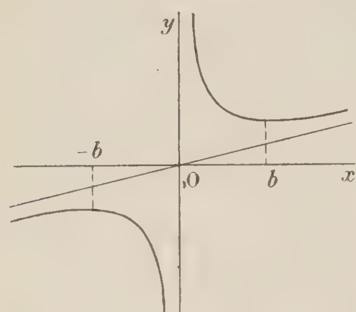
devient infinie ; comme

$$y = a\left(\frac{b^2}{x} + x\right),$$

pour $x = \pm\infty$ on a $y = \pm\infty$.

En rapprochant ces divers résultats, on forme le tableau suivant des variations de y :

x	$-\infty$	...	$-b$	...	0	...	b	...	$+\infty$
y	$-\infty$	croît	$-2ab$ Max.	décr.	$\frac{-\infty}{+\infty}$	décr.	$2ab$ Min.	croît	$+\infty$



La courbe figurative correspondante affecte la forme ci-contre ; c'est une hyperbole admettant pour asymptotes l'axe Oy et la droite $y = ax$.

Seconde solution. — Prenons la dérivée de la fonction

$$y = \frac{a(b^2 + x^2)}{x} = a\left(\frac{b^2}{x} + x\right);$$

on obtient

$$y' = a\left(-\frac{b^2}{x^2} + 1\right) = \frac{a(x^2 - b^2)}{x^2}.$$

Cette dérivée s'annule pour

$$x = -b \qquad \text{et} \qquad x = b.$$

Pour chacune de ces deux valeurs, la dérivée change de signe et, par suite, y devient maximum ou minimum comme le montre d'ailleurs le tableau suivant :

x	$-\infty$	...	$-b$	...	0	...	$+b$	...	$+\infty$
Signe de y'		$+$	0	$-$	$-\infty$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	croît	$-2ab$	décr.	$\frac{-\infty}{+\infty}$	décr.	$2ab$	croît	$+\infty$

Remarque. — On pourrait obtenir immédiatement le maximum et le minimum de y en observant que la somme $\frac{b^2}{x} + x$ ayant le produit de ses deux termes constant est minimum, en valeur absolue, lorsque $\frac{b^2}{x} = x$ ou $x = \pm b$.

(A. LAPRESLE.)

Solution trigonométrique. — Posons $\widehat{APC} = \alpha$.

On a

$$PA \cos\alpha = a, \qquad PB \sin\alpha = b;$$

d'où

$$PA \times PB = \frac{ab}{\cos\alpha \sin\alpha} = \frac{2ab}{\sin 2\alpha}.$$

Le produit $PA \times PB$ varie ainsi en raison inverse de $\sin 2\alpha$. Il devient donc maximum lorsque $\sin 2\alpha$ est minimum, c'est-à-dire pour

$$\sin 2\alpha = -1, \qquad \text{d'où} \qquad 2\alpha = -90° \qquad \text{et} \qquad \alpha = -45°;$$

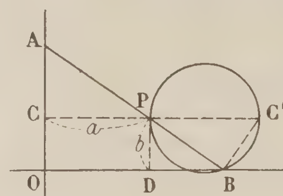
de même ce produit est minimum lorsque

$$\sin 2\alpha = 1, \qquad \text{d'où} \qquad 2\alpha = 90° \qquad \text{et} \qquad \alpha = 45°.$$

En faisant alors varier α entre $-90°$ et $+90°$, ce qui fournit un tour complet de la sécante APB, on a le tableau des variations suivant :

α	$-90°$		$-45°$		$0°$		$+45°$		$+90°$
$\sin 2\alpha$	0	décr.	-1	croît	0	croît	$+1$	décr.	0
$PA \times PB$	$-\infty$	croît	$-2ab$	décr.	$\frac{-\infty}{+\infty}$	décr.	$2ab$	croît	$+\infty$

Solution géométrique. — Donnons-nous une valeur k du produit $PA \times PB$, et cherchons à construire la sécante correspondante APB.



En faisant abstraction de la droite OD, lorsque la sécante APB tourne autour de P, de manière que $PA \times PB = k$, le point B décrit l'inverse de la droite OC, c'est-à-dire le cercle de diamètre PC′, C′ étant un point tel que

$$a . PC' = k.$$

Le cercle de diamètre PC′ ne coupe la droite OD qu'autant que son rayon est supérieur à b, ce qui donne

$$\frac{PC'}{2} \geqslant b,$$

ou

$$k \geqslant 2ab.$$

On obtient ainsi le minimum du produit $PA \times PB$ considéré en valeur absolue.

Si on mène une droite PB′A′ symétrique de PAB par rapport à CC′, on a

$$PA' = PA, \qquad PB' = PB;$$

de sorte que $PA' \times PB' = PA \times PB$ en valeur absolue. Les valeurs absolues des deux produits sont minima en même temps.

(A. HUMBLOT, collège de Mauriac.)

[Ont résolu la même question : MM. M. Amiot ; H. Andréis ; D. Antonescu ; V. Barol ; H. Belbenoît ; Bellier ; A. Bernardeau ; M. Beynev ; P. Bonnefoy ; Bonnetain ; R. Cattin ; D. Cognet ; M. Compain ; L. David ; G. Desnoës ; E. Durand ; R. de Faria ; H. Fricquegnon ; Gasluc de Sénébron ; F. Gérard ; G. Grünfelder ; P. Guerrier ; E. Hugonnier ; A. Legros ; L. Lemmet ; J. Lestable ; E. Licope ; P. Luquet ; H. Martin ; M. Marx ; F. Mestre ; A. Meynier ; T. Millet ; D. Petit ; V. Pollet ; J. Raymond ; M. Royer ; J. Tastet ; H. Thibon ; P. Valentin ; A. Vannier ; Ybert.]

Examens de 1901.

5011. — *Un corps très petit descend verticalement dans un tube rempli d'eau à 4° et dont la hauteur est 2^m. Partant sans vitesse initiale de la surface du liquide, il arrive au fond en $1^{sec}\,1/2$. On demande de trouver le poids spécifique de ce corps en supposant qu'on puisse considérer comme négligeable la résistance du liquide au mouvement.*

Le corps étant soumis à l'action d'une force constante prend un mouvement uniformément accéléré dont l'accélération est donnée par la formule $e = \frac{1}{2}\gamma t^2$; d'où l'on tire

$$\gamma = \frac{2e}{t^2} = \frac{400^{cm}}{\overline{1,5}^2} = 177^{cm},7.$$

La force qui agit sur le corps est son poids diminué de la poussée de l'eau, c'est-à-dire, x étant le poids spécifique du corps,

$vx - v$ ou $v(x-1)$. Or, le corps soumis seulement à l'action de son poids vx aurait une accélération g ; soumis à la force $v(x-1)$, il prend une accélération γ plus petite que g.

Les forces étant proportionnelles aux accélérations, on a

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{v(x-1)}{vx},$$

d'où $$x = \frac{g}{g-\gamma} = \frac{981}{981 - 177{,}7} = 1{,}221.$$

(GÉRARD, à Nancy.)

[Ont résolu la même question : Mlle A. Saleilles ; MM. Amblard ; Amiot ; Beckerich ; Belbenoit ; Bellier ; Bernardeau ; Beyney ; Bourlat ; Cattin ; Cognet ; Compain ; David ; Desnoës ; Dobryzniak ; Durand ; Fraysse ; Gasluc de Sénébron ; Guerrier ; Hugonnier ; Lacape ; Lapresle ; Laurent ; Lestable ; Martin ; Marx ; Métais ; Meynier ; Millet ; Palustran ; Pégorier ; Pourtoy ; Raymond ; Rousselin ; Testenoire ; Thibon ; Valentin ; Vannier ; Ybert.]

5012. — *Étant donnés sur les côtés d'un angle* xOy *quatre points* A, A', B, B' *tels que*

$$OA = a, \qquad OA' = a',$$
$$OB = b, \qquad OB' = b',$$

on mène les droites A'B' *et* AB, *qui se coupent en* N.

On mène NP *parallèle à* Oy, *et on demande de calculer* $OP = x$ et $NP = y$.

Les triangles semblables AOB, APN donnent

$$\frac{OA}{OB} = \frac{PA}{PN}, \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{a-x}{y}. \qquad (1)$$

Les triangles semblables A'OB', A'PN donnent de même

$$\frac{OA'}{OB'} = \frac{PA'}{PN}, \quad \text{ou} \quad \frac{a'}{b'} = \frac{a'-x'}{y}. \qquad (2)$$

En divisant membre à membre les égalités (1) et (2), il vient

$$\frac{ab'}{ba'} = \frac{a-x}{a'-x},$$

d'où $$x = \frac{aa'(b-b')}{a'b - ab'},$$

et, en portant cette valeur dans (1),

$$y = (a-x)\frac{b}{a} = -\frac{bb'(a-a')}{a'b - ab'}.$$

On peut remarquer que l'expression de y se déduit de celle de x en permutant simplement entre elles les lettres a et b, a' et b'.

(P. SAINTIN, lycée de Versailles.)

Remarque. — Le problème revient à calculer les coordonnées du point d'intersection des droites AB et A'B' par rapport aux axes Ox, Oy.

Les équations de ces droites sont

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0, \qquad \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} - 1 = 0$$

on retombe sur les équations (1) et (2).

[Ont résolu la même question : Mlles G. Oddos ; A. Saleilles ; MM. M. Amiot ; H. Andréis ; M. Antoine ; D. Antonescu ; P. Bancillon ; E. Barbé ; V. Barol ; H. Belbenoît ; A. Bellier ; A. Bernardeau ; M. Beyney ; A. Bourlat ; R. Cattin ; D. Cognet ; Daure ; L. David ; G. Desnoës ; H. Dobryzniak ; Duconge ; E. Durand ; R. de Faria ; A. Fraysse ; H. Fricquegnon ; Gasluc de Sénébron ; G. Grünfelder ; P. Guerrier ; A. Haar ; R. Henry ; L. Hostier ; E. Hugonnier ; J. Kivu ; A. Lapresle ; L. Lefèvre ; A. Legros ; P. Legros ; L. Lemmet ; E. Licope ; P. Luquet ; H. Martin ; M. Matheron ; M. Marx ; J. Métais ; T. Millet ; A. Minary ; H. Palustran ; J. Permann ; D. Petit ; J. Raymond ; E. Roncaglia ; M. Royer ; C. Sudreau ; J. Tastet ; H. Thibon ; P. Valentin ; G. Ybert.]

ARITHMÉTIQUE

5004. — *L'expression* $n^{10} - n^8 - n^4 + n^2$ *est divisible par* 21, n *étant un entier quelconque.*

L'expression s'écrit successivement

$$\begin{aligned} n^{10} - n^8 - n^4 + n^2 &= n^2(n^8 - n^6 - n^2 + 1) \\ &= n^2[n^6(n^2-1) - (n^2-1)] \\ &= n^2(n^2-1)(n^6-1) \\ &= n^2(n-1)(n+1)(n^3-1)(n^3+1). \end{aligned}$$

Pour établir la divisibilité de l'expression par 21, il suffit de montrer qu'elle est séparément divisible par 3 et par 7.

Divisibilité par 3. — Sur les trois nombres consécutifs $n-1$, n, $n+1$ figurant dans l'expression, il y en a toujours un multiple de 3.

Divisibilité par 7. — Si $n = \text{mult. } 7$, la divisibilité est établie. Dans le cas contraire, n est de l'une des formes

$$\text{m. } 7 \pm 1, \qquad \text{m. } 7 \pm 2, \qquad \text{m. } 7 \pm 3,$$

et par suite n^3 de l'une des formes

$$\text{m. } 7 \pm 1, \qquad \text{m. } 7 \pm 8, \qquad \text{m. } 7 \pm 27,$$

c'est-à-dire de l'une des formes

$$\text{m. } 7 \pm 1.$$

Donc, dans ce cas, $n^3 - 1$ ou $n^3 + 1$ est divisible par 7.

(A. BERNARDEAU, à Surgères.)

Remarque. — En décomposant $n^3 - 1$ et $n^3 + 1$, l'expression peut encore s'écrire

$$n^2(n-1)^2(n+1)^2(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1).$$

Sous cette forme, on voit que l'expression est divisible non seulement par 3, mais par 3^2, et qu'elle admet en outre le diviseur 2^2, contenu dans l'un des carrés pairs n^2 ou $(n-1)^2$.

(E. HUGONNIER, école professionnelle de Voiron.)

[Ont résolu la même question : Mlle A. Saleilles ; MM. H. Andréis ; D. Antonescu ; P. Bancillon ; H. Belbenoît ; P. Bonnefoy ; C. Bourion ; A. Bourlat ; J. Bournisien ; J. Cougnoux ; F. Coutard ; Daure ; L. David ; G. Desnoës ; E. Durand ; Gasluc de Sénébron ; A. Haar ; R. Henry ; L. Hostier ; Lamarre ; M. Laurence ; A. Legros ; P. Luquet ; M. Marx ; A. Meynier ; F. Pégorier ; E. Roncaglia ; C. Sudreau ; J. Tastet ; V. Thébault ; Thibon ; P. Valentin ; A. Vannier.]

ALGÈBRE

5005. — *Résoudre le système d'équations*

$$\frac{x^2 + x}{y^2 + y} = a, \qquad \frac{x^2 + y}{y^2 + x} = b.$$

Le système proposé est équivalent au suivant

$$x^2 + x - ay^2 - ay = 0,$$
$$x^2 - bx - by^2 + y = 0,$$

pourvu que l'on ait : $y \neq 0$ et $y \neq -1$, car ces valeurs annulent le dénominateur de la première équation.

Si nous retranchons la seconde équation de la première, nous obtenons

$$(b+1)x - (a-b)y^2 - (a+1)y = 0,$$

d'où $$x = \frac{(a-b)y^2 + (a+1)y}{b+1}.$$

Portons cette valeur dans la première équation et simplifions ; il vient

$$(a-b)^2y^3 + 2(a-b)(a+1)y^2 + [(a+1)^2 + (b+1)(a-b) - a(b+1)^2] - [a(b+1)^2 - (a+1)(b+1)] = 0.$$

Il est facile de vérifier que $f(-1)=0$. $y=-1$ serait donc une racine de cette équation; mais cette valeur a été écartée. Divisons le premier membre de la dernière équation par $y+1$; il vient

$$(a-b)^2y^2+(a-b)(a+b+2)y+(b+1)(1-ab)=0,$$

d'où

$$y=\frac{-(a+b+2)(a-b)\pm\sqrt{(a-b)^2(a+b+2)^2-4(a-b)^2(b+1)(1-ab)}}{2(a-b)^2},$$

$$y=\frac{-(a+b+2)\pm\sqrt{(a+b+2)^2-4(b+1)(1-ab)}}{2(a-b)},$$

$$y=\frac{-(a+b+2)\pm\sqrt{(a+b)^2+4a(b^2+b+1)}}{2(a-b)}.$$

y étant connu on calculera facilement x.

On peut remarquer que si a est positif, y sera toujours réel.

(C. DESNOES, à Chezal-Benoît.)

Remarque. — Si on fait

$$y=0, \qquad x=0,$$

ou

$$y=-1, \qquad x=-1,$$

les deux termes des fractions qui figurent dans les premiers membres des équations sont nuls.

En joignant ces systèmes de valeurs à ceux qui ont été trouvés plus haut, on a les quatre systèmes de valeurs vérifiant les équations mises sous forme entière.

[Ont résolu la même question : MM. E. Barbé ; A. Bernardeau ; J. Bournisien ; Gasluc de Sénébron ; E. Hugonnier ; M. Laurence ; P. Luquet ; P. Saintin.]

5007. — *Calculer la surface d'un quadrilatère sachant qu'il est inscriptible à un cercle et circonscriptible à un autre, et connaissant : 1° le périmètre $2p$, 2° le produit k^2 des diagonales, 3° un côté, a.*

Désignons par x, y, z les trois côtés inconnus.

On sait que la surface d'un quadrilatère inscriptible et circonscriptible a pour expression, en fonction des côtés,

$$S=\sqrt{axyz}.$$

D'ailleurs, on sait aussi que dans un quadrilatère inscriptible, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés (théorème de Ptolémée), et que dans tout quadrilatère circonscriptible, la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres ou au demi-périmètre. On peut donc écrire

$$ax+yz=k^2, \qquad (1)$$

$$x+a=p. \qquad (2)$$

De (2), on tire

$$x=p-a,$$

et en portant cette valeur dans (1),

$$yz=k^2-a(p-a).$$

Donc $\qquad S=\sqrt{a(p-a)[k^2-a(p-a)]}.$

Cette valeur de S n'est réelle que lorsque p est compris entre les racines du trinome placé sous le radical,

$$\frac{k^2+a^2}{a}>p>a.$$

(G. YBERT.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Barbé ; A. Bernardeau ; M. Beyney ; A. Bottin ; C. Bourion ; A. Bourlat ; R. Cattin ; F. Clabault ; L. David ; E. Durand ; H. Fricquegnon ; A. Haar ; R. Henry ; E. Hugonnier ; H. Lacape ; M. Laurence ; A. Legros ; P. Luquet ; M. Marx ; F. Mestre ; F. Pégorier ; D. Petit ; M. Petitjean ; P. Valentin ; A. Vannier ; F. Coutard ; J. Maury ; E. Serres ; J. Tastet.]

GÉOMÉTRIE

4562. — *On considère deux angles droits XOY, X'O'Y', et la parabole P tangente aux quatre côtés de ces angles. Soit Q l'intersection des droites OX et O'X'. Laissant fixes les points O et O', on fait décrire à Q un cercle fixe passant par O et O'.*

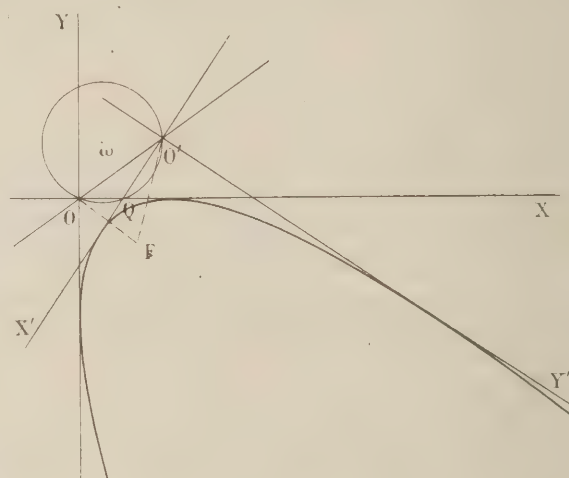
1° Trouver les lieux géométriques du foyer et du sommet de la parabole P.

2° Par tout point M du plan passent deux paraboles P réelles ou imaginaires. Déterminer la portion du plan dans laquelle doit se trouver le point M pour que les deux paraboles qui y passent soient réelles.

3° Trouver le lieu du point M pour que l'une des deux paraboles correspondantes ait un paramètre donné.

4° Trouver le lieu du point M pour que les deux paraboles qui y passent s'y coupent orthogonalement.

1° *Lieu du foyer.* — On sait que dans la parabole la directrice est le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la courbe et celui des symétriques du foyer par rapport à une tangente



quelconque. Il en résulte que la parabole P a pour directrice la droite OO' et que son foyer F est à l'intersection des symétriques de OO' par rapport aux deux tangentes OX, OX' ou OY, OY'.

Lorsque Q se déplace sur l'arc OQO', l'angle OQO' a une valeur constante α, et l'on a

$$\widehat{OFO'}=180^\circ-2(\widehat{QOO'}+\widehat{QO'O})=180^\circ-2(180^\circ-\alpha)=2(\alpha-90^\circ);$$

le lieu de F est alors un segment de base OO', capable de l'angle $2(\alpha-90^\circ)$. Il en est de même lorsque Q se déplace sur l'arc $O_1O'_1$, O_1 et O'_1 étant les symétriques de O et O' par rapport à ω.

Prenons maintenant Q sur l'un des arcs restants, $O'O'_1$ par exemple. On a

$$\widehat{OFO'}=\widehat{FO'T}-\widehat{FOO'}$$

$$=2(\widehat{QO'T}-\widehat{QOT})=2\,\widehat{OQO'}=2(180^\circ-\alpha).$$

Le lieu de F est alors un segment de base OO′ et capable de l'angle 2 (180° — α). Comme les deux segments lieux de F sont de part et d'autre de OO′ et capables d'angles supplémentaires, le lieu de F est un cercle complet.

Lieu du sommet. — La parabole P a son sommet S au milieu de la perpendiculaire FI abaissée de son foyer F sur la directrice OO′.

Menons le diamètre AA′ du cercle φ lieu de F, parallèle à OO′, et soit K son point de rencontre avec FI. Le milieu N de FK décrit comme on sait une ellipse dont le grand axe est AA′ et le petit axe égal au rayon du cercle φ. En observant que

$$NS = FS - FN = \frac{FI}{2} - \frac{FK}{2} = \frac{IK}{2},$$

on voit que le lieu de S se déduit de celui de N par une translation parallèle à FI et égale à $\frac{IK}{2}$; le lieu de S est donc l'ellipse lieu de N déplacée suivant son petit axe de la longueur $\frac{IK}{2}$. Cette ellipse passe par les points O et O′.

2° Les paraboles P passant par un point quelconque ont leurs foyers F et F′ à l'intersection du cercle φ avec le cercle de centre M tangent en P à OO′. Pour que ces deux paraboles soient réelles, il faut et il suffit que les cercles M et φ se coupent, c'est-à-dire qu'on ait

$$|MP - R| \leqslant M\varphi \leqslant MP + R,$$

R étant le rayon du cercle φ. La première inégalité montre que M est extérieur à une parabole P_1 de foyer φ et dont la directrice D_1 est située à une distance R de OO′ du même côté que φ; de même la seconde inégalité indique que M est intérieur à une parabole P_2 de foyer φ et dont la directrice D_2 est symétrique de D_1 par rapport à l'axe OO′. Les paraboles P sont donc réelles pour tout point M pris dans la région couverte de hachures.

3° Le paramètre p d'une des deux paraboles P passant par M étant donné, son foyer sera l'un des points communs au cercle φ et à l'une des parallèles à OO′ menées à la distance p. On obtient ainsi généralement quatre paraboles P ayant un paramètre égal, p; ces quatre paraboles étant fixes constituent le lieu de M. Suivant la valeur de p, il peut arriver que deux ou quatre de ces paraboles deviennent imaginaires ou bien que deux d'entre elles se confondent en une seule.

4° Soient F et F′ les foyers des deux paraboles P passant par M. Les tangentes en M à ces paraboles sont les bissectrices MT et MT′ des angles PMF et PMF′; comme ces bissectrices sont supposées rectangulaires, les angles correspondants sont supplémentaires, et par suite, les trois points F, M, F′ sont en ligne droite.

Puisque $MF = MP = MF'$, M est le milieu de la corde FF′, et l'on a

$$\overline{FM}^2 + \overline{M\varphi}^2 = R^2$$

ou

$$\overline{MP}^2 + \overline{M\varphi}^2 = R^2. \qquad (1)$$

Le lieu de M est donc le lieu des points dont la somme des carrés des distances à la droite OO′ et au point φ est constante et égale à R².

Projetons φ sur OO′ et MP en A et B; soient C et D les milieux de φA et BP.

En posant $\varphi A = 2a$, on a

$$MP = MD + a,$$
$$\overline{M\varphi}^2 = \overline{CD}^2 + (MD - a)^2,$$

et la relation (1) devient

$$(MD + a)^2 + \overline{CD}^2 + (MD - a)^2 = R^2,$$

ou $\overline{CD}^2 + 2\overline{MD}^2 = R^2 - 2a^2$.

Prenons alors sur MP le point m tel que $mD = MD\sqrt{2}$; la relation précédente s'écrit

$$\overline{CD}^2 + \overline{mD}^2 = R^2 - 2a^2,$$

ou

$$\overline{CM}^2 = R^2 - 2a^2 = \text{const}.$$

Le lieu de m est donc un cercle de centre C et de rayon $\sqrt{R^2 - 2a^2}$. Par suite le point M, qui divise l'ordonnée mD dans un rapport tel que $MD = \frac{mD}{\sqrt{2}}$, décrit une ellipse admettant le cercle C comme cercle principal. Cette ellipse passe par les points O et O′ qui font partie du lieu.

(Ernest FOUCART.)

[Ont résolu la même question: MM. L. Ollié; M. Rebeix.]

4608. — *Étudier les variations de la fonction*

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2,$$

quand x varie de $-\infty$ *à* $+\infty$.

On sait qu'une fonction croît ou décroît pour une certaine valeur de x suivant que cette valeur rend la dérivée de la fonction positive ou négative.

En prenant la dérivée de la fonction proposée, on a

$$y' = 6x^2 - 6x - 3.$$

Cette dérivée est positive pour toute valeur de x extérieure aux racines de l'équation

$$6x^2 - 6x - 3 = 0,$$

d'où $$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Par suite pour $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$, y' s'annule en passant du positif au négatif, et pour $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ y' s'annule en passant du négatif au positif. Ces valeurs correspondent donc respectivement au maximum et au minimum de y.

Voyons maintenant pour quelles valeurs de x, y s'annule. On voit sans difficulté qu'une de ces valeurs est $x = -1$; en mettant alors le facteur $x+1$ en évidence dans la fonction, celle-ci s'écrit

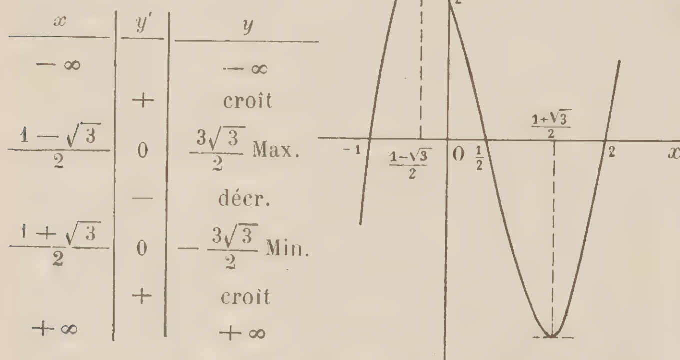
$$y = (x+1)(2x^2 - 5x + 2).$$

Les deux autres valeurs qui annulent y sont donc racines de l'équation

$$2x^2 - 5x + 2 = 0,$$

d'où $$x = \frac{1}{2}, \qquad x = 2.$$

En remarquant que pour $x = 0$, on a $y = 2$, et pour $x = \pm\infty$, $y = \pm\infty$, on forme, avec ces divers résultats, le tableau suivant, qui résume les variations de y, représentées d'ailleurs par la courbe figurative ci-dessous.



x	y'	y
$-\infty$		$-\infty$
	$+$	croît
$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ Max.
	$-$	décr.
$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ Min.
	$+$	croît
$+\infty$		$+\infty$

[Ont résolu la même question: MM. V. Barol; C. Broutin; Cousin; Jacquet; A. Larue; P. Turgis.]

5015. — *On donne un cercle de diamètre* AB; OC *étant le rayon perpendiculaire à* AB, *on prend* $OO' = \frac{R}{2}$, *et, de* O' *comme centre, avec* O'C *pour rayon, on décrit un cercle qui coupe* OA *en* P. *Démontrer que* CP *est le côté du pentagone convexe inscrit.*

Déduire de là, en généralisant, la construction de la corde de longueur

$$R\frac{\sqrt{2(n^2+1) - 2\sqrt{n^2+1}}}{n}.$$

On a $$CP = \sqrt{R^2 + \overline{OP}^2}.$$

Or $$OP = O'P - O'O = O'C - \frac{R}{2}$$

et

$$O'C = \sqrt{\overline{O'O}^2 + \overline{OC}^2} = \sqrt{\frac{R^2}{4} + R^2} = \frac{R\sqrt{5}}{2}.$$

Donc

$$CP = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R\sqrt{5}}{2} - \frac{R}{2}\right)^2}$$

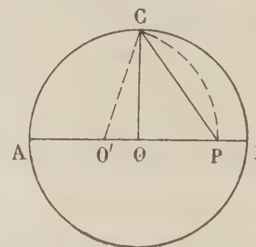
ou $$CP = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

La valeur de CP est ainsi égale au côté du pentagone convexe inscrit dans un cercle de rayon R.

La formule précédente coïncide avec la formule générale

$$\frac{R\sqrt{2(n^2+1) - 2\sqrt{n^2+1}}}{n}$$

pour $n = 2$. Par analogie, on est alors conduit à la construction générale suivante, facile à vérifier :



On prend $OO' = \frac{R}{n}$, et de O' comme centre, avec O'C pour rayon, on décrit un cercle qui coupe OA en P : CP est la corde cherchée.

En effet, on a

$$CP = \sqrt{R^2 + \overline{OP}^2}.$$

Or $$OP = O'P - O'O = O'C - \frac{R}{n},$$

$$O'C = \sqrt{\overline{O'O}^2 + \overline{OC}^2} = \sqrt{\frac{R^2}{n^2} + R^2} = \frac{R}{n}\sqrt{n^2+1}.$$

Donc $$CP = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{n}\sqrt{n^2+1} - \frac{R}{n}\right)^2},$$

ou $$CP = \frac{R\sqrt{2(n^2+1) - 2\sqrt{n^2+1}}}{n}.$$

(Edmond Barbé, à Mazamet.)

[Ont résolu la même question: Mlle A. Saleilles; MM. L. de Alba; M. Antoine; D. Antonescu; H. Belbenoit; A. Bellier; H. Bénech; A. Bernardeau; M. Beyney; Bonnetain; A. Bourlat; A. Buchholz; R. Cattin; D. Cognet; M. Compain; L. David; G. Desnoës; C. Dripen; E. Durand; A. Fraysse; Gasluc de Sénébron; P. Guerrier; A. Haour; R. Henry; E. Hugonnier; A. James; C. Laurent; L. Lefèvre; A. Legros; P. Legros; L. Lemmet; J. Lestable; E. Licope; P. Luquet; T. Millet; F. Pégorier; J. Permann; L. Pignier; J. Raymond; E. Roncin; M. Royer; P. Saintin; J. Schwatz; J. Tastet; H. Thibon; P. Valentin; A. Vannier; Vautrey.]

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

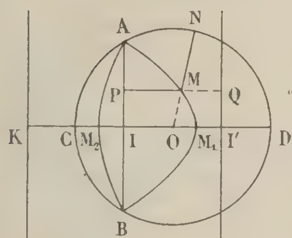
5003. — *On donne un cercle de rayon* R *et de centre* O. *On le coupe par une sécante* AB *qui partage en deux parties égales le rayon perpendiculaire à cette sécante, et on demande le lieu des points de l'intérieur du cercle situés à égale distance de la sécante et de la circonférence. Ce lieu fait partie de deux coniques qu'on demande de définir et de construire.*

On place ensuite la circonférence O *sur un plan horizontal de projection, de façon que* AB *soit perpendiculaire à la ligne de terre. On construit les projections d'un cône circulaire droit ayant pour base le cercle de centre* O *et dont le volume est équivalent à celui d'une sphère de même rayon* R *que le cercle donné, et on propose de couper ce cône par des plans tels que les sections obtenues aient pour projections les deux coniques précédentes. Mener ensuite les tangentes aux deux coniques à l'un des points où elles coupent la circonférence* O *donnée, et indiquer la valeur de l'angle de ces deux tangentes.*

(Bacc. lettres-sciences, Paris, mars 1901.)

Soit AB la sécante perpendiculaire au milieu I du rayon CO du cercle O.

Considérons à l'intérieur du segment ABD, le point M tel que sa distance MN à la circonférence O soit égale à sa distance MP à AB. En prolongeant PM d'une longueur $MQ = MO$, on a $PQ = PM + MQ = NM + MO = R$.



Le point Q se trouve donc sur une parallèle fixe à AB, passant par le milieu I' de OD. Dès lors, le lieu du point M est une parabole de foyer O, admettant la droite QI' pour directrice; son paramètre est $OI' = \frac{R}{2}$, et la courbe passe par les points A, B qui limitent la portion utile du lieu.

En considérant un point M de l'intérieur du segment ACB, on verrait de même que le lieu de ce point est l'arc de parabole AM_2B dont le foyer est O et la directrice une parallèle à AB menée à la distance $IK = R$; cette seconde parabole a pour paramètre $OK = \frac{R}{2} + R = \frac{3R}{2}$.

Prenons comme ligne de terre le diamètre cd perpendiculaire à ab (ab remplace ici AB). Le cône considéré a pour base le cercle o et une hauteur os' telle que son volume équivaut au volume d'une sphère de rayon R, condition exprimée par

$$\frac{1}{3}\pi R^2 os' = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

d'où $os' = 4R$.

On connaît alors la projection verticale $cs'd$ du cône. En coupant ce cône par des plans de bout passant par i et parallèles aux génératrices $s'c$ et $s'd$, ces plans déterminent des sections paraboliques se projetant sur la base o suivant les deux paraboles obtenues plus haut.

Pour construire les tangentes en b à ces paraboles, considérons le plan tangent en b au cône; ce plan a pour trace horizontale la tangente en b au cercle o, qui coupe cd en un point α tel que

$$o\alpha . oi = R^2, \qquad \text{d'où} \qquad o\alpha = 2R.$$

Par suite c est le milieu de αo et i le milieu de αd. La trace verticale im'_2 d'un des plans sécants étant parallèle à $s'd$ coupe alors la trace verticale $\alpha s'$ du cône au milieu c' de $\alpha s'$, de sorte que (bc, ic') sont les projections de la tangente en b à la section parabolique déterminée par le plan. On verrait de même que (bd, id') sont les projections de la tangente en b à la section parabolique par le second plan sécant.

Les tangentes en b aux projections horizontales des deux sections sont donc les droites rectangulaires bc, bd — résultat qu'on pouvait prévoir en observant que dans la parabole, la sous-tangente est le double de l'abscisse.

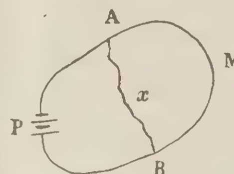
(Henri FRICQUEGNON, à Vigneulles.)

Remarque. — Ce dernier résultat peut se déduire de ce fait que la distance du foyer au point où une tangente coupe l'axe est égale au rayon vecteur du point de contact.

[Ont résolu la même question : MM. E. Barbé ; A. Bernardeau ; F. Clabault ; L. David ; H. Lacape ; M. Laurence ; A. Legros ; P. Luquet ; M. Marx ; A. Vannier.]

PHYSIQUE

5000. — *Le circuit d'une pile est fermé par deux conducteurs APB (résistance r), BMA (résistance R). Par quelle résistance x faut-il réunir les points A, B pour que l'intensité I du courant qui traverse P devienne m fois l'intensité primitive I_0 ?*



Exprimer l'intensité i du courant qui traverse la résistance x.

Le problème est-il toujours possible ? Que signifie, en particulier, le résultat relatif au cas $m = 1$?

(*Bacc. lettres-math., Montpellier, juillet 1900.*)

Soient x la résistance qui rend m fois plus grande l'intensité du courant entre les points de dérivation et la source P, i l'intensité dans la dérivation AB et i' la nouvelle intensité dans la partie AMB.

Les lois de Kirchoff donnent

$$mI_0 - i - i' = 0 \qquad (1)$$

et

$$E = I_0(r + R) = mI_0 r + xi, \qquad (2)$$

en appelant E la force électromotrice de la pile.

De cette dernière équation, on tire

$$x = \frac{I_0(R + r - mr)}{i}. \qquad (3)$$

Les intensités étant inversement proportionnelles aux résistances des conducteurs, on a d'autre part

$$xi = Ri',$$

d'où

$$i' = \frac{xi}{R}.$$

Portant cette valeur dans l'équation (1), il vient

$$i = \frac{mRI_0}{R + x}. \qquad (4)$$

Remplaçons x par sa valeur donnée par l'équation (3), nous aurons

$$i = \frac{I_0(R + r)(m - 1)}{R}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut que les valeurs trouvées pour x et i soient positives, ce qui exige que l'on ait

$$R + r - mr \geqslant 0,$$
$$m - 1 \geqslant 0,$$

c'est-à-dire

$$1 \leqslant m \leqslant \frac{R + r}{r}.$$

Dans le cas particulier où $m = 1$, i devient nul ; alors x est infini. Ces résultats étaient à prévoir. En effet, pour que l'intensité reste la même lorsque l'on a établi une dérivation entre A et B, il faut qu'aucun courant ne puisse passer dans cette dérivation, c'est-à-dire que la résistance du conducteur AB soit infinie.

(MARTIN DES PALLIÈRES, à Rennes.)

[Ont résolu la même question : Mlle Lauzanne ; MM. Amiot ; Bernardeau ; Beyney ; Bourlat ; Cattin ; David ; Durand ; Hugonnier ; Millet ; Palustran ; Poirier ; Thiébault ; Thonet ; Vannier.]

ÉCOLE PROFESSIONNELLE SUPÉRIEURE DES POSTES ET DES TÉLÉGRAPHES

(1re Section.)

Concours de 1901.

Sciences mathématiques.

(*16 avril. — De 1 h. à 5 h.*)

I. — Calculer, à $\frac{1}{17000}$, la racine carrée de $\frac{3}{13}$. Donner les opérations et expliquer la marche suivie.

II. — Simplifier et condenser autant que possible l'expression

$$(6a^2 - 5a - 6)\frac{3a+2}{8a-12}.$$

III. — **5030.** *Géométrie plane.* — Les distances d'un point fixe I à deux droites fixes parallèles A et B sont a et b. Par I on mène une sécante qui rencontre A et B en P et en Q, et, sur PQ comme diamètre, on décrit une circonférence C.

1° Lieu géométrique du centre O de C, lorsque la sécante pivote autour de I;

2° Déterminer par une construction graphique la position de la sécante de manière que C ait un rayon de longueur donnée R;

3° Pour cette position de la sécante, calculer la distance IO en fonction de a, b et R;

4° Les deux bissectrices des angles en P forment avec les deux bissectrices des angles en Q une figure dont on indiquera la forme et la position par rapport à C, et dont on évaluera l'aire.

IV. — 1° Donner, sans démonstration, l'expression du volume d'un tronc de cône droit à bases parallèles en fonction de sa hauteur et des rayons de ses bases;

2° Appliquer cette formule au problème suivant :

Dans le plan d'un carré de côté égal à a, et à une distance d (supposée supérieure à $\frac{a}{\sqrt{2}}$) du centre de cette figure, on trace parallèlement à une des diagonales une droite xy; calculer le volume engendré par la rotation de la surface du carré autour de xy.

Sciences physiques.

(*17 avril. — De 8 h. à 11 h.*)

I. — Lois de la chute des corps. Vérifications expérimentales.

II. — Electrophore.

III. — Détermination de la composition de l'air.

QUESTIONS PROPOSÉES

5031. — Déterminer un point d'une ellipse de façon que le cercle passant par ce point et les foyers ait un rayon R.

5032. — On considère tous les triangles qui ont un sommet A commun, la bissectrice AD invariable en grandeur et en position, les cercles circonscrits à ces triangles coupant AD en un point fixe F.

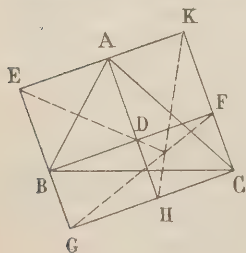
1° Démontrer que dans tous ces triangles le produit de la hauteur issue de A par le diamètre du cercle circonscrit est constant.

2° Trouver le lieu du milieu du côté opposé au sommet A.

3° Trouver le lieu du point d'intersection des médianes.

(Duvergé et Ste-Lagüe, lycée de Bordeaux.)

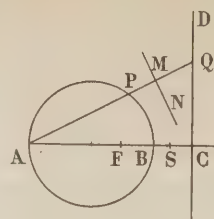
5033. — Par les sommets d'un triangle ABC, on mène trois droites parallèles et les trois droites perpendiculaires. On obtient ainsi trois rectangles ADBE, BFCG, CKAH, qui ont respectivement pour diagonales AB, BC, CA ; démontrer que les trois autres diagonales, ED, FG, KH, sont concourantes.



Trouver le lieu géométrique du point de concours quand la direction des parallèles varie.

(P. Tribier.)

5034. — On donne une circonférence de diamètre AB et une droite CD perpendiculaire sur ce diamètre. Par A on mène une sécante APQ et la perpendiculaire à cette sécante en un point M tel que



$$\frac{MP}{MQ} = \frac{p}{q}.$$

1° Démontrer que MN enveloppe une parabole ayant pour foyer un point F et pour sommet un point S tels que

$$\frac{FB}{FA} = \frac{SB}{SC} = \frac{p}{q}.$$

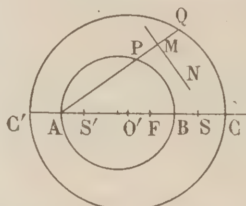
2° Démontrer que l'enveloppe est encore une parabole lorsque CD est quelconque et que MN fait avec AP un angle quelconque constant en grandeur et en sens.

La position du foyer est indépendante de la droite CD.

3° Trouver le lieu du foyer quand on fait varier l'angle AMN.

(P. Valot.)

5035. — On donne une circonférence de diamètre AB et une seconde circonférence O′ ayant son centre sur AB. Par A on mène une sécante qui coupe la première circonférence en P et la seconde en Q, puis la perpendiculaire à cette sécante en un point M tel que



$$\frac{MP}{MQ} = \frac{p}{q}.$$

1° Démontrer que MN enveloppe une ellipse ou une hyperbole (suivant la position de A par rapport à la circonférence O′), ayant pour l'un de ses foyers un point F et pour sommets des points S et S′ tels que

$$\frac{FB}{FA} = \frac{SB}{SC} = \frac{S'B}{S'C'} = \frac{p}{q}.$$

2° Démontrer que l'enveloppe est encore une conique quand la circonférence O′ est quelconque, et que l'angle AMN est un angle quelconque constant en grandeur et en sens.

3° Montrer que la position de l'un des foyers de cette conique est complètement indépendante de la circonférence O′, et que la position de l'autre foyer est indépendante du rayon de O′.

(P. Valot.)

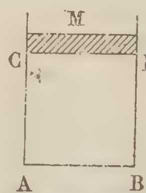
5036. — De quelle espèce doit être un triangle dans lequel on a

$$\frac{\sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C}?$$

(Gasluc de Sénébron, à Hesbru.)

5037. — Établir les relations qui doivent exister entre les angles d'un triangle et les intensités de trois forces parallèles, de même sens et appliquées respectivement aux trois sommets, pour que le centre de ces forces coïncide avec le centre du cercle d'Euler relatif au triangle.

(Ch. Vallot, lycée Janson-de-Sailly.)



5038. — Une masse d'air à la pression de 3atm est emprisonnée dans un cylindre vertical ABCD par un piston M, de poids P. On note la distance

CA = 10cm.

On triple le poids P et on demande de calculer la hauteur dont descendra le piston dans le cylindre.

Pression atmosphérique extérieure. 76cm de mercure.

Densité du mercure . . . . 13,6.

(*Bacc. lettres-math., Rennes, novembre 1900.*)

5039. — Sur un sonomètre sont placées deux cordes, l'une en cuivre, l'autre en acier, de même section, et ayant chacune 1m de longueur. La corde de cuivre est tendue par un poids de 1kgr.

1° Quel doit être le poids tenseur de la corde d'acier pour qu'elle rende le même son fondamental que la corde de cuivre ?

2° Les poids tenseurs étant tous deux égaux à 1kgr, quelle serait la longueur de la corde d'acier rendant le même son que celle de cuivre de longueur 1m ?

3° Dans les mêmes conditions, quelle serait la longueur de la corde d'acier rendant la quinte supérieure du même son ?

Densité du cuivre . . . . 8,95.
Densité de l'acier . . . . 7,45.

(*Bacc. lettres-sciences, Aix, juillet 1900.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry Vuibert.

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet, Facdouel, Dir.

25e Année. — N° 17. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 1er Juin 1901.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Abonnements.. Librairie Nony et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

CONCOURS GÉNÉRAL DE PREMIÈRE-SCIENCES

Concours de 1900.

Mathématiques.

4865. — 1° *On donne dans un plan un quadrilatère* ABCD, *formé de quatre tiges rigides de longueurs invariables, savoir :*

$$AB = a, \qquad BC = b, \qquad CD = c, \qquad DA = d.$$

Ces tiges sont articulées entre elles aux sommets A, B, C, D *du quadrilatère, en sorte que celui-ci, sans sortir de son plan, tout en conservant les mêmes côtés, peut se déformer librement par suite de la variation de ses angles. On démontrera que la relation*

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

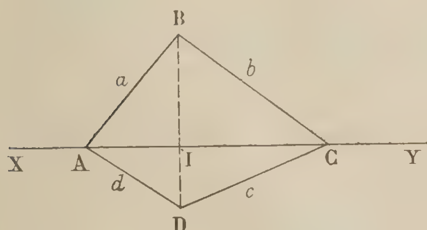
est nécessaire et suffisante pour que les diagonales AC *et* BD *du quadrilatère restent rectangulaires au cours de la déformation.*

2° *Supposons cette condition remplie ; on place le quadrilatère articulé dans un plan vertical, de façon qu'il repose par ses deux sommets* A *et* C *sur une horizontale fixe* XY *de ce plan, sur laquelle ces sommets sont libres de glisser : on attache en* B *un poids* P ; *en* D *un poids* Q. *De plus on exerce en* A *et* C *des efforts dirigés suivant l'horizontale* XY, *que l'on désignera respectivement par* T *et* T′, *ces forces* T *et* T′ *étant comptées positivement dans le sens* XY *et négativement dans le sens opposé.*

Calculer T *et* T′ *de manière qu'il y ait équilibre. Discuter les valeurs trouvées. Examiner le cas où* T, T′ *pourraient être nuls.*

3° *Calculer les pressions verticales exercées en* A *et* C *sur l'horizontale* XY.

On négligera le poids des tiges, ainsi que les frottements.



1° Supposons les diagonales AC, BD rectangulaires, nous aurons

$$b^2 = \overline{CI}^2 + \overline{BI}^2,$$

$$c^2 = \overline{CI}^2 + \overline{DI}^2,$$

et
$$b^2 - c^2 = \overline{BI}^2 - \overline{DI}^2 ;$$

nous obtiendrons pareillement $a^2 - d^2 = \overline{BI}^2 - \overline{DI}^2$,

et il viendra
$$b^2 - c^2 = a^2 - d^2,$$

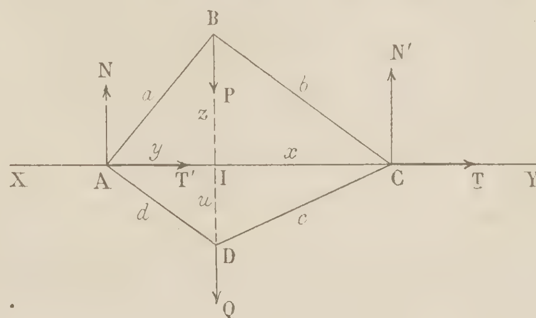
c'est-à-dire
$$b^2 + d^2 = a^2 + c^2. \qquad (1)$$

Réciproquement si les côtés du quadrilatère vérifient la relation (1), on a aussi

$$b^2 - c^2 = a^2 - d^2 = k^2 ;$$

les sommets A et C appartiennent donc au lieu des points dont la différence des carrés des distances aux points B, D est égale à k^2, c'est-à-dire à une perpendiculaire à BD.

2° Considérons le quadrilatère ABCD ; on peut le définir en position et en forme par la place du point I sur XY et les segments x, y, z, u de ses diagonales, comptés à partir de I positivement suivant XY et la verticale ascendante.



On a d'ailleurs,

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} y^2 + z^2 = a^2, \\ z^2 + x^2 = b^2, \\ u^2 + x^2 = c^2, \\ y^2 + u^2 = d^2. \end{cases}$$

Les forces qui sollicitent le système sont : les poids P, Q ; les forces T, T′ que l'on veut déterminer et que l'on compte positivement suivant X, Y ; les réactions normales N, N′ de XY que nous compterons positivement suivant la verticale ascendante ; enfin les actions mutuelles, égales et directement opposées, qui s'exercent à chacune des charnières.

Pour exprimer que le quadrilatère est en équilibre, nous appliquerons le principe du *Travail virtuel* ; nous écrirons donc que, pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons, la somme des travaux des forces données P, Q, T, T′ est nulle. Or, on peut passer d'une configuration du quadrilatère à une autre au moyen d'une translation parallèle à XY amenant en coïncidence les points de concours des diagonales, puis d'une déformation laissant fixe ce point I ; et, nous considérerons successivement ces deux déplacements. Représentons par Δe le déplacement de translation, nous aurons

$$\mathcal{T}_T = T.\Delta e, \qquad \mathcal{T}_{T'} = T'.\Delta e, \qquad \mathcal{T}_P = 0, \qquad \mathcal{T}_Q = 0 ;$$

et il viendra, en remplaçant la relation

$$\mathcal{T}_T + \mathcal{T}_{T'} + \mathcal{T}_P + \mathcal{T}_Q = 0,$$

l'égalité
$$\Delta e(T + T') = 0,$$

ou bien
$$T + T' = 0.$$

Les forces T, T' sont donc égales et directement opposées.

Supposons maintenant que le quadrilatère se déforme, le point I restant fixe ; les vitesses des sommets seront les dérivées : x', y', z', u' de x, y, z, u par rapport au temps et leurs déplacements infinitésimaux auront pour expressions $x'.\Delta t$, $y'.\Delta t$, $z'.\Delta t$, $u'.\Delta t$.

Ceci posé, nous aurons pour les travaux des forces données :

$$\mathcal{T}_T = Tx'.\Delta t, \qquad \mathcal{T}_{T'} = + T'y'.\Delta t = - Ty'.\Delta t,$$

$$\mathcal{T}_P = - Pz'.\Delta t, \qquad \mathcal{T}_Q = - Qu'.\Delta t.$$

Le principe du travail virtuel nous donnera alors

$$T(x' - y') - Pz' - Qu' = 0. \qquad (2)$$

Ceci posé, dérivons, par rapport au temps t, les identités (I), il viendra

$$yy' + zz' = 0,$$
$$zz' + xx' = 0,$$
$$uu' + xx' = 0,$$
$$yy' + uu' = 0,$$

ou

$$xx' = - zz' = yy' = - uu',$$

d'où nous tirons

$$\frac{x'}{\frac{1}{x}} = \frac{z'}{-\frac{1}{z}} = \frac{y'}{\frac{1}{y}} = \frac{u'}{-\frac{1}{u}}. \qquad (3)$$

Éliminons x', y', z', u' entre (2) et (3), il viendra

$$T\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) + \frac{P}{z} + \frac{Q}{u} = 0,$$

d'où nous tirons

$$T = \frac{\frac{P}{z} + \frac{Q}{u}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}} = \frac{xy(Pu + Qz)}{zu(x - y)}. \qquad (4)$$

Telle est l'expression de la force T, pour l'équilibre du système présentant la configuration caractérisée par les longueurs x, y, z, u des segments des diagonales. Le signe de T, qui définit d'ailleurs le sens de cette force, dépend de la forme du quadrilatère et du signe de $Pu + Qz$.

Ainsi dans le cas de figure considéré, nous avons :

$$xy < 0, \qquad zu < 0, \qquad x - y > 0 ;$$

la force T sera donc dirigée suivant XY ou en sens contraire suivant que $Pu + Qz$ sera positive ou négative.

Les valeurs remarquables de T correspondent aux configurations du quadrilatère pour lesquelles le numérateur ou le dénominateur de la fraction qui l'exprime tendent vers zéro.

Nous remarquerons d'abord qu'il faut supposer : $x - y \neq 0$; car si l'on avait $x = y$, BC et DC coïncideraient respectivement avec BA et DA et toute déformation continue de la figure conserverait cette coïncidence ; de sorte que l'on n'aurait plus une configuration *limite*.

D'autre part, comme on s'en rend compte aisément par la figure ou à l'aide des identités (I) xy et zu ne peuvent pas être nuls simultanément. Il résulte de ces remarques qu'il suffit d'examiner les cas principaux suivants :

I. — $xy = 0$. 1° $x = 0$, $y \neq 0$. On voit, en se reportant à la relation (4), que $T = 0$.

2° $x = 0$, $y = 0$. Pour que ce cas corresponde à une forme limite du quadrilatère, il faut que x et y tendent vers zéro par des valeurs de signes contraires ; ceci se présentera quand $a = b$, $c = d$; on a alors $x = -y$ avant la limite, puis

$$T = \frac{-x(Pu + Qz)}{2zu}.$$

Faisons tendre x vers zéro, nous obtiendrons

$$T = 0.$$

II. — $zu = 0$. 1° $z = 0$, $u \neq 0$. La relation (4), qui peut s'écrire

$$T = \frac{Pxy}{z(x - y)} + \frac{Qxy}{u(x - y)}$$

nous montre que T devient infiniment grande quand z tend vers zéro.

2° $z = 0$, $u = 0$. En raisonnant comme au (I, 2°), on voit que T devient infinie, sauf lorsque $P = Q$.

Dans ce cas, et en tenant compte de $z = -u$, on obtient $T = 0$.

Pour toute configuration, le quadrilatère est symétrique par rapport à XY.

III. — $Pu + Qz = 0$. Cette condition ne peut être remplie que lorsque u et z sont de signes contraires, c'est-à-dire lorsque les sommets B et D sont de part et d'autre de XY.

Les forces T et T' sont nulles dans ce cas.

3° Pour calculer N et N', appliquons le théorème des moments par rapport aux sommets A et C, il viendra, en remarquant que la somme des moments des actions aux charnières est nulle,

$$+ y(P + Q) + (x - y)N' = 0,$$
$$x(P + Q) - (x - y)N = 0,$$

d'où nous tirons

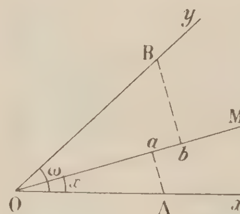
$$\begin{cases} N = \quad (P + Q)\dfrac{x}{x - y}, \\ N' = - (P + Q)\dfrac{y}{x - y}. \end{cases}$$

Telles sont les réactions de XY de l'horizontale en A et C. Les pressions exercées en ces points sur la charnière sont respectivement égales et directement opposées à ces forces.

(T. C.)

ALGÈBRE

4384. — *Étant donné un angle $xOy = \omega$, on prend sur Ox une longueur $OA = a$ et sur Oy une longueur $OB = b$. Une droite mobile OM tourne autour du point O et dans chacune de ses positions on projette sur elle les longueurs OA et OB en Oa et Ob. Etudier la variation de la somme $Oa + Ob$.*



La question revient à étudier

$$\rho = a \cos x + b \cos (\omega - x).$$

Or, si l'on pose

$$x = \frac{\omega}{2} + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \omega - x = \frac{\omega}{2} - \varepsilon,$$

l'expression devient, après développement et mise en facteur,

$$\rho = -(a - b) \sin \frac{\omega}{2} \sin \varepsilon + (a + b) \cos \frac{\omega}{2} \cos \varepsilon.$$

On est ainsi ramené à la forme classique

$$A \sin X + B \cos X = C,$$

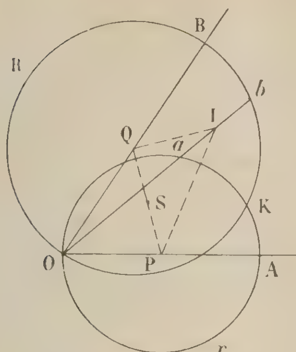
que l'on sait discuter.

Il est néanmoins plus intéressant d'étudier la question au point de vue géométrique.

Remarquons d'abord que, par construction, le point a décrit une circonférence de centre P et de rayon $\frac{a}{2}$, et le point b, une circonférence de centre Q et de rayon $\frac{b}{2}$.

Remarquons ensuite que si l'on détermine le milieu I de ab, la variation de $Oa + Ob$ est la même que celle de 2OI.

La solution du problème réside donc dans la recherche du lieu de I.



Première méthode. — A l'inspection de la figure on peut écrire

$$Ia.IO = \overline{IP}^2 - r^2 \quad \text{ou} \quad \overline{IP}^2 - \frac{a^2}{4},$$

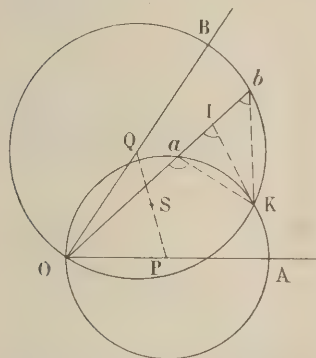
$$Ib.IO = R^2 - \overline{IQ}^2 \quad \text{ou} \quad \frac{b^2}{4} - \overline{IQ}^2.$$

Par suite, puisque $Ia = Ib$,

$$\overline{IP}^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{b^2}{4} - \overline{IQ}^2$$

ou $$\overline{IP}^2 + \overline{IQ}^2 = \frac{a^2+b^2}{4}.$$

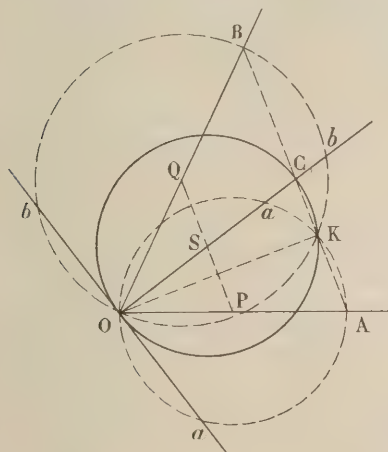
Le lieu de I est ainsi une circonférence de centre S, milieu de PQ, etc. Les points O et K appartiennent visiblement au lieu.



Deuxième méthode. — Dans tout triangle Kab, l'angle que forme la médiane KI avec le côté ab est lié aux angles a et b par la relation

$$2 \text{ cotg I} = \text{cotg } a + \text{cotg } b \text{ (*)}.$$

Donc, pour le cas actuel, 2 cotg I est constant parce que les angles a et b sont eux-mêmes constants et le lieu de I est un segment, décrit sur OK, capable de l'angle défini par la relation ci-dessus.



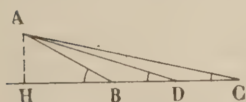
Cela posé, on voit que la corde OI peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et OC, ces cas se présentant : le premier, lorsque ab est dirigé perpendiculairement à la médiane OC du triangle OAB ; le second, lorsque ab est dirigé suivant cette même médiane.

Un cas particulier est celui où les trois points a, I et b sont confondus en un seul, K, deuxième intersection commune des trois circonférences considérées et pied de la hauteur issue du sommet O.

En appelant respectivement c et S le côté AB et la surface du triangle OAB, nous pouvons donc dire que la fonction étudiée a pour minimum 0, pour maximum $2OC = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, et pour valeur singulière $2OK = \dfrac{4S}{c}$.

(Georges LEMAIRE.)

(*) Voir E. Dessenon, *Trigonométrie*, p.250.
On peut aussi l'établir comme suit :



$$2HD = HB + HC$$

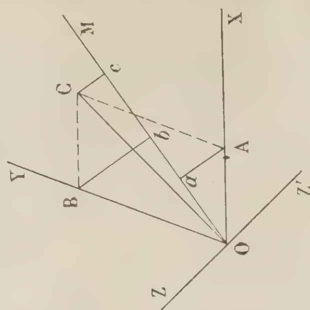
ou

$$2AH \text{ cotg D} = AH \text{ cotg B} + AH \text{ cotg C}$$

ou, en supprimant le facteur AH,

$$2 \text{ cotg D} = \text{cotg B} + \text{cotg C}.$$

Remarques. — 1° La somme $Oa + Ob$ n'est autre que la somme des projections de OA et OB sur la droite mobile OM, c'est-à-dire la projection Oc de la diagonale OC du parallélogramme construit sur OA et OB comme côtés. Le lieu du point c est le cercle de diamètre OC et on voit immédiatement comment varie la corde Oc.



2° Si on développe $\cos(\omega - x)$ l'expression de la quantité ρ devient

$$\rho = (a + b \cos \omega) \cos x + b \sin \omega \sin x ;$$

on est conduit à discuter une équation de forme connue.

La condition pour que cette équation ait des racines est que

$$\rho^2 \leqslant (a + b \cos \omega)^2 + b^2 \sin^2 \omega = a^2 + b^2 + 2ab \cos \omega ;$$

on voit que le second membre est l'expression du carré de la diagonale OC du parallélogramme ayant pour côtés $OA = a$, $OB = b$ et pour angle $AOB = \omega$. On voit donc que Oc est le maximum de la valeur absolue de ρ.

On peut remarquer que x et $x + \pi$ correspondent à la même figure, et donnent pour ρ des valeurs égales et de signes contraires. On peut donc toujours avoir, pour une figure donnée, le signe que l'on veut, et par suite ne considérer que les valeurs absolues. Il résulte de la discussion géométrique faite plus haut que l'expression de ρ est positive si on fait varier x entre $-\alpha$ et $\pi - \alpha$, α désignant la valeur absolue de l'angle xOz' que forme avec Ox la perpendiculaire à OC.

[Ont résolu la même question : MM. L. Gourdet; F. Leuilliot; E. Sinturel ; G. Tastet.]

5013. — *Inscrire dans un cône de rayon* R *et de hauteur* h *un cylindre de surface totale donnée.*

Soient SAB et MNPQ les sections du cône et du cylindre par un plan passant par l'axe SO; désignons par x le rayon de base OP et par y la hauteur PN du cylindre.

Si l'on représente par $2\pi m^2$ la surface totale donnée du cylindre, on a d'abord

$$2\pi x(x + y) = 2\pi m^2$$

ou $$x(x + y) = m^2. \qquad (1)$$

D'autre part, des triangles semblables donnent

$$\frac{NP}{PB} = \frac{SO}{OB}$$

ou $$\frac{y}{R - x} = \frac{h}{R},$$

d'où $$y = \frac{h(R - x)}{R}. \qquad (2)$$

Portant cette valeur dans (1), on a

$$x\left(x + \frac{hR - hx}{R}\right) = m^2$$

ou $$f(x) = (R - h)x^2 + Rhx - Rm^2 = 0.$$

Discussion. — Pour qu'une valeur de x convienne au problème, il faut et il suffit qu'elle soit réelle et comprise entre 0 et R. Une telle valeur rend d'ailleurs la valeur (2) de y inférieure à h et positive.

Cas d'une solution. — L'équation $f(x) = 0$ aura une de ses racines comprise entre 0 et R si l'on a

$$f(0)\, f(\mathrm{R}) < 0$$

ou

$$-\mathrm{R}m^2.\mathrm{R}(\mathrm{R}^2 - m^2) < 0,$$

c'est-à-dire

$$m^2 < \mathrm{R}^2.$$

Cas de deux solutions. — Les deux racines de l'équation $f(x) = 0$ seront réelles et comprises entre 0 et R si l'on a en même temps :

$$\begin{array}{lll} \delta \geqslant 0 & \text{ou} & \mathrm{R}^2h^2 + 4(\mathrm{R}-h)\mathrm{R}m^2 \geqslant 0, \quad (1) \\ af(0) > 0 & \text{ou} & -(\mathrm{R}-h)\, m^2\mathrm{R} > 0, \quad (2) \\ af(\mathrm{R}) > 0 & \text{ou} & (\mathrm{R}-h)\mathrm{R}(\mathrm{R}^2 - m^2) > 0, \quad (3) \\ 0 < \dfrac{\mathrm{S}}{2} < \mathrm{R} & \text{ou} & 0 < -\dfrac{\mathrm{R}h}{2(\mathrm{R}-h)} < \mathrm{R}. \quad (4) \end{array}$$

La première des inégalités (4) entraîne $h > \mathrm{R}$; la seconde inégalité peut alors s'écrire

$$\mathrm{R}h < 2\mathrm{R}(h - \mathrm{R}) \quad \text{ou} \quad h > 2\mathrm{R}.$$

Comme $h > \mathrm{R}$, l'inégalité (2) est toujours vérifiée, et les inégalités (1) et (3) se ramènent à la double inégalité

$$\mathrm{R}^2 < m^2 \leqslant \frac{\mathrm{R}h^2}{4(h-\mathrm{R})}.$$

Ces limites de m^2 sont toujours compatibles, car l'inégalité

$$\mathrm{R}^2 < \frac{\mathrm{R}h^2}{4(h-\mathrm{R})}$$

équivaut à

$$0 < \frac{\mathrm{R}(h-2\mathrm{R})^2}{4(h-\mathrm{R})},$$

inégalité vérifiée lorsque $h > \mathrm{R}$.

Le tableau suivant résume la discussion :

$m^2 = 0$, une solution limite : $x = 0$;

$0 < m^2 < \mathrm{R}^2$, une solution : x' si $h > \mathrm{R}$ ou x'' si $h < \mathrm{R}$;

$$m^2 = \mathrm{R}^2 \left\{ \begin{array}{l} h \leqslant 2\mathrm{R}, \text{ une solution : } x = \mathrm{R}, \\ h > 2\mathrm{R}, \text{ deux solutions : } x = \mathrm{R} \text{ et } x = \dfrac{\mathrm{R}^2}{h-\mathrm{R}}; \end{array} \right.$$

$$\mathrm{R}^2 < m^2 < \frac{\mathrm{R}h^2}{4(h-\mathrm{R})} \left\{ \begin{array}{l} h < 2\mathrm{R}, \text{ aucune solution,} \\ h \geqslant 2\mathrm{R}, \text{ deux solutions ;} \end{array} \right.$$

$$m^2 = \frac{\mathrm{R}h^2}{4(h-\mathrm{R})} \left\{ \begin{array}{l} h < 2\mathrm{R}, \text{ aucune solution,} \\ h \geqslant 2\mathrm{R}, \text{ deux solutions ;} \end{array} \right.$$

$$m^2 > \frac{\mathrm{R}h^2}{4(h-\mathrm{R})}, \quad \text{pas de solution.}$$

On peut retrouver ces divers résultats en étudiant les variations du trinome incomplet

$$m^2 = \frac{\mathrm{R}-h}{\mathrm{R}} . x^2 + hx,$$

lorque x varie entre 0 et R.

(J. PERMANN, lycée de Limoges.)

[Ont résolu la même question : MM. V. Barol ; A. Bernardeau ; M. Beyney ; R. Cattin ; L. David ; Dejouany ; H. Dobryzniak ; Ducongé ; E. Durand ; Gasluc de Sénébron ; E. Hugonnier ; A. Legros ; P. Legros ; P. Luquet ; M. Marx ; F. Mestre ; A. Meynier ; R. de la Noue ; G. Paronelli ; D. Petit, V. Pollet ; E. Roncin ; M. Royer ; P. Saintin ; E. Serres ; F. Sol ; J. Tastet ; H. Thibon ; A. Vannier.]

5020. — *Résoudre l'équation*

$$\sqrt[3]{\frac{a-x}{b+x}} + \sqrt[3]{\frac{b+x}{a-x}} = c.$$

Si l'on pose

$$\frac{a-x}{b+x} = y^3,$$

l'équation proposée devient

$$y + \frac{1}{y} = c$$

ou

$$y^2 - cy + 1 = 0,$$

d'où

$$y = \frac{c \pm \sqrt{c^2-4}}{2}.$$

On est ainsi ramené à l'équation

$$\frac{a-x}{b+x} = \left(\frac{c \pm \sqrt{c^2-4}}{2}\right)^3,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{8a - b(c \pm \sqrt{c^2-4})^3}{8 + (c \pm \sqrt{c^2-4})^3},$$

les signes supérieurs ou inférieurs étant pris ensemble.

Ces deux valeurs de x ne sont réelles que si l'on a $c^2 - 4 \geqslant 0$, ou, ce qui revient au même,

$$c < -2 \quad \text{ou} \quad c > 2.$$

Pour $c = +2$, $x = \dfrac{a-b}{2}$;

pour $c = -2$, x infini si $a + b \neq 0$.

Lorsqu'on a à la fois $c = -2$ et $a + b = 0$, l'équation se réduit à une identité.

(EUGÈNE LICOPE, à Mons.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Bernardeau ; A. Bourlat ; C. Bourvéau ; L. David ; F. Gérard ; C. Gracule ; P. Guerrier ; E. Hugonnier ; H. Lamarre ; M. Laurence ; A. Legros ; G. Lepoivre ; A. Mabon ; H. Martin ; M. Marx ; E. Mercier ; F. Pégorier ; Poujol ; A. Vannier ; F. Velardi ; G. Ybert ; Daure.]

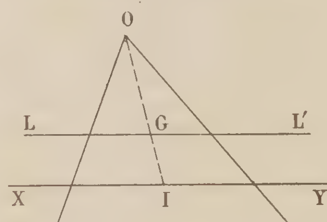
GÉOMÉTRIE

5014. — *Etant donnés une droite fixe, XY, et un angle constant tournant autour de son sommet O, trouver le lieu :*

1° *Des points de rencontre des médianes et des hauteurs du triangle formé par la droite fixe et par les côtés de l'angle mobile ;*

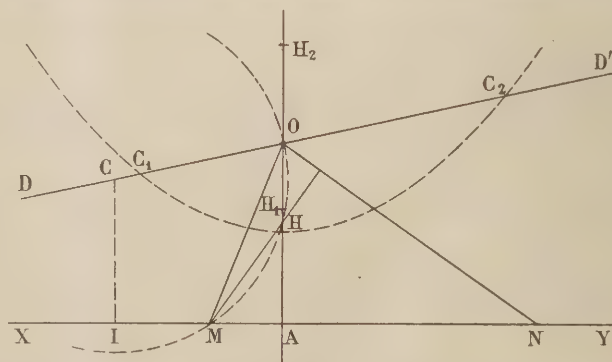
2° *Des centres des cercles inscrit et circonscrit à ce triangle.*

1° *Lieu du centre de gravité.* — Soit G ce point situé aux $\frac{2}{3}$ de la médiane OI à partir de O.



Lorsque I décrit la droite XY, le point G décrit une droite LL' homothétique à XY, O étant le centre et $\frac{2}{3}$ le rapport d'homothétie.

2° *Lieu de l'orthocentre.* — Soit H ce point situé à l'intersection des deux hauteurs issues de O et M. La hauteur OA étant fixe répond au lieu ; mais un point quelconque H de



cette hauteur ne fait partie du lieu qu'autant qu'il peut exister sur XY un point M tel que $\widehat{\mathrm{OMH}} = \frac{\pi}{2} - \alpha$, α étant l'angle aigu formé par les droites mobiles.

Par suite, pour qu'un point H convienne, il faut et il suffit que le segment capable de $\frac{\pi}{2} - \alpha$ décrit sur OH comme base coupe XY. Or le centre C de ce segment se trouve sur une droite fixe DD′ passant par O et faisant avec OA l'angle α, ou sur sa symétrique par rapport à OA; pour qu'un segment rencontre XY, il faut que la distance CI de son centre à XY soit au plus égale au rayon CO, autrement dit le point C doit être extérieur à la parabole de foyer O et de directrice XY; cette courbe rencontre DD′ aux points C_1 et C_2, centres de deux cercles passant par O et tangents à XY; ces cercles déterminent sur la droite OA deux points H_1 et H_2 qui comprennent tous les points ne faisant pas partie du lieu de H.

Lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$, le lieu de H se réduit au point fixe O.

2° *Lieu du centre* I *du cercle inscrit.* — Soient P et Q les points de contact du cercle avec MN et ON. On a

$$IP = IQ = OI \sin \frac{\alpha}{2},$$

d'où

$$\frac{IP}{IO} = \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Le rapport des distances du point I au point O et à la droite XY étant constant, le lieu de I est une branche d'hyperbole admettant O pour foyer voisin et XY pour directrice. Lorsque l'un des côtés de l'angle constant MON devient parallèle à XY, le point I est équidistant de ce côté et de XY; la portion utile AB du lieu est donc limitée par une parallèle à XY, équidistante de O et de XY. Le lieu du centre du cercle exinscrit situé dans $\widehat{MON}$, est de même un arc de la seconde branche d'hyperbole; les centres des autres cercles exinscrits sont sur une hyperbole d'excentricité $\dfrac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Dans le cas de la figure, on suppose que l'angle $MON = \alpha$, rencontre XY par ses deux côtés. Si XY coupait un seul côté et le prolongement de l'autre, il suffirait de remplacer dans ce qui précède α par $180° - \alpha$; on obtient ainsi une seconde hyperbole ayant même foyer et même directrice, mais dont l'excentricité est égale à

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{180° - \alpha}{2}\right)} = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

L'arc utile du lieu est compris entre AB et XY, les centres des cercles exinscrits se trouvent soit sur cette hyperbole, soit sur celle qui a été précédemment trouvée.

Si $\alpha = 90°$, les deux hyperboles se confondent en une seule, comme on pouvait le prévoir.

Lieu du centre du cercle circonscrit.—Soit C ce centre. Si l'on tire CO, CM et qu'on abaisse CH perpendiculaire à MN, le triangle rectangle MCH donne

$$CH = CM \cos MCH$$

ou, comme $CM = CO$ et $\widehat{MCH} = \widehat{MON} = \alpha$,

$$\frac{CH}{CO} = \cos\alpha.$$

Le point C décrit une branche d'hyperbole admettant O pour foyer, XY pour directrice correspondante et dont l'excentricité est $\frac{1}{\cos\alpha}$. On reconnaît aisément que la seconde branche s'applique aux positions des droites OM, ON pour lesquelles $\widehat{MON} = 180° - \alpha$.

Pour $\alpha = 90°$, l'hyperbole se réduit à la directrice XY, résultat d'ailleurs évident *a priori*.

(P. LEGROS, à Rethel.)

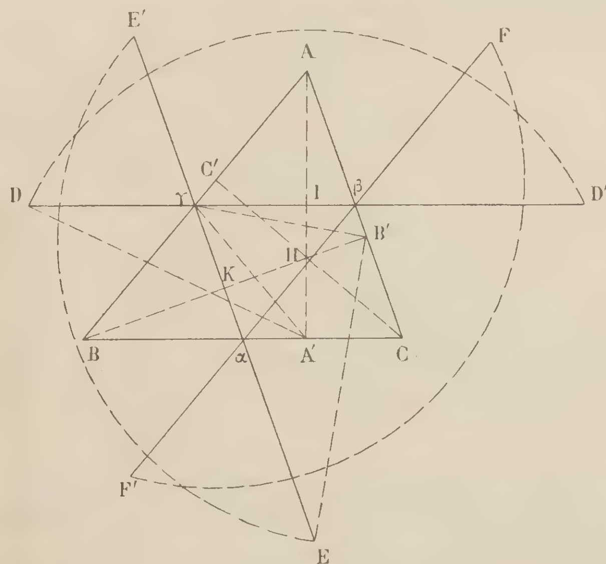
Remarque. — Si $\cos\alpha = \sin\frac{\alpha}{2}$, c'est-à-dire si $\alpha = \frac{\pi}{3}$, l'hyperbole en question se confond avec une de celles qui ont été trouvées comme lieu des centres des cercles inscrits.

(V. H.)

[Ont résolu la même question : MM. M. Antoine ; H. Belbenoît ; M. Beyney ; A. Bourlat ; L. David ; L. Didier ; A. James ; E. Serres ; J. Tastet ; H. Thibon.]

5017. — *Les cercles décrits des pieds des hauteurs d'un triangle comme centres, avec un même rayon, rencontrent les côtés correspondants du triangle formé par les milieux des côtés en six points qui sont sur un même cercle dont le centre est à la rencontre des hauteurs du premier triangle.*

Des pieds A′, B′, C′ des trois hauteurs comme centres, décrivons, avec le même rayon R, trois cercles qui rencontrent



respectivement en D, D′; E, E′; F, F′ les côtés correspondants $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ du triangle $\alpha\beta\gamma$ obtenu en joignant deux à deux les milieux des côtés de ABC.

Pour établir que les quatre points D, D′, E, E′, par exemple, sont sur un même cercle, il suffit de démontrer l'égalité

$$\gamma D . \gamma D' = \gamma E . \gamma E'.$$

La hauteur AA′ étant perpendiculaire au milieu I de DD′, on a

$$\begin{aligned} \gamma D . \gamma D' &= (ID - I\gamma)(ID' + I\gamma) \\ &= \overline{ID}^2 - \overline{I\gamma}^2 \\ &= R^2 - \overline{IA'}^2 - \overline{I\gamma}^2 \\ &= R^2 - \overline{\gamma A'}^2 ; \end{aligned}$$

de même, en considérant la hauteur BB′ perpendiculaire au

milieu K de EE′, on a

$$\gamma E.\gamma E' = R^2 - \overline{\gamma B}^2.$$

Mais les angles droits AA′B, AB′B sont inscrits dans un cercle de diamètre AB et de centre γ ; donc $\gamma A' = \gamma B'$, et par suite,

$$\gamma D.\gamma D' = \gamma E.\gamma E'.$$

C. q. f. d.

Les quatre points D, D′, E, E′ appartiennent ainsi à un même cercle ayant son centre à la rencontre H des deux hauteurs AA′, BB′, perpendiculaires aux milieux I, K de DD′, EE′.

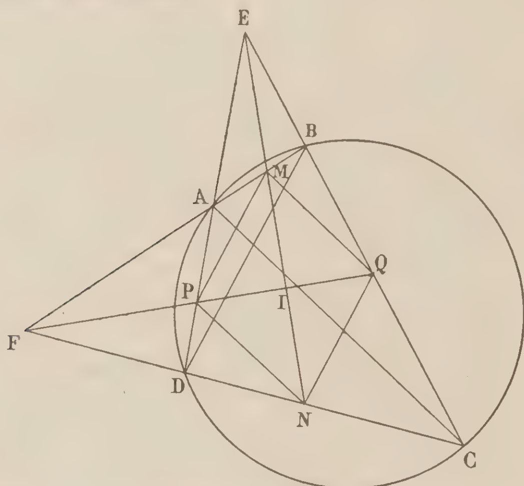
On démontrerait de même que les quatre points D, D′, F, F′ sont sur un cercle de centre H, qui se confond avec le précédent.

(E. HUGONNIER, école professionnelle de Voiron.)

[Ont résolu la même question : MM. M. Beau ; H. Belbenoit ; A. Bernardeau ; L. David ; Gasluc de Sénébron ; P. Legros ; E. Serres ; J. Tastet ; F. Thibier.]

5022. — *Quand un quadrilatère inscriptible a ses diagonales rectangulaires, les bissectrices des angles formés par le prolongement des côtés opposés du quadrilatère coupent les côtés en quatre points qui sont les sommets d'un carré dont le côté est la demi-moyenne harmonique des diagonales.*

Pour généraliser la question, nous considérerons un quadrilatère inscriptible quelconque, et nous montrerons que les quatre points énoncés M, N, P, Q sont alors les sommets d'un losange dont les côtés sont parallèles aux diagonales AC, BD du quadrilatère et ont pour longueur commune la demi-moyenne harmonique de ces diagonales.



En effet, EPQ est égal à la somme des angles intérieurs du triangle PAF,

$$\widehat{EPQ} = \widehat{PAF} + \widehat{AFP} ;$$

or $\widehat{PAF} = \widehat{BCF}$ comme supplément de $\widehat{BAD}$,

et $\widehat{AFP} = \widehat{QFC}$ par hypothèse ;

donc $\widehat{EPQ} = \widehat{BCF} + \widehat{QFC} = \widehat{EQF}$,

ce qui montre que le triangle EPQ est isocèle.

Par suite la bissectrice EMN de l'angle au sommet E est perpendiculaire au milieu I de PQ. On voit de même que la bissectrice EPQ est perpendiculaire au milieu I de MN. Le quadrilatère MPNQ ayant ainsi ses diagonales perpendiculaires entre elles et se coupant mutuellement en leurs milieux est un losange.

La bissectrice EM donne

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AE}{EB},$$

et la bissectrice FQ,

$$\frac{CQ}{QB} = \frac{CF}{FB}.$$

Mais, dans les triangles AEB, CFB, les angles en A, C sont égaux et les angles en B supplémentaires ; on sait que dans ce cas, les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels aux côtés opposés aux angles supplémentaires, de sorte que

$$\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FB}.$$

Donc

$$\frac{AM}{MB} = \frac{CQ}{QB},$$

ce qui entraîne le parallélisme des droites MQ, AC. On établirait de même que MP est parallèle à BD.

Les triangles semblables AMP, ABD donnent

$$\frac{MP}{BD} = \frac{AM}{AB}; \qquad \text{de même} \qquad \frac{MQ}{AC} = \frac{MB}{AB}.$$

En ajoutant et observant que $MP = MQ$ est égal au côté x du losange, on a

$$x\left(\frac{1}{BD} + \frac{1}{AC}\right) = \frac{AM + MB}{AB} = 1,$$

d'où

$$x = \frac{AC.BD}{AC + BD}.$$

(Gasluc de SÉNÉBRON, à Hesbru.)

[Ont résolu la même question : Mlle A. Saleilles ; MM. L. de Alba ; H. Belbenoit ; A. Bernardeau ; M. Beyney ; L. David ; E. Hugonnier ; F. Pégorier ; E. Serres ; V. Thébault.]

TRIGONOMÉTRIE

5026. — *Calculer le côté a d'un triangle, sachant que $2a = b + c$ et connaissant l'angle A et la hauteur correspondante h.*

On a d'abord

$$2a = b + c. \tag{1}$$

D'autre part, l'angle A et la hauteur h étant connus, on a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \tag{2}$$

$$ah = bc \sin A. \tag{3}$$

L'équation (2) peut s'écrire

$$a^2 = (b + c)^2 - 2bc(1 + \cos A)$$

ou, en tenant compte de (1) et (3),

$$a^2 = 4a^2 - \frac{2ah}{\sin A}(1 + \cos A),$$

d'où, après suppression du facteur commun positif a,

$$a = \frac{2h(1 + \cos A)}{3 \sin A} = \frac{2h}{3} \cot g \frac{A}{2}.$$

Pour que cette valeur positive de a soit acceptable, il faut qu'elle rende réelles les valeurs de b et c, qui, d'après (1) et (3), vérifient l'équation

$$X^2 - 2aX + \frac{ah}{\sin A} = 0.$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante, car l'équation (2) entraîne

$$| b - c | < a < b + c.$$

Cette équation a ses deux racines positives si elles sont réelles, c'est-à-dire si l'on a

$$a^2 - \frac{ah}{\sin A} \geqslant 0 \qquad \text{ou} \qquad a \geqslant \frac{h}{\sin A}.$$

En remplaçant a par sa valeur, il vient

$$\frac{h}{\sin A} \leqslant \frac{2h}{3} \cot g \frac{A}{2}$$

ou

$$\cos^2 \frac{A}{2} \geqslant \frac{3}{4} \qquad \text{ou} \qquad A \leqslant 60°.$$

(J. PERMANN, lycée de Limoges.)

Solution géométrique. — Menons la bissectrice de l'angle A. On a

$$\frac{b}{\mathrm{CD}} = \frac{c}{\mathrm{BD}} = \frac{b+c}{a} = 2.$$

Le triangle ABD ou ADC est alors défini par son angle en A, la hauteur correspondante h et le rapport 2 des côtés issus de B ou C.

De là, cette construction : Sur le côté AX d'un angle $\mathrm{XAY} = \frac{\mathrm{A}}{2}$ on prend un point quelconque $\mathrm{B_1}$ et de $\mathrm{B_1}$ comme centre avec $\frac{\mathrm{AB_1}}{2}$ pour rayon on décrit un cercle qui coupe AY en $\mathrm{C_1}$ et $\mathrm{C'_1}$: les tangentes parallèles à $\mathrm{B_1D_1}$ et $\mathrm{B_1D'_1}$ menées au cercle de centre A et de rayon h déterminent les triangles ABD et AB'D'. On doit observer ici que le triangle AB'D' ayant l'angle en D' supplémentaire de l'angle en D est égal au triangle ADC de sorte qu'il n'y a en réalité qu'un seul triangle ABC.

La seule condition de possibilité est que le cercle de centre $\mathrm{B_1}$ et de rayon $\frac{\mathrm{AB_1}}{2}$ coupe AY, ce qui exige que l'angle XAY ne surpasse pas 30°, et par suite l'angle A, 60°.

Lorsque $\mathrm{A} = 60°$, $\mathrm{B_1D_1}$ et $\mathrm{B_1D'_1}$ se confondent avec la perpendiculaire à AY, et le triangle ABC devient équilatéral.

Autre solution géométrique. — Soient D, E les points de contact du côté AB avec les cercles I et I' inscrit et exinscrit dans l'angle A. On a

$$\mathrm{AD} = \frac{1}{2}(b+c-a) = \frac{a}{2},$$

$$\mathrm{AE} = \frac{1}{2}(b+c+a) = \frac{3a}{2}.$$

De là cette construction : On prend a égal à une longueur arbitraire, et l'on construit les triangles rectangles ADI, AEI, déterminés par un côté et l'angle aigu adjacent $\mathrm{DAI} = \frac{\mathrm{A}}{2}$; on trace ensuite les cercles I, I' et on leur mène la tangente commune BC ; on obtient ainsi un triangle ABC semblable au triangle cherché. Le reste s'achève comme dans la première construction.

La condition de possibilité est

$$\mathrm{II'} \geqslant \mathrm{DI} + \mathrm{EI'}$$

ou

$$\frac{a}{\cos\frac{\mathrm{A}}{2}} \geqslant \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\mathrm{A}}{2} + \frac{3a}{2}\operatorname{tg}\frac{\mathrm{A}}{2}$$

ou

$$\sin\frac{\mathrm{A}}{2} \leqslant \frac{1}{2}$$

c'est-à-dire $\frac{\mathrm{A}}{2} \leqslant 30°$ ou $\mathrm{A} \leqslant 60°$.

(E. HUGONNIER, école professionnelle de Voiron.)

[Ont résolu la même question : Mlles T. Filoteia ; E. Grecescu ; MM. M. Antoine ; E. Barbé ; A. Bernardeau ; L. David ; Gasluc de Sénébron ; H. Thibon.]

PHYSIQUE

5002. — *Deux baromètres, l'un parfait, l'autre contenant de l'air dans sa chambre barométrique, sont observés simultanément. La température étant de 0°, on lit sur le premier baromètre 760mm, et sur le second 740mm.*

Quand le premier marque 740mm, le second marque 728mm.

Quelle est la longueur de la chambre barométrique ?

A quelle température, le premier baromètre marquant toujours 740mm, le second ne marquera-t-il plus que 726mm ?

On négligera la dilatation du mercure, celle de l'enveloppe et celle de l'échelle.

Coefficient de dilatation de l'air : $\frac{1}{273}$.

1° Désignons par x la longueur du tube barométrique contenant de l'air.

La température étant constante et égale à 0°, lorsque la pression est de 760mm le tube barométrique contient un volume $(x-740)s$ d'air sous la pression $760 - 740 = 20^{\mathrm{mm}}$, s désignant la section du tube. Lorsque la pression est de 740mm, le tube barométrique contient un volume $(x-728)s$ d'air sous la pression $740 - 728 = 12^{\mathrm{mm}}$.

En appliquant la loi de Mariotte, il vient

$$(x-740)s \times 20 = (x-728)s \times 12,$$

d'où

$$x = 758^{\mathrm{mm}}.$$

2° A 0°, l'air occupe un volume $\mathrm{V_0} = s(758-740) = 18s$ sous la pression $\mathrm{H_0} = 20^{\mathrm{mm}}$. Cherchons à quelle température x il occupe le volume $\mathrm{V}_x = (758-726)s = 32s$ sous la pression $\mathrm{H}_x = 740 - 726 = 14^{\mathrm{mm}}$.

En appliquant la loi de Gay-Lussac, on a

$$\mathrm{V_0H_0} = \frac{\mathrm{V}_x\mathrm{H}_x}{1+\alpha x},$$

ou

$$18s \times 20 = \frac{32s \times 14}{1 + \frac{x}{273}},$$

d'où

$$x = 66°,7.$$

(A. BERNARDEAU, à Surgères.)

[Ont résolu la même question : Mlle Saleilles ; MM. Bottin ; Bournisieu ; Cattin ; Ducongé ; Durand ; Godfroy ; Grenouillot ; Guerrier ; Henry ; Hostier ; Hugonnier ; Lacape ; Lapresle ; Laurence ; Marx ; Meynier ; Platrier ; Ybert.

ÉCOLE DE CHIMIE INDUSTRIELLE DE LYON

Concours de 1900.

Mathématiques.

I. — **5040.** Résoudre le système d'équations

$$x + y + z = 2p,$$
$$xy = 2a^2,$$
$$x^2 + y^2 = z^2.$$

II. — Inscrire dans une sphère de rayon R un cylindre dont la surface totale soit équivalente au double de la surface d'un cercle de rayon a. Discussion.

III. — Définir ce que l'on entend par racine carrée d'un nombre à $\frac{1}{10^n}$ près, et indiquer comment on l'obtient pratiquement.

Physique.

I. — Lois de la réfraction lumineuse. — Prismes.

II. — On a taré un ballon de 6 325^{cc} de capacité plein d'air à la pression de 748^{mm}. On fait le vide dans le ballon et on le remplit d'un nouveau gaz à la pression de 753^{mm}. Pour rétablir l'équilibre il faut ajouter du côté du ballon sur le plateau de la balance 1^{gr},328. Quel est le poids spécifique du gaz par rapport à l'air ?

Le poids normal du litre d'air est 1^{gr},293.

Chimie.

I. — Azote et acide nitrique.

II. — Classification des métaux.

QUESTIONS PROPOSÉES

(Baccalauréat)

5041. — Sur le côté AB d'un triangle équilatéral ABC, on prend un point P dont la distance au sommet A sera désignée par x ; on désignera par a la longueur du côté AB ; du point P on mène une perpendiculaire PQ sur le côté BC, du point Q on mène une perpendiculaire QR sur CA, et du point R on mène une perpendiculaire RP_1 sur AB. On demande :

1° De déterminer x de manière que P_1 coïncide avec P ;

2° De déterminer x de manière que la somme des carrés des trois perpendiculaires PQ, QR et RP_1 soit minimum et de trouver ce minimum ;

3° (*Facultatif*). On calculera d'abord la distance PP_1, puis du point P_1 on opérera comme on a fait en partant du point P, et on obtiendra un deuxième point, P_2 ; on calculera alors P_1P_2 et on cherchera le rapport $\frac{P_1P_2}{PP_1}$. Puis partant de P_2 on opérera comme on a fait en partant de P et P_1 ; on demande vers quelle position limite tend la suite des points P, P_1, P_2, ...

(*Lettres-math.*, *Marseille, juillet 1900.*)

5042. — Déterminer un quadrilatère ABCD inscriptible dans le cercle dont les quatre côtés et une diagonale forment une progression arithmétique. Cette diagonale BD est donnée égale à a ; elle est le terme du milieu de la progression et partage le quadrilatère en deux triangles ABD, CBD dont les autres côtés sont respectivement les deux plus petits et les deux plus grands termes.

(*Lettres-math.*, *Grenoble, nov. 1900.*)

5043. — Dans un demi-cercle dont le diamètre AB est représenté par 2R, on mène une corde CD parallèle à AB, et l'on mène deux droites CE, DF formant deux triangles isocèles PCD, PEF rectangles en P. Chacun des angles C, D, E, F est donc égal à 1/2 angle droit. On suppose la corde CD assez petite pour que le point P soit à l'intérieur du demi-cercle ACDB. Déterminer la longueur $2x$ de la corde CD de manière que la somme des aires des triangles PCD, PEF soit égale à l'aire d'un carré de côté m.

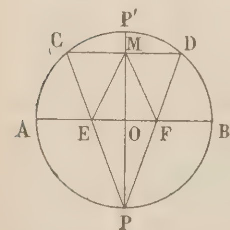
C D P A F E B

Examiner entre quelles limites m doit être compris.

On démontrera d'abord que la distance du point P à la droite CD est égale à x.

(*Lettres-math.*, *Toulouse, juillet 1900.*)

5044. — On donne une sphère de rayon R et un diamètre PP′ de cette sphère. On demande de couper la sphère par un plan CMD perpendiculaire à PP′ de telle façon que le volume du tronc de cône CDEF déterminé dans le cône PCD par le plan du grand cercle AOB perpendiculaire à PP′ soit égal à m fois le volume du cône MEF. Discuter le problème suivant les différentes valeurs de m.



(*Lettres-math.*, *Tunis, juillet 1900.*)

5045. — Par un sommet A d'un triangle équilatéral ABC on mène une droite AD coupant BC en D et on considère les deux cercles passant par les trois points A, B, D d'une part, par les trois points A, C, D d'autre part.

1° Démontrer que ces deux cercles sont égaux ;

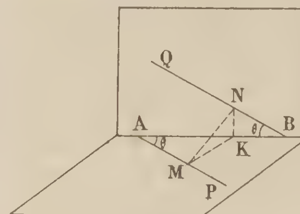
2° Déterminer le point D de façon que la longueur de la tangente commune aux deux cercles soit dans un rapport donné $\frac{1}{m}$ avec BD.

(*Lettres-math.*, *Grenoble, juillet 1900.*)

5046. — Étant donnés une parabole et un point A sur son axe, déterminer le rayon d'un cercle dont le centre doit être sur ce même axe et dont la circonférence doit passer par le point A et être tangente à la parabole. Dire, suivant la position du point A, quel est le nombre de cercles satisfaisant à la question ; examiner le cas où A est le foyer.

(*Lettres-sciences*, *Caen, juillet 1900.*)

5047. — Sur l'arête d'un dièdre droit on marque deux points fixes A, B dont la distance mutuelle sera représentée par d, et desquels points, dans les deux faces du dièdre respectivement on tire les demi-droites indéfinies AP, BQ, faisant avec l'arête du dièdre les angles rectilignes BAP, ABQ d'une même valeur donnée θ ; sur ces demi-droites AP, BQ on considère des points mobiles M et N pris tous deux à une même distance indéterminée, x, des points fixes A et B, et l'on demande :



1° D'exprimer en fonction de d, θ, x la distance variable y des points M, N ;

2° De calculer la valeur de x pour laquelle cette distance y est minimum ;

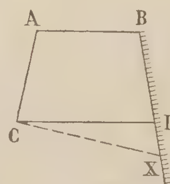
3° De prouver que dans sa position donnant lieu au minimum ci-dessus, la droite MN est perpendiculaire à chacune des droites AP, BQ.

(*Lettres-math.*, *Dijon, juillet 1900.*)

5048. — On donne un segment rectiligne MN, situé dans le plan horizontal de projection, un axe vertical ayant o pour pied sur ce plan, un point quelconque $(a,\ a')$, et l'on demande de faire tourner le segment MN autour de l'axe o jusqu'à ce que ses extrémités M et N deviennent équidistantes du point $(a,\ a')$.

(*Lettres-math.*, *Dijon, juillet 1900.*)

5049. — Un quadrilatère articulé ABDC est composé de deux règles métalliques AB, CD, de même substance, de même longueur L_0 à 0° et de même coefficient de dilatation linéaire k. Ces règles sont reliées par deux tiges AC, BD non dilatables et de même longueur constante l. Une règle non dilatable divisée en centimètres et millimètres est portée par BD et la suit dans tous ses mouvements. D'autre part, une lunette dont l'axe optique reste toujours perpendiculaire à AC est fixée au point C de la tige AC dont elle suit tous les mouvements. La règle AB est constamment maintenue dans la glace fondante, tandis que CD peut être portée sur toute sa longueur à une température quelconque $t°$ au moyen d'un bain convenable. Pour $t = 0°$, le quadrilatère ABDC est un rectangle et la lunette vise le point D de la règle BD ; pour t différent de 0, ABDC est transformé en un trapèze isocèle et la lunette vise un point X de la même règle. Calculer la longueur $DX = x$, simplifier la formule qui donne x dans le cas où t est petit, et la discuter si l'on peut. Avec quelle approximation peut-on connaître t par la mesure de x, en supposant que la lunette apprécie le $\frac{1}{100}$ de millimètre ?



Application : $L_0 = 25$, $l = 4^m$, $k = 0{,}00002$, $t = 100°$.

(*Lettres-math.*, *Toulouse, juillet 1900.*)

5050. — Un conducteur est disposé dans une enceinte entourée d'eau. On lance dans ce conducteur pendant vingt minutes un courant électrique d'une intensité d'un demi-ampère ; la différence de potentiel aux deux extrémités de ce conducteur est de 110 volts, le poids de l'eau de l'enceinte est de 1023^{gr}. On demande l'élévation de température de cette eau en admettant qu'il n'y ait aucune perte de chaleur par rayonnement.

(*Lettres-math.*, *Grenoble, 20 juillet et 5 nov. 1900.*)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet, FACDOUEL, Dir.

25e Année. — N° 18. JOURNAL Paris, le 15 Juin 1901.

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Abonnements.. Librairie **Nony** et Cie, Bould St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

NOTE RELATIVE AUX ASYMPTOTES DE L'HYPERBOLE

par M. **Vogt**, professeur à l'Université de Nancy.

Le sujet de l'une des leçons de Mathématiques élémentaires au concours d'Agrégation comporte la recherche des points communs à une droite et à une hyperbole, ainsi que la détermination des tangentes et des asymptotes de cette courbe.

Le problème de la recherche des points de rencontre d'une droite et d'une conique se ramène, comme on le sait, à la détermination des cercles ayant leur centre sur la droite donnée, assujettis de plus à passer par un des foyers de la conique et à être tangents au cercle directeur relatif à l'autre foyer. Nous supposerons connues la résolution et la discussion de ce problème, ainsi que la détermination des tangentes à la conique, qui en est une conséquence; nous nous proposons seulement de montrer dans ce qui suit comment la détermination des asymptotes de l'hyperbole et la démonstration de quelques-unes des propriétés de ces asymptotes se rattachent au problème dont nous venons de parler.

I. Soient F et F′ (*fig.* 1) les foyers d'une hyperbole donnée ; traçons le cercle directeur relatif au foyer F′, ainsi que les tangentes à ce cercle issues du foyer F ; nous appellerons φ_1 et φ_2 les points de contact de ces tangentes, et nous désignerons par φ le symétrique du foyer F par rapport à une droite donnée, D. Nous supposons connus les résultats suivants :

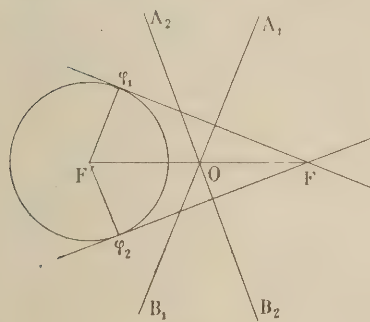


Fig. 1.

1° Si le point φ est intérieur au cercle directeur, la droite D ne rencontre pas l'hyperbole ;

2° Si le point φ est extérieur au cercle directeur, sans se trouver sur les droites indéfinies $F\varphi_1$, $F\varphi_2$, la droite D coupe l'hyperbole en deux points à distance finie ;

3° Si le point φ se trouve sur les droites indéfinies $F\varphi_1$ ou $F\varphi_2$, mais non en φ_1 ou φ_2, la droite D coupe l'hyperbole en un point à distance finie et un point rejeté à l'infini.

4° Si le point φ est sur le cercle directeur, mais non en φ_1 ou φ_2, la droite D rencontre l'hyperbole en un seul point; on démontre dans ce cas que la droite D est tangente à la courbe au point où elle la rencontre, et que ce point est à l'intersection de la droite et de $F'\varphi$;

5° Si le point φ est en l'un des points φ_1 ou φ_2, la droite D rencontre l'hyperbole en un seul point rejeté à l'infini.

Dans ce dernier cas, la droite D est perpendiculaire au milieu de $F\varphi_1$ ou de $F\varphi_2$; elle est donc confondue avec l'une des droites A_1OB_1, A_2OB_2 menées par le milieu O de FF′, c'est-à-dire par le centre de l'hyperbole, perpendiculairement à $F\varphi_1$ et $F\varphi_2$, ou parallèlement à $F'\varphi_1$ et $F'\varphi_2$. Ces deux droites sont appelées les asymptotes de l'hyperbole; nous justifierons plus loin cette dénomination.

II. Les propriétés des asymptotes résultent des théorèmes suivants :

Théorème. — *Une tangente à l'hyperbole, dont le point de contact s'éloigne indéfiniment, a pour limite une asymptote de la courbe.*

On obtient, comme on le sait, une tangente à l'hyperbole en menant une perpendiculaire au milieu de la droite joignant le foyer F à un point φ du cercle directeur relatif au foyer F′ (*fig.* 2) ; le point de contact, M, est à l'intersection de cette perpendiculaire et du rayon $F'\varphi$.

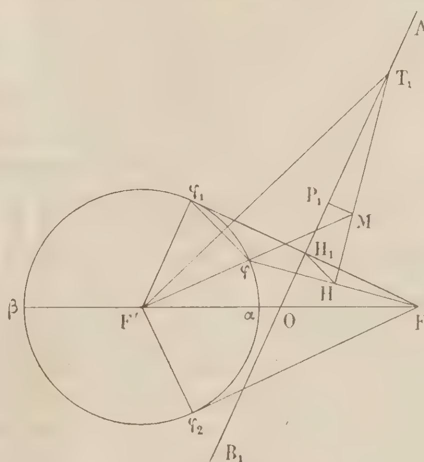


Fig. 2.

Pour que ce point M s'éloigne indéfiniment, il faut et il suffit que $F'\varphi$ devienne parallèle à la tangente, ou bien perpendiculaire à $F\varphi$; il faut et il suffit pour cela que le point φ vienne se confondre avec l'un des points φ_1 ou φ_2.

S'il vient se confondre par exemple avec φ_1, la perpendiculaire au milieu de $F\varphi$ vient se confondre à la limite avec la perpendiculaire au milieu de $F\varphi_1$, c'est-à-dire avec l'asymptote A_1OB_1; la proposition est donc démontrée.

Nous pouvons ajouter que si le point φ se rapproche de φ_1 en restant sur l'arc $\varphi_2\alpha\varphi_1$, le point M s'éloigne indéfiniment sur la branche voisine de F ; si φ se rapproche de φ_1 en restant sur l'arc $\varphi_2\beta\varphi_1$, le point M s'éloigne indéfiniment sur la branche voisine de F′. Nous arriverions à des conclusions analogues si φ se rapprochait de φ_2.

III. Théorème. — *Si un point* M *de l'hyperbole s'éloigne indéfiniment, et si l'on considère l'asymptote qui est la limite de la tangente en ce point, la distance du point* M *à cette asymptote a pour limite zéro.*

Soit (*fig.* 2) M un point de l'hyperbole, et soit MH la tangente en ce point, tangente qui est perpendiculaire en H au milieu de $F\varphi$; supposons que le point M s'éloigne indéfiniment de telle façon que φ tende vers φ_1 ; nous venons de voir que MH tend vers l'asymptote A_1OB_1 ; désignons par H_1 le point où cette

asymptote coupe $F\varphi_1$, et par T_1 le point de rencontre des deux droites MH et A_1OB_1.

Le point T_1 est également distant des trois points F, φ, φ_1 ; il est donc sur la perpendiculaire au milieu de $\varphi\varphi_1$, c'est-à-dire sur le rayon bissecteur de l'angle $\varphi_1F'\varphi$. Quelle que soit la position du point φ sur l'arc $\alpha\varphi_1$, ou sur l'arc $\beta\varphi_1$, on voit que le point M est situé entre H et T_1, par suite sa distance MP_1 à A_1OB_1, est au plus égale à celle du point H à la même droite, et celle-ci est au plus égale à HH_1 ; mais HH_1 est égal à la moitié de la corde $\varphi\varphi_1$, puisque H et H_1 sont les milieux de $F\varphi$ et $F\varphi_1$; par suite HH_1 tend vers zéro en même temps que $\varphi\varphi_1$, et il en est de même de MP_1, ce qu'il fallait démontrer.

Nous allons donner de ce théorème une autre démonstration dans laquelle la distance du point M à l'asymptote est mieux mise en évidence.

Traçons par le point M (*fig.* 3) les perpendiculaires aux tangentes $F\varphi_1$, $F\varphi_2$; soient K_1 et K_2 les pieds de ces perpendiculaires, et soient H_1 et H_2 les points où les asymptotes A_1OB_1, A_2OB_2 sont perpendiculaires à ces mêmes tangentes $F\varphi_1$ et $F\varphi_2$; les distances du point M aux asymptotes, distances qui ne sont pas indiquées dans la figure, sont respectivement égales à H_1K_1 et H_2K_2 ; nous allons démontrer que si φ tend vers φ_1 par exemple, H_1K_1 tend vers zéro.

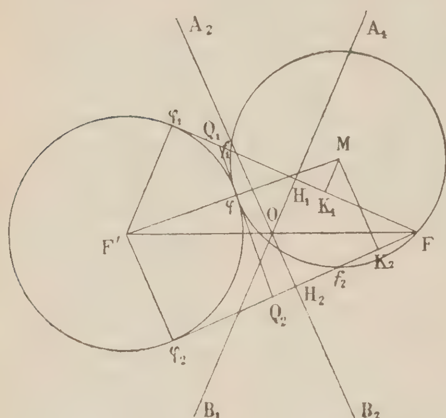


Fig. 3.

Désignons par f_1 et f_2 les symétriques du foyer F par rapport à MK_1 et MK_2 ; ces points f_1 et f_2 sont situés sur $F\varphi_1$ et $F\varphi_2$ et aussi sur le cercle décrit de M comme centre avec MF comme rayon ; ce dernier cercle n'est autre que le cercle passant par F et tangent en φ au cercle directeur. Nous voyons de plus que H_1K_1 est égal à la moitié de φ_1f_1 et est dirigé dans le même sens ; de même H_2K_2 est égal à la moitié de φ_2f_2 et est dirigé dans le même sens.

Traçons alors la tangente commune en φ aux deux cercles de centres F' et M, et désignons par Q_1 et Q_2 les points où cette tangente rencontre $F\varphi_1$ et $F\varphi_2$; (ces points sont les centres radicaux du cercle F' et des cercles passant par F et f_1 d'une part, par F et f_2 d'autre part) ; nous avons

$$\overline{Q_1\varphi_1}^2 = Q_1f_1 \times Q_1F, \qquad \overline{Q_2\varphi_2}^2 = Q_2f_2 \times Q_2F. \qquad (1)$$

Lorsque φ se rapproche de φ_1, $Q_1\varphi_1$ tend vers zéro, et, d'après la première des égalités précédentes, il en est de même de Q_1f_1 ; par suite φ_1f_1 tend vers zéro, et il en est de même de H_1K_1, ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons que l'on obtiendrait la tangente en M en traçant les droites $F'Q_1$, $F'Q_2$, les prolongeant jusqu'à leurs points de rencontre respectivement avec A_1OB_1 et A_2OB_2, et joignant les points ainsi obtenus.

IV. Nous venons de démontrer que les droites A_1OB_1 et A_2OB_2 jouissent de cette propriété que la distance d'un point M de l'hyperbole à l'une de ces droites, convenablement choisie, tend vers zéro lorsque ce point M s'éloigne indéfiniment ; c'est cette propriété qui a fait donner à ces droites le nom d'asymptotes. Nous allons montrer que ce sont les seules droites jouissant de cette propriété.

Supposons que le point M (*fig.* 4) s'éloigne indéfiniment et que sa distance MP_1 à A_1OB_1 tende vers zéro ; s'il existait une autre droite D telle que la distance MP de M à cette droite tende aussi vers zéro, la longueur PP_1 qui est au plus égale à $MP_1 + MP$ tendrait aussi vers zéro ; mais cela ne peut avoir lieu si les droites D et A_1OB_1 sont distinctes ; par suite la droite D est confondue avec l'asymptote A_1OB_1.

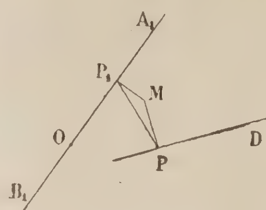


Fig. 4.

Il résulte de là que l'hyperbole n'a que deux asymptotes, qui sont les droites A_1OB_1 et A_2OB_2.

V. Nous appliquerons les considérations précédentes à la démonstration de deux propriétés fondamentales des asymptotes de l'hyperbole.

THÉORÈME. — *Le point de contact d'une tangente à l'hyperbole est le milieu du segment déterminé sur cette tangente par les asymptotes.*

Soit (*fig.* 5) MH la tangente en un point M de l'hyperbole ; nous savons que le symétrique φ du foyer F par rapport à MH est sur le cercle directeur relatif au foyer F' ; de plus, d'après ce que nous avons vu précédemment, les points de rencontre T_1 et T_2 de la tangente MH avec les asymptotes sont sur les droites $F'Q_1$ et $F'Q_2$, Q_1 et Q_2 étant les points de rencontre de $F\varphi_1$ et $F\varphi_2$ avec la tangente en φ au cercle directeur.

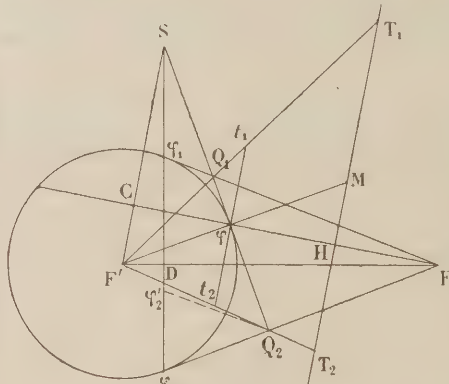


Fig. 5.

Menons par φ une parallèle à MH, jusqu'aux points t_1 et t_2 où elle rencontre $F'T_1$ et $F'T_2$; pour démontrer que le point M est le milieu du segment T_1T_2, il suffit de démontrer que le point φ est le milieu de t_1t_2.

Traçons par F' la parallèle à t_1t_2, c'est-à-dire la perpendiculaire à $F\varphi$ jusqu'à son point de rencontre S avec la corde $\varphi_1\varphi_2$; nous allons d'abord montrer que le point S appartient à la tangente Q_1Q_2 ; si nous désignons en effet par C et D les points de rencontre de $F\varphi$ et $\varphi_1\varphi_2$ respectivement avec F'S et F'F, les triangles semblables F'DS, F'CF nous donnent

$$F'C.F'S = F'D.F'F ;$$

comme le second membre de cette relation est égal au carré du rayon du cercle directeur, on voit que le triangle $F'\varphi S$ est rectangle en φ et que le point S appartient bien à la tangente en φ à ce cercle directeur.

Cela posé, les triangles semblables $Q_1\varphi t_1$, Q_1SF' d'une part, $Q_2\varphi t_2$, Q_2SF' d'autre part nous donnent

$$\frac{t_1\varphi}{F'S} = \frac{Q_1\varphi}{Q_1S}, \qquad \frac{t_2\varphi}{F'S} = \frac{Q_2\varphi}{Q_2S} ;$$

comme $Q_1\varphi$ et $Q_2\varphi$ sont respectivement égaux à $Q_1\varphi_1$ et $Q_2\varphi_2$, il suffit, pour montrer l'égalité de φt_1 et φt_2, de démontrer que

l'on a la proportion

$$\frac{Q_1\varphi_1}{Q_1S} = \frac{Q_2\varphi_2}{Q_2S}; \qquad (2)$$

or si nous traçons la droite $Q_2\varphi'_2$ parallèle à $Q_1\varphi_1$, le triangle $Q_2\varphi_2\varphi'_2$ est isoscèle, et $Q_2\varphi'_2$ est égal à $Q_2\varphi_2$; comme les triangles $SQ_1\varphi_1$, $SQ_2\varphi'_2$ sont semblables, nous avons

$$\frac{Q_1\varphi_1}{Q_1S} = \frac{Q_2\varphi'_2}{Q_2S};$$

par conséquent la relation (2) est satisfaite et le théorème est démontré.

Remarque. — La considération des pôles et polaires nous conduit à une démonstration beaucoup plus rapide de la proposition précédente ; il nous suffit de remarquer que le point S est le pôle de $F\varphi$, et que les quatre points S, φ, Q_1, Q_2 forment une division harmonique ; le faisceau F' (S, φ, Q_1, Q_2) étant harmonique, la parallèle T_1T_2 au premier rayon de ce faisceau est partagée par les trois autres en parties égales, ce qui démontre la proposition.

VI. Théorème. — *Le produit des distances d'un point de l'hyperbole aux deux asymptotes est constant.*

Nous avons vu précédemment que les distances d'un point M aux asymptotes sont respectivement les moitiés des longueurs des deux segments φ_1f_1, et φ_2f_2 (*fig* 3) ; nous sommes donc ramenés à démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Par un point* F *extérieur à un cercle de centre* F' *on fait passer un cercle variable tangent au premier ; si f_1 et f_2 sont les points de rencontre de ce cercle variable avec les tangentes issues du point* F *au cercle fixe, et si φ_1 et φ_2 sont les points de contact de ces dernières tangentes, le produit $\varphi_1f_1.\varphi_2f_2$ est constant.*

Nous suppposerons, pour fixer les idées, que le point φ se trouve sur l'arc $\varphi_1\varphi_2$ tourné vers le point F, comme dans la figure 3, c'est-à-dire que les deux cercles sont tangents en φ extérieurement ; le raisonnement serait analogue s'ils étaient tangents intérieurement ; si Q_1 et Q_2 sont les points de rencontre de $F\varphi_1$ et $F\varphi_2$ avec la tangente commune, nous avons, d'après les égalités (1),

$$\varphi_1f_1 = \varphi_1Q_1 + Q_1f_1 = \varphi_1Q_1 + \frac{\overline{\varphi_1Q_1}^2}{Q_1F} = \frac{\varphi_1F.\varphi_1Q_1}{Q_1F}$$

et de même

$$\varphi_2f_2 = \frac{\varphi_2F.\varphi_2Q_2}{Q_2F};$$

par suite

$$\varphi_1f_1.\varphi_2f_2 = \overline{\varphi_1F}^2\,\frac{\varphi_1Q_1.\varphi_2Q_2}{Q_1F.Q_2F}.$$

Or le cercle de centre F' est exinscrit dans l'angle F du triangle FQ_1Q_2 ; en désignant par A l'angle F de ce triangle, par *a*, *b* et *c* les longueurs des côtés Q_1Q_2, Q_1F, Q_2F, et par *p* leur demi-somme, nous avons

$$\varphi_1Q_1 = p - b, \qquad \varphi_2Q_2 = p - c,$$

par conséquent

$$\frac{\varphi_1Q_1.\varphi_2Q_2}{Q_1F.Q_2F} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc} = \sin^2\frac{A}{2};$$

en remarquant que $F'\varphi_1$ est égal à $F'F\sin\frac{A}{2}$, nous avons finalement

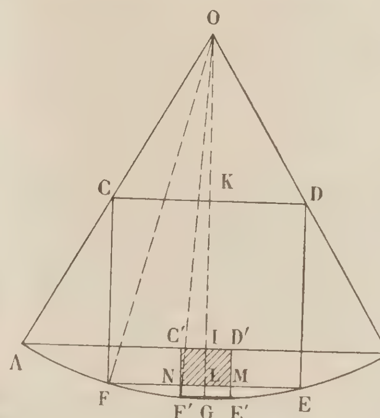
$$\varphi_1f_1.\varphi_2f_2 = \frac{\overline{\varphi_1F}^2.\overline{F'\varphi_1}^2}{\overline{FF'}^2}. \qquad (3)$$

La proposition se trouve ainsi démontrée ; pour ne pas allonger le raisonnement, nous avons introduit des lignes trigonométriques, mais il serait facile de s'en affranchir, et de faire une démonstration purement géométrique.

Si nous représentons par $2a$ le rayon du cercle directeur, par $2c$ la distance focale FF' et par $2b$ la quantité $\sqrt{4c^2 - 4a^2}$, nous voyons que le produit des distances d'un point de l'hyperbole aux deux asymptotes a pour valeur le quart du produit (3) que nous venons d'évaluer, et qu'il est égal à $\frac{a^2b^2}{c^2}$.

ALGÈBRE

5016. — *Calculer en fonction du rayon, l'aire de la partie commune C'D'MN aux carrés inscrits, l'un dans un secteur de 60°, l'autre dans le segment correspondant.*



La partie commune C'D'MN étant un rectangle, sa surface est

$$S = C'D' \times C'N.$$

Or en menant la droite OG perpendiculaire en I à AB et coupant CD, FE, F'E' en K, L, G, on a

$$C'N = IL = KL - KI$$
$$= CD - (OI - OK);$$

comme l'angle COD = 60° le triangle COD est équilatéral et OK = CD, donc

$$C'N = CD - (R - CD)\frac{\sqrt{3}}{2},$$

et par suite

$$S = C'D' \times \left[\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)CD - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right].$$

Tout revient à évaluer les côtés $CD = x$ et $C'D' = y$ des deux carrés considérés.

Le triangle rectangle OFL, d'hypoténuse OF = R, a pour côtés de l'angle droit $FL = \frac{x}{2}$ et $OL = OK + x = \frac{x\sqrt{3}}{2} + x$; on peut alors écrire

$$R^2 = \frac{x^2}{4} + x^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)^2$$

ou

$$x^2 = \frac{R^2}{2+\sqrt{3}} = R^2(2 - \sqrt{3}),$$

d'où

$$x = R\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

De même le triangle rectangle OF'G permet d'écrire

$$R^2 = \frac{y^2}{4} + \left(\frac{R\sqrt{3}}{2} + y\right)^2$$

ou

$$5y^2 + 4Ry\sqrt{3} - R^2 = 0,$$

d'où, en ne prenant que la racine positive

$$y = \frac{R}{5}(\sqrt{17} - 2\sqrt{3}).$$

L'expression de S devient alors, après réduction,

$$S = \frac{R^2}{10}(\sqrt{17} - 2\sqrt{3})(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{3})$$

(T. MILLET, à Orléans.)

Remarque. — On peut observer que $\sqrt{2 \pm \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{2}$, ce qui permet de n'avoir que des radicaux simples dans les expressions précédentes. On peut remarquer aussi que $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ n'est autre chose que l'expression du côté du dodécagone régulier convexe.

[Ont résolu la même question : MM. D. Antonescu ; E. Barbé ; G. Bourvéau ; Daure ; E. Durand ; Gasluc de Sénébron ; E. Hugonnier ; P. Legros ; M. Marx ; F. Pégorier.]

5019. — *Trouver deux nombres entiers sachant que leurs carrés ont pour différence* 105.

Soient x et y les deux nombres entiers. En supposant $x > y$, on a

$$x^2 - y^2 = 105,$$

ce qui peut s'écrire

$$(x - y)(x + y) = 105.$$

On est ainsi ramené à décomposer le nombre entier 105 en un produit de deux facteurs entiers, et à égaler le plus petit des deux facteurs à $x - y$. Ce plus petit facteur étant inférieur à $\sqrt{105}$ ou 10 ne peut être que l'un des quatre diviseurs 1, 3, 5, 7 de 105.

On déduit de là

$x - y = 1$,	$x + y = 105$,	d'où	$x = 53$, $y = 52$;
$x - y = 3$,	$x + y = 35$,	d'où	$x = 19$, $y = 16$;
$x - y = 5$,	$x + y = 21$,	d'où	$x = 13$, $y = 8$;
$x - y = 7$,	$x + y = 15$,	d'où	$x = 11$, $y = 4$.

On traite de même le cas plus général où $x^2 - y^2 = N$. Lorsque N est impair, on peut prendre pour $x - y$ tous les diviseurs de N inférieurs à $\sqrt{N}$. Lorsque N est pair, les diviseurs $(x - y)$ et $(x + y)$ doivent être tous deux égaux à des diviseurs pairs, autrement les solutions seraient fractionnaires ; cette condition exige que N soit au moins divisible par 4.

(C. GRACULE.)

[Ont résolu la même question : MM. M. Antoine ; P. Bancillon ; E. Barbé ; H. Belbenoit ; M. Beyney ; C. Bourion ; A. Buchholz ; R. Cattin ; F. Coutard ; R. Ducongé ; E. Durand ; A. Fraysse ; Gasluc de Sénébron ; F. Gérard ; A. Gheysens ; A. Godfroy ; P. Guerrier ; A. Haar ; R. Henry ; E. Hugonnier ; A. Humblot ; D. Kœnig ; H. Lacape ; Lamarre ; M. Laurence ; L. Lefèvre ; A. Legros ; G. Lepoivre ; C. Marie ; H. Martin ; M. Marx ; T. Millet ; R. Mouzon ; A. Pannelier ; J. Permann ; L. Pignier ; Poirrier ; Poujol ; A. de Ruère ; J. Schwarz ; C. Sudreau.]

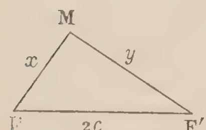
5021 et **5031**. — *Sur une ellipse de grand axe* $2a$, *de distance focale* $FF' = 2c$, *déterminer un point* M *tel que le rayon du cercle circonscrit au triangle* MFF' *soit égal à* R.

Posons $MF = x$, $MF' = y$. On a

$$x + y = 2a, \tag{1}$$

et, en appliquant la relation connue $abc = 4RS$,

$$2cxy = 4R\sqrt{\frac{(x+y+2c)(x+y-2c)(2c+x-y)(2c+y-x)}{16}}$$



ou, après élévation au carré,

$$c^2x^2y^2 = R^2(a^2 - c^2)[4c^2 - (x - y)^2]. \tag{2}$$

Si l'on pose $x = a - z$, l'équation (1) donne $y = a + z$, et l'équation (2) devient

$$c^2(a^2 - z^2)^2 = R^2(a^2 - c^2)(4c^2 - 4z^2)$$

ou, en ordonnant,

$$f(z^2) = c^2z^4 - 2[a^2c^2 - 2R^2(a^2 - c^2)]z^2 + c^2[a^4 - 4R^2(a^2 - c^2)] = 0.$$

Discussion. — Pour qu'une valeur de z^2 convienne, il faut et il suffit qu'elle soit réelle et comprise entre 0 et c^2, car les rayons vecteurs des points d'une ellipse sont compris entre $a - c$ et $a + c$.

Cas d'une solution. — Une des deux valeurs de z^2 sera réelle et comprise entre 0 et c^2 si l'on a

$$f(0).f(c^2) < 0.$$

Or

$$f(0) = c^2[a^4 - 4R^2(a^2 - c^2)],$$
$$f(c^2) = c^2(a^2 - c^2)^2 > 0.$$

Il y a donc une solution lorsque

$$a^4 - 4R^2(a^2 - c^2) < 0$$

ou

$$R^2 > \frac{a^4}{4(a^2 - c^2)};$$

cette solution correspond à la plus petite valeur de z^2.

Cas de deux solutions. — Ce cas exige qu'on ait à la fois

$$\rho \geqslant 0, \qquad f(0) > 0,$$

$$0 < \frac{1}{2} \text{ somme des racines} < c^2, \qquad f(c^2) > 0.$$

La condition $\rho \geqslant 0$ s'exprime par

$$[a^2c^2 - 2R^2(a^2 - c^2)]^2 - c^4[a^4 - 4R^2(a^2 - c^2)] \geqslant 0$$

ou

$$4R^2(a^2 - c^2)^2(R^2 - c^2) \geqslant 0$$

ou

$$R > c.$$

La condition $f(c^2) > 0$ est toujours vérifiée ; la condition $\frac{S}{2} < c^2$ revient à $R^2 > \frac{c^2}{2}$, inégalité vérifiée quand $R > c$.

Les conditions $f(0) > 0$ et $\frac{S}{2} > 0$ reviennent respectivement à

$$R^2 < \frac{a^4}{4(a^2 - c^2)}, \tag{1}$$

$$R^2 < \frac{a^2c^2}{2(a^2 - c^2)}; \tag{2}$$

on a toujours

$$c^2 < \frac{a^4}{4(a^2 - c^2)},$$

mais l'inégalité (2) n'est compatible avec $R > c$ que si l'on a

$$c^2 < \frac{a^2c^2}{2(a^2 - c^2)}$$

ou

$$a < c\sqrt{2},$$

et dans ce cas, l'inégalité (2) est comprise dans l'inégalité (1).

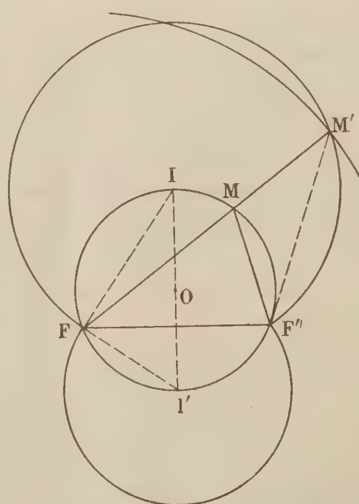
On conclut de là que le problème a deux solutions lorsque

$$c < a \leqslant c\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad c \leqslant R \leqslant \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - c^2}}$$

Solution géométrique. — En faisant passer par les deux points F, F' un cercle O de rayon R, tout revient à déterminer sur ce cercle un point M tel que

$$MF + MF' = 2a.$$

Pour cela, prolongeons FM d'une longueur $MM' = MF'$. Le triangle MF'M' étant isocèle, l'angle en M' est la moitié de l'angle en M, et M' appartient à un cercle de base FF' ayant son centre au milieu I de l'arc FMF' ; lorsque M est pris au-dessous de FF', M' se trouve sur un second segment de même base, ayant son centre au milieu I' de l'arc inférieur FF'.



Comme, par construction,

$$FM' = FM + MF' = 2a,$$

on voit que le point M' est l'intersection de l'un des deux segments précédents avec un cercle de centre F et de rayon $2a$.

Pour que le cercle F coupe un seul des deux segments, on doit avoir

$$2FI' \leqslant 2a \leqslant 2FI$$

ou $$\text{FI}' \leqslant a \leqslant \text{FI}.$$

Or les relations
$$\overline{\text{FI}}^2 + \overline{\text{FI}'}^2 = 4\text{R}^2, \qquad \text{FI}.\text{FI}' = 2\text{R}c$$
déduites du triangle FII′, montrent que $\overline{\text{FI}}^2$ et $\overline{\text{FI}'}^2$ sont racines de l'équation
$$\text{X}^2 - 4\text{R}^2.\text{X} + 4\text{R}^2c^2 = 0. \qquad (3)$$

Pour que a^2 sépare les deux racines de cette équation, il faut et il suffit qu'on ait
$$a^4 - 4\text{R}^2a^2 + 4\text{R}^2c^2 < 0$$
ou
$$\text{R} > \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - c^2}}.$$

Pour que le cercle F coupe les deux segments à la fois, on doit avoir
$$a < \text{FI} \quad \text{et} \quad \text{FI}',$$
ce qui revient à exprimer que a^2 est inférieur à la plus petite des racines de l'équation (3). On obtient ainsi :
$$\rho \geqslant 0, \qquad \text{d'où} \qquad \text{R} \geqslant c;$$
$$f(a^2) > 0, \qquad \text{d'où} \qquad \text{R} < \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - c^2}};$$
$$a^2 < \frac{\text{S}}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad \text{R} > \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

La dernière inégalité n'est compatible avec la seconde que si $a < c\sqrt{2}$, et dans ce cas, elle est comprise dans la première

(E. HUGONNIER, école professionnelle de Voiron.)

Remarque. — Pour que x et y représentent les rayons vecteurs des points d'une ellipse, il ne suffit pas que x et y soient positifs, il faut qu'ils soient compris entre $a - c$ et $a + c$, ou autrement dit que la demi-différence z soit inférieure à c en valeur absolue.

Or l'équation en z pouvant s'écrire
$$c^2(a^2 - z^2)^2 - 4\text{R}^2(a^2 - c^2)(c^2 - z^2) = 0,$$
on voit que toute racine réelle de cette équation rend $c^2 - z^2$ positif. Donc pour trouver le nombre des solutions du problème, il suffit de voir combien l'équation donne de valeurs positives pour z^2.

[Ont résolu la même question : Mlle A. Saleilles ; MM. E. Barbé ; A. Bernardeau ; A. Bourlat ; F. Clabault ; L. David ; G. Desnoës ; H. Fancillon ; E. Foucart ; A. Haour ; R. Henry ; M. Marx ; T. Millet ; Poirrier ; P. Saintin.]

5025. — *On considère la fonction*
$$y = \frac{4\cos^2 x - 7\cos x - 2}{1 + \cos x};$$
étudier ses variations lorsque x varie de 0 jusqu'à π, et construire la courbe représentative en coordonnées rectangulaires.

(*Bacc. lettres-sciences, Caen, mars 1901.*)

Si l'on pose $\cos x = z$, tout revient à étudier les variations de la fonction
$$y = \frac{4z^2 - 7z - 2}{1 + z}$$
lorsque z varie entre -1 et $+1$.

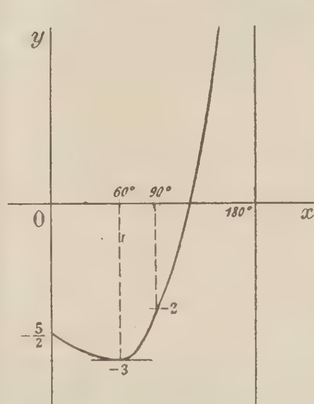
Calculons la dérivée de la fonction. On a
$$y' = \frac{(8z - 7)(1 + z) - (4z^2 - 7z - 2)}{(1 + z)^2}$$
ou
$$y' = \frac{4z^2 + 8z - 5}{(1 + z)^2}.$$

y' s'annule en même temps que son numérateur, c'est-à-dire lorsque
$$4z^2 + 8z - 5 = 0,$$
d'où l'on tire $$z' = -\frac{5}{2} \qquad \text{et} \qquad z'' = \frac{1}{2}.$$

La valeur z' est à écarter ici comme inférieure à -1. Pour $z'' = \frac{1}{2}$, y' s'annule en passant du négatif au positif ; cette valeur de z correspond donc au minimum de y, dont la valeur est -3.

En observant que y ne devient infini que pour $z = -1$, on voit que lorsque z varie de -1 à $\frac{1}{2}$ et de $\frac{1}{2}$ à $+1$, y décroît de l'infini positif à -3 et croît ensuite jusqu'à $-\frac{5}{2}$; dans le premier intervalle y s'annule pour $z = -\frac{1}{4}$, et pour $z = 0$, $y = -2$.

Comme l'arc x varie en sens inverse de $\cos x = z$, on en conclut que x variant de 0 à π, y décroît depuis $-\frac{5}{2}$ jusqu'à son minimum -3 correspondant à $z = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{3}$ et croît ensuite indéfiniment en passant par zéro pour $z = -\frac{1}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$ environ. La courbe représentative des variations de y affecte ainsi la forme ci-dessus ; on la construit aisément en ayant égard aux résultats précédents.



(G. ALLAIS, lycée de Caen.)

[Ont résolu la même question : MM. M. Antoine ; E. Barbé ; H. Belbenoit ; A. Bernardeau ; M. Beyney ; A. Bourlat ; R. Cattin ; L. David ; G. Desnoës ; E. Durand ; P. Guerrier ; R. Henry ; E. Hugonnier ; H. Lacape ; L. Lefèvre ; G. Lepoivre ; H. Martin ; M. Marx ; E. Mercier ; A. Meynier ; T. Millet ; M. Petitjean ; Poirrier ; F. Ronquier ; J. Rousselin ; E. Serres ; F. Thibier ; A. Vannier.]

GÉOMÉTRIE

5023. — *On considère un triangle variable* ABC *inscrit dans un cercle fixe* O, *le sommet* A *étant fixe et le produit* AB.AC *constant. Lieux des centres des cercles inscrit et exinscrits à ce triangle.*

Joignons par des droites les centres M, N, P des circonférences exinscrites ; les bissectrices AI, BI, CI du triangle ABC coïncident avec les hauteurs du nouveau triangle MNP ; le cercle des neuf points, ABC, de MNP passe par le milieu R du segment de hauteur IM et par S, milieu du côté NP.

Supposons établies (voir à la fin) les relations
$$\text{AI}.\text{AM} = \text{AP}.\text{AN} = \text{AB}.\text{AC} = \text{constante}.$$

Alors, chacun des couples de points I et M, N et P est tel que le produit des distances au sommet A des deux points associés est constant, tandis que le milieu du segment qui les joint est assujetti à se mouvoir sur la circonférence ABC.

Dans ces conditions, les centres M, N, P, I décrivent des cercles.

En effet, la perpendiculaire élevée sur le segment IM en son milieu R passe par A′ diamétralement opposé à A. Traçons la circonférence de centre A′ passant par I, M et soit H l'un de ses points rencontre avec le cercle ABC ; l'angle AHA′ étant droit,

la droite AH touche en H la circonférence que nous venons de décrire ; donc $\overline{AH}^2 = AI.AM =$ constante.

Le triangle rectangle AA′H ayant l'hypoténuse ainsi qu'un côté de l'angle droit déterminés, l'autre côté $A'H = A'I$ est d'une longueur invariable. Donc la circonférence MIH est fixe.

Les points I et M décrivent entièrement les deux arcs déterminés par le cercle O dans le petit cercle A′ ; quant aux points P et N, ils décrivent respectivement les arcs P_1P_2 et N_1N_2 du grand cercle A′ compris entre les perpendiculaires en A à AH et AH′.

On arriverait à la même conclusion par l'emploi d'une autre méthode s'appliquant également à la recherche des lieux des points N et P.

Transformons la figure par inversion, en choisissant A pour origine et la constante AB.AC pour puissance d'inversion. Le cercle ABC se transforme en la droite HD ; les points I, M prennent la place l'un de l'autre ; R, milieu du segment IM, vient en D, de façon qu'il soit conjugué de A dans la division harmonique AIDM, car la relation $2AR = AI + AM$ de l'ancienne figure, se transforme dans la nouvelle figure en celle-ci

$$\frac{2}{AD} = \frac{1}{AI} + \frac{1}{AM'},$$

caractéristique d'une division harmonique.

Par conséquent, le point fixe A et la droite fixe HD, jouent respectivement, par rapport à la circonférence de centre A′ passant par I et M, le rôle de pôle et de polaire ; on en conclut que le rayon de ce cercle IM, moyen proportionnel entre les distances du centre A′ au pôle et à la polaire, est constant.

En ce qui concerne les points P et N, on adopterait la constante négative d'inversion AP.AN, égale, en valeur absolue, à la précédente.

Remarque. — Les pieds D et E des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle A décrivent des droites fixes HD et (E), axes radicaux du cercle ABC, et des circonférences concentriques parcourues par I et M ou N et P

(car $AD.AR = AB.AC =$ constante d'inversion).

Par l'emploi des notations habituelles, on peut exprimer les rayons de ces circonférences concentriques par les formules

$$\sqrt{2R(2R-h)} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{2R(2R+h)},$$

en observant que, d'après un théorème connu, $bc = 2Rh$, h étant la hauteur issue de A.

Note. — On peut établir de la manière suivante les relations que nous avons supposées connues, au début de la démonstration. La première $AI.AM = AP.AN$ s'aperçoit presque immédiatement ; car, si l'on imagine le point I′ (non marqué sur la figure) symétrique de I par rapport à NP, on sait que ce point se trouve sur le cercle MNP. Les segments des cordes s'entrecroisant en A doivent vérifier l'égalité $AI'.AM = AP.AN$ ou $AI.AM = AP.AN$.

Ensuite, les droites AB, AC dans les angles N et P sont antiparallèles par rapport aux côtés MN, MP. Il en résulte la similitude des triangles NAC, BAP, puisque chacun d'eux est semblable à MNP.

Par conséquent $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AC}{AN}$, d'où $AP.AN = AB.AC$.

Enfin, la relation $AD.AR = AB.AC$ résulte de la similitude des triangles ABD, ARC, et $AS.AE = AD.AR$ de la similitude des triangles rectangles ASR, ADE.

(J. CHAPRON, commis des postes, à Lyon.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Bernardeau ; R. Manen ; A. Reversat.]

5024. — *Un angle constant tourne autour d'un point fixe* A *d'un cercle* O ; *ses côtés coupent le cercle en* B *et* C. *On demande de prouver :*

1° *Que des trois droites qui joignent les milieux des côtés du triangle, deux passent chacune par un point fixe et la troisième enveloppe un cercle fixe ;*

2° *Que les trois hauteurs du triangle passent chacune par un point fixe ;*

3° *Que des trois droites qui joignent les pieds des hauteurs du triangle, une reste parallèle à une direction fixe et les deux autres enveloppent chacune un cercle fixe ;*

4° *Que le cercle des neuf points du triangle enveloppe deux cercles fixes ;*

5° *Que les droites de Simson du triangle relatives aux milieux des deux arcs* BC *passent chacune par un point fixe.*

1° Soit A′B′C′ le triangle ayant pour sommets les milieux des côtés du triangle ABC.

Les points B′, C′, milieux des cordes AC, AB, appartiennent au cercle de diamètre AO. Je dis que A′B′ et A′C′ coupent ce cercle en deux points fixes.

En effet, à cause du parallélisme de A′B′ et AB, on a

$$AD = B'C' = \frac{BC}{2},$$

et comme la corde BC est constante comme interceptée par l'angle constant A, il en est de même de AD, de sorte que D est fixe. De même l'égalité $AE = \dfrac{BC}{2}$ montre que le point E est également fixe et symétrique de D par rapport à AO.

La corde $B'C' = \frac{BC}{2}$ étant constante et inscrite dans le cercle fixe I, enveloppe un petit cercle concentrique.

2° La hauteur Aa du triangle ABC passe par le point fixe A ; de même les deux autres hauteurs Bb, Cc coupent le cercle circonscrit O en deux points fixes P, Q, puisque les arcs AP, AQ sont interceptés par les angles inscrits ABP, ACQ, complémentaires de l'angle constant BAC.

Comme $AP = AQ$, on peut remarquer que PQ est perpendiculaire à AO.

3° Je dis que bc est parallèle à PQ et que ab, ac touchent deux cercles fixes ayant leurs centres M, N aux milieux de AP, AQ.

Les symétriques du point de rencontre des hauteurs d'un triangle par rapport aux côtés étant sur le cercle circonscrit, bc joignant les milieux de deux côtés de HPQ est parallèle à PQ et égale à $\frac{1}{2}$ PQ.

D'ailleurs, comme Bb est bissectrice de l'angle abc, les droites Bb, ab et la parallèle PQ à bc déterminent le triangle isocèle Pbp.

La bissectrice de l'angle au sommet Ppb est donc perpendiculaire au milieu de Pb et par suite passe par le milieu M de AP, d'où il résulte que ab enveloppe un cercle fixe de centre M, tangent à PQ.

On verrait de même que ac enveloppe un cercle fixe de centre N, tangent également à PQ.

4° Le cercle des neuf points du triangle ABC a son centre ω au milieu de la droite OH, qui joint le centre du cercle circonscrit O à l'orthocentre H. Comme le rayon de ce cercle est constant et égal à $\frac{AO}{2}$, son enveloppe se déduira du lieu de son centre ω.

Or, en abaissant OA′ perpendiculaire à BC, on sait que $AH = 2\,OA' =$ const. ; donc H décrit un cercle de centre A et par suite, ω, un cercle homothétique ayant son centre au milieu I de AO, et un rayon égal à OA′.

L'enveloppe du cercle ω, de rayon OA′, est donc constituée par deux cercles concentriques I, de rayons $|OA' - OI|$ et $|OA' + OI|$.

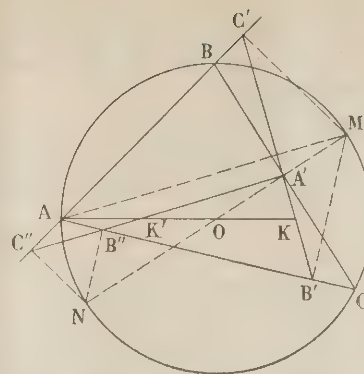
Si $OA' = OI$, ce qui a lieu lorsque $A = 60°$, le cercle passe par un point fixe I.

5° Soient A′B′C′ et A′B″C″ les droites de Simson relatives aux milieux M et N des deux arcs BC. Nous allons montrer que ces deux droites rencontrent la droite AO en deux points fixes K et K′.

En effet, la droite AM étant bissectrice de l'angle BAC, les triangles rectangles MAB′, MAC′ sont égaux; par suite la droite B′C′ est perpendiculaire à AM, c'est-à-dire parallèle à AN, puisque l'angle MAN est droit. Les triangles OAN, OKA′ sont donc semblables, et comme $OA = ON$, il en résulte que

$$OK = OA' = \text{const.},$$

ce qui établit la fixité du point K.



D'ailleurs, l'angle KAK′ étant droit comme ayant ses côtés parallèles à ceux de l'angle droit NAM, on en déduit

$$OK' = OA',$$

de sorte que K′ est le symétrique de K par rapport à O.

(Eugène LICOPE, à Mons.)

[Ont résolu complètement cette question : MM. H. Belbenoit; G. Foucry; D. Kœnig; R. Manen; E. Serres.]

[Ont résolu partiellement cette question : Mlle A. Saleilles; M. A. Bernardeau; D. Kœnig; T. Lemoyne.]

5030. — *Les distances d'un point fixe I à deux droites fixes parallèles A et B sont a et b. Par I on mène une sécante qui rencontre A et B en P et en Q, et, sur PQ comme diamètre, on décrit une circonférence C.*

1° Lieu géométrique du centre O de C, lorsque la sécante pivote autour de I ;

2° Déterminer par une construction graphique la position de la sécante de manière que C ait un rayon de longueur donnée R ;

3° Pour cette position de la sécante, calculer la distance IO en fonction de a, b et R ;

4° Les deux bissectrices des angles en P forment avec les deux bissectrices des angles en Q une figure dont on indiquera la forme et la position par rapport à C, et dont on évaluera l'aire.

(*École professionnelle supérieure des Postes et des Télégraphes, 1901.*)

1° Le cercle C ayant son centre au milieu O de PQ décrit une droite X parallèle aux droites A, B et équidistante de ces droites.

2° D'un point quelconque P′ de A comme centre, avec R pour rayon décrivons un cercle qui coupe X aux points O′, O″ : toute sécante menée de I parallèlement à l'une des droites P′O′, P′O″ répond à la question.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que le rayon R du cercle P′ surpasse la distance comprise entre les droites A et X, ce qui s'exprime par

$$R \geqslant \frac{A'B'}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{b-a}{2}.$$

3° On a

$$OI = IP + R.$$

Or

$$\frac{IP}{PQ} = \frac{IA'}{A'B'} = \frac{a}{b-a},$$

d'où

$$IP = \frac{2Ra}{b-a}.$$

Donc

$$OI = \frac{2Ra}{b-a} + R = \frac{a+b}{b-a} \cdot R.$$

4° La droite X rencontre le cercle O en deux points M et N situés respectivement sur les bissectrices des angles en P et Q; ces bissectrices forment donc le rectangle PMQN, inscrit dans le cercle C, et ayant pour surface

$$S = 2MNP = MO.\ A'B' = R(b - a).$$

Remarque. — Les formules précédentes supposent I en dehors du segment A'B'; lorsque I est compris entre A' et B', il suffit de changer le signe de $IA' = a$.

(A. BERNARDEAU, instituteur à Surgères.)

[Ont résolu la même question : Mlle A. Saleilles; MM. V. Barol; Beckerich; A. Bernardeau; M. Beyney; C. Bourion; A. Bourlat; R. Cattin; L. Charpentier; L. Colombey; F. Coutard; L. David; G. Desnoës; H. Dobryzniak; R. Ducongé; H. Faucillon; F. Filliol; E. Foucart; J. Garin; F. Gérard; A. Gheysens; P. Guerrier; R. Henry; L. Hostier; A. Humblot; Laumel; L. Maire; T. Millet; L. Ollié; Poujol; A. Rousseau; C. Sudreau; V. Thébault; A. Vannier; P. Vercescu; G. Ybert.]

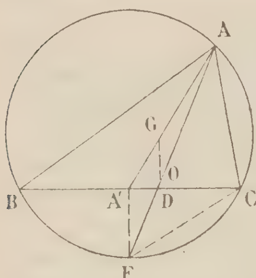
5032. — *On considère tous les triangles qui ont un sommet* A *commun, la bissectrice* AD *invariable en grandeur et en position, les cercles circonscrits à ces triangles coupant* AD *en un point fixe* F.

1° *Démontrer que dans tous ces triangles le produit de la hauteur issue de* A *par le diamètre du cercle circonscrit est constant.*

2° *Trouver le lieu du milieu du côté opposé au sommet* A.

3° *Trouver le lieu du point d'intersection des médianes.*

1° On sait que dans tout triangle le produit d'une hauteur par le diamètre du cercle circonscrit est égal au produit des deux côtés issus du même sommet que cette hauteur; il suffit donc de prouver que le produit AB.AC est constant. En effet, les triangles ABD, AFC sont semblables et donnent



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AF}$$

ou $AB.AC = AD.AF = \text{const.}$

2° Joignons le milieu F de l'arc BC au milieu A' de BC. L'angle FA'D étant droit, le lieu de A' est la circonférence de diamètre FD.

3° Soit G le point de rencontre des médianes situé aux $\frac{2}{3}$ de la médiane AA' à partir de A. Le lieu de G est une circonférence homothétique de celle décrite par A' et ayant son centre O aux $\frac{2}{3}$ de AF à partir de A.

(ERNEST FOUCART.)

REMARQUE. — On traite d'une manière analogue le cas où AD est la bissectrice extérieure de l'angle en A.

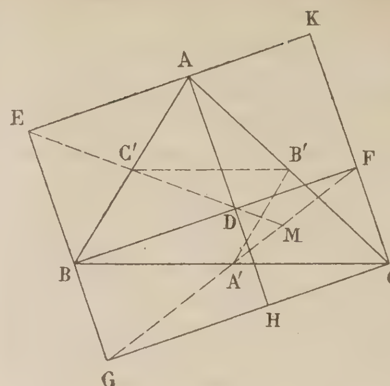
(L. HOSTIER, lycée de Clermont-Ferrand.)

[Ont résolu la même question : Mlle A. Saleilles; MM. M. Antoine; V. Barol; A. Bernardeau; M. Beyney; C. Bourion; A. Bourlat; R. Cattin; Chapron; L. Charpentier; F. Clabault; L. Colombey; M. Courtade; L. David; E. Foucart; G. Foucry; H. Fricquegnon; de Geoffroy; F. Gérard; R. Henry; L. Hostier; D. Kœnig; M. Marx; T. Millet; M. Norreel; L. Ollié; H. Palustran; A. Rousseau; V. Thébault; X., à Ajaccio.]

5033. — *Par les sommets d'un triangle* ABC, *on mène trois droites parallèles et les trois droites perpendiculaires. On obtient ainsi trois rectangles* ADBE, BFCG, CKAH, *qui ont respectivement pour diagonales* AB, BC, CA; *démontrer que les trois autres diagonales,* ED, FG, KH, *sont concourantes.*

Trouver le lieu géométrique du point de concours quand la direction des parallèles varie.

Les diagonales ED, FG, KH passent respectivement par les milieux C', A', B' des côtés AB, BC, CA.



Soit M le point où FG coupe ED. L'angle EMG étant extérieur au triangle DMF, on a

$$\widehat{EMG} = \widehat{MDF} + \widehat{MFD}.$$

Or le triangle BDC' étant isocèle,

$$\widehat{MDF} = \widehat{BDC'} = \widehat{DBC'};$$

de même, dans le triangle isocèle BFA',

$$\widehat{MFD} = \widehat{DBA'}.$$

Donc $\widehat{EMG} = \widehat{DBC'} + \widehat{DBA'} = \widehat{ABC}.$

Et, comme $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, il en résulte que le quadrilatère MA'B'C' est inscriptible, c'est-à-dire que M est situé sur le cercle des neuf points, A'B'C', du triangle ABC.

On verrait de même que HK coupe ED en un point M' également situé sur le cercle A'B'C'.

Comme ce point M' ne peut être C', second point commun à ED et au cercle A'B'C', M' se confond forcément avec M, ce qui établit la propriété.

Lorsqu'on fait varier la direction des parallèles, le lieu de M est évidemment le cercle des neuf points du triangle ABC.

(P. TRIBIER.)

AUTRE SOLUTION DE LA 1re PARTIE ET GÉNÉRALISATION. — On peut aussi établir cette partie en démontrant que dans le triangle GFC, les trois points H, M, K, situés sur les côtés, sont en ligne droite au moyen de la relation connue

$$\frac{HG}{HC} \cdot \frac{MF}{MG} \cdot \frac{KC}{KF} = 1.$$

Or, comme $HG = DB$, $HC = DF$, $KC = EG$, $KF = EB$, cette relation peut s'écrire

$$\frac{DB}{DF} \cdot \frac{MF}{MG} \cdot \frac{EG}{EB} = 1,$$

et devient ainsi évidente, puisque MDE est une transversale du triangle GFB.

Cette démonstration montre en même temps que la propriété subsiste lorsque les deux systèmes de parallèles ont des directions quelconques, les rectangles devenant alors des parallélogrammes.

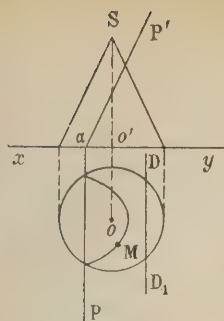
(G. FOUCRY.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Bernardeau; R. Cattin; F. Clabault; L. David; H. Dobryzniak; E. Foucart; F. Gérard; L. Ollié; H. Palustran; V. Thébault.]

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

5027. — *Un cône de révolution dont l'angle au sommet est* 2β *et dont l'axe est perpendiculaire au plan horizontal de projection, est coupé par un plan* $P\alpha P'$ *perpendiculaire au plan vertical et incliné de telle sorte que la section soit une parabole.*

1° *Démontrer que la projection de la courbe sur le plan horizontal est aussi une parabole et déterminer son sommet, sa directrice et son foyer.*



2° *Trouver la position que doit occuper le plan sécant* $P\alpha P'$ *pour que la parabole projection passe par un point* M *du plan horizontal ;*

3° *Pour qu'elle ait pour directrice une droite* DD_1 *perpendiculaire à* xy.

4° *Trouver le lieu géométrique des traces verticales des directrices et des projections verticales des foyers des paraboles obtenues en faisant varier la position du plan* $P\alpha P'$.

5° *En déduire un procédé graphique pour placer sur le cône une parabole de paramètre donné.*

(*Bacc. lettres-sciences, Bordeaux, juillet 1900.*)

Le plan $P\alpha P'$ détermine dans le cône une section parabolique lorsqu'il est parallèle à la génératrice de front $(sa, s'a')$.

1° On obtient un point quelconque de la section en coupant le cône et le plan $P\alpha P'$ par un plan horizontal quelconque H' ; la projection horizontale m de ce point est ainsi à l'intersection du cercle oi avec la ligne de rappel de m'. Je dis que lorsque H' varie, m décrit une parabole de foyer o et dont la directrice DD_1 est la projection horizontale de l'intersection du plan $P\alpha P'$ par le plan horizontal mené par s'.

En effet, on a
$$mo = io = ip + po$$
ou, comme $ip = im' = s'q' = oq$, $\quad mo = po + oq = pq$.

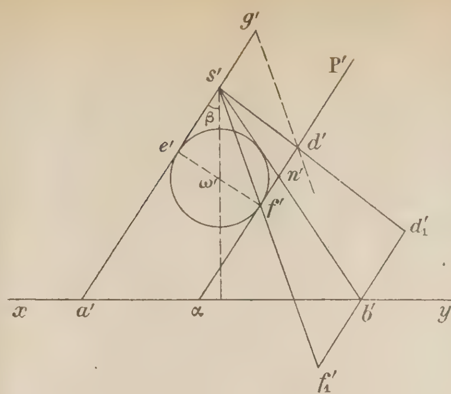
C. q. f. d.

Le sommet de la parabole est au milieu n de oq ; c'est aussi la projection horizontale du point (n, n') où la génératrice $(sb, s'b')$ perce le plan $P\alpha P'$.

2° Lorsque m est donné, m' s'en déduit en déterminant la trace H' du plan horizontal coupant le cône suivant un cercle projeté suivant le cercle om ; par m' on mène ensuite la parallèle $\alpha P'$ à $s'a'$ et par α la perpendiculaire αP à xy. Quelle que soit la position de m à l'intérieur du cercle ab, le plan $P\alpha P'$ existe toujours ; en particulier, lorsque m vient en o, le plan $P\alpha P'$ devient tangent au cône suivant la génératrice $(sa, s'a')$. On pourrait même supposer m quelconque dans le plan horizontal de projection, mais il faudrait alors considérer la surface du cône comme indéfinie dans les deux sens.

3° Lorsqu'on donne DD_1, on en déduit q' par une parallèle à xy menée par s' ; le point q' détermine ainsi les traces du plan $P\alpha P'$. Pour que le plan $P\alpha P'$ puisse couper la portion de surface du cône considérée, il faut et il suffit que la droite DD_1 soit comprise entre la droite $s'o$ et sa symétrique par rapport à $b'b$. Si la surface du cône était indéfinie, la droite DD_1 pourrait occuper les autres positions du plan horizontal de projection.

4° On sait que la parabole déterminée dans le cône par le plan $P\alpha P'$ a son foyer projeté verticalement au point de contact f' du cercle ω' tangent en f' à $\alpha P'$ et inscrit dans l'angle $a's'b'$; sa directrice a pour trace verticale le point d', symétrique de f' par rapport à n', projection verticale du sommet N.



Comme dans le triangle rectangle $s'e'f'$, le rapport des côtés est égal à $\frac{e'f'}{e's'} = \frac{2e'\omega'}{e's'} = 2 \operatorname{tg} \beta$, l'angle $e's'f'$ est constant et f' décrit une droite fixe passant par s' et limitée en f'_1 par la parallèle à $s'a'$ menée par b'. Par suite le lieu de d', symétrique de f' par rapport à n', est visiblement la droite qui joint s' au symétrique d'_1 de f'_1 par rapport à b'.

5° Pour que la parabole ait un paramètre donné p, il suffit de déterminer la trace $\alpha P'$ de façon que la portion $f'd'$ interceptée par l'angle $f'_1s'd'_1$ soit égale à p ; on résout facilement ce problème en observant que d' par exemple est à l'intersection de $s'd'_1$ avec la parallèle à $s'f'_1$ menée par le point g' de $a's'$ prolongée, tel que $s'g' = p$.

(POIRRIER, à Moulins.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Barbé ; A. Bernardeau ; H. Fricquegnon ; V. Thébault ; A. Vannier.]

TRIGONOMÉTRIE

5036. — *De quelle espèce doit être un triangle dans lequel on a*
$$\frac{\sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} ?$$

Si on remplace $\operatorname{tg} B$ par $\frac{\sin B}{\cos B}$ et $\operatorname{tg} C$ par $\frac{\sin C}{\cos C}$, la relation énoncée devient
$$\frac{\sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{\sin B}{\cos B} \cdot \frac{\cos C}{\sin C}.$$
ou, si on supprime le facteur commun $\frac{\sin B}{\sin C}$,
$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\cos C}{\cos B}$$
ou
$$2 \sin B . \cos B = 2 \sin . C \cos C,$$
ou enfin
$$\sin 2B = \sin 2C.$$

Deux sinus ne pouvant être égaux que si les arcs correspondants (inférieurs ici à 2π) sont égaux ou supplémentaires, on déduit de là les deux solutions :

1° $2B = 2C$, le triangle est isocèle ;

2° $2B + 2C = \pi$ ou $B + C = \frac{\pi}{2}$, le triangle est rectangle en A.

(ANDRÉ BOURLAT, lycée de Périgueux.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Bernardeau ; M. Beyney ; R. Cattin ; F. Chambas ; L. Charpentier ; L. Colombey ; L. David ; G. Desnoës ; E. Durand ; H. Faucillon ; E. Foucart ; H. Fricquegnon ; J. Garin ; de Geoffroy ; A. Haar ; R. Henry ; L. Hostier ; A. Humblot ; D. Kœnig ; H. Lacape ; F. Loire ; L. Maire ; C. Marie ; M. Marx ; C. Mercent ; T. Millet ; L. Norreel ; L. Ollié ; A. Pannelier ; F. Pégorier ; D. Petit ; Poujol ; A. Reversat ; P. Saintin ; J. Schwarz ; A. Vannier.]

MÉCANIQUE

4999. — *Pour que les centres de gravité de deux triangles ABC, A'B'C' coïncident, il faut et il suffit que les forces représentées par les segments* $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ *forment un couple.*

Soient G le centre de gravité commun aux deux triangles ABC et A'B'C', AD et A'D' deux médianes respectives à chacun de ces triangles. Tirons DD'. De la similitude des deux triangles AGA' et DGD', on déduit

$$\frac{AG}{GD} = \frac{AA'}{DD'} = 2,$$

ou $\overline{AA'} = 2\overline{D'D}$.

Traçons la droite C'D et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en E avec la parallèle menée par B à CC'. On a

$$\overline{EB} = \overline{CC'}.$$

Construisons le parallélogramme B'BEF. On a encore

$$\overline{EB'} = \overline{EB} + \overline{EF},$$

ou $\overline{BB'} + \overline{CC'} = \overline{EF} + \overline{EB} = \overline{EB'}$.

Or dans le triangle C'EB, DD' est la droite joignant les milieux des côtés CE et CB'; donc

$$\overline{EB'} = 2\overline{DD'}$$

et $$\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = 2\overline{D'D} + \overline{EB'} = 0,$$

c'est-à-dire que les trois forces $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ et $\overline{CC'}$ forment un couple.

Réciproquement, supposons que les trois forces $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ et $\overline{CC'}$ forment un couple. Je dis que le point d'intersection G des deux médianes AD et A'D' est le centre de gravité des deux triangles ABC et A'B'C'. Comme précédemment, on montrerait que l'on a

$$\overline{CC'} + \overline{BB'} = \overline{EB'} = 2\overline{DD'},$$

ou $$\overline{AA'} + 2\overline{D'D} = 0.$$

Prolongeons DD' d'une longueur égale D'D'₁. Les deux forces DD'₁ et AA' formant un couple sont égales, parallèles et dirigées en sens contraires. Par suite les deux triangles AGA' et DGD' sont semblables et leur rapport de similitude est 2. Donc AG = 2GD et par suite G est le centre de gravité du triangle ABC, et comme A'G = 2GD', G est aussi le centre de gravité du triangle A'B'C'.

(E. HUGONNIER, école professionnelle de Voiron.)

Note. — Cette question est l'application à la mécanique d'un cas particulier du théorème de géométrie suivant, dont la démonstration est immédiate en s'appuyant sur le théorème des projections :

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour que deux systèmes d'un même nombre de points quelconques :*

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n,$$
$$B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n,$$

affectés respectivement des mêmes coefficients

$$m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n,$$

aient même centre de distances proportionnelles, est que la somme géométrique des segments

$$m_1\overline{A_1B_1};\ m_2\overline{A_2B_2},\ m_3\overline{A_3B_3},\ \ldots,\ m_n\overline{A_nB_n}$$

soit nulle.

En effet, désignons respectivement par G et G' les centres des distances proportionnelles des deux systèmes de points. Projetons sur un axe *quelconque* (Δ); désignons par *o* l'origine choisie et la projection d'un point quelconque par la lettre minuscule correspondante.

On a $$\overline{og}\Sigma m_1 = \Sigma m_1\overline{oa_1},$$
$$\overline{og'}\Sigma m_1 = \Sigma m_1\overline{ob_1} = \Sigma m_1\overline{oa_1} + \Sigma m_1\overline{a_1b_1},$$
d'où $$(\overline{og'} - \overline{og})\Sigma m_1 = \Sigma m_1\overline{a_1b_1}.$$

Comme l'axe (Δ) est quelconque, la condition nécessaire et suffisante pour que G et G' soient confondus est que g et g' le soient, et par suite que l'on ait $\Sigma m_1\overline{a_1b_1} = 0$, ce qui signifie que la somme géométrique des segments $m_1\overline{A_1B_1}$, $m_2\overline{A_2B_2}$, ..., $m_n\overline{A_nB_n}$ est nulle. C. q. f. d.

Le théorème s'applique en particulier à deux systèmes de trois points, situés dans un même plan ou non, et affectés de coefficients égaux à l'unité.

(C. RECH, professeur au lycée de Lons-le-Saunier.)

Généralisation. — *Pour qu'un système de n forces représentées par les segments* $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, ... *se réduise à un couple, il faut et il suffit que le centre des moyennes distances des points* A, B, ... *coïncide avec celui des points* A', B', ...

En effet, un système de forces peut se ramener à un couple et à une force unique, R, telle que, sur un axe quelconque, on ait

$$\text{proj. R} = \Sigma\,(\text{proj. F}).$$

Soit I le centre des moyennes distances des points A, B, ..., et I' celui des points A', B', ...

On a, sur un axe quelconque,

$$\text{proj. } \overline{AA'} = \text{proj. } \overline{AI} + \text{proj. } \overline{II'} + \text{proj. } \overline{I'A'},$$

d'où

$$\Sigma\,(\text{proj. AA'}) = \Sigma\,(\text{proj. AI}) + \Sigma(\text{proj. } \overline{II'}) + \Sigma(\text{proj. } \overline{I'A'});$$

mais $$\Sigma\,(\text{proj. AI}) = 0, \qquad \Sigma\,(\text{proj. I'A'}) = 0,$$

puisque I et I' sont les centres des moyennes distances ;

donc $$\Sigma\,(\text{proj. AA'}) = \Sigma\,(\text{proj. II'}) = n, \text{proj. } \overline{II'}$$

ou $$\text{proj. R} = n, \text{proj. II'} = \text{proj. } (n.\overline{II'}).$$

R et n.II' ayant même projection sur un axe quelconque sont égaux, parallèles et de même sens.

La résultante unique est parallèle et de même sens que le segment II' et égale à n fois ce segment.

1° Si le système se réduit à un couple, on a

$$R = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \overline{II'} = 0.$$

Les centres coïncident.

2° Si les centres coïncident, on a

$$\overline{II'} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad R = 0.$$

Le système se réduit à un couple.

(P. VALOT).

(Ont résolu la même question : MM. M. Beau ; H. Belbenoit ; A. Bernardeau ; L. David ; Gasluc de Sénébron ; P. Legros ; J. Tastet ; F. Thibier.)

PHYSIQUE

4824. — *On donne une sphère de* 10^cm^ *de rayon intérieur et dont la paroi a* 3^mm^ *d'épaisseur en métal dont la densité est* 10 *à* 4°. *On veut qu'elle reste en équilibre indifférent quand elle est entièrement dans de l'eau à* 4°. *On demande à quelle pression on doit comprimer de l'azote dans la boule. Densité de l'azote, 0,97.*

L'équilibre étant obtenu à 4°, *on demande ce qui se passera si l'on chauffe ou si l'on refroidit le système.*

Le volume intérieur de la sphère est

$$\frac{4}{3} \times \pi \times \overline{10}^3 = 4\,188^{cc},8.$$

Le volume de la sphère, épaisseur comprise, est

$$\frac{4}{3} \times \pi \times \overline{10,3}^3 = 4\,577^{cc},215.$$

Par suite le volume de la partie métallique est

$$4\,577,215 - 4\,188,8 = 388^{cc},415.$$

Pour que la sphère reste en équilibre indifférent dans l'eau, il faut que son poids soit égal au poids du volume d'eau qu'elle déplace.

Le poids de la sphère se compose :

1° du poids de la partie métallique, c'est-à-dire

$$10 \times 388,415 = 3\,884^{gr},15\,;$$

2° du poids de l'azote sous la pression x, c'est-à-dire

$$4\,188,8 \times 0,001\,293 \times 0,97 \times \frac{1}{1+4\alpha} \times \frac{x}{76}, \quad \text{ou} \quad 0,068\,x.$$

Donc l'équation du problème est

$$4\,577,215 = 0,068\,x + 3\,884,15,$$

d'où $$x = 10\,192^{cm}.$$

Si l'on chauffe le système, le volume de la sphère augmente, la poussée devient plus grande et la sphère remonte. Mais il pourrait se faire que dans ce cas, la poussée ne change pas, car en même temps que le volume de la sphère augmente la densité de l'eau diminue.

Si on refroidit le système, le volume de la sphère diminue ainsi que la densité de l'eau, la poussée devient moins grande et la sphère descend.

(LEGROS, à Rouen.)

[Ont résolu la même question : MM. Baudoin ; Corbin ; Foucry ; Gondran ; Haag ; Henry ; Lecoutour ; Patin ; de Saint-Gabriel].

5018. — *Un aréomètre à poids constant a une tige, exactement cylindrique, divisée en cent parties égales. Plongé dans l'eau pure, de densité 1, il s'enfonce jusqu'à zéro ; le point d'affleurement est 100 dans SO^4H^2, de densité 1,84. Calculer le rapport du volume d'une division de la tige au volume total limité au zéro. Quel serait le point d'affleurement dans AzO^3H, de densité 1,4 ?*

(*Bacc. lettres-math., Besançon, novembre 1900.*)

Soient V le volume total de l'appareil et v le volume d'une division.

D'après le principe d'Archimède, on a

$$V = (V - 100v)1,84,$$

d'où $$0,84V = 184v$$

et $$\frac{v}{V} = \frac{0,84}{184} = \frac{21}{4600}.$$

Soit x le point d'affleurement dans l'acide azotique. On a de même $$V = (V - xv)1,4,$$

d'où $$\frac{v}{V} = \frac{0,4}{x \times 1,4}.$$

Egalant cette valeur avec la valeur du même rapport trouvée plus haut, il vient $$\frac{0,4}{x \times 1,4} = \frac{21}{4600},$$

d'où $$x = 62^{div},5.$$

(E. DE JOUX, à Bordeaux.)

[Ont résolu la même question : Mlle A. Saleilles ; MM. Allais ; Amiot ; Andréis ; Barol ; Barge ; Bellier ; Bénech ; Bernardeau ; Beyney ; Bonnetain ; Bourion ; Bourlat ; Bourvéau ; Cattin ; Clatteau ; Compain ; David ; Desnoës ; Dobryzniak ; Durand ; Fraysse ; Gasluc de Sénébron ; Grünfelder ; Guerrier ; Henry ; Hostier ; Humblot ; Lapresle ; Laurent ; Lefèvre ; Lestable ; Luquet ; Martin ; Marx ; Matheron ; Mercent ; Métais ; Meynier ; Millet ; Minary ; de la Noue ; Pégorier ; Périvet ; Pollet ; Raymond ; Roncaglia ; Rousselin ; Saintin ; Serres ; Tastet ; Thibier ; Thibon ; Valentin ; Vannier ; Ybert.]

5029. — *Pour comparer les forces électromotrices E_1 et E_2 de deux piles, de résistances intérieures r_1 et r_2 inconnues, on les met en circuit avec un galvanomètre de résistance g également inconnue.*

Dans une première expérience, les piles sont réunies par deux pôles contraires et on lit la déviation D du galvanomètre. Dans une seconde expérience, elles sont réunies par deux pôles de même nom, c'est-à-dire mises en opposition, et on lit la déviation d. En admettant la proportionnalité des intensités aux déviations, on demande le rapport des deux forces électromotrices.

Cas particulier : D = 56 *divisions,* d = 8 *divisions.*

(*Bacc. lettres-math., Bordeaux, mars 1900.*)

Appelons R la résistance du fil qui réunit les piles, I l'intensité du courant quand les piles sont réunies par deux pôles contraires, i l'intensité quand elles sont réunies par deux pôles de même nom.

On a, dans le premier cas

$$E_1 + E_2 = I[r_1 + r_2 + g + R], \qquad (1)$$

et, dans le second,

$$E_1 - E_2 = i[r_1 + r_2 + g + R]. \qquad (2)$$

En divisant (1) et (2) membre à membre, il vient

$$\frac{E_1 + E_2}{E_1 - E_2} = \frac{I}{i} = \frac{D}{d},$$

d'où $$\frac{E_1 + E_2 + E_1 - E_2}{E_1 + E_2 - E_1 + E_2} = \frac{D+d}{D-d},$$

$$\frac{2E_1}{2E_2} = \frac{D+d}{D-d}$$

et $$\frac{E_1}{E_2} = \frac{D+d}{D-d}.$$

Dans le cas particulier où D = 56 et $d = 8$, on a

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{64}{48} = \frac{4}{3}.$$

(DURAND.)

[Ont résolu la même question : MM. Beyney ; Bourlat ; Cattin ; David ; Foucry ; Guerrier ; Henry ; Lacape ; Mabou ; Martin ; Millet ; Palustran ; Thibon ; Thibier ; Thébault.]

ÉCOLE NAVALE

Concours de 1901.

Arithmétique et Algèbre.

I. — On sait que le nombre des vibrations transversales exécutées, dans un temps donné, par une corde cylindrique tendue est directement proportionnel à la racine carrée du poids qui la tend, et inversement proportionnel à sa longueur, à son rayon, et à la racine carrée de sa densité.

Cela posé, une corde de fer, dont la densité est 7,7, ayant $3^{décim},91$ de longueur, une section de $1^{mmq},21$, et tendue par un poids de $7\,218^{gr}$, a exécuté, dans un certain temps, 5 329 vibrations ; on demande combien de vibrations exécutera, dans le même temps, une corde de cuivre, dont la densité est 8,8, de $412^{mm},3$ de longueur, pesant $3^{gr},52$, et tendue par un poids de $8^{kil},309$?

II. — **5051.** Étant donnée l'équation

$$x^2 - 2\lambda x + 1 = 0,$$

où λ désigne une quantité connue, et dont on représente les racines par x' et x'' :

1° Former l'équation, du second degré en y, et à coefficients rationnels en λ et μ, dont les racines sont les quantités

$$x' + \frac{\mu}{x'}, \qquad x'' + \frac{\mu}{x''},$$

où μ désigne une quantité donnée ;

2° Former la relation entre λ et μ, qui exprime qu'une racine de l'équation en x est égale à une racine de l'équation en y ; calculer dans ce cas les racines des deux équations, et former la relation indépendante de λ et de μ à laquelle satisfont les racines inégales des deux équations ;

3° Déterminer les valeurs de λ et de μ pour lesquelles une racine, et une seule, de l'équation en y, est comprise entre les racines de l'équation en x.

(*1er juin, de 7 h. à 10 h. 1/2.*)

Géométrie.

5052. — Étant donnés deux points fixes O et A, on mène par O une droite quelconque, sur laquelle on prend deux points M et N tels que l'on ait

$$\overline{OM} \cdot \overline{ON} = \overline{OA}^2.$$

1° Démontrer que la circonférence (C) circonscrite au triangle AMN est tangente à la droite OA.

2° Comment doit être menée la droite OMN pour que la circonférence (C) ait un rayon donné et que l'angle MAN soit égal à un angle donné?

3° Soit I le centre de la circonférence (C). Les droites AM, AN coupent respectivement en P, Q la circonférence de centre O et de rayon OA; démontrer que les angles MIN, POQ sont égaux et que les droites MN, PQ sont rectangulaires. En déduire qu'on peut, par une translation et une rotation d'un angle droit, amener le triangle IMN à être directement homothétique au triangle OPQ, le point I venant en O.

4° On prend sur la droite PQ un point H tel que l'on ait

$$\frac{\overline{HP}}{\overline{HQ}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}};$$

démontrer que ce point reste fixe si la droite OMN tourne autour du point O, les points O, A, I restant fixes; et prouver que l'angle IOH est droit.

(*2 juin, de 7 h. à 10 h.*)

Géométrie descriptive.

5053. — On donne un plan de bout (P) faisant un angle de 45° avec le plan horizontal de projection; sa trace verticale coupe la ligne de terre en un point α situé à 3^{cm} à droite du centre de la feuille; de plus, la portion de cette trace qui est au-dessus du plan horizontal de projection va de droite à gauche à partir de α.

Dans ce plan se trouve l'une des faces, ABCD, d'un cube ABCDEFGH. Le sommet A est celui des sommets de la face ABCD qui a la plus grande cote: sa cote est 6^{cm}, son éloignement est 5^{cm}; le sommet B est celui des deux sommets B et D qui a le plus grand éloignement; la longueur AB est de 5^{cm}, et la droite AB fait avec le plan horizontal un angle de 30°. Enfin le cube est situé au-dessus du plan (P).

Construire les projections de ce cube.

On prendra ensuite le point M situé sur la droite qui joint les centres des faces ABCD et EFGH, entre ces deux faces, et à une distance de 4^{cm} du plan (P). Et l'on construira les projections de la section du cube par le plan qui passe par ce point M et qui est parallèle à la ligne de terre et à la droite AB.

On représentera le solide opaque formé par la portion du cube comprise entre le plan sécant et le plan donné (P).

N. B. — La ligne de terre passe par le centre de la feuille et elle est parallèle aux petits côtés de la feuille.

(*2 juin, de 2 h. à 4 h.*)

Calcul trigonométrique.

5054. — Calculer la plus petite valeur positive de x satisfaisant à l'équation

$$\operatorname{Cotg} x = \frac{4\cos^3(4\varphi + 21°18'31'',3)}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 38°31'2'',9 \times \sin\varphi}},$$

φ désignant un angle auxiliaire, compris entre 0 et 90°, défini par l'équation

$$\cos\varphi = \frac{\sin 38°2'21'',3}{\cos 12°47'29'',6}.$$

(*3 juin, de 2 h. à 3 h.*)

Physique et Chimie.

I. — Ébullition.

II. — On considère un prisme rectangulaire PAP' placé dans un milieu plus réfringent que la matière du prisme. Marche d'un rayon lumineux situé dans une section principale; — condition d'émergence; — formules qui permettent de calculer la déviation.



III. — **5055.** Un corps de pompe, fermé à sa partie supérieure par un piston au-dessus duquel on a fait le vide, contient, à la température de 100° et sous la pression d'une atmosphère, de l'eau liquide et de la vapeur d'eau qui coexistent en équilibre tant qu'on maintient le piston immobile.

On enfonce lentement le piston, en prenant soin de maintenir la température constante. — Calculer le travail mécanique nécessaire pour liquéfier ainsi 18^{gr} d'eau.

Les candidats devront indiquer l'unité de travail à laquelle se rapportera leur résultat et rappeler la définition de cette unité.

Données numériques: 2^{gr} d'hydrogène à 0° sous la pression d'une atmosphère occupent $22^{lit},2$; le coefficient de dilatation de l'hydrogène est $\frac{1}{273}$, et on admettra que la densité de la vapeur d'eau par rapport à l'hydrogène est égale à 9.

La densité de l'eau à 100° est 0,96. On pourra, dans une première approximation, ne pas faire intervenir cette donnée.

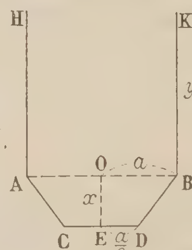
Enfin on rappelle qu'un fluide sous la pression d'une atmosphère exerce normalement à chaque centimètre carré de paroi, une force égale au poids de 1033^{gr} à Paris. (L'accélération de la pesanteur, à Paris, en unités C.G.S., est égale à 981.)

(*3 juin, de 7 h. à 10 h.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

(Baccalauréat)

5056. — Un vase a la forme d'un tronc de cône ABCD surmonté d'un cylindre ABKH ouvert à la base supérieure. On connaît les rayons $OA = a$ et $EC = \frac{a}{2}$ des bases du tronc de cône et on demande de déterminer les hauteurs $OE = x$ et $BK = y$ de ces deux figures de manière que le volume total soit égal à $\pi a^2 v$ et la surface totale à πam.



De tous les vases ainsi obtenus et présentant la même capacité, quel est celui qui a la plus petite surface totale?

(*Lettres-math., Oran, juillet 1900.*)

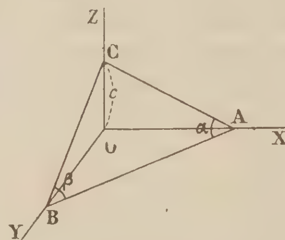
5057. — On donne un trièdre trirectangle OXYZ et sur OZ un point C situé à la distance c de O. Mener par ce point un plan coupant OX en A, OY en B et tel que les angles CAB, CBA soient égaux respectivement à deux angles donnés α, β.

(*Lettres-math., Clermont, avril 1900.*)

5058. — On prend la densité d'un liquide par la méthode du flacon et on trouve 1,345. La température est 18° et la pression atmosphérique 754^{mm}. Calculer la valeur qu'on aurait trouvée en opérant dans le vide, sachant que les poids employés ont la densité 7.

(*Lettres-math., Lyon, juillet 1900.*)

5059. — Un rayon lumineux tombe sous l'angle d'incidence i sur un prisme d'angle α, les angles i et α étant assez petits pour que les différences $i - \sin i$, $\alpha - \sin\alpha$ soient négligeables. Soient BC et CR les trajets intérieur et émergent de ce rayon.



1° Calculer la déviation du rayon, c'est-à-dire l'angle Δ des directions AB et CR.

2° Figurer le trajet CDE de la partie du rayon BC qui se réfléchit en C et émerge suivant DE. Calculer l'angle Δ' que fait DE avec la partie de BA qui se réfléchit en B suivant BA'.

3° Sachant que le rapport $\frac{\Delta'}{\Delta} = 5$, calculer l'indice du prisme.

(*Lettres-math., Oran, juillet 1900.*)

Le Rédacteur-Gérant: HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet, FACDOUEL, Dir.

25e Année. — N° 19. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 1er Juillet 1901.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

	Paris et Départements.	Étranger.
PRIX DU NUMÉRO	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL	5 »	6 »

Tous les Abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction .... Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Abonnements.. Librairie **Nony** et Cie, Boulд St-Germain, 63, PARIS.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

NOTE SUR LE CENTRE DE GRAVITÉ DU TRAPÈZE

par M. **A. Goulard**, professeur au lycée de Marseille.

Dans la plupart des cours, on applique à la recherche du centre de gravité du trapèze le théorème sur les moments des forces parallèles par rapport à un plan. Mais ce théorème ne figure pas, au moins explicitement, dans le programme de mathématiques élémentaires. Voici une méthode très simple qui permet de s'en passer.

Soit G le centre de gravité d'un trapèze ABCD. Le point G se trouve d'abord sur la droite MN qui joint les milieux des bases AB et CD. Menons maintenant la diagonale AC, et soient p et p' les poids des triangles ABC et ADC. On sait que le poids p du triangle ABC peut se décomposer en trois poids égaux à $\frac{p}{3}$ et appliqués aux trois sommets ; de même le poids p' du triangle ADC peut se décomposer en trois poids égaux à $\frac{p'}{3}$ et appliqués aux trois sommets. Les poids $\frac{p+p'}{3}$ et $\frac{p}{3}$, appliqués en A et B, ont une résultante égale à $\frac{2p+p'}{3}$ et appliquée en un point E de AB ; de même les poids $\frac{p+p'}{3}$ et $\frac{p'}{3}$, appliqués en C et D, ont une résultante égale à $\frac{p+2p'}{3}$ et appliquée en un point F de CD. La droite EF passe par le point G, et l'on a

$$\frac{\mathrm{EG}}{\mathrm{GF}} = \frac{p+2p'}{2p+p'}.$$

Or, les triangles ABC et ADC ayant même hauteur, leurs poids p et p' sont proportionnels à leurs bases AB et CD ; donc, en posant $\mathrm{AB} = a$ et $\mathrm{CD} = b$, on aura

$$\frac{p+2p'}{2p+p'} = \frac{a+2b}{2a+b}.$$

On a, d'autre part,

$$\frac{\mathrm{EG}}{\mathrm{GF}} = \frac{\mathrm{MG}}{\mathrm{GN}},$$

et, en définitive,

$$\frac{\mathrm{MG}}{\mathrm{GN}} = \frac{a+2b}{2a+b}.$$

Remarque. — En calculant ME et NF, on trouve

$$\mathrm{ME} = \frac{ab}{2(2a+b)} \quad \text{et} \quad \mathrm{NF} = \frac{ab}{2(a+2b)}.$$

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES (1900)

Section des sciences physiques et naturelles.

4893. — *Une masse d'eau m, en surfusion à une température t inférieure à zéro, étant placée dans un vase de masse négligeable, on y laisse tomber, d'une certaine hauteur, une masse M de plomb à 0°. Une fois l'équilibre de température établi, on constate qu'il s'est formé une certaine masse m' de glace. — Expliquer ce qui s'est produit.*

En supposant $\mathrm{M} = 1000^{\mathrm{gr}}$, $m = 100^{\mathrm{gr}}$, $t = -20°$, *on demande quelle devrait être la hauteur de chute x, pour que la masse de glace formée fût* $m' = 20^{\mathrm{gr}},915$.

Chaleur de fusion de la glace, $l = 80$; *chaleur spécifique de la glace,* $c = 0,5$; *équivalent mécanique de la petite calorie, en joules,* $\mathrm{E} = 4,17$; *intensité de la pesanteur, en unités C. G. S., dans le lieu de l'expérience,* $g = 981$.

Dès le contact de la masse de plomb, l'eau se solidifie, mais en partie seulement, car cette solidification est accompagnée d'un dégagement de chaleur qui, après avoir échauffé le mélange d'eau et de glace jusqu'à 0°, limite le phénomène.

En outre, la masse de plomb perdant toute sa force vive dans le vase, s'échauffe et produit en cédant sa chaleur au milieu ambiant la fusion d'une partie de la glace primitivement formée.

La température finale est d'ailleurs de 0°.

Le dégagement de chaleur dû à la formation de la masse m' de glace est de $m'l$ petites calories.

La force vive de la masse de plomb est $\frac{1}{2}\mathrm{M}v^2$, v étant la vitesse du plomb en arrivant dans l'eau. Mais $v^2 = 2gx$. Donc la force vive peut s'exprimer aussi par $\mathrm{M}gx$ ergs.

Comme l'équivalent mécanique de la chaleur est de E joules, et que le joule vaut 10^7 ergs, la chaleur fournie par la chute du plomb est de

$$\frac{\mathrm{M}gx}{\mathrm{E} \times 10^7} \text{ calories.}$$

Ce qui donne comme dégagement total de chaleur

$$\frac{\mathrm{M}gx}{\mathrm{E} \times 10^7} + m'l \text{ calories.}$$

La chaleur absorbée par le passage de $(m - m')$ grammes d'eau de $-t°$ à 0° est de

$$(m - m')t \text{ calories.}$$

L'échauffement de m' grammes de glace de $-t°$ à 0° absorbe en outre

$$m'ct \text{ calories.}$$

Égalant les quantités de chaleur dégagée et absorbée, il vient

$$\frac{Mgx}{E \times 10^7} + m'l = (m - m')t + m'ct.$$

Application :

$$M = 1000^{gr}, \quad g = 981, \quad E = 4{,}17, \quad m' = 20^{gr}{,}915,$$
$$l = 80, \quad m = 100^{gr}, \quad t = 20^o, \quad c = 0{,}5.$$

$$\frac{1000 \times 981 \times x}{4{,}17 \times 10^7} + 20{,}915 \times 80 =$$
$$(100 - 20{,}915)20 + 20{,}915 \times 0{,}5 \times 20.$$

Effectuant on trouve

$$x = 50^m{,}01.$$

(RAYNAUD, à Saint-Sernin.)

[Mlle A. Saleilles et M. A. de Saint-Gabriel ont résolu la même question.]

ALGÈBRE

5040. — *Résoudre le système d'équations*

$$x + y + z = 2p,$$
$$xy = 2a^2,$$
$$x^2 + y^2 = z^2.$$

(*École de chimie industrielle de Lyon, 1900.*)

Les équations du système donnent

$$x + y = 2p - z,$$
$$xy = 2a^2,$$
$$x^2 + y^2 = z^2.$$

En portant ces valeurs de $x + y$, xy et $x^2 + y^2$ dans l'identité

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy,$$

il vient $$(2p - z)^2 = z^2 + 4a^2,$$

d'où $$z = \frac{p^2 - a^2}{p},$$

et par suite $$x + y = 2p - z = \frac{p^2 + a^2}{p}.$$

Connaissant $x + y$ et xy, x et y sont racines de l'équation

$$X^2 - \frac{p^2 + a^2}{p} \cdot X + 2a^2 = 0.$$

Discussion. — Pour que l'équation précédente ait ses racines réelles, on doit avoir

$$\left(\frac{p^2 + a^2}{p}\right)^2 - 8a^2 \geqslant 0,$$

ou $$p^4 - 6a^2p^2 + a^4 \leqslant 0,$$

inégalité satisfaite en prenant

soit $p^2 \leqslant a^2(3 - 2\sqrt{2})$, soit $p^2 \geqslant a^2(3 + 2\sqrt{2})$.

Comme $3 \pm 2\sqrt{2} = (1 \pm \sqrt{2})^2$, ces deux inégalités reviennent à

$$p^2 - a^2(1 - \sqrt{2})^2 \leqslant 0, \qquad p^2 - a^2(1 + \sqrt{2})^2 \geqslant 0,$$

et sont satisfaites : la première pour

$$-a(\sqrt{2} - 1) \leqslant p \leqslant a(\sqrt{2} - 1),$$

et la seconde pour

$$p \leqslant -a(1 + \sqrt{2}) \quad \text{ou} \quad p \geqslant a(1 + \sqrt{2}).$$

(On peut supposer a positif, le système ne changeant pas pour a négatif.)

Les deux valeurs de x et y ayant leur produit $2a^2$ toujours positif prennent chacune le signe de leur somme $\frac{p^2 + a^2}{p}$, c'est-à-dire le signe de p. Quant à la valeur de z, elle prend ou non le signe de p suivant que la quantité $p^2 - a^2$ est positive ou négative.

Il résulte de là que les valeurs de x et y sont réelles et négatives pour

$$p \leqslant -a(1 + \sqrt{2}) \quad \text{ou} \quad -a(\sqrt{2} - 1) \leqslant p < 0,$$

ou réelles et positives pour

$$0 < p \leqslant a(\sqrt{2} - 1) \quad \text{ou} \quad p \geqslant a(1 + \sqrt{2}).$$

La valeur de z est négative pour

$$p < -a \quad \text{ou} \quad 0 < p < a,$$

et positive pour

$$-a < p < 0 \quad \text{ou} \quad p > a.$$

Remarque. — Pour les valeurs positives de x, y, z, le système proposé est la mise en équation du problème suivant :

Calculer les côtés x, y et l'hypoténuse z d'un triangle rectangle de périmètre $2p$ et de surface a^2.

(R. CATTIN, à Mont-de-Marsan.)

[Ont résolu la même question : Mlle E. Grecescu ; MM. A. Bernardeau ; M. Beyney ; A. Bourlat ; H. Dobryzniak ; E. Durand ; Gasluc de Sénébron ; A. Haar ; R. Henry ; L. Hostier ; H. Lacape ; G. Lepoivre ; J. Lestable ; A. Mabon ; T. Millet ; Pétrus Guerrier ; A. Poirrier ; A. Pradelet ; A. Rousseau ; A. de Saint-Gabriel ; G. Sanpité ; J. Schwarz.]

5042. — *Déterminer un quadrilatère* ABCD *inscriptible dans le cercle dont les quatre côtés et une diagonale forment une progression arithmétique. Cette diagonale* BD *est donnée égale à* a ; *elle est le terme du milieu de la progression et partage le quadrilatère en deux triangles* ABD, CBD *dont les autres côtés sont respectivement les deux plus petits et les deux plus grands termes.*

(*Bacc. lettres-math., Grenoble, nov. 1900.*)

Posons

$$DA = a - 2x, \quad AB = a - x, \quad BC = a + 2x, \quad CD = a + x.$$

Les triangles ABD, BCD donnent respectivement

$$a^2 = (a - x)^2 + (a - 2x)^2 - 2(a - x)(a - 2x)\cos A,$$
$$a^2 = (a + x)^2 + (a + 2x)^2 - 2(a + x)(a + 2x)\cos C,$$

d'où l'on déduit

$$\cos A = \frac{a^2 + 5x^2 - 6ax}{2(a - x)(a - 2x)},$$
$$\cos C = \frac{a^2 + 5x^2 + 6ax}{2(a + x)(a + 2x)}.$$

Les angles opposés A, C devant être supplémentaires ont leurs cosinus égaux et de signes contraires.

On a donc l'équation

$$\frac{a^2 + 5x^2 - 6ax}{2(a - x)(a - 2x)} + \frac{a^2 + 5x^2 + 6ax}{2(a + x)(a + 2x)} = 0,$$

qui devient, toutes réductions faites,

$$10x^4 - 11a^2x^2 + a^4 = 0,$$

On tire de là

$$x' = a, \qquad x'' = \frac{a\sqrt{10}}{10}.$$

La valeur x' rendant AD négatif ne peut convenir. La valeur x'' donne pour les côtés du quadrilatère correspondant :

$$AD = \frac{a}{5}(5 - \sqrt{10}), \qquad AB = \frac{a}{10}(10 - \sqrt{10}),$$
$$BC = \frac{a}{5}(5 + \sqrt{10}), \qquad CD = \frac{a}{10}(10 + \sqrt{10}).$$

Pour que ces valeurs conviennent, il faut et il suffit qu'on ait

$$AB - AD < a < AB + AD$$

et $$BC - CD < a < BC + CD,$$

conditions toujours remplies.

(Antonin LAPRESLE.)

Remarque. — Les expressions de cos A et cos C peuvent se simplifier. On a

$$\cos A = \frac{(a-x)(a-5x)}{2(a-x)(a-2x)} = \frac{a-5x}{2(a-2x)},$$

$$\cos C = \frac{(a+x)(a+5x)}{2(a+x)(a+2x)} = \frac{a+5x}{2(a+2x)};$$

l'équation $\cos A + \cos C = 0$ donne alors

$$10x^2 - a^2 = 0.$$

[Ont résolu la même question : MM. E. Barbé ; A. Bernardeau ; M. Beyney ; E. Durand ; Gasluc de Sénébron ; F. Gérard ; G. Grünfelder ; R. Henry ; H. Lamarre ; M. Norreel ; Pétrus Guerrier ; A. de Saint-Gabriel.]

5044. — *On donne une sphère de rayon* R *et un diamètre* PP′ *de cette sphère. On demande de couper la sphère par un plan* CMD *perpendiculaire à* PP′ *de telle façon que le volume du tronc de cône* CDEF *déterminé dans le cône* PCD *par le plan du grand cercle* AOB *perpendiculaire à* PP′ *soit égal à* m *fois le volume du cône* MEF. *Discuter le problème suivant les différentes valeurs de* m.

(*Bacc. lettres-math., Tunis, juillet 1900.*)

Prenons pour inconnue $PM = x$. Le volume du tronc de cône CDEF s'exprime par

$$\frac{1}{3}\pi OM(\overline{OE}^2 + \overline{MC}^2 + OE \cdot MC),$$

et celui du cône MEF, par

$$\frac{1}{3}\pi \overline{OE}^2 \cdot OM.$$

Égalons à m le rapport de ces deux volumes ; nous aurons

$$\frac{\overline{OE}^2 + \overline{MC}^2 + OE \cdot MC}{\overline{OE}^2} = m,$$

ou
$$\overline{OE}^2(1-m) + \overline{MC}^2 + OE \cdot MC = 0.$$

Or $\dfrac{OE}{R} = \dfrac{MC}{x}$, d'où $OE = \dfrac{R \cdot MC}{x}$.

Donc
$$\frac{R^2 \cdot \overline{MC}^2}{x^2}(1-m) + \overline{MC}^2 + \frac{R \cdot \overline{MC}^2}{x} = 0,$$

ou, en supprimant le facteur $\overline{MC}^2$, qui ne peut être nul,

$$f(x) = x^2 + Rx + R^2(1-m) = 0.$$

Discussion. — Pour qu'une valeur de x convienne, il faut qu'elle soit réelle et comprise entre 0 et 2R.

Cas d'une solution. — On doit avoir

$$f(0) \cdot f(2R) < 0,$$

ou
$$R^2(1-m) \cdot R^2(7-m) < 0,$$

inégalité satisfaite lorsque

$$1 < m < 7.$$

Cas de deux solutions. — Les deux racines ayant une somme négative, $-R$, ne peuvent jamais être comprises en même temps entre 0 et 2R.

Le problème ne comporte qu'une solution, fournie par la racine positive.

(Antonin LAPRESLE.)

Remarque. — Pour qu'on ait le cas de figure représenté, c'est-à-dire le cône et le tronc de cône de l'autre côté du plan AOB par rapport à P, il faut que la racine positive soit plus grande que R ; la condition est

$$f(R) \cdot f(2R) < 0,$$

ou
$$R^2(3-m) \cdot R^2(7-m) > 0,$$

ce qui donne
$$3 < m < 7.$$

[Ont résolu complètement cette question : MM. V. Barol ; H. Belbenoit, A. Bernardeau ; E. Durand ; Gasluc de Sénébron ; H. Lacape ; J. Lestable ; A. Meynier ; T. Millet ; C. Paronelli : Pétrus Guerrier ; A. de Saint-Gabriel ; X., à Ajaccio.
Ont résolu partiellement cette question : MM. M. Beyney ; A. Bourlat ; H. Dobryzniak ; F. Gérard ; G. Grünfelder ; A. Haar ; Poirrier ; A. Pradelet ; G. Sanpité ; A. Vannier.]

GÉOMÉTRIE

5034. — *On donne une circonférence de diamètre* AB *et une droite* CD *perpendiculaire sur ce diamètre. Par* A *on mène une sécante* APQ *et la perpendiculaire à cette sécante en un point* M *tel que*

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{p}{q}.$$

1° *Démontrer que* MN *enveloppe une parabole ayant pour foyer un point* F *et pour sommet un point* S *tels que*

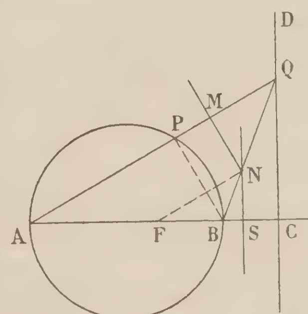
$$\frac{FB}{FA} = \frac{SB}{SC} = \frac{p}{q}.$$

2° *Démontrer que l'enveloppe est encore une parabole lorsque* CD *est quelconque et que* MN *fait avec* AP *un angle quelconque constant en grandeur et en sens.*

La position du foyer est indépendante de la droite CD.

3° *Trouver le lieu du foyer quand on fait varier l'angle* AMN.

1° Tirons les droites BP, BQ, cette dernière coupant MN en N. PB étant perpendiculaire à AQ est parallèle à MN, et l'on a



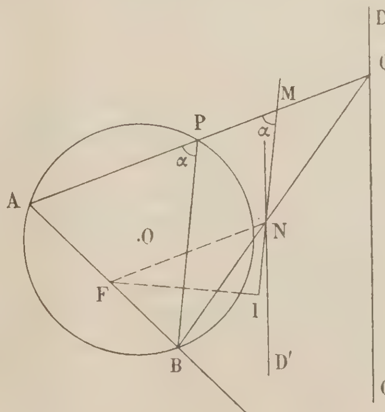
$$\frac{NB}{NQ} = \frac{MP}{MQ} = \frac{p}{q},$$

ce qui montre que le lieu de N est la parallèle à la droite D menée par le point S tel que $\dfrac{SB}{SC} = \dfrac{p}{q}$.

D'ailleurs, comme F et N divisent les côtés AB, BQ du triangle ABQ dans le même rapport, $\dfrac{q}{p}$, la droite FN est parallèle à AQ ou perpendiculaire à MN.

La droite MN se confond ainsi avec l'un des côtés d'un angle droit MNF dont l'autre côté passe par le point fixe F et dont le sommet N décrit la droite fixe NS ; l'enveloppe de MN est donc bien une parabole de foyer F, admettant NS pour tangente au sommet.

2° Supposons maintenant la droite CD quelconque par rapport au point A du cercle donné O, et la droite MN inclinée de l'angle α par rapport à la sécante APQ.



En menant par P une parallèle à MN, cette droite rencontre le cercle O en un point fixe B ; d'ailleurs MN coupe BQ en un point N tel que

$$\frac{NB}{NQ} = \frac{MP}{MQ} = \frac{p}{q},$$

de sorte que le lieu de N est une droite fixe D′ parallèle à CD.

Menons alors par N une parallèle à AQ ; elle coupe AB en un

point fixe F tel que

$$\frac{FB}{FA} = \frac{NB}{NQ} = \frac{p}{q}.$$

Si l'on mène FI perpendiculaire à MN, le triangle rectangle FIN ayant un angle constant $FNI = \alpha$ reste semblable à lui-même ; par suite, comme le sommet F est fixe et que le sommet N décrit une droite fixe, le sommet I décrit comme on sait une autre droite fixe, tangente au sommet d'une parabole de foyer F, qui constitue alors l'enveloppe de la droite MN.

On voit que la position de F dépend seulement de l'angle α et nullement de la droite CD.

3° Quand l'angle $AMN = \alpha$ varie, le point F, qui divise AB dans le rapport connu $\frac{FB}{FA} = \frac{p}{q}$, décrit un cercle homothétique du cercle O décrit par B, A étant le centre et $\frac{AF}{AB} = \frac{q}{p+q}$ le rapport d'homothétie.

(F. CLABAULT, instituteur-adjoint, à Rosières.)

[Ont résolu la même question : MM. L. David ; E. Foucart ; L. Ollié.]

5035. — *On donne une circonférence de diamètre* AB *et une seconde circonférence* O′ *ayant son centre sur* AB. *Par* A *on mène une sécante qui coupe la première circonférence en* P *et la seconde en* Q, *puis la perpendiculaire à cette sécante en un point* M *tel que*

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{p}{q}.$$

1° *Démontrer que* MN *enveloppe une ellipse ou une hyperbole (suivant la position de* A *par rapport à la circonférence* O′), *ayant pour l'un de ses foyers un point* F *et pour sommets des points* S *et* S′ *tels que*

$$\frac{FB}{FA} = \frac{SB}{SC} = \frac{S'B}{S'C'} = \frac{p}{q}.$$

2° *Démontrer que l'enveloppe est encore une conique quand la circonférence* O′ *est quelconque, et que l'angle* AMN *est un angle quelconque constant en grandeur et en sens.*

3° *Montrer que la position de l'un des foyers de cette conique est complètement indépendante de la circonférence* O′, *et que la position de l'autre foyer est indépendante du rayon* O′.

1° Tirons la droite BQ qui rencontre MN en N.

PB étant perpendiculaire à AQ ou parallèle à MN, on a

$$\frac{NB}{NQ} = \frac{MP}{MQ} = \frac{p}{q}$$

ou

$$\frac{NB}{QB} = \frac{p}{p+q}.$$

Donc le lieu de N est une circonférence homothétique de la circonférence O′, B étant le centre et $\frac{p}{p+q}$ le rapport d'homothétie ; cette circonférence coupe le diamètre CC′ du cercle O′ en deux points S et S′ tels que

$$\frac{SB}{SC} = \frac{S'B}{S'C'} = \frac{p}{q}.$$

D'ailleurs, la parallèle à AQ issue de N coupe AB en un point fixe F tel que

$$\frac{FB}{FA} = \frac{p}{q}.$$

La conique définie par son foyer F et le cercle principal SS′ est donc tangente à la droite MN, puisque la projection N de F sur MN décrit le cercle SS′.

Suivant que F est intérieur ou extérieur à SS′, cette conique est une ellipse ou une hyperbole. Dans le cas de l'ellipse, on a

$$FB < S'B,$$

ou

$$\frac{p}{p+q}.AB < \frac{p}{p+q}.C'B,$$

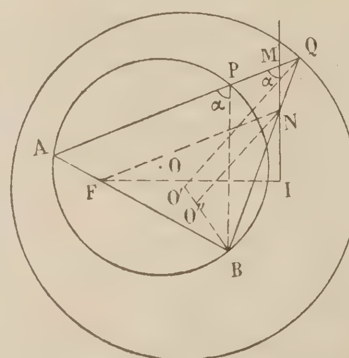
ou

$$AB < C'B,$$

autrement dit, A est à l'intérieur du cercle donné O′. Au contraire, lorsque A est extérieur au cercle O′, la conique enveloppe est une hyperbole.

Si A est sur le cercle O′, la droite MN passe par un point fixe S tel que $\frac{SB}{SC} = \frac{p}{q}$.

2° Supposons maintenant le cercle O′ quelconque par rapport au point A et la droite MN inclinée de l'angle α par rapport à la sécante APQ.



La parallèle à MN menée par P rencontre le cercle O en un point fixe B ; d'ailleurs la droite BQ coupe MN en un point N tel que

$$\frac{NB}{NQ} = \frac{MP}{MQ} = \frac{p}{q},$$

ce qui montre que le lieu de N est une circonférence O″ homothétique de la circonférence O′ décrite par Q.

Menons NF parallèle à AQ, puis projetons F en I sur MN. Le triangle FNI ayant l'angle en N constant et égal à α, reste semblable à lui-même. Or, comme

$$\frac{FB}{FA} = \frac{NB}{NQ} = \frac{p}{q},$$

le sommet F est fixe et situé sur la circonférence lieu de N ; le sommet N décrivant alors un cercle fixe, il en est de même du sommet I.

On peut donc considérer la droite MN comme ayant pour enveloppe une conique de foyer F, admettant pour cercle principal le cercle décrit par I.

3° Le foyer F de la conique partageant AB dans un rapport donné est indépendant du cercle O′. Quant au second foyer, F′, on l'obtient en prenant le symétrique de F par rapport au centre ω du cercle décrit par I. Or ω est le sommet du triangle rectangle FO″ω construit sur FO″ comme hypoténuse et semblable au triangle FNI (en grandeur et position). On voit ainsi que la position de ω ou F′ est indépendante du rayon du cercle O′.

(F. CLABAULT, à Rosières.)

[M. L. David a résolu complètement la même question.
M. L. Ollié a résolu partiellement la même question.]

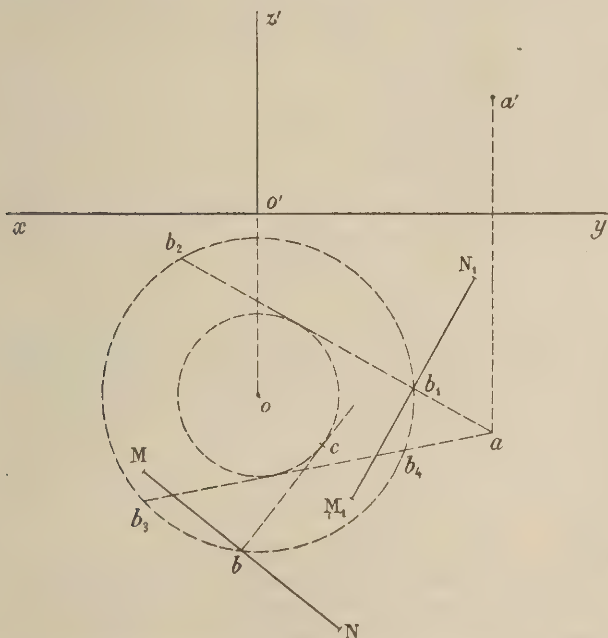
GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

5048. — *On donne un segment rectiligne MN, situé dans le plan horizontal de projection, un axe vertical ayant o pour pied sur ce plan, un point quelconque (a, a′), et l'on demande de faire tourner le segment MN autour de l'axe o jusqu'à ce que ses extrémités M et N deviennent équidistantes du point (a, a′).*

(*Bacc. lettres-math., Dijon, juillet 1900.*)

Soient le segment MN, l'axe $oo'z'$ et le point (a, a').

Pour que les points M, N soient équidistants du point A, il



faut et il suffit que le plan vertical perpendiculaire au milieu b de MN passe par A ou, ce qui revient au même, que sa trace horizontale bc, perpendiculaire à MN, passe par a.

En tournant autour de l'axe $oo'z'$, le milieu b de MN décrit un cercle o et la droite bc enveloppe un cercle concentrique. Les tangentes issues de a à ce dernier cercle déterminent dans le premier les deux cordes b_1b_2 et b_3b_4 dont les extrémités sont les milieux de quatre cordes, telles que M_1N_1, répondant à la question.

Ces quatre solutions n'existent qu'autant que le point a est extérieur au cercle enveloppé par bc. Lorsque a est sur ce cercle, les quatre solutions se réduisent à deux.

(G. GRÜNFELDER.)

[Ont résolu la même question : MM. E. Barbé ; A. Bernardeau ; M. Beyney ; A. Bourlat ; E. Durand ; H. Lamarre ; E. Licope ; A. Poirrier ; Poujol.]

TRIGONOMÉTRIE

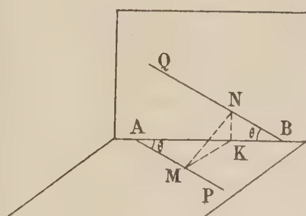
5047. — *Sur l'arête d'un dièdre droit on marque deux points fixes A, B dont la distance mutuelle sera représentée par d, et desquels points, dans les deux faces du dièdre respectivement, on tire les demi-droites indéfinies AP, BQ, faisant avec l'arête du dièdre les angles rectilignes BAP, ABQ d'une même valeur donnée θ ; sur ces demi-droites AP, BQ on considère des points mobiles M et N pris tous deux à une même distance indéterminée, x, des points fixes A et B, et l'on demande ;*

1° *D'exprimer en fonction de d, θ, x, la distance variable y des points M, N ;*

2° *De calculer la valeur de x pour laquelle cette distance y est minimum ;*

3° *De prouver que dans sa position donnant lieu au minimum ci-dessus, la droite MN est perpendiculaire à chacune des droites AP, BQ.*

(*Bacc. lettres-math., Dijon, juillet 1900.*)



1° Menons NK perpendiculaire à AB. Le triangle rectangle MNK donne

$$\overline{MN}^2 = \overline{NK}^2 + \overline{MK}^2.$$

Or $\quad NK = x \sin\theta,$

et $\overline{MK}^2 = x^2 + (d - x\cos\theta)^2 - 2x(d - x\cos\theta)\cos\theta.$

Donc $\quad y^2 = x^2\sin^2\theta + x^2 + (d - x\cos\theta)^2 - 2x(d - x\cos\theta)\cos\theta$

ou $$y = \sqrt{2x^2(1+\cos^2\theta) - 4dx\cos\theta + d^2}.$$

2° On sait qu'un trinome du second degré en x, $ax^2 + bx + c$, ayant son premier terme positif, devient minimum lorsque $x = -\dfrac{b}{2a}$.

La valeur de x rendant le trinome minimum est ici

$$\frac{d\cos\theta}{1+\cos^2\theta}.$$

3° La droite MN jouant le même rôle par rapport à chacune des droites AP et BQ, il suffit d'établir que, dans le cas du minimum, cette droite est perpendiculaire à AP par exemple. Or en vertu du théorème des trois perpendiculaires, cela revient à montrer que le triangle AMK est rectangle en M, c'est-à-dire qu'on a

$$AM = AK\cos\theta$$

ou, comme $\quad AK = d - KB = d - x\cos\theta,$

$$x = d\cos\theta - x\cos^2\theta,$$

d'où $$x = \frac{d\cos\theta}{1+\cos^2\theta}.$$

C. q. f. d.

Remarque. — En remplaçant dans l'expression de y, x par la valeur précédente, on obtient pour valeur minimum de y,

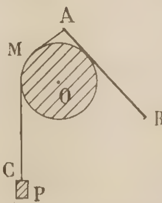
$$y = \sqrt{\frac{2d^2\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta} - \frac{4d^2\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta} + d^2} = \frac{d\sin\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}.$$

(Léon BUTRUILLE, lycée Gay-Lussac, Limoges.)

[Ont complètement résolu cette question : MM. E. Barbé ; H. Belbenoit ; Bénech ; A. Bernardeau ; M. Beyney ; A. Bourlat ; E. Durand ; Gasluc de Sénébron ; F. Gérard ; G. Grünfelder ; L. Hostier ; H. Lamarre ; A. Lapresle, G. Lepoivre ; E. Licope ; A. Meynier ; T. Millet, Poirrier ; Poujol ; A. Pradelet. Ont partiellement résolu cette question : MM. H. Lacape ; J. Lestable ; Pétrus Guerrier.]

MÉCANIQUE

5028. — *On donne dans un plan vertical un disque O circulaire fixe, de rayon R.*



Sur la circonférence de ce disque repose une barre rectiligne, homogène, AB, de longueur 2a et de poids P.

Cette barre est maintenue en équilibre au moyen d'un fil AMC très long, non pesant et supportant à son extrémité libre C un poids P.

1° *Quelle est la position d'équilibre du système ?*

2° *Calculer la pression exercée par AB sur le disque.* (*On négligera les frottements,*)

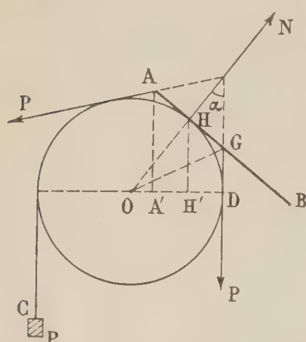
I. La barre AB est soumise à l'action :

1° de son poids P, appliqué en son milieu G ;

2° de la force P, appliquée en A et tangente au disque ;

3° de la réaction normale N du disque.

Exprimons que ces trois forces constituent un système en équilibre.



Elles doivent être concourantes ; en outre, la somme de leurs moments par rapport au point O doit être nulle.

Il en résulte que la verticale du point G est tangente au disque ; d'autre part, on voit par la figure que :

$$GD = GH = \frac{GA}{2} = \frac{a}{2}.$$

La position de la barre est donc bien déterminée.

D'ailleurs, pour que cette configuration soit conforme à l'énoncé, c'est-à-dire pour que l'équilibre soit possible, il faut que le fil fixé en A soit tangent au disque, ce qui exige que l'on ait

$$DA' \leqslant 2R \qquad \text{ou} \qquad DH' \leqslant R,$$

ou encore $GD \leqslant R$,

d'où $a \leqslant 2R$.

II. La réaction N du disque étant égale et directement opposée à la résultante des deux forces P agissant sur la barre, on a

$$N = 2P\cos\alpha = 2P\frac{1-\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (1)$$

Or, le triangle OGD nous donne

$$\text{tg}\,\widehat{GOD} = \frac{a}{2R},$$

ou

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a}{2R},$$

d'où nous tirons facilement

$$\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2R-a}{2R+a}.$$

Substituons dans (1), il viendra

$$N = \frac{8aR}{4R^2+a^2}P.$$

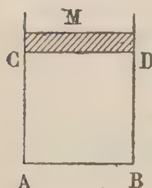
Dans le cas limite $a = 2R$, on a, comme on pouvait le prévoir, $N = 2P$.

[Ont résolu la même question : MM. M. Beyney ; A. Bourlat ; H. Lacape ; F. Rouquier.]

PHYSIQUE

5038. — *Une masse d'air à la pression de* 3^{atm} *est emprisonnée dans un cylindre vertical* ABCD *par un piston* M, *de poids* P. *On note la distance*

$$CA = 10^{cm}.$$



On triple le poids P *et on demande de calculer la hauteur dont descendra le piston dans le cylindre.*

Pression atmosphérique extérieure . . . . 76^{cm} *de mercure.*
Densité du mercure . . . . . 13,6.

(*Bacc. lettres-math., Rennes, novembre 1900.*)

Appelons S la section du cylindre. La pression du piston par centimètre carré est $\frac{P}{S}$. Cette pression, augmentée de la pression atmosphérique, fait équilibre à la force élastique de l'air emprisonné.

On a donc

$$\frac{P}{S} + 76 \times 13{,}6 = 3 \times 76 \times 13{,}6,$$

d'où

$$\frac{P}{S} = 2 \times 76 \times 13{,}6.$$

Dans la première partie de l'expérience, l'air occupe le volume $10.S$ sous la pression $3 \times 76 \times 13{,}6$; il occupe ensuite le volume $(10-x)S$ sous la pression $3\frac{P}{S} + 76 \times 13{,}6$. La loi de Mariotte permet d'écrire :

$$\left(3\frac{P}{S} + 76 \times 13{,}6\right)(10-x)S = 3 \times 76 \times 13{,}6 \times 10.S.$$

En remplaçant $\frac{P}{S}$ par sa valeur, il vient

$$70 - 7x = 30,$$

d'où

$$x = 5^{cm},714.$$

[Ont résolu la même question : Mlle Saleilles ; MM. Barge ; Bernardeau ; Beyney ; Bourion ; Bourlat ; Chambos ; Coutard ; David ; Dobryzniak ; Ducongé-Cabireau ; Durand ; Foucart ; Gérard ; Grenouillot ; Guerrier ; Henry ; Hostier ; Lacape ; Laumet ; Loire ; Millet ; Pannelier ; Périnet ; Pradelet ; Raymond ; Saintin ; Salomon ; Thébault ; H. Thibon ; Vannier ; Ybert.]

5039. — *Sur un sonomètre sont placées deux cordes, l'une en cuivre, l'autre en acier, de même section et ayant chacune* 1^m *de longueur. La corde de cuivre est tendue par un poids de* 1^{kg}.

1° *Quel doit être le poids tenseur de la corde d'acier pour qu'elle rende le même son fondamental que la corde de cuivre ?*

2° *Les poids tenseurs étant tous deux égaux à* 1^{kg}, *quelle serait la longueur de la corde d'acier rendant le même son que celle de cuivre de longueur* 1^m ?

3° *Dans les mêmes conditions, quelle serait la longueur de la corde d'acier rendant la quinte supérieure du même son ?*

Densité du cuivre 8,95,
Densité de l'acier . . . . 7,45.

(*Bacc. lettres-sciences, Aix, juillet 1900.*)

1° Les cordes ayant même section, même longueur et rendant le même son, les poids tenseurs sont proportionnels aux densités. En désignant par P le poids tenseur de la corde d'acier, on aura

$$P = 1000 \times \frac{7{,}45}{8{,}95} = 832^{gr},4.$$

2° Les poids tenseurs étant égaux et le son rendu étant le même, les longueurs des cordes sont en raison inverse des racines carrées des densités. Si l est la longueur de la corde d'acier, on a

$$\frac{l}{100} = \sqrt{\frac{8{,}95}{7{,}45}},$$

d'où

$$l = 1^m,096.$$

3° On sait que la quinte supérieure d'un son équivaut aux $\frac{3}{2}$ du nombre des vibrations de ce son. Les nombres de vibrations des sons émis par une corde étant inversement proportionnels

à la longueur de cette corde, on a, en appelant l' la longueur de la corde d'acier,

$$\frac{l'}{1{,}096} = \frac{1}{\frac{3}{2}},$$

d'où $$l' = 1{,}096 \times \frac{2}{3} = 0^{m},73.$$

(P. SAINTIN, à Versailles.)

[Ont résolu la même question : MM. Barge ; Barol ; Bernardeau ; Beyney ; Bourlat; Charpentier ; David ; Desnoës ; Dobryzniak ; Durand ; Faucillon ; Foucart ; Garin ; Grenouillot ; Guyon ; Henry ; Humblot ; Lautré ; Lestable ; Marx ; Millet ; Palustran ; Périnet ; Petit ; Pradelet ; Raymond ; Salles ; Thébault ; Ybert ; X., à Ajaccio.]

5050. — *Un conducteur est disposé dans une enceinte entourée d'eau. On lance dans ce conducteur pendant vingt minutes un courant électrique d'une intensité d'un demi-ampère ; la différence de potentiel aux deux extrémités de ce conducteur est de 110 volts, le poids de l'eau de l'enceinte est de 1023gr. On demande l'élévation de température de cette eau en admettant qu'il n'y ait aucune perte de chaleur par rayonnement.*

(*Bacc. lettres-math., Grenoble, 20 juillet et 5 nov. 1900.*)

On sait que la loi de Joule est résumée par la formule

$$Q \times 4{,}17 = I^2rt,$$

dans laquelle Q désigne la quantité de chaleur dégagée dans un temps t, I l'intensité du courant, r la résistance du conducteur.

En appelant V et V′ les potentiels aux extrémités du conducteur, on a, d'après la loi d'Ohm,

$$V - V' = Ir.$$

Par suite,

$$Q \times 4{,}17 = I(V - V')t.$$

Remplaçant les lettres par leur valeur, il vient

$$Q = \frac{0{,}5 \times 110 \times 20 \times 60}{4{,}17} = 15827^{cal},34.$$

L'élévation de température de l'eau est de

$$\frac{15827{,}34}{1023} = 15^{\circ},47.$$

(PRADELET.)

[Ont résolu la même question : MM. Bernardeau ; Beyney ; Boivin ; Bourlat ; Cattin ; Durand ; Filliol ; Foucry ; Guerrier ; Guyon ; Lambert ; Lapresle ; Lacape ; Lepoivre ; Lestable ; Loire ; Meynier ; de Saint-Gabriel.]

CONCOURS DE 1901 (*Suite*).

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

Mathématiques.

I. — **5060.** — Étant donné un triangle BAC, rectangle en A, on mène la hauteur AH. Soient O, ω et ω' les centres des cercles inscrits dans les triangles BAC, AHB et AHC, et r, ρ et ρ' les rayons respectifs de ces trois cercles. Démontrer :

1° que $\rho^2 + \rho'^2 = r^2$;

2° que le triangle $\omega H \omega'$ est rectangle et que $\omega\omega' = r\sqrt{2}$;

3° que le rayon du cercle circonscrit au triangle $\omega A \omega'$ est égal à r.

II. — **5061.** — 1° On veut planter 324 arbustes sur un terrain rectangulaire ABCD de dimensions $AB = 140^m$ et $BC = 32^m$. Ces arbustes doivent former des rangées équidistantes parallèles à AB (la première étant sur AB et la dernière sur DC) et des rangées équidistantes parallèles à BC (la première sur BC et la dernière sur DA). Trouver quelle doit être la distance de deux rangées parallèles consécutives, sachant que cette distance des rangées consécutives parallèles à BC doit être la même que celle des rangées parallèles à AB.

2° Les dimensions du rectangle étant toujours 140^m et 32^m, si l'on se proposait de planter n arbustes dans les conditions de l'énoncé, le problème ne serait possible que pour des valeurs de n convenablement choisies ; montrer que 324 est la plus petite de ces valeurs.

(*5 juin, de 7 h. 1/2 à 10 h. 1/2.*)

Calcul logarithmique.

Résoudre un triangle, connaissant

$$c = 2358{,}1, \qquad b = 3145{,}9, \qquad A = 112^{\circ}45'50''.$$

(*5 juin, de 1 h. 1/2 à 2 h. 1/2.*)

Épure.

5062. — Sur une droite parallèle au bord inférieur de la feuille, et à 13^{cm} de ce bord, marquer les points s, T, o, respectivement à 3^{cm}, 6^{cm} et 20^{cm} du bord de droite. Ces points sont situés dans le plan de comparaison désigné par H. s est la projection sur H d'un point S de cote 2^{cm}, o celle d'un point O de cote 8^{cm}.

Un cône de révolution a pour sommet le point S et pour base un cercle de centre O et ayant 10^{cm} de rayon.

T est le sommet d'un angle trièdre dont une arête TA, de pente $\frac{2}{1}$, se projette suivant To, les côtés croissant de T vers o. Les deux faces qui passent par TA ont chacune pour pente $\frac{21}{10}$. La troisième face est sur H.

On considère la partie du cône située à l'intérieur du trièdre ; représenter la projection sur H de ce solide supposé opaque.

Les génératrices de contour apparent du cône rencontrent la base de ce cône en deux points ; marquer leurs cotes.

Les deux premières faces du trièdre coupent le cône suivant des arcs d'ellipses ; marquer les cotes des points où ces arcs rencontrent le contour apparent du cône et où ils rencontrent les génératrices se projetant suivant so.

La troisième face coupe le cône suivant une hyperbole ; construire les asymptotes de cette courbe. Enfin, mener les tangentes à cette hyperbole et au cercle de base du cône, aux points où ces deux courbes se coupent.

(*6 juin, de 7 h. 1/2 à 10 h. 1/2.*)

CONCOURS GÉNÉRAUX

Classe de Mathématiques élémentaires.

Mathématiques (Paris et Départements).

5063. — Démontrer que l'équation

$$2a(x^2 - a^2 - b^2) + (b^2 + m^2)(x + a) = 0,$$

où a, b, m sont des nombres positifs donnés, a ses racines réelles et inégales.

Soient u et v ces deux racines, u étant la plus petite. En supposant que a, b restent fixes, et que m croisse de 0 à $+\infty$, on demande dans quel sens et entre quelles limites varient u et v ; quel est le maximum de

$$\frac{a - v}{a - u}$$

et pour quelle valeur de m est-il atteint ?

(*13 juin, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.*)

Classe de Première-Sciences.

Physique et Chimie (Paris et Départements).

I. — Exposer les faits que l'on a utilisés dans l'établissement de la bobine d'induction, dite de Ruhmkorff, et de ses accessoires.

II. — Les glucoses et leurs dérivés.

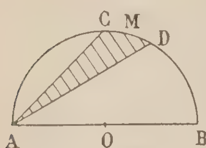
(*13 juin, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.*)

ÉCOLE NATIONALE ET SPÉCIALE DES BEAUX-ARTS

SECTION D'ARCHITECTURE

Mathématiques.

I. — **5064.** — Dans une demi-circonférence de rayon R décrite sur AB comme diamètre, on mène à partir du point A une corde AC égale au côté du carré inscrit dans cette circonférence et une corde AD égale au côté du triangle équilatéral inscrit : 1° Calculer la longueur de la corde CD et l'aire s de la figure ombrée ACMDA ; 2° Calculer l'aire S et le volume V du solide engendré par l'aire ombrée en tournant autour de AB ; 3° Calculer par logarithmes le rayon R, sachant que le volume du cône dont AC serait le rayon de base et dont AD serait la hauteur vaut $0^{mc},576\,328$; mettre tous les calculs.



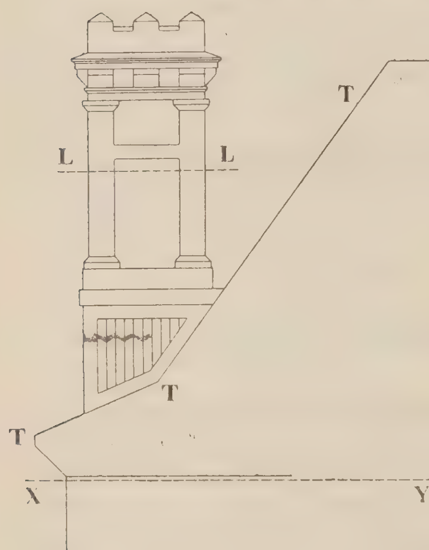
II. — Former, résoudre, et discuter suivant les valeurs de m, l'équation en x qui donne les valeurs de x qui satisfont aux deux équations aux deux inconnues x et y,

$$\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 3y^2 + x - 2y = 0, \\ y - x - 1 = m(2x + 1) ; \end{cases}$$

mettre tous les calculs.

(*1re session, 22 avril 1900. — Durée : 2 heures.*)

Géométrie descriptive.



On suppose deux souches de cheminées sortant des deux faces d'une toiture à la rencontre de deux bâtiments faisant entre eux un angle de 45°.

La pente des toitures est donnée par le profil T-T, en vraie hauteur par rapport à la ligne de terre XY ; la souche de cheminée est donnée en façade latérale L-L ; les plans P-P sont pris à la hauteur L-L.

Faire les deux projections de l'ensemble, et le tracé des ombres portées : 1° par chaque souche de cheminée sur elle-même ; 2° par ces souches sur les toitures ; 3° par la souche de front sur la souche oblique. — Ombres à 45°.

NOTA. — Les candidats sont invités *expressément* à tracer sur l'épure toutes les lignes de construction au moyen desquelles ils ont obtenu les projections et les ombres demandées. — La projection horizontale doit être placée sur l'épure à gauche et en bas, à l'endroit où elle est marquée sur le dessin donné ; la ligne de terre XY doit être placée sur l'épure à l'endroit indiqué également sur le dessin.

(*1re session, 23 avril 1900. — Durée : 8 heures.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

5065. — A et B étant les dénominateurs de fractions irréductibles génératrices de fractions périodiques simples ayant respectivement a chiffres et b chiffres à la période, démontrer :

1° qu'une fraction irréductible de dénominateur AB donne naissance à une fraction périodique simple ;

2° que si A et B sont premiers entre eux, le nombre des chiffres périodiques de cette dernière fraction est le p. p. c. m. de a et b.

5066. — On donne une surface prismatique dont la section droite est un triangle équilatéral ABC de côté a, et l'on mène par le point A un plan qui coupe cette surface suivant un triangle AMP rectangle en M.

1° Si l'on pose $BM = x$, $CP = y$, trouver la relation qui existe entre a, x et y ; expliquer géométriquement pourquoi elle est du premier degré en y et du second degré en x.

2° Trouver le minimum de y, soit algébriquement, soit géométriquement.

3° Calculer l'aire du triangle AMP, soit en fonction de x, soit en fonction de y, et étudier la variation de cette aire.

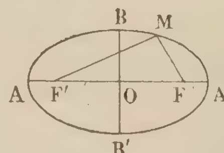
(A. GOULARD.)

5067. — On donne dans l'espace deux droites D et D′ dont la perpendiculaire commune est AA′. Trouver le lieu des points du plan perpendiculaire au milieu de AA′ qui sont également distants de D et D′.

5068. — Un cercle étant donné par les traces de son plan et la position qu'il occupe après le rabattement de ce plan sur le plan horizontal autour de la trace de même nom, construire les projections d'un point de ce cercle satisfaisant à la condition que les distances de ce point au plan vertical et au plan horizontal soient entre elles dans le rapport de 1 à 2.

(*Bacc. lettres-sciences, Dijon, juillet 1900.*)

5069. — Un point M, mobile sans frottement sur une ellipse, est attiré vers les foyers F et F′ par des forces proportionnelles aux rayons vecteurs MF et MF′.



En quels points de la courbe le mobile M doit-il être placé, sans vitesse initiale, pour qu'il y demeure en équilibre ?

(*Bacc. lettres-math., Marseille, avril 1900.*)

5070. — Un corps tombe verticalement d'une certaine hauteur inconnue h. Pendant la durée de la chute un pendule de 50^{cm} de longueur fait exactement 4 oscillations. Trouver la hauteur h.

(NOTA. — On néglige la résistance de l'air.)

(*Bacc. lettres-sciences, Rennes, mars 1901.*)

5071. — Entre les extrémités B et D de deux conducteurs AB et CD il existe une différence de potentiel constante égale à 220^{volts}. Entre ces deux points, on a installé en dérivation 5 lampes à incandescence de 16 bougies chacune. Sachant qu'une lampe à incandescence consomme une puissance de 4^{watts} par bougie, on demande :

A B C D

1° l'intensité du courant qui passe dans chacune des lampes ;

2° l'intensité du courant qui passe dans les conducteurs principaux AB, CD ;

3° l'énergie consommée par les cinq lampes pendant une heure et le coût pendant une heure de l'éclairage ainsi obtenu en sachant que l'énergie est vendue au prix de $0^{fr},06$ l'hectowatt-heure.

(*Bacc. lettres-sciences, Nancy, mars 1901.*)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet, FACDOUEL, Dir.

25e Année. — N° 20. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES Paris, le 15 Juillet 1901.

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

DÉTERMINATION ÉLÉMENTAIRE DU CENTRE DE COURBURE DE LA PARABOLE

par **M. O.**

Des propriétés classiques de la sous-tangente et de la sous-normale à la parabole résulte immédiatement que la tangente et la normale coupent l'axe en des points symétriques par rapport au foyer (*).

En effet, de

$$\mathrm{TH} = 2\mathrm{TS},$$

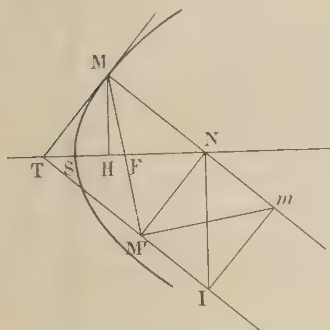
on déduit que

$$\mathrm{TH} + 2\mathrm{SF} = 2(\mathrm{TS} + \mathrm{SF})$$

ou

$$\mathrm{TN} = 2\mathrm{TF}.$$

Si donc on prend le symétrique M′ de M par rapport à F, ce point décrira une parabole homothétique de la première par rapport à F, dont M′N et M′T seront respectivement la tangente et la normale.



Dès lors, le point de rencontre I de M′T et de la perpendiculaire à l'axe en N est le centre instantané de rotation de l'angle droit M′Nm, et le point m où le côté Nm de cet angle touche son enveloppe, c'est-à-dire le centre de courbure de la première parabole répondant au point M, s'obtient en abaissant de I la perpendiculaire Im sur ce côté.

D'ailleurs l'angle FM′m, égal à FNI, est droit, d'où le théorème classique :

La projection du rayon de courbure en un point de la parabole sur le rayon vecteur de ce point est double de ce rayon vecteur.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Sur l'existence et la construction d'un polygone plan dont on connait : soit les milieux des côtés ; soit les perpendiculaires aux milieux des côtés.

Extension aux polygones gauches

par M. **P. Mineur**, professeur au lycée de Lille.

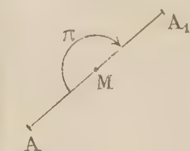
I. Soient M_1, M_2, M_3, ..., M_{n-1}, M_n les milieux des côtés consécutifs d'un polygone plan (P) de n côtés qu'on se propose de construire.

(*) On peut voir que les triangles MFT, MFN sont isocèles en remarquant que la tangente fait des angles égaux avec le rayon vecteur et la parallèle à l'axe.

Cherchons le sommet O commun aux deux côtés consécutifs de milieux M_1 et M_n. Ce point doit remplir la condition suivante (nécessaire et suffisante). Si on prend :

le point O_1 symétrique de O par rapport à M_1,
puis — O_2 — O_1 — M_2, etc.,
enfin — O_n — O_{n-1} — M_n,
le point O_n doit coïncider avec le point O.

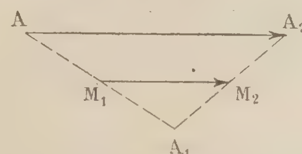
Ces symétries successives définissent une transformation du plan en lui-même et font correspondre à un point quelconque A du plan un point A_n, transformé de A. La question revient à trouver les points qui coïncident avec leur transformé (nous appellerons ces points les *points invariants*).



Pour cela, nous remarquerons :

1° qu'une symétrie par rapport à un point M est équivalente à une rotation du plan sur lui-même de l'angle π autour de M, dans un sens quelconque ;

2° que deux symétries successives autour de M_1, puis de M_2, sont équivalentes à la translation $2\overline{M_1M_2}$.



1° *Si n est un nombre pair*, la suite des symétries équivaut à la suite des translations $2\overline{M_1M_2}$, $2\overline{M_3M_4}$, ..., $2\overline{M_{n-1}M_n}$, et par suite à une translation unique 2S, où S désigne la somme géométrique des segments $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_3M_4}$, ..., $\overline{M_{n-1}M_n}$.

En général, comme $S \neq 0$, la translation résultante déplace tout point du plan ; pas de point invariant, pas de solution.

Exceptionnellement, la résultante S peut être nulle, tout point du plan coïncide avec son transformé ; il y a une infinité de solutions ; on peut prendre le sommet O arbitrairement dans le plan.

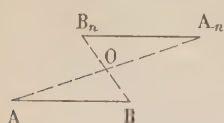
Remarque. — On trouve ainsi la généralisation du cas bien connu du quadrilatère, où le problème n'est possible que si $M_1M_2M_3M_4$ est un parallélogramme.

Dans le cas où $n = 2k$, $k > 2$, cette condition est remplacée par celle-ci : Si dans le contour $M_1M_2\ldots M_n$ on prend les composantes de deux en deux, leur somme géométrique doit être nulle.

Cette condition est manifestement nécessaire, le raisonnement précédent montre qu'elle est suffisante pour que M_1, M_2, ..., M_n soient les milieux des côtés d'un polygone (n étant pair).

2° *Si n est impair*, la suite des symétries équivaut à la suite

des translations $\overline{2M_1M_2}$, $\overline{2M_3M_4}$, ..., $\overline{2M_{n-2}M_{n-1}}$, suivie d'une rotation de l'angle π autour de M_n. Ce déplacement du plan sur lui-même est équivalent à une rotation unique de l'angle π autour d'un point O qu'on obtient, d'après une règle bien connue, en prenant le point commun à deux droites AA_n, BB_n joignant deux points quelconques du plan à leurs transformés A_n et B_n.



Dans ce cas, un seul point invariant, une seule solution.

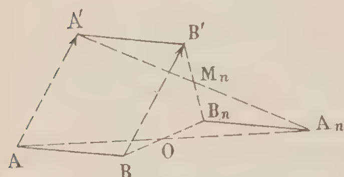
Remarque I. — Ce résultat généralise le résultat bien connu pour le triangle.

Remarque II. — Exceptionnellement, il peut arriver que le point O coïncide avec M_1, alors le côté OO' se réduit au point M_1; on obtient en réalité un polygone de $(n-1)$ côtés qui a pour milieux de ses côtés les points M_2, M_3, ..., M_n.

EXTENSION AUX POLYGONES GAUCHES. — Ces résultats s'appliquent aux polygones gauches. Le problème est le même avec cette différence que les symétries s'étendent à tout l'espace, au lieu d'être limitées à un plan.

Dans l'Espace comme dans le Plan, deux symétries successives équivalent à une translation, par suite *pour n pair*, même conclusion que dans le plan.

Si n est impair, on est ramené à chercher les points invariants d'une translation suivie d'une symétrie, ce qui conduit facilement à la même construction et à la même conclusion que dans le plan bien que la symétrie par rapport à un point dans l'espace ne soit pas équivalente à une rotation.

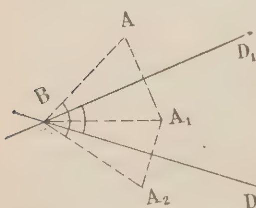


Remarque. — On peut trouver ces résultats par une méthode connue, qui consiste à décomposer le polygone en quadrilatères à l'aide de diagonales. La solution indiquée ci-dessus présente l'avantage de faire rentrer le problème précédent et le suivant dans une même méthode.

II. — Soient données les perpendiculaires au milieu des côtés consécutifs D_1, D_2, D_3, ..., D_n. Nous supposerons que deux droites consécutives de cette suite (y compris D_1 et D_n) ne sont pas parallèles.

La recherche du sommet O commun aux côtés perpendiculaires à D_1 et D_n revient à celle des points invariants de la transformation du plan P en lui-même obtenue par des symétries successives autour de D_1, D_2, ..., D_n.

On sait que deux symétries successives autour de deux droites non parallèles D_1, D_2 équivalent à une rotation de l'angle $2(\widehat{D_1, D_2})$ autour du point commun à ces droites.



1° *Si n est pair*, la transformation est équivalente à une suite de rotations dont les angles sont $2(\widehat{D_1, D_2})$, $2(\widehat{D_3, D_4})$, ..., $2(D_{n-1}, D_n)$, qui est elle-même équivalente soit à une rotation unique dont l'angle est

$$2\alpha = 2(\widehat{D_1, D_2}) + 2(\widehat{D_3, D_4}) + \ldots + 2(\widehat{D_{n-1}, D_n}) \quad \text{si} \quad \alpha \neq k\pi,$$

$$k \text{ entier } \lesseqgtr 0 \quad (\textit{cas général});$$

soit à une translation si $\alpha = k\pi$ (cas d'exception).

Dans le premier cas $(\alpha \neq k\pi)$, un seul point invariant, le centre de la rotation unique ; une solution.

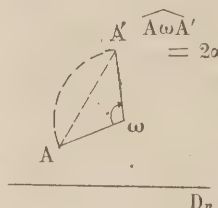
Dans le deuxième cas $(\alpha = k\pi)$, la translation déplace tous les points du plan (0 solution), ou les laisse tous fixes (infinité de solutions, O est arbitraire dans le plan).

2° *Si n est impair*, la transformation est équivalente à une suite de rotations dont les angles sont $2(\widehat{D_1, D_2})$, $2(\widehat{D_3, D_4})$, ..., $2(\widehat{D_{n-2}, D_{n-1}})$ suivies de la symétrie autour de D_n.

Les rotations successives sont équivalentes à une rotation unique dont l'angle est :

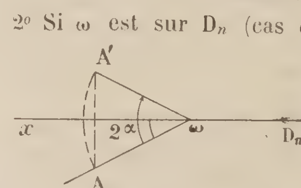
$$2\alpha = 2(\widehat{D_1, D_2}) + 2(\widehat{D_3, D_4}) + \ldots + 2(\widehat{D_{n-2}, D_{n-1}})$$

si $\alpha \neq k\pi$. Désignons par ω le centre de cette rotation.



1° Si ω n'est pas sur D_n (cas général), la rotation amène un point A quelconque dans le plan en A' et la symétrie ne pourrait le ramener en A que si D_n est perpendiculaire au milieu de AA', c'est-à-dire passe par ω, ce qu'on ne suppose pas ; donc pas de point invariant, pas de solution.

2° Si ω est sur D_n (cas d'exception), A sera invariant si $\widehat{A\omega x} = \alpha$; et il en sera de même de tous les points de la droite ωA. On a une infinité de solutions, le sommet cherché O est arbitraire sur une droite.

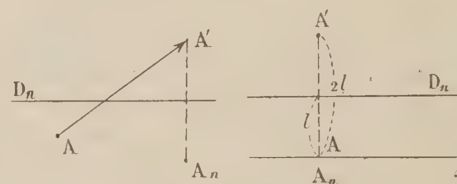


Remarque. — Ce dernier cas se présente lorsque les droites D_1, D_2, ..., D_n concourent; les polygones obtenus sont alors homothétiques par rapport au point de concours.

Considérons maintenant le cas d'exception où $\alpha = k\pi$, la suite des rotations équivaut à une translation qu'on fait toujours suivre de la symétrie par rapport à D_n.

1° Si la translation n'a pas lieu perpendiculairement à D_n, pas de point invariant, pas de solution.

2° Si la translation est perpendiculaire à D_n et d'amplitude $2l$, on a une droite invariante Δ parallèle à D_n à la distance l. Infinité de solutions.



Si $l = 0$, Δ est confondue avec D_n, on a un côté nul et on n'obtient en réalité qu'un polygone de $(n-1)$ côtés, dont un sommet est sur D_n.

EXTENSION AUX POLYGONES GAUCHES. — Les mêmes considérations s'appliquent à la recherche d'un polygone gauche connaissant les plans perpendiculaires au milieu de ses côtés. Les symétries successives ont lieu par rapport à ces plans et s'étendent à tout l'espace.

Deux symétries successives par rapport à deux plans non parallèles équivalent à une rotation autour de la droite commune aux deux plans.

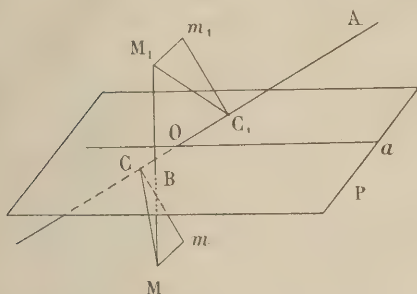
Par suite *si n est pair*, on aura une suite de rotations autour d'axes en général différents, et la transformation équivaudra à un déplacement hélicoïdal de l'espace.

Si la translation de ce mouvement n'est pas nulle, pas de point invariant; si elle est nulle, on a une infinité de points invariants en ligne droite sur l'axe de sa rotation dans le cas

où cette rotation n'est pas nulle, ou bien tout point de l'espace est invariant dans le cas où la rotation est aussi nulle.

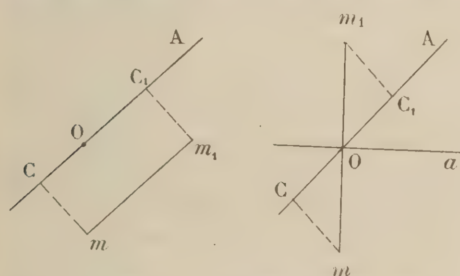
Si n est impair, on a un mouvement hélicoïdal suivi d'une symétrie par rapport à un plan P.

Dans le cas général où l'axe (A) du mouvement hélicoïdal n'est ni parallèle ni perpendiculaire à P et où dans ce mouvement la rotation et la translation ne sont nulles ni l'une ni l'autre, la recherche suivante montre qu'il y a un point invariant et un seul.



Soient P le plan de symétrie, OA l'axe du mouvement hélicoïdal, qui se projette sur P en Oa. Soient M un point invariant, M_1 son symétrique par rapport à P, et B le milieu de MM_1 dans P.

Le déplacement hélicoïdal doit amener M_1 en M ; comme il ne modifie pas la distance d'un point à l'axe, M et M_1 sont équidistants de OA, et si on les projette en m et m_1 sur le plan OAa, en C et C_1 sur l'axe OA, comme on a : $MC = M_1C_1$ et $Mm = M_1m_1$ (MM_1 est parallèle au plan OAa), il en résulte que $mC = m_1C_1$, m et m_1 sont équidistants de Oa.

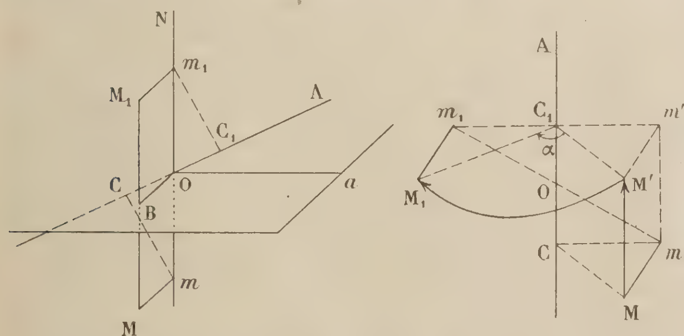


Ils ne sont pas d'un même côté de OA, sinon MM_1 et OA seraient parallèles, ce qui est contraire à l'hypothèse faite.

Ils sont donc de part et d'autre de OA et à égale distance ; le milieu de mm_1 est par suite sur OA, et comme ce point est la projection de B, milieu de MM_1, sur OAa, il ne peut être qu'en O, mm_1 coïncide avec la normale ON à P en O.

Donc *un premier lieu de* M_1 est le plan perpendiculaire à Oa mené par O.

De plus $\overline{CC_1}$ représente la translation l du mouvement hélicoïdal, donc C_1 est parfaitement déterminé : $\overline{CO} = \overline{OC_1} = \frac{l}{2}$; M_1 est dans le plan perpendiculaire à OA mené par C_1.

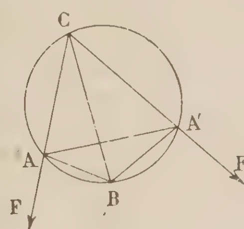


La translation du déplacement amène M en M′ qui se projette sur OA en C_1, et la rotation amène M′ en M_1 ($\widehat{M'C_1M_1} = \alpha$). Par suite $(\widehat{m_1C_1M_1}) = -\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$, égalité qui définit la droite C_1M_1 deuxième lieu de M_1 qui rencontre le premier lieu en un point qui est le point M_1 (ce point existe toujours à cause de l'hypothèse $\alpha \neq 2k\pi$).

Dans les cas particuliers où OA est parallèle ou perpendiculaire à P, ou dans ceux où le déplacement se réduit à une rotation ou à une translation, on voit facilement qu'il y a zéro ou une infinité de solutions.

SUR LA COMPOSITION DES FORCES

L'Enseignement mathématique du 15 mai 1901 contient une lettre de M. Maurice d'Ocagne, indiquant un procédé très simple pour déduire la loi de composition de deux forces parallèles de celle de la composition de deux forces concourantes.



Soient deux forces F et F′, appliquées en deux points invariablement liés A et A′, et dont les lignes d'action concourent en C. Soit B le point où la ligne d'action de la résultante R coupe le cercle circonscrit à AA′C ; on sait que l'on a

$$\frac{F}{\sin(R,F')} = \frac{F'}{\sin(F,R)} = \frac{R}{\sin(F,F')}.$$

Or $\sin(R,F') = \sin\widehat{BAA'}$,

$$\sin(R,F) = \sin\widehat{AA'B}, \qquad \sin(F,F') = \sin\widehat{ABA'},$$

et les sinus des angles BAA′, AA′B, ABA′ étant proportionnels aux côtés BA′, AB, AA′, on a

$$\frac{F}{BA'} = \frac{F'}{AB} = \frac{R}{AA'} = \frac{F+F'}{AB+BA'}.$$

Si C se trouve rejeté à l'infini, les points A, A′, B se trouvent en ligne droite, et on retombe sur les égalités qui traduisent la loi de composition des forces parallèles.

On déduit de la remarque précédente que si les forces F et F tournent, dans leur plan, d'un même angle autour de A et A′, la ligne d'action de leur résultante tourne du même angle autour d'un point fixe B ; et cette proposition peut s'étendre au cas d'un nombre quelconque de forces.

CONCOURS GÉNÉRAL DE SECONDE MODERNE (1900)

Physique.

4864. — *Au centre d'un ballon sphérique en verre, on place un petit objet lumineux dont l'image est projetée sur un écran par une lentille convenablement située entre l'écran et le ballon actuellement plein d'air.*

On mesure la grandeur linéaire de l'image réelle. Puis on remplit le ballon d'un liquide réfringent.

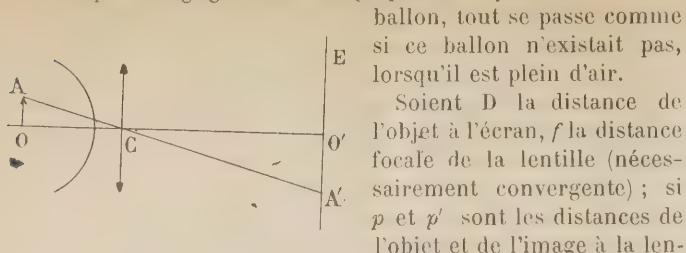
1° *Faudra-t-il déplacer la lentille pour maintenir sur l'écran une image nette de l'objet ?*

2° *L'indice de réfraction du liquide étant n, quelle sera a priori le rapport de la grandeur linéaire de cette seconde image à celle de la première ?*

3° *A quelles applications pourront conduire les résultats de ces expériences ?*

(Il n'y a pas lieu de tenir compte des effets optiques de la paroi de verre du ballon.)

I. Puisqu'on néglige les effets optiques de la paroi du verre du ballon, tout se passe comme si ce ballon n'existait pas, lorsqu'il est plein d'air.



Soient D la distance de l'objet à l'écran, f la distance focale de la lentille (nécessairement convergente) ; si p et p' sont les distances de l'objet et de l'image à la lentille, on a

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}, \quad \text{avec} \quad p+p'=\mathrm{D},$$

d'où

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{\mathrm{D}-p}=\frac{1}{f}, \quad p^2-\mathrm{D}p+\mathrm{D}f=0.$$

Cette équation montre que si $\mathrm{D}^2-4\mathrm{D}f \geqslant 0$, ou $\mathrm{D} \geqslant 4f$, il y a deux positions de la lentille pour lesquelles la projection de l'objet se fait nettement sur l'écran, et la distance d de ces deux positions est

$$d=\sqrt{\mathrm{D}^2-4\mathrm{D}f}. \tag{1}$$

II. Lorsqu'on introduit un liquide d'indice n dans le ballon, l'objet *très petit* est placé au centre d'un dioptre, son image *virtuelle* sera également au centre, droite, et le grossissement linéaire sera n.

Donc on ne déplacera pas la lentille.

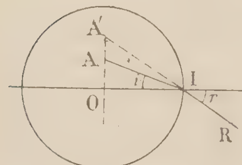
Si O désigne la grandeur de l'objet, $\mathrm{O}'=n\mathrm{O}$ celle de son image dans le dioptre, I et I' les images fournies par la lentille (I dans le cas de l'air, I' dans le cas du liquide),

$$\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{O}}=\frac{\mathrm{I}'}{\mathrm{O}'}=\frac{\mathrm{I}'}{n\mathrm{O}},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{I}'}{\mathrm{I}}=n. \tag{2}$$

Remarque. — Il est facile de montrer directement que le grossissement dans le dioptre est n.



Menons par l'extrémité A de l'objet le rayon AI qui passe au sommet du dioptre ; faisant l'angle d'incidence i, il sort suivant IR dont le prolongement rencontre l'axe secondaire AO en A', image virtuelle de A. r étant l'angle d'émergence, on a

$$\frac{\sin r}{\sin i}=n$$

ou, puisque l'objet est petit et que les angles i et r le sont aussi,

$$\frac{r}{i}=n.$$

Les deux triangles A'OI et AOI donnent

$$\frac{\mathrm{A'O}}{\mathrm{AO}}=\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} i}=\frac{\sin r}{\sin i}\cdot\frac{\cos i}{\cos r}=n.$$

C. q. f. d.

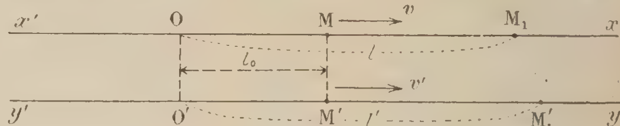
III. Applications. — 1° *Cas du ballon plein d'air.* Tout se passe comme s'il n'existait pas. La formule (1) montre que si on mesure la distance d des deux positions de la lentille, on peut en déduire $f=\frac{\mathrm{D}^2-d^2}{4\mathrm{D}}$. Donc on peut mesurer la distance focale d'une lentille convergente (*Méthode de Bessel*).

2° *Cas du liquide.* En mesurant les dimensions linéaires des images I et I' correspondant à une même position de la lentille, on peut avoir l'indice n du liquide en employant la formule (2).

A chaque position de la lentille correspond une valeur de n ; on prendra la moyenne.

ALGÈBRE

4618. — *Deux mobiles M et M' se meuvent sur deux trajectoires rectilignes parallèles $x'x$, $y'y$ et se trouvent, à l'instant initial, à la même distance l_0 des points de repère O et O', ou origines des espaces et du même côté de ces points, vers la droite, par exemple. Ils sont animés de vitesses respectives v et v' dans ce même sens, mais le mobile M est en outre soumis à une accélération constante γ de sens contraire à la vitesse v. La vitesse v' du mobile M' reste constante pendant toute la durée du mouvement. Au bout d'un temps x le mobile M est en M_1, ayant parcouru un espace l et le mobile M' est en M'_1, ayant parcouru un espace l'. On demande d'étudier la variation du rapport $\frac{l}{l'}$ quand le temps x varie de moins l'infini à plus l'infini et de représenter cette variation par une courbe figurative.*



On supposera $l_0=10^{\mathrm{m}}$, $v=5^{\mathrm{m}}$, $\gamma=0^{\mathrm{m}},1$ et $v'=3^{\mathrm{m}}$.

(*Bacc. lettres-sciences, Paris, juillet 1899.*)

L'espace parcouru par le mobile M animé d'une vitesse v et soumis à une accélération γ de sens contraire à la vitesse v est, au bout du temps x,

$$l=l_0+vx-\frac{1}{2}\gamma x^2.$$

De même, l'espace parcouru par le mobile M' animé de la seule vitesse v' est $\quad l=l_0+v'x.$

Le rapport $\frac{l}{l'}$ dont il s'agit d'étudier les variations s'exprime donc par

$$y=\frac{l_0+vx-\frac{1}{2}\gamma x^2}{l_0+v'x}.$$

Pour cela, formons la dérivée de y. On obtient

$$y'=\frac{(v-\gamma x)(l_0+v'x)-(l_0+vx-\frac{1}{2}\gamma x^2)v'}{(l_0+v'x)^2}$$
$$=-\frac{\gamma v'x^2+2l_0\gamma x-2(v-v')l_0}{2(l_0+v'x)^2}.$$

y' s'annule en même temps que le trinome du numérateur, c'est-à-dire pour

$$\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\}=\frac{-l_0\gamma\pm\sqrt{l_0^2\gamma^2+2\gamma v'(v-v')l_0}}{\gamma v'}.$$

Lorsque ces valeurs sont réelles (condition toujours remplie pour $v>v'$), y passe par un maximum et par un minimum ; dans le cas contraire, y' est toujours négatif et y décroît constamment.

Pour construire la courbe figurative dans le cas numérique donné, remarquons que dans ce cas, les valeurs de x_1 et x_2 sont

$$\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\}=\frac{10}{3}(-1\pm\sqrt{13})=\left\{\begin{matrix}-15{,}35,\\8{,}68.;\end{matrix}\right.$$

et par suite, celles de y,

$$\left.\begin{matrix}y_1\\y_2\end{matrix}\right\}=\frac{16\pm\sqrt{13}}{9}=\left\{\begin{matrix}2{,}17,\\1{,}37.\end{matrix}\right.$$

D'ailleurs, y devient infini pour chacune des valeurs

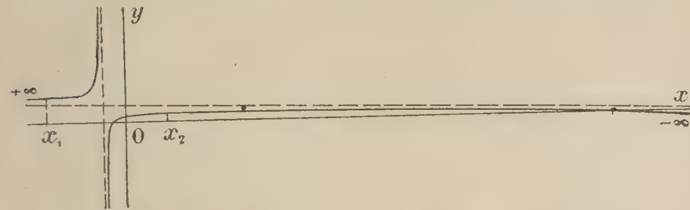
$$x=\mp\infty, \qquad x=-\frac{10}{3}=-3{,}33\ldots,$$

et s'annule en même temps que le trinome

$$10 + 5x - 0,05x^2,$$

c'est-à-dire pour $x = \frac{5 \pm 3\sqrt{3}}{0,1} = \begin{cases} 101,96, \\ -1,96. \end{cases}$

Ces divers résultats permettent d'établir la courbe figurative



ci-dessus des variations de y lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$. Cette courbe a pour asymptote la droite

$$y = -\frac{x}{60} + \frac{2}{9},$$

ce qui permet de tracer la branche infinie inclinée.

5041. — *Sur le côté* AB *d'un triangle équilatéral* ABC, *on prend un point* P *dont la distance au sommet* A *sera désignée par* x; *on désignera par* a *la longueur du côté* AB; *du point* P *on mène une perpendiculaire* PQ *sur le côté* BC, *du point* Q *on mène une perpendiculaire* QR *sur* CA, *et du point* R *on mène une perpendiculaire* RP_1 *sur* AB. *On demande :*

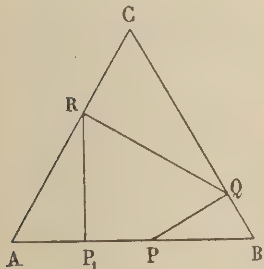
1° *De déterminer* x *de manière que* P_1 *coïncide avec* P ;

2° *De déterminer* x *de manière que la somme des carrés des trois perpendiculaires* PQ, QR *et* RP_1 *soit minimum et de trouver ce minimum ;*

3° (Facultatif). *On calculera d'abord la distance* PP_1, *puis du point* P_1 *on opérera comme on a fait en partant du point* P, *et on obtiendra un deuxième point,* P_2; *on calculera alors* P_1P_2 *et on cherchera le rapport* $\frac{P_1P_2}{PP_1}$. *Puis partant de* P_2 *on opérera comme on a fait en partant de* P *et* P_1 ; *on demande vers quelle position limite tend la suite des points* P, P_1, P_2, ...

(*Bacc. lettres-math., Marseille, juillet 1900.*)

1° Les triangles rectangles BPQ, CQR, ARP_1, ayant chacun un angle de 60°, on a successivement



$$BQ = \frac{PB}{2} = \frac{a-x}{2},$$

$$QC = a - BQ = \frac{a+x}{2},$$

$$CR = \frac{QC}{2} = \frac{a+x}{4},$$

$$RA = a - CR = \frac{3a-x}{4},$$

$$AP_1 = \frac{RA}{2} = \frac{3a-x}{8}.$$

Pour que P_1 coïncide avec P, il faut que

$$AP_1 = AP \quad \text{ou} \quad \frac{3a-x}{8} = x,$$

d'où

$$x = \frac{a}{3}.$$

On a alors AP = BQ = CR et PQR est équilatéral.

2° On a

$$\overline{PQ}^2 = \frac{3}{4}\overline{PB}^2 = \frac{3}{4}(a-x)^2,$$

$$\overline{QR}^2 = \frac{3}{4}\overline{QC}^2 = \frac{3}{16}(a+x)^2,$$

$$\overline{RP}_1^2 = \frac{3}{4}\overline{RA}^2 = \frac{3}{64}(3a-x)^2;$$

d'où

$$\overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2 + \overline{RP}_1^2 = \frac{3}{64}(21x^2 - 30ax + 29a^2).$$

Le minimum de cette somme correspond à celui du trinome

$$21x^2 - 30ax + 29a^2.$$

Le coefficient de x^2 étant positif, on sait que ce minimum est atteint pour

$$x = \frac{15a}{21} = \frac{5a}{7}.$$

La somme minimum a alors pour valeur

$$S = \frac{3}{64}\left(21 \times \frac{25a^2}{49} - \frac{150a^2}{7} + 29a^2\right) = \frac{6}{7}a^2.$$

3° On a vu que

$$AP_1 = \frac{3a-x}{8};$$

donc $PP_1 = x - AP_1 = \frac{9x-3a}{8}$.

De même $AP_2 = \frac{3a - AP_1}{8} = \frac{21a+x}{64}$

et $P_1P_2 = AP - AP_2 = \frac{3a-9x}{64}$.

Par suite $\frac{P_1P_2}{PP_1} = -\frac{1}{8}$.

Les segments PP_1, P_1P_2, P_2P_3, ... forment ainsi une progression géométrique indéfinie de raison $-\frac{1}{8}$, et leur somme représente visiblement la distance qui sépare P du point P_∞. En appliquant la formule connue

$$s = \frac{a}{1-q},$$

on peut écrire

$$PP_\infty = \frac{PP_1}{1+\frac{1}{8}} = \frac{8}{9}PP_1 = \frac{3x-a}{3}$$

et

$$AP_\infty = AP - PP_\infty = \frac{a}{3}.$$

On retrouve ainsi le point P déterminé au 1°, résultat facile à expliquer en observant que le segment $P_{n-1}P_n$ tend vers zéro pour n infini.

(Edmond BARBÉ, à Mazamet.)

[Ont résolu complètement la même question : MM. H. Belbenoit ; Bénech ; A. Bernardeau ; M. Beyney ; A. Bourlat ; M. Courtade ; E. Durand ; Gasluc de Sénébron ; R. Henry ; H. Lacape ; A. Lapresle ; T. Millet ; M. Norreel ; Pétrus Guerrier ; Poujol ; A. de Saint-Gabriel ; G. Sanpité ; J. Schwarz.

Ont résolu partiellement la même question : MM. V. Barol ; H. Dobryzniak ; G. Grünfelder ; H. Lamarre ; G. Lepoivre ; J. Lestable ; A. Pradelet ; F. Ronquier ; A. Vannier.]

5043. — *Dans un demi-cercle dont le diamètre* AB *est représenté par* 2R, *on mène une corde* CD *parallèle à* AB, *et l'on mène deux droites* CE, DF *formant deux triangles isocèles* PCD, PEF *rectangles en* P. *Chacun des angles* C, D, E, F *est donc égal à 1/2 angle droit. On suppose la corde* CD *assez petite pour que le point* P *soit à l'intérieur du demi-cercle* ACDB. *Déterminer la longueur* $2x$ *de la corde* CD *de manière que la somme des aires des triangles* PCD, PEF *soit égale à l'aire d'un carré de côté* m.

Examiner entre quelles limites m *doit être compris.*

On démontrera d'abord que la distance du point P *à la droite* CD *est égale à* x.

(*Bacc. lettres-math., Toulouse, juillet 1900.*)

Le triangle PMC étant rectangle et ayant l'angle en C égal à $\frac{1}{2}$ droit est isocèle ; donc $PM = CM = \frac{CD}{2} = x$.

Menons la droite OP perpendiculaire au milieu M de CD. Les triangles PCD, PEF ayant chacun leur base double de la hauteur correspondante ont pour surfaces x^2 et $\overline{PO}^2$. On doit donc avoir

$$x^2 + \overline{PO}^2 = m^2.$$

Or $\quad PO = OM - x,$

et dans le triangle rectangle OMC,

$$OM = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

L'équation du problème est alors

$$x^2 + (\sqrt{R^2 - x^2} - x)^2 = m^2$$

ou, en développant le carré et isolant le radical,

$$x^2 + R^2 - m^2 = 2x\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Si on élève les deux membres de cette équation au carré, on obtient l'équation plus générale

$$f(x^2) = 5x^4 - 2(m^2 + R^2)x^2 + (m^2 - R^2)^2 = 0.$$

Pour qu'une racine de cette équation appartienne à la précédente, il faut et il suffit que

$$x^2 > m^2 - R^2\ ;$$

de plus, pour que P soit intérieur au demi-cercle ACDB, il faut que

$$x^2 < \frac{R^2}{2}.$$

Ces deux inégalités ne peuvent être vérifiées à la fois que si

$$m^2 < \frac{3R^2}{2}. \qquad (1)$$

Pour que $f(x^2) = 0$ ait ses racines en x^2 réelles (et alors elles seront toutes deux positives, leur produit et leur somme ayant le signe $+$), il faut que

$$(m^2 + R^2)^2 - 5(m^2 - R^2) \geqslant 0$$

ou

$$4(m^4 - 3R^2m^2 + R^4) \leqslant 0,$$

ce qui donne

$$\frac{R^2}{2}(3 - \sqrt{5}) < m^2 < \frac{R^2}{2}(3 + \sqrt{5}).$$

A cause de l'inégalité (1) il faut, pour qu'on ait une solution, que

$$\frac{R^2}{2}(3 - \sqrt{5}) < m^2 < \frac{3R^2}{2}. \qquad (2)$$

Si $m^2 < R^2$, l'inégalité $x^2 > m^2 - R^2$ est vérifiée, puisque les valeurs de x^2 sont positives ; on a donc

$$m^2 - R^2 < x'^2 < x''^2.$$

Si $\quad R^2 < m^2 < \frac{3R^2}{2}$, on a

$$f(m^2 - R^2) = 4(m^2 - R^2)(m^2 - 2R^2) < 0\ ;$$

donc

$$x'^2 < m^2 - R^2 < x''^2.$$

Comparons les racines à $\frac{R^2}{2}$

$$f\left(\frac{R^2}{2}\right) = \left(m^2 - \frac{R^2}{2}\right)\left(m^2 - \frac{5R^2}{2}\right).$$

Si $\quad \frac{R^2}{2}(3 - \sqrt{5}) < m^2 < \frac{R^2}{2},$

$f\left(\frac{R^2}{2}\right)$ est positive, et, comme

$$\frac{x'^2 + x''^2}{2} = \frac{m^2 + R^2}{5} < \frac{R^2}{2}$$

car cette inégalité équivaut à $m^2 < \frac{3R}{2}$, on a

$$x'^2 < x''^2 < \frac{R^2}{2}.$$

Si $\quad \frac{R^2}{2} < m^2, \qquad f\left(\frac{R^2}{2}\right) < 0, \qquad$ et on a

$$x'^2 < \frac{R^2}{2} < x''^2.$$

Donc :

si $\frac{R^2}{2}(3 - \sqrt{5}) < m^2 < \frac{R^2}{2}, \quad (m^2 - R^2) < 0 < x'^2 < x''^2 < \frac{R^2}{2}$;

deux solutions ;

si $\frac{R^2}{2} < m^2 < R^2, \qquad m^2 - R^2 < 0 < x'^2 < \frac{R^2}{2} < x''^2$;

une solution donnée par la plus petite racine ;

si $\quad R^2 < m^2 < \frac{3R^2}{2}, \qquad x'^2 < m^2 - R^2 < \frac{R^2}{2} < x''^2$;

il n'y a pas de solution.

[Ont résolu cette question : MM. V. Barol ; F. Gérard ; A. Meynier ; T. Millet ; A. Poirrier ; A. Pradelet ; G. Sanpité ; X., à Ajaccio.]

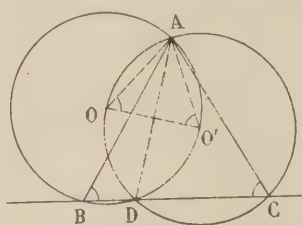
5045. — *Par un sommet* A *d'un triangle équilatéral* ABC *on mène une droite* AD *coupant* BC *en* D *et on considère les deux cercles passant par les trois points* A, B, D *d'une part, par les trois points* A, C, D *d'autre part.*

1° *Démontrer que ces deux cercles sont égaux ;*

2° *Déterminer le point* D *de façon que la longueur de la tangente commune aux deux cercles soit dans un rapport donné* $\frac{1}{m}$ *avec* BD.

(*Bacc. lettres-math., Grenoble, juillet 1900.*)

1° Il suffit de démontrer que $OA = O'A$.



OO' étant perpendiculaire au milieu de la corde commune AD, le demi-angle au centre AOO' est égal à l'angle inscrit ABD, c'est-à-dire à 60° ; de même

$$\widehat{AO'O} = \widehat{ACD} = 60°.$$

Le triangle AOO' ayant ainsi deux angles de 60° est équilatéral, et $AO = AO' = OO'$.

Ce raisonnement subsiste lorsque D est pris sur l'un des prolongements de BC.

2° Posons $BD = x$. La tangente commune aux deux cercles égaux O, O' est égale à OO' ou au rayon commun R des deux cercles puisque AOO' est équilatéral ; la condition énoncée revient donc à

$$\frac{R}{x} = \frac{1}{m} \qquad \text{ou} \qquad R = \frac{x}{m}.$$

Or, dans le triangle ABD, le côté AD est opposé à un angle de 60°, et AD sous-tend dans un cercle de rayon R un arc de 120° ; donc, si a est le côté du triangle équilatéral ABC,

$$3R^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos 60°$$

ou, en remplaçant R par $\frac{x}{m}$ et cos 60° par $\frac{1}{2}$,

$$\frac{3x^2}{m^2} = a^2 + x^2 - ax$$

ou

$$f(x) = (m^2 - 3)x^2 - am^2x + a^2m^2 = 0.$$

Discussion. — Pour qu'il existe un point D entre B et C, il faut et il suffit que l'équation précédente admette une racine réelle positive et inférieure à a

Réalité. — On doit avoir

$$a^2m^4 - 4a^2m^2(m^2 - 3) \geqslant 0$$

ou

$$m^2 < 4$$

ou, puisque m est positif,

$$m < 2.$$

Signe. — Le produit et la somme des racines prennent le signe du coefficient $m^2 - 3$ de x^2. Les racines sont donc de signes contraires lorsque $m < \sqrt{3}$ et toutes deux positives lorsque $m > \sqrt{3}$.

Grandeur. — On a

$$f(a) = a^2(m^2 - 3),$$

résultat de même signe que le coefficient $m^2 - 3$ de x^2. Donc a est extérieur aux deux racines. En comparant à la demi-somme, on a

$$\frac{am^2}{2(m^2-3)} < a \qquad \text{si} \qquad m < \sqrt{3},$$

ou

$$\frac{am^2}{2(m^2-3)} > a \qquad \text{si} \qquad \sqrt{3} < m < 2.$$

Il en résulte que si $m < \sqrt{3}$, la racine positive est inférieure à a et convient. Le problème posé n'admet donc qu'une solution, confondue avec AC pour $m = \sqrt{3}$.

Remarque. — Lorsque $\sqrt{3} < m < 2$, les deux valeurs de x, supérieures à a, fournissent deux points D sur le prolongement de BC.

(Georges GRÜNFELDER, élève au collège de Pont-à-Mousson.)

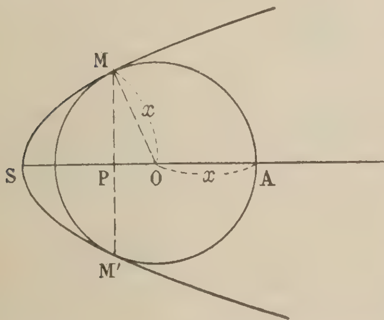
[Ont résolu la même question : MM. A. Bernardeau ; M. Beyney ; M. Briancourt ; Dobryzniak ; E. Durand ; Gasluc de Sénébron ; L. Hostier ; G. Lepoivre ; E. Licope ; T. Millet ; A. Poirrier ; Poujol ; Saisset ; J. Schwarz ; A. Vannier.]

5046. — *Étant donnés une parabole et un point* A *sur son axe, déterminer le rayon d'un cercle dont le centre doit être sur ce même axe et dont la circonférence doit passer par le point* A *et être tangente à la parabole. Dire, suivant la position du point* A, *quel est le nombre de cercles satisfaisant à la question ; examiner le cas où* A *est le foyer*.

(*Bacc. lettres-sciences, Caen, juillet, 1900.*)

Soit O le centre d'un cercle passant par A et tangent en M, M′ à la parabole. Désignons par x la distance $\overline{OA}$, dont la valeur absolue représente le rayon du cercle O, et posons

$$SA = a.$$



Le point M étant sur la parabole, on a la relation connue

$$\overline{MP}^2 = 2p.SP.$$

Mais la sous-normale PO étant égale à p, on a

$$\overline{MP}^2 = x^2 - p^2 \quad \text{et}$$
$$SP = a - PA = a - p - x.$$

Donc

$$x^2 - p^2 = 2p(a - p - x)$$

ou

$$x^2 + 2px + p^2 - 2pa = 0.$$

Discussion. — Pour qu'une valeur de x convienne, il faut et il suffit qu'elle soit réelle et rende SP positif, c'est-à-dire soit inférieure à $a - p$.

La condition de réalité

$$p^2 - (p^2 - 2pa) \geqslant 0$$

ou

$$2pa \geqslant 0$$

est toujours remplie.

En remplaçant x par $a - p$ dans le premier membre de l'équation, on obtient

$$(a-p)^2 + 2p(a-p) + p^2 - 2pa$$

ou

$$a(a - 2p).$$

Si $a > 2p$, ce résultat est de même signe que le coefficient de x^2 ; $a - p$ est extérieur aux racines et supérieur à la plus grande, puisque leur demi-somme est $-p$. Deux solutions.

Si $a < 2p$, $a - p$ sépare les deux racines, et la plus petite convient seule.

Lorsque A est au foyer de la parabole, $a = \frac{p}{2}$; l'équation du problème devient

$$x^2 + 2px = 0,$$

d'où

$$x' = -2p \qquad \text{et} \qquad x'' = 0.$$

La solution $x' = -2p$ convient seule, l'autre étant supérieure à $a - p = -\frac{p}{2}$.

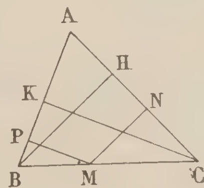
(André BOURLAT, lycée de Périgueux.)

[Ont résolu la même question : MM. G. Allais ; V. Barol ; E. Licope ; T. Millet.]

GÉOMÉTRIE

4528. — *La somme des perpendiculaires abaissées d'un point d'un côté d'un triangle sur les deux autres côtés varie entre les hauteurs correspondant à ces deux derniers. — Cas où le point est sur le prolongement du côté considéré, dans un sens ou dans l'autre.*

1° Soient MN, MP les perpendiculaires abaissées d'un point M de BC sur les côtés AC et AB ; soient BH, CK les hauteurs correspondant à ces côtés. Le double de la surface du triangle peut s'exprimer par



$$2 \text{ Surf. } ABC = AC \times MN + AB \times MP$$
$$= AC \times BH = AB \times CK ;$$

si $AC > AB$, ce qui entraine $BH < CK$,

$$AB(MN + MP) < AC \times MN + AB \times MP < AC(MN + MP)$$

ou

$$AB(MN + MP) < AB \times CK = AC \times BH < AC(MN + MP),$$

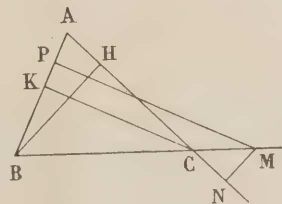
et par suite

$$MN + MP < CK, \qquad BH < MN + MP,$$

ou

$$BH < MN + MP < CK.$$

2° Si le point M est sur le prolongement de BC, du côté de C, on a



$$2 \text{ Surf. } ABC = \text{Surf. } MAB - \text{Surf. } MAC,$$

et par suite

$$AB \times MP - AC \times MN = AC \times BH = AB \times CK.$$

Comme $AB \times MP - AC \times MN < AB(MP - MN)$, on a

$$MP - MN > CK.$$

Si le point M était sur le prolongement de BC, du côté de B, on aurait de même

$$MN - MP < BH.$$

Si on considère MN et MP comme positifs lorsque ces segments sont du sens de BH et CK, et comme négatifs lorsqu'ils sont de sens contraires, on voit que la somme algébrique des perpendiculaires est comprise entre les hauteurs si M est intérieur à BC, et supérieure à la plus grande ou inférieure à la plus petite si M est extérieur à BC.

[Ont résolu complètement cette question : MM. G. Alesandrescu ; A. Amblard ; A. Arcizet ; L. Bayor ; F. Bellec ; C. Billionnet ; L. Bois ; J. Borgey ; G. Canel ; G. Chollet ; Y. Collin ; R. Coural ; E. Croze ; G. Delolme ; E. Foucart ; G. Foucry ; R. Hüe ; H. Janois ; E. Le Maigre ; J. Leveau ; B. Mathé ; R. Mothes ; M. Oger ; J. Pémartin ; M. Petit ; A. Pichon ; P. Plisson ; Le Révérend ; Reymond ; Ribes ; R. Rives ; E. Sautreau ; G. Schoonheere ; L. Tholomier ; A. Thorin ; L. Troïu ; Venet ; F. Vérot ; P. Leverrier ; Vial.

Ont résolu partiellement cette question : MM. R. Bellencourt ; F. Bernard ; H. Bonafé ; E. Bouby ; Cavaillé ; F. Clabault ; Colomer ; E. Delarue ; R. Dickson ; C. Doumere ; Duval ; Famechon ; P. Fouché ; L. Hébrard ; M. Lagarde ; J. Lamotte ; R. Lavallée ; J. Massip ; Poujol ; R. P. ; Rambaud ; J. Sallaud ; J. Tastet.]

TRIGONOMÉTRIE

5057. — *On donne un trièdre trirectangle* OXYZ *et sur* OZ *un point* C *situé à la distance* c *de* O. *Mener par ce point un plan coupant* OX *en* A, OY *en* B *et tel que les angles* CAB, CBA *soient égaux respectivement à deux angles donnés* α, β.

(*Bacc. lettres-math. Clermont, avril 1900.*)

Posons $OA = x$ et $OB = y$. On doit avoir

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Or $\overline{BC}^2 = c^2 + y^2$, $\overline{AC}^2 = c^2 + x^2$, $\overline{AB}^2 = x^2 + y^2$. Donc

$$\frac{c^2+y^2}{\sin^2\alpha} = \frac{c^2+x^2}{\sin^2\beta} = \frac{x^2+y^2}{\sin^2(\alpha+\beta)},$$

ou, en retranchant terme à terme le dernier rapport de la somme des deux premiers,

$$\frac{c^2+y^2}{\sin^2\alpha} = \frac{c^2+x^2}{\sin^2\beta} = \frac{2c^2}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

On tire de là

$$x^2 = c^2\,\frac{-\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2(\alpha+\beta)}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2(\alpha+\beta)},$$

$$y^2 = c^2\,\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta+\sin^2(\alpha+\beta)}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

En se servant des identités

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta),$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta) = \sin^2(\alpha+\beta),$$

on voit qu'on peut écrire

$$x^2 = c^2\,\frac{\sin(\alpha+\beta)[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]}{-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)} = -c^2\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{tg}(\alpha+\beta);$$

on aurait de même

$$y^2 = -c^2\operatorname{cotg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\beta).$$

Pour qu'on ait des valeurs réelles de x et y il faut que $\operatorname{cotg}\alpha$ et $\operatorname{cotg}\beta$ soient de même signe ; or α et β ne pouvant être obtus en même temps l'une des cotangentes est nécessairement positive ; donc elles doivent être toutes deux positives.

Alors $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ doit être négative, ou $\alpha+\beta > 90°$.

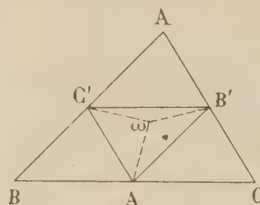
Autrement dit le triangle ABC, qui a pour angles α, β et $180° - \alpha - \beta$, doit avoir tous ses angles aigus.

[Ont résolu cette question : MM. A. Bernardeau ; M. Beyney ; A. Bourlat ; L. Carmillet ; F. Clabault ; L. David ; R. Henry ; F. Mestre ; F. Pégorier.]

MÉCANIQUE

5037. — *Établir les relations qui doivent exister entre les angles d'un triangle et les intensités de trois forces parallèles, de même sens et appliquées respectivement aux trois sommets, pour que le centre de ces forces coïncide avec le centre du cercle d'Euler relatif au triangle.*

Construisons le triangle A'B'C' qui a pour sommets les milieux des côtés du triangle ABC.



Le *cercle des neuf points* relatif à ABC est le cercle circonscrit à A'B'C' ; soit ω son centre.

Appliquons en ω un poids P. Il s'agit de trouver ses composantes α, β, γ aux sommets de ABC.

Si α', β', γ' sont des composantes aux sommets de A'B'C', nous aurons

$$\alpha = \frac{1}{2}(\beta'+\gamma'), \qquad \beta = \frac{1}{2}(\gamma'+\alpha'), \qquad \gamma = \frac{1}{2}(\alpha'+\beta'). \quad (1)$$

Évaluons donc α', β', γ' ; nous avons à cet effet, d'après un théorème d'Euler,

$$\frac{\alpha'}{\text{aire } B'\omega C'} = \frac{\beta'}{\text{aire } C'\omega A'} = \frac{\gamma'}{\text{aire } A'\omega B'}$$

ou, après réductions,

$$\frac{\alpha'}{\sin\widehat{C'\omega B'}} = \frac{\beta'}{\sin\widehat{A'\omega C'}} = \frac{\gamma'}{\sin\widehat{B'\omega A'}},$$

ou encore

$$\frac{\alpha'}{\sin 2A} = \frac{\beta'}{\sin 2B} = \frac{\gamma'}{\sin 2C}.$$

En se reportant aux égalités (1), on voit que les poids cherchés α, β, γ sont proportionnels aux binomes

$$\sin 2B + \sin 2C, \qquad \sin 2C + \sin 2A, \qquad \sin 2A + \sin 2B.$$

[Ont résolu cette question : MM. M. Beyney ; E. Foucart ; Ch. Vallot.]

PHYSIQUE

5058. — *On prend la densité d'un liquide par la méthode du flacon et on trouve* 1,345. *La température est* 18° *et la pression atmosphérique* 754mm. *Calculer la valeur qu'on aurait trouvée en opérant dans le vide, sachant que les poids employés ont la densité* 7.

(*Bacc. lettres-math., Lyon, juillet 1900.*)

Soit D_0 la densité du liquide à 0° quand on opère dans le vide.

Dans la première opération (détermination de la masse M d'un certain volume du liquide), les masses marquées M font équilibre à un certain volume V_0 du liquide. On a alors

$$V_0D_0 - V_0a = M - \frac{M}{d}a,$$

a étant la masse du centimètre cube d'air dans les conditions de l'expérience, et d la densité des masses marquées.

Dans la seconde opération (détermination de la masse M' du même volume d'eau), les masses M' font équilibre à un volume d'eau égal à V_0 et l'on a, en appelant e_0 la masse du centimètre cube d'eau à 0°,

$$V_0e_0 - V_0a = M' - \frac{M'}{d}a.$$

Divisant membre à membre les deux équations, il vient

$$\frac{D_0 - a}{e_0 - a} = \frac{M}{M'},$$

d'où $$D_0 = \frac{M}{M'} e_0 - \left(\frac{M}{M'} - 1\right) a.$$

Mais $$\frac{M}{M'} = 1{,}345, \qquad e_0 = 0{,}999$$

et $$a = 0{,}001\,293 \times \frac{754}{760} \times \frac{1}{1 + \frac{18}{273}} = 0{,}0012\ ;$$

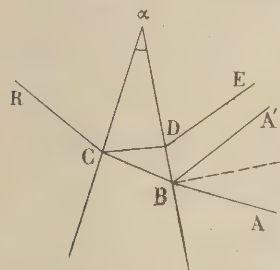
donc $$D_0 = 1{,}345 \times 0{,}999 - (1{,}345 - 1)0{,}0012,$$

d'où l'on tire $$D_0 = 1{,}343\,24.$$

(L. DAVID, à Saint-Etienne.)

[Ont résolu la même question : MM. A. Bernardeau ; M. Beyney.]

5059. — *Un rayon lumineux tombe sous l'angle d'incidence i sur un prisme d'angle α, les angles i et α étant assez petits pour que les différences $i - \sin i$, $\alpha - \sin \alpha$ soient négligeables. Soient* BC *et* CR *les trajets intérieur et émergent de ce rayon.*



1° *Calculer la déviation du rayon, c'est-à-dire l'angle Δ des directions* AB *et* CR.

2° *Figurer le trajet* CDE *de la partie du rayon* BC *qui se réfléchit en* C *et émerge suivant* DE. *Calculer l'angle Δ' que fait* DE *avec la partie de* BA *qui se réfléchit en* B *suivant* BA'.

3° *Sachant que le rapport* $\frac{\Delta'}{\Delta} = 5$, *calculer l'indice du prisme.*

(*Bacc. lettres-math., Oran, juillet 1900.*)

1° Puisque les différences $i - \sin i$, $\alpha - \sin \alpha$ sont négligeables, on peut prendre i pour $\sin i$, r pour $\sin r$, et les deux premières équations du prisme deviennent $i = nr$ et $i' = nr'$.

On en tire
$$i + i' = n(r + r') = n\alpha,$$
et, par suite, la déviation a pour valeur
$$\Delta = i + i' - \alpha = \alpha(n - 1).$$

2° La partie du rayon BC qui se réfléchit en C, prend une direction CD qui fait avec la normale en C un angle égal à r'. D'un autre côté, le rayon DE fait avec la normale en D un angle i'' tel que $i'' = nr''$, en admettant toujours que l'on peut prendre i'' pour $\sin i''$, r'' pour $\sin r''$.

Calculons r''. On a
$$r'' = 90 - [180 - (\widehat{CBD} + \widehat{BCD})].$$
Or $$\widehat{CBD} = 90 + r, \qquad \widehat{BCD} = 2r'\ ;$$
donc $$r'' = 90 - [90 - (\alpha + r')] = \alpha + r'$$
et $$i'' = n(\alpha + r').$$

Calculons maintenant Δ'.
$$\Delta' = 180 - (\widehat{BDO} + \widehat{OBD}).$$
Or $$\widehat{BDO} = 90 - i'', \quad \widehat{OBD} = 90 - i\ ;$$
donc $$\Delta' = i + i'' = nr + n(\alpha + r') = 2n\alpha.$$

3° Le rapport $$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{2n\alpha}{\alpha(n-1)} = \frac{2n}{n-1}.$$

Ce rapport étant égal à 5, on a
$$n = \frac{5}{3}.$$

(MESTRE, à Saint-Bonnet-le-Chastel.)

[M. A. Bernardeau a résolu la même question.]

CONCOURS DE 1901 (*Suite*).

Les sujets de concours de l'école nationale des Beaux-Arts, page 168, sont relatifs au concours de *1901* et non celui de 1900.

INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

Mathématiques.

I. — Une pyramide a pour base un hexagone régulier de 1^m de côté, et sa hauteur vaut 4^m. Calculer, à un décimètre carré près, la surface de la section faite dans cette pyramide par un plan passant par son centre de gravité et parallèle à sa base.

II. — **5072**. — Trouver entre quelles limites doit être compris le paramètre m pour que l'équation
$$(m+1)x^2 - 2mx - 3m + 4 = 0$$
ait deux racines comprises entre -1 et $+1$.

(*10 juin. — Durée : 3 heures.*)

Physique et chimie.

I. — Principe de la machine à vapeur ; détente.

II. — Quelle est, en volts, la force électromotrice nécessaire pour entretenir un courant de 12^{amp} dans un conducteur dont la résistance est de 5^{ohms} ?

III. — Synthèse de l'eau au moyen de l'oxyde de cuivre.

(*10 juin. — Durée : 3 heures.*)

Sciences naturelles.

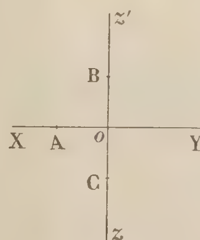
I. — *Zoologie.* — Les veines et l'appareil veineux chez les vertébrés structure, disposition anatomique, fonctions.

II. — *Botanique.* — Exposer les caractères dont on s'est servi pour diviser les végétaux en embranchements, les Phanérogames en Gymnospermes et en Angiospermes, et les Angiospermes en Monocotylédones et en Dicotylédones.

(*10 juin. — Durée : 3 heures.*)

Épure.

5073. — La ligne de terre XY est le petit axe de la feuille (après suppression de l'en-tête) ; zz' en est le grand axe. Les points o, A, B, C sont situés comme l'indique le croquis, les distances oA, oB, oC, étant égales à 10^{cm}. La droite AC est la trace horizontale d'un plan P dont la partie supérieure fait, avec le demi-plan horizontal qui contient le point o, un angle de 60° ; c'est aussi la trace horizontale de deux plans P' et P'', dont les parties supérieures font, avec le demi-plan horizontal, des angles respectivement égaux à 45° et 75°. Le point du plan P qui se projette horizontalement au milieu de BC, est le centre d'un carré situé dans le plan P, ayant une diagonale horizontale égale à 10^{cm}. Ce carré est la base commune de deux pyramides régulières ayant chacune 5^{cm} de hauteur.



On demande de représenter par ses deux projections la partie de l'octaèdre

ainsi formé qui est comprise entre les deux plans P′ et P″. On distinguera les parties vues et cachées comme d'habitude.

(*10 juin. — Durée : 3 heures.*)

CONCOURS GÉNÉRAUX

Classe de Mathématiques élémentaires.

Physique et Chimie (Paris).

I. — Courants d'induction.

II. — Les trois carbures d'hydrogène fondamentaux. Préparation. Propriétés.

Classe de Première-Sciences.

Mathématiques (Paris et départements).

5074. — Une roue, homogène, de rayon R, de poids p, placée dans un plan vertical, repose sur un sol horizontal XY. Elle roule ou glisse, suivant le cas, sur le sol; mais son glissement s'accompagne d'un frottement qui a pour coefficient f.

Un levier horizontal, de poids q, articulé en O et dont le centre de gravité A est à la distance $OA = l$ du point O, s'appuie sur la roue. La roue peut, suivant le cas, rouler ou bien glisser sur le levier, mais le glissement s'accompagne d'un frottement qui a pour coefficient f_1, en général différent de f.

En un point M de la roue, situé sur la verticale du centre, à la distance d de ce centre, au-dessus ou au-dessous, on applique à la roue un effort de traction horizontal T.

1° On demande quelle limite ne doit pas dépasser T pour que la roue reste en équilibre.

2° On fait croître T jusqu'à ce que l'équilibre soit rompu. Comment le sera-t-il? La roue roulera-t-elle sur le sol ou bien sur le levier? ou bien, au contraire, glissera-t-elle à la fois sur le sol et sur le levier? Discuter ces cas.

Application numérique. — La roue touche le levier au point A ; on a : $R = 1^m$, $d = 0^m,05$, $l = 2^m$, $p = 10^{kil}$, $q = 15^{kil}$, $T = 12^{kil}$, $f = \frac{1}{3}$, $f_1 = \frac{1}{2}$.

Classe de Seconde moderne.

Mathématiques (Paris et départements).

5075. — 1° Soit un cube dont deux faces parallèles sont ABCD et A′B′C′D′ ; on considère le plan P passant par la diagonale AD′ de la face ADA′D′ et faisant l'angle de 30° avec le plan de cette face. Calculer le rapport des deux parties du volume du cube séparées par le plan P.

2° Déterminer la tangente de l'angle x que doit faire le plan P avec le plan ADA′D′ de façon que le rapport des volumes des deux parties du cube séparées par le plan P ait la valeur donnée $\frac{m}{n}$.

3° Discuter et écrire la solution convenable.

4° Tracer la projection du cube sur le plan P, sachant que ce plan, qui passe par AD′, coupe l'arête BB′, entre B et B′, en un point E tel que EB′ est le tiers de BB′. On établira la ponctuation de cette projection en supposant le sommet A′ vu, les faces du cube étant opaques.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques élémentaires.

5076. — Étant donnés un cercle fixe O, une droite fixe D, tangente à ce cercle, et une droite fixe Δ, parallèle à D, située du même côté de D que le cercle O, et ne coupant pas ce cercle, on mène d'un point A de Δ les deux tangentes au cercle O, qui coupent la droite D en B et C.

Le point A décrivant la droite Δ, on demande :

1° De trouver le lieu géométrique du point M de rencontre de la bissectrice intérieure de l'angle A du triangle ABC avec le cercle circonscrit à ce triangle ;

2° De trouver l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle ABC ;

3° De trouver l'enveloppe du cercle passant par les milieux des côtés du triangle ABC;

4° De calculer les longueurs des trois côtés du triangle ABC connaissant la somme l des longueurs des deux médianes issues des sommets B et C.

N. B. — On désignera par r le rayon du cercle O et par h la distance des deux droites parallèles D et Δ.

(*1er juillet, de 7 h. à 2 h.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

5077. — La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre de trois chiffres dans lequel la somme des valeurs absolues des chiffres est un multiple de 7, soit divisible par 7, est que le chiffre des dizaines et le chiffre des unités diffèrent de 7 ou soient les mêmes.

(P. Tribier.)

5078. — Démontrer que si $3^n + 1$ est multiple de 10, le nombre $3^{n+4} + 1$ est aussi multiple de 10.

(Coudrais, école normale de Saint-Brieuc.)

5079. — Trouver le reste de la division par 13 de l'expression

$$3012^{93} \times 163\,034^{39} \times 4^{67}.$$

(E. Mercier, lycée de Montluçon.)

5080. — Trouver une progression arithmétique dans laquelle la somme des n premiers termes soit égale, quel que soit n, à $n(an + b)$, a et b étant deux nombres donnés.

(Gasluc de Sénébron, à Hesbru.)

5081. — Si x, y, z sont trois nombres positifs tels que

$$x + y + z = a,$$

on a

$$\left(\frac{a}{3}\right)^3 > (a - 2x)(a - 2y)(a - 2z).$$

(J.-F. d'Avillez.)

5082. — Déterminer A et B de façon que

$$x^6 + Ax^5 + (2A + 1)x^4 + Bx^3 + (2A + 1)x^2 + Ax + 1$$

soit divisible par une puissance de $x + 1$ d'ordre aussi élevé que possible ; trouver cet ordre.

5083. — Trouver les trois plus petits nombres entiers consécutifs dont la somme est à la fois un carré et un cube.

5084. — Résoudre et discuter le système d'équations simultanées à deux inconnues x et y :

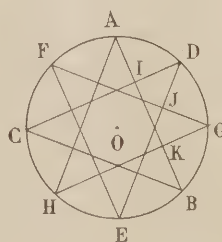
$$(4t^2 + t + 4)x + (5t + 1)y = 4t^2 - t - 3,$$
$$(t + 2)x + 2y = t,$$

où t représente un nombre donné susceptible de prendre toutes les valeurs réelles.

(*Bacc. lettres-math., Toulouse, mars 1901.*)

5085. — On considère un cône droit à base circulaire et l'on propose de trouver quelle quantité peut être ajoutée au rayon et retranchée de la hauteur, le volume conservant la même valeur.

(Beckerich, à Montmirail.)



5086. — On donne un octogone régulier étoilé ABC... inscrit dans un cercle O, de rayon R.

On fait passer un cercle par les points I, J, K, ... Calculer en fonction de R la surface de la couronne comprise entre les deux cercles.

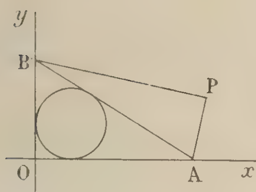
(P. Veresco, lycée Charles Ier, à Craïova.)

5087. — Du sommet de l'angle droit B d'un triangle ABC, on abaisse sur l'hypoténuse la perpendiculaire BD. Du point A comme centre on trace un cercle de rayon AB. Montrer que la droite qui joint un point arbitraire K de ce cercle au point D est perpendiculaire au

diamètre passant par le point A du cercle circonscrit au triangle AKC.

5088. — Construire un triangle connaissant les pieds d'une médiane, d'une bissectrice et d'une hauteur issues d'un même sommet et le rayon du cercle circonscrit.

5089. — Par un point pris à l'intérieur d'un triangle, lancer une bille de manière qu'après s'être réfléchie sur les trois côtés du triangle, elle revienne au point où elle a touché le premier côté.



5090. — Etant donnée une circonférence inscrite dans un angle droit xOy, mener à cette circonférence une tangente AB qui soit vue d'un point donné P sous un angle droit.

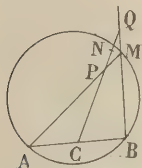
(C. Durand, collège de Barbezieux.)

5091. — Construire un carré connaissant les distances de trois sommets à un même point.

5092. — Etant donnés trois cercles O_1, O_2, O_3, construire un cercle O tel que l'axe radical de O et O_1 passe par un point A_1, l'axe radical de O et O_2 par un point A_2, l'axe radical de O et O_3 par un point A_3.

5093. — Etant donnés trois cercles passant par un même point P, mener par ce point une sécante telle que le point P soit avec le point de rencontre avec l'un des trois cercles, fixé d'avance, conjugué harmonique par rapport aux deux autres points.

(M. Rebeix, lycée Louis-le-Grand.)



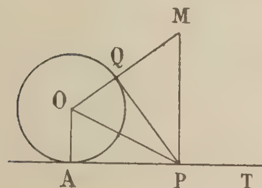
5094. — Etant donnés un cercle et une corde AB, on joint un point variable de la circonférence aux points A et B. On considère une droite issue du milieu C de AB et qui détermine sur les droites AM et BM deux longueurs égales MP et MQ.

Lieux du milieu N de PQ et de chacun des points P et Q.

(H. Fricquegnon, à Vigneulles.)

5095. — Par un point M pris sur un cercle on mène des cordes MA, MB parallèles à des directions fixes. Trouver le lieu du centre du cercle inscrit dans le triangle MAB quand M décrit le cercle.

5096. — Etant données une circonférence de centre O et la tangente AT en un point A de cette circonférence, on mène la tangente en un point variable Q de la circonférence et on désigne par P le point où cette tangente variable rencontre AT.



Soit M le point où le rayon OQ prolongé rencontre la perpendiculaire menée par P à la droite AT.

1° Démontrer que les angles MOP et MPO sont égaux.

2° Le lieu du point M est une parabole ayant pour foyer O et pour directrice AT, et la tangente en M à cette parabole est perpendiculaire à la droite OP.

3° Déterminer la sous-normale correspondant au point M et vérifier qu'elle est égale à OA.

Nota. — On remarquera que OA est l'axe de la parabole.

(*Bacc. lettres-sciences, Nancy, avril 1901.*)

5097. — On considère les triangles inscrits dans un cercle et ayant un sommet commun h, r et R désignant respectivement la hauteur issue de ce sommet et les rayons des cercles inscrit et circonscrit, trouver le lieu du centre du cercle inscrit dans les cas suivants :

1° $h = 3r$; 2° $R = h + r$.

(A.-D., au Val-de-Grâce.)

5098. — Etant donnés un cercle O et un point fixe P sur ce cercle, on fait pivoter autour de ce point comme sommet un angle constant. Sur les côtés PA, PB de cet angle limités à la circonférence on construit le parallélogramme PAP'B.

1° Démontrer que l'orthocentre du triangle P'AB est fixe.
2° Lieu de l'orthocentre du triangle PAB.
3° Lieu du point P'.
4° Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle P'AB.

(Duvergé et Sainte-Laguë, lycée de Bordeaux.)

5099. — Dans un triangle donné AOB on prend sur OA, entre O et A, un point quelconque M, puis sur OB, entre O et B, un point N tel que

$$OM . ON = AM . BN.$$

1° Lieu du centre de gravité du triangle OMN.
2° Lieu du centre du cercle circonscrit.
3° Enveloppe de la droite MN.
4° Lieu de l'orthocentre du triangle OMN.

(L. Ollié, à Auch.)

5100. — Par un point F pris à l'intérieur d'un angle yOx on trace une droite MN rencontrant Ox en M et Oy en N. On circonscrit un cercle au triangle OMN, et en prenant O pour origine et $\overline{OF}^2$ comme puissance d'inversion on construit la droite Δ figure inverse du cercle OMN.

1° Trouver et construire l'enveloppe de la droite Δ quand MN tourne autour du point F.

2° Si P et Q sont les points de rencontre de Δ avec Ox et Oy, quel est le lieu du point de rencontre des perpendiculaires à Ox et Oy en P et Q ?

3° Lieu des points du plan par où passent deux droites Δ formant un angle égal à l'angle yOx ?

(V. H.)

5101. — Un triangle ABC a le côté BC fixe et l'angle opposé A constant. Soient D et E les milieux des autres côtés AB et AC.

1° Démontrer que les hauteurs DD' et EE' du triangle ADE passent par des points fixes lorsque le point A varie.

2° Trouver le lieu du centre du cercle inscrit au triangle ADE. (Ce lieu n'est pas une conique.)

(Trajan Lalescu, lycée internat de Jassy.)

5102. — On donne, dans un plan fixe (P), un point O. Un plan (Π) glisse sur le plan (P) suivant la loi ainsi définie : une droite (D) de ce plan passe constamment par le point O et sa vitesse de glissement suivant sa direction est proportionnelle à sa vitesse de rotation autour de O.

1° Construire la base et la roulante.
2° Quel est le déplacement du plan (P) relativement au plan (Π) ?

5103. — Un double pendule électrique isolé est formé de deux petites balles conductrices de même diamètre dont l'une est fixe, l'autre mobile. Celle-ci est fixée à un fil de longueur l. Les deux balles étant en contact, on les réunit au pôle positif d'une pile dont l'autre pôle est au sol ; elles s'électrisent et la balle mobile s'écarte d'un angle α de la balle fixe. Connaissant la masse m, le rayon R de cette balle, calculer :

1° Sa charge ;
2° Le potentiel du pôle positif de la pile.

Application : $m = 0^{gr},098$, $l = 10^{cm}$, $R = 1^{cm}$, $\alpha = 60°$, $g = 980$ C.G.S.

Combien faudrait-il d'accumulateurs de force électromotrice égale à $2^{volts},5$ pour produire l'écart indiqué ?

(*Bacc. lettres-sciences, Alger, juillet 1900.*)

5104. — Le courant d'une pile constante est de 10^{amp} quand il traverse un circuit extérieur de 10^{ohms}, de 8^{amp} avec une résistance extérieure de 20^{ohms} et de 9^{amp} à travers un fil de résistance inconnue. Trouver la résistance R de la pile et la résistance x du fil.

(*Bacc. lettres-sciences, Lille, juillet 1901.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

TABLE DES MATIÈRES

Année 1900-1901

NOTES

Pages.

Numéros des questions

ARITHMÉTIQUE

ALGÈBRE

Numéros des questions — Pages

GÉOMÉTRIE

Lieux géométriques.

TRIGONOMÉTRIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

MÉCANIQUE

PHYSIQUE

Problèmes sur la pesanteur et sur l'élasticité des corps.

Problèmes sur la chaleur.

Problèmes sur l'électricité.

Problèmes sur l'acoustique et l'optique.

CHIMIE

EXAMENS ET CONCOURS

CONCOURS GÉNÉRAUX

ÉCOLES

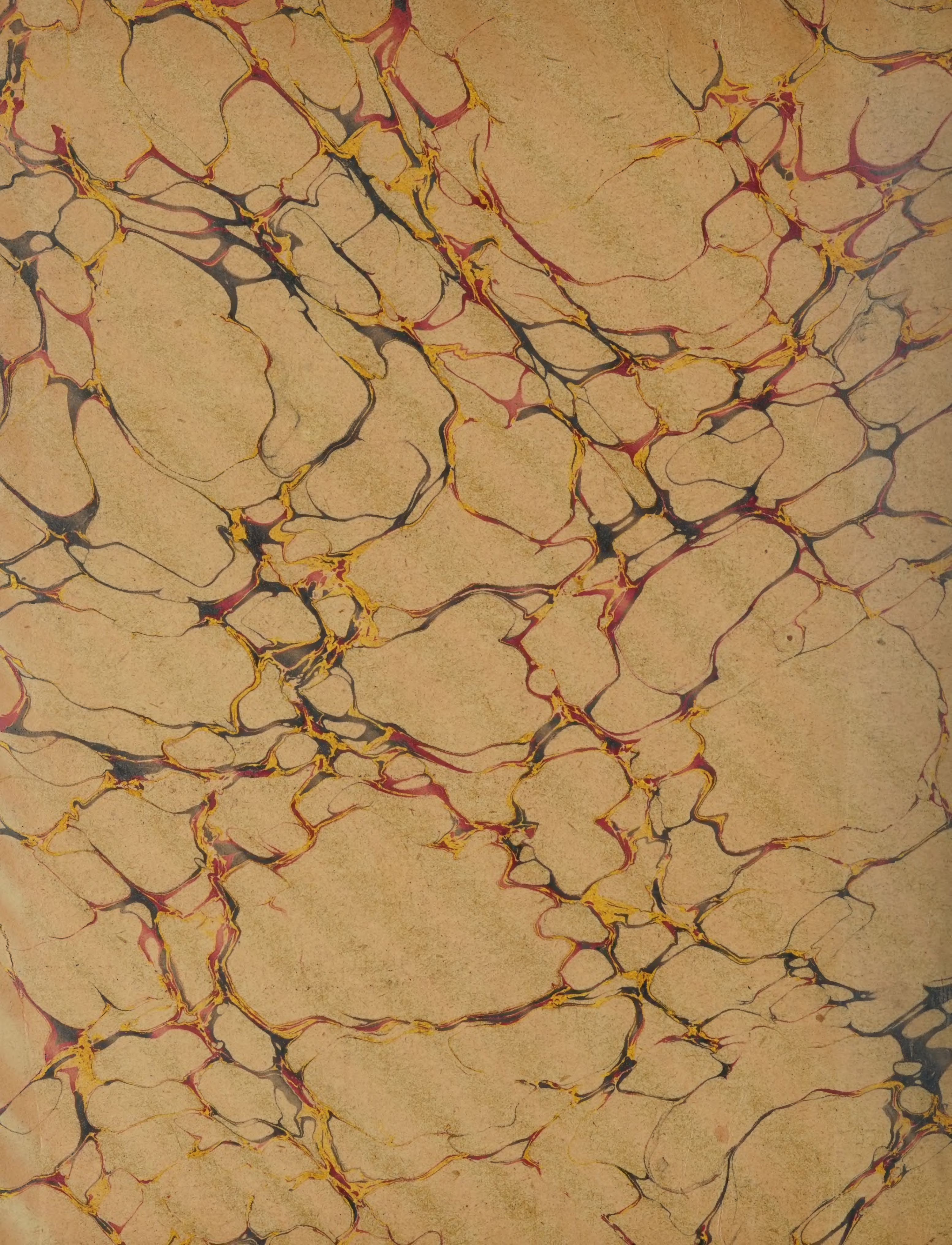
ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES

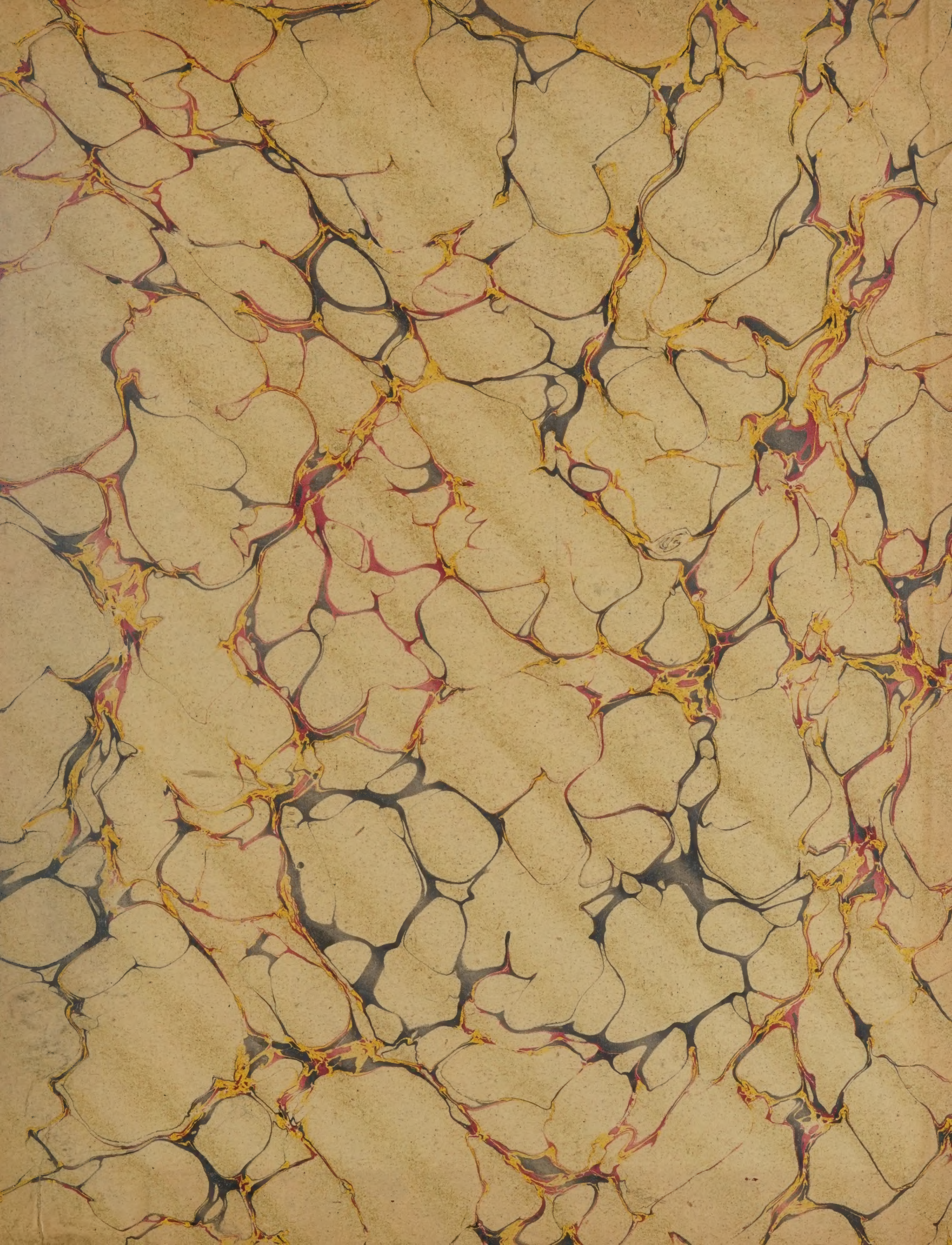
ENSEIGNEMENT PRIMAIRE

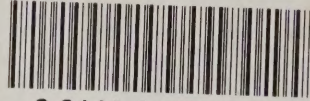
DIVERS

BACCALAURÉATS

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet, FACDOUEL, Dir.






UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 018275609